Física

para la ciencia y la tecnología

Tipler | Mosca

6ª edición

Volumen 1

Mecánica/Oscilaciones y ondas/
Termodinámica

EDITORIAL REVERTÉ

Abreviaturas de unidades

A	ampère	H	henry	nm	nanómetro (10^{-9} m)
Å	ángstrom (10^{-10} m)	h	hora	pt	pinta
atm	atmósfera	Hz	hertz	qt	quart
Btu	unidad térmica inglesa	in	pulgada	rev	revolución
Bq	becquerel	J	joule	R	roentgen
C	coulomb	K	kelvin	Sv	sievert
°C	grados centígrados	kg	kilogramo	s	segundo
cal	caloría	km	kilómetro	T	tesla
Ci	curie	keV	kilo-electronvolt	u	unidad de masa unificada
cm	centímetro	lb	libra	V	volt
dyn	dina	L	litro	W	watt
eV	electronvolt	m	metro	Wb	weber
°F	grados Fahrenheit	MeV	mega-electronvolt	y	año
fm	femtometro, fermi (10^{-15} m)	Mm	megametro (10^{6} m)	yd	yarda
ft	pie	mi	milla	μm	micrometro (10^{-6} m)
Gm	gigametro (10^{9} m)	min	minuto	μs	microsegundo
G	gauss	mm	milímetro	μC	microcoulomb
Gy	gray	ms	milisegundo	Ω	ohm
g	gramo	N	newton		

Factores de conversión

Longitud

1 m = 39,37 in = 3,281 ft = 1,094 yd
1 m = 10^{15} fm = 10^{10} Å = 10^{9} nm
1 km = 0,6214 mi
1 mi = 5280 ft = 1,609 km
1 año-luz= 1 $c \cdot$ a = $9{,}461 \times 10^{15}$ m
1 in = 2,540 cm

Volumen

1 L = 10^{3} cm^3 = 10^{-3} m^3 = 1,057 qt

Tiempo

1 h = 3600 s = 3,6 ks
1 a = 365,24 d = $3{,}156 \times 10^{7}$ s

Velocidad

1 km/h = 0,278 m/s = 0,6214 mi/h
1 ft/s = 0,3048 m/s = 0,6818 mi/h

Ángulo y velocidad angular

1 rev = 2π rad = 360°
1 rad = 57,30°
1 rev/min = 0,1047 rad/s

Fuerza–presión

1 N = 10^{5} dina = 0,2248 lb
1 lb = 4,448 N
1 atm = 101,3 kPa = 1,013 bar = 76,00 cmHg = 14,70 lb/in^2

Masa

1 u = $[(10^{-3}\ \text{mol}^{-1})/N_A]$ kg = $1{,}661 \times 10^{-27}$ kg
1 tonelada = 10^{3} kg = 1 Mg
1 slug = 14,59 kg
1 kg ≈ 2,205 lb

Energía–Potencia

1 J = 10^{7} erg = 0,7376 ft · lb = $9{,}869 \times 10^{-3}$ atm · L
1 kW · h = 3,6 MJ
1 cal = 4,184 J = $4{,}129 \times 10^{-2}$ atm · L
1 atm · L = 101,325 J = 24,22 cal
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1054 J
1 caballo de vapor = 550 ft · lb/s = 746 W

Conductividad térmica

1 W/(m · K) = 6,938 Btu · in/(h · ft^2 · °F)

Campo magnético

1 T = 10^{4} G

Viscosidad

1 Pa · s = 10 poise

SEXTA EDICIÓN

FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

VOLUMEN 1

Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica

SEXTA EDICIÓN

FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

VOLUMEN 1

Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica

Paul A. Tipler
Gene Mosca

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • México

Título de la obra original:

Physics for Scientists and Engineers, Sixth Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por

W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke
41 Madison Avenue, New York (NY) – U.S.A.

Copyright © 2008 by W. H. Freeman and Company. All Rights Reserved

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A.

Edición en papel

ISBN: 978-84-291-4429-1 Volumen 1
ISBN: 978-84-291-4428-4 Obra completa

Edición e-book (PDF)

ISBN: 978-84-291-9596-5

Versión española:

COORDINADOR Y TRADUCTOR

Dr. José Casas-Vázquez
Catedrático de Física de la Materia Condensada

TRADUCTORES

Dr. Albert Bramon Planas
Catedrático de Física Teórica

Dr. Josep Enric Llebot Rabagliati
Catedrático de Física de la Materia Condensada

Dr. Fernando M. López Aguilar
Catedrático de Física Aplicada

Dr. Vicenç Méndez López
Profesor Agregado de Física de la Materia Condensada

Departamento de Física
Universidad Autónoma de Barcelona
España

MAQUETACIÓN: REVERTÉ-AGUILAR
CORRECCIÓN DE ESTILO: CARLOS CISTUÉ SOLÁ

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
08029 Barcelona. ESPAÑA
reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

1335

PT: Para Claudia

GM: Para Vivian

Índice abreviado de la obra completa

VOLUMEN 1

Volumen 1A

Thinkstock/Alamy

PARTE I MECÁNICA

1 Medida y vectores / 1
2 El movimiento en una dimensión / 27
3 Movimiento en dos y tres dimensiones / 63
4 Leyes de Newton / 93
5 Aplicaciones adicionales de las leyes de Newton / 127
6 Trabajo y energía cinética / 173
7 Conservación de la energía / 201
8 Conservación del momento lineal / 247
9 Rotación / 289
10 Momento angular / 331
11 Gravedad / 363
12 Equilibrio estático y elasticidad / 397
13 Fluidos / 423

Volumen 1B

PARTE II OSCILACIONES Y ONDAS

14 Oscilaciones / 457
15 Movimiento ondulatorio / 495
16 Superposición y ondas estacionarias / 533

Volumen 1C

PARTE III TERMODINÁMICA

17 Temperatura y teoría cinética de los gases / 563
18 Calor y primer principio de la termodinámica / 591
19 Segundo principio de la termodinámica / 629
20 Propiedades y procesos térmicos / 665
R Relatividad especial / R.1

VOLUMEN 2

Volumen 2A

PARTE IV ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

21 Campo eléctrico I: distribuciones discretas de carga / 693
22 Campo eléctrico II: distribuciones continuas de carga / 727
23 Potencial eléctrico / 763
24 Capacidad / 801
25 Corriente eléctrica y circuitos de corriente continua / 839
26 El campo magnético / 887
27 Fuentes del campo magnético / 917
28 Inducción magnética / 959
29 Circuitos de corriente alterna / 995
30 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas / 1029

Volumen 2B

PARTE V LUZ

31 Propiedades de la luz / 1055
32 Imágenes ópticas / 1097
33 Interferencia y difracción / 1141

FÍSICA MODERNA

PARTE VI MECÁNICA CUÁNTICA, RELATIVIDAD Y ESTRUCTURA DE LA MATERIA

34 Dualidad onda-partícula y física cuántica / 1173
35 Aplicaciones de la ecuación de Schrödinger / 1203
36 Átomos / 1227
37 Moléculas / 1261
38 Sólidos / 1281
39 Relatividad / 1319
40 Física nuclear / 1357
41 Las partículas elementales y el origen del universo / 1389

APÉNDICES Y RESPUESTAS

Apéndice A Unidades SI y factores de conversión / AP.1
Apéndice B Datos numéricos / AP.3
Apéndice C Tabla periódica de los elementos / AP.6
Apéndice de matemáticas / M.1
Respuestas de los problemas impares del final de los capítulos / A.1

Índice analítico

Volumen 1

Prefacio xiii
Acerca de los autores xxii

* Materias opcionales

PARTE I MECÁNICA

Capítulo 1
MEDIDA Y VECTORES / 1

1.1 La naturaleza de la física 2
1.2 Unidades 3
1.3 Conversión de unidades 6
1.4 Dimensiones de las magnitudes físicas 7
1.5 Cifras significativas y órdenes de magnitud 8
1.6 Vectores 14
1.7 Propiedades generales de los vectores 14

Temas de actualidad en Física:
El año 2005: bisiesto por un segundo / 21

Resumen 22
Problemas 23

Capítulo 2
EL MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN / 27

2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad 28
2.2 Aceleración 35
2.3 Movimiento con aceleración constante 37
2.4 Integración 47

Temas de actualidad en Física:
Aceleradores lineales / 51

Resumen 52
Problemas 53

Capítulo 3
MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES / 63

3.1 Desplazamiento, velocidad y aceleración 64
3.2 Primer caso particular: movimiento de proyectiles 71
3.3 Segundo caso particular: movimiento circular 78

Temas de actualidad en Física:
GPS: cálculo de vectores mientras se desplaza / 82

Resumen 83
Problemas 84

Capítulo 4
LEYES DE NEWTON / 93

4.1 Primera ley de Newton: ley de la inercia 94
4.2 Fuerza y masa 95
4.3 Segunda ley de Newton 97
4.4 Fuerza debida a la gravedad: el peso 99
4.5 Fuerza de contacto: sólidos, muelles y cuerdas 101
4.6 Resolución de problemas: diagramas de fuerzas de sistemas aislados 104
4.7 Tercera ley de Newton 109
4.8 Problemas con dos o más objetos 111

Temas de actualidad en Física:

Montañas rusas y el gusto por la velocidad / 114

Resumen 115
Problemas 116

Capítulo 5
APLICACIONES ADICIONALES DE LAS LEYES DE NEWTON / 127

5.1 Rozamiento 128
5.2 Fuerzas de arrastre 139
5.3 Movimiento a lo largo de una trayectoria curva 141
*5.4 Integración numérica: el método de Euler 147
5.5 El centro de masas 149

Temas de actualidad en Física:

Reconstrucción de accidentes—Medidas y Fuerzas / 158

Resumen 159
Problemas 160

Gentileza de Rossignol Ski Company

Capítulo 6
TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA / 173

6.1 Trabajo realizado por una fuerza constante 174
6.2 Trabajo realizado por una fuerza variable. Movimiento rectilíneo 179
6.3 El producto escalar 182
6.4 Teorema del trabajo—energía cinética. Trayectorias curvilíneas 188
*6.5 Trabajo del centro de masas 190

Temas de actualidad en Física:

Montañas rusas, equipajes y trabajo (¡Dios mío!) / 193

Resumen 194
Problemas 195

Capítulo 7
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA / 201

7.1 Energía potencial 202
7.2 Conservación de la energía mecánica 209
7.3 Conservación de la energía 219
7.4 Masa y energía 228
7.5 Cuantización de la energía 231

Temas de actualidad en Física:

Soplando aire cálido / 233

Resumen 234
Problemas 236

Capítulo 8
CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL / 247

8.1 Conservación del momento lineal 248
8.2 Energía cinética de un sistema 254
8.3 Colisiones 255
*8.4 Colisiones en el sistema de referencia del centro de masas 271
8.5 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes 273

Temas de actualidad en Física:

Motores de detonación por pulsos: más rápidos (y más fuertes) / 277

Resumen 278
Problemas 279

Capítulo 9
ROTACIÓN / 289

9.1 Cinemática de la rotación: velocidad angular y aceleración angular 290
9.2 Energía cinética de rotación 292
9.3 Cálculo del momento de inercia 294
9.4 La segunda ley de Newton en la rotación 301
9.5 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación 303
9.6 Objetos rodantes 310

Temas de actualidad en Física:

Ultracentrifugadoras / 316

Resumen 317
Problemas 318

Capítulo 10
MOMENTO ANGULAR / 331

10.1 Naturaleza vectorial de la rotación 332
10.2 Momento de una fuerza y momento angular 334
10.3 Conservación del momento angular 341
*10.4 Cuantización del momento angular 350

Temas de actualidad en Física:
El momento angular atmosférico / 353

Resumen 354
Problemas 355

Capítulo 11
GRAVEDAD / 363

11.1 Leyes de Kepler 364
11.2 Ley de la gravitación de Newton 367
11.3 Energía potencial gravitatoria 374
11.4 El campo gravitatorio 378
*11.5 Cálculo del campo gravitatorio de una corteza esférica por integración 384

Temas de actualidad en Física:
Lentes gravitacionales: una ventana abierta al universo / 386

Resumen 387
Problemas 388

Capítulo 12
EQUILIBRIO ESTÁTICO Y ELASTICIDAD / 397

12.1 Condiciones de equilibrio 398
12.2 Centro de gravedad 398
12.3 Ejemplos de equilibrio estático 399
12.4 Equilibrio estático en un sistema acelerado 406
12.5 Estabilidad del equilibrio de rotación 407
12.6 Problemas indeterminados 408
12.7 Tensión y deformación 409

Temas de actualidad en Física:
Nanotubos de carbono: pequeños y fuertes / 412

Resumen 413
Problemas 414

Capítulo 13
FLUIDOS / 423

13.1 Densidad 424
13.2 Presión en un fluido 425
13.3 Flotación y principio de Arquímedes 432
13.4 Fluidos en movimiento 438

Temas de actualidad en Física:
Aerodinámica automotriz: rodar con el viento / 448

Resumen 449
Problemas 450

PARTE II OSCILACIONES Y ONDAS

Capítulo 14
OSCILACIONES / 457

14.1 Movimiento armónico simple 458
14.2 Energía del movimiento armónico simple 465
14.3 Algunos sistemas oscilantes 468
14.4 Oscilaciones amortiguadas 477
14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia 481

Temas de actualidad en Física:
Moviéndose al compás: el Puente del Milenio / 486

Resumen 487
Problemas 488

Capítulo 15
MOVIMIENTO ONDULATORIO / 495

15.1 Movimiento ondulatorio simple 496
15.2 Ondas periódicas 503
15.3 Ondas en tres dimensiones 509
15.4 Ondas y barreras 513
15.5 Efecto Doppler 518

Temas de actualidad en Física:
Ciudades con pies de barro / 524

Resumen 525
Problemas 527

Capítulo 16

SUPERPOSICIÓN Y ONDAS ESTACIONARIAS / 533

16.1 Superposición de ondas 534
16.2 Ondas estacionarias 542
*16.3 Temas adicionales 550

Temas de actualidad en Física:

Ecos del silencio: arquitectura acústica / 554

Resumen 555
Problemas 556

PARTE III TERMODINÁMICA

Capítulo 17

TEMPERATURA Y TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES / 563

17.1 Equilibrio térmico y temperatura 564
17.2 Termómetros de gas y escala de temperaturas absolutas 566
17.3 Ley de los gases ideales 569
17.4 La teoría cinética de los gases 574

Temas de actualidad en Física:

Termómetros Moleculares / 584

Resumen 585
Problemas 586

Capítulo 18

CALOR Y PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA / 591

18.1 Capacidad calorífica y calor específico 592
18.2 Cambio de fase y calor latente 595
18.3 El experimento de Joule y el primer principio de la termodinámica 598
18.4 La energía interna de un gas ideal 601
18.5 Trabajo y diagrama PV para un gas 602
18.6 Capacidades caloríficas de los gases 606
18.7 Capacidades caloríficas de los sólidos 611
18.8 Fallos del teorema de equipartición 611
18.9 Compresión adiabática cuasiestática de un gas 615

Temas de actualidad en Física:

Respirometría: respirando el calor / 619

Resumen 620
Problemas 622

Capítulo 19

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA / 629

19.1 Máquinas térmicas y el segundo principio de la termodinámica 630
19.2 Refrigeradores y segundo principio de la termodinámica 634
19.3 La máquina de Carnot 637
*19.4 Bombas de calor 643
19.5 Irreversibilidad, desorden y entropía 645
19.6 Entropía y disponibilidad de la energía 652
19.7 Entropía y probabilidad 653

Temas de actualidad en Física:

La perpetua batalla por el movimiento perpetuo / 655

Resumen 656
Problemas 657

Capítulo 20

PROPIEDADES Y PROCESOS TÉRMICOS / 665

20.1 Dilatación térmica 666
20.2 Ecuación de Van der Waals e isotermas líquido-vapor 670
20.3 Diagramas de fase 673
20.4 Transferencia de calor 674

Temas de actualidad en Física:

Islas urbanas de calor: noches cálidas en la ciudad / 686

Resumen 687
Problemas 688

Capítulo R

RELATIVIDAD ESPECIAL / R.1

R.1 El principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz R.2
R.2 Barras en movimiento R.4
R.3 Relojes en movimiento R.5
R.4 Más sobre barras en movimiento R.8
R.5 Relojes lejanos y simultaneidad R.9
R.6 Momento relativista, masa y energía R.12
Resumen R.15
Problemas R.16

RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES DEL FINAL DE LOS CAPÍTULOS / A.1

ÍNDICE ALFABÉTICO / I.1

Prefacio

La sexta edición de *Física para la ciencia y la tecnología* presenta un texto y herramientas *online* completamente integrados que ayudarán a los estudiantes a aprender de un modo más eficaz y que permitirá a los profesores adaptar sus clases para enseñar de un modo más eficiente.

El texto incluye un nuevo enfoque estratégico de resolución de problemas, un apéndice de matemáticas integrado y nuevas herramientas para mejorar la comprensión conceptual. Los nuevos temas de actualidad en física destacan temas innovadores que ayudan a los estudiantes a relacionar lo que aprenden con las tecnologías del mundo real.

CARACTERÍSTICAS CLAVE

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En la sexta edición destaca una nueva estrategia de resolución de problemas en la que los Ejemplos siguen un formato sistemático de **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación**. Este formato conduce a los estudiantes a través de los pasos implicados en el análisis del problema, la resolución del problema y la comprobación de sus respuestas. Los Ejemplos a menudo incluyen útiles secciones de **Observación** que presentan formas alternativas de resolución de problemas, hechos interesantes, o información adicional relativa a los conceptos presentados. Siempre que se considera necesario, los Ejemplos van seguidos de **Problemas Prácticos** para que los estudiantes puedan evaluar su dominio de los conceptos.

En esta edición, las etapas de resolución de problemas siguen contando con las ecuaciones necesarias al lado, de manera que a los estudiantes les resulte más fácil seguir el razonamiento.

Después de cada enunciado del problema, los estudiantes van al **Planteamiento** del problema. Aquí, el problema se analiza tanto conceptualmente como visualmente.

En la sección **Solución**, cada paso de la solución se presenta con un enunciado escrito en la columna de la izquierda y las ecuaciones matemáticas correspondientes en la columna de la derecha.

La **Comprobación** recuerda a los estudiantes que han de verificar que sus resultados son precisos y razonables.

La **Observación** sugiere una forma distinta de enfocar un ejemplo o da información adicional relevante para el ejemplo.

A la solución le sigue normalmente un **Problema Práctico**, lo que permite a los estudiantes comprobar su comprensión. Al final del capítulo se incluyen las respuestas para facilitar una comprobación inmediata.

Ejemplo 3.4 **Tomando una curva**

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

PLANTEAMIENTO Calculamos la aceleración media a partir de su definición, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Primero calculamos $\Delta\vec{v}$ que es el vector que sumado a $\vec{v}_i$ nos da $\vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo: $\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$
2. Para hallar $\Delta\vec{v}$, debemos especificar primero $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$. Dibujemos $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$ (figura 3.7*a*), y tracemos el diagrama de suma vectorial (figura 3.7*b*) correspondiente a $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$:
3. El cambio de velocidad viene determinado por las velocidades inicial y final: $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$
4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{60\ \text{km/h}\ \hat{j} - 60\ \text{km/h}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}}$
5. Convierta 60 km/h a metros por segundo: $60\ \text{km/h} \times \dfrac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = 16{,}7\ \text{m/s}$
6. Exprese la aceleración en metros por segundo al cuadrado: $\vec{a}_m = \dfrac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \dfrac{16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{j} - 16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}} = \boxed{-3{,}4\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 3{,}4\ \text{m/s}^2\,\hat{j}}$

COMPROBACIÓN La componente de la velocidad en dirección este disminuye de 60 km/h a cero, de tal forma que cabría esperar que la componente x de la aceleración fuese negativa. Así mismo, la componente de la velocidad en dirección norte aumenta de cero a 60 km/h, de forma que cabría esperar que la componente y de la aceleración fuese positiva. El resultado del apartado 6 concuerda con estas expectativas.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el coche sigue acelerando aunque el módulo de su velocidad se mantenga constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.1 Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media.

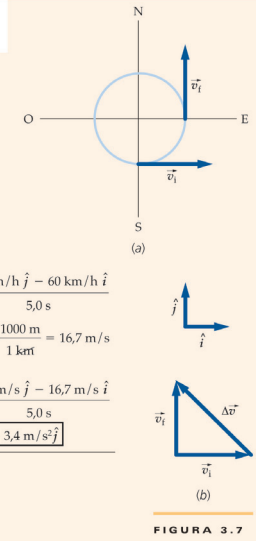


FIGURA 3.7

En casi todos los capítulos se incluye un recuadro llamado **Estrategia de resolución de problemas** para reforzar el formato **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación** para solucionar satisfactoriamente los problemas.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Velocidad relativa

PLANTEAMIENTO El primer paso para la resolución de problemas de velocidad relativa es identificar y marcar los sistemas de referencia relevantes. Aquí les llamaremos sistema de referencia A y B.

SOLUCIÓN

1. Utilizando $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ (ecuación 3.9), relacione la velocidad del objeto móvil (partícula p) relativa al sistema A con la velocidad de la partícula relativa al sistema B.
2. Trace un diagrama de suma vectorial para la ecuación $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$. Incluya ejes de coordenadas en el dibujo.
3. Calcule la incógnita en cuestión. Utilice la trigonometría cuando sea necesario.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que obtiene la velocidad o posición del cuerpo respecto del sistema de referencia correcto.

APÉNDICE DE MATEMÁTICAS INTEGRADO

Esta edición ha mejorado el apoyo matemático a los estudiantes que estudian Matemáticas al mismo tiempo que introducción a la Física o a los estudiantes que requieren repasar las Matemáticas.

El **Apéndice de Matemáticas completo**

- revisa resultados básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo,
- relaciona conceptos matemáticos con conceptos físicos del libro,
- proporciona Ejemplos y Problemas Prácticos para que los estudiantes puedan comprobar su comprensión de los conceptos matemáticos.

Ejemplo M.13 **Desintegración radiactiva del cobalto-60**

El período de semidesintegración del cobalto-60 (^{60}Co) es 5,27 años. A $t = 0$ se tiene una muestra de ^{60}Co de masa 1,20 mg. ¿Cuánto tiempo t (en años) habrá de transcurrir para que 0,400 mg de la muestra de ^{60}Co se hayan desintegrado?

PLANTEAMIENTO En la deducción del período de semidesintegración pusimos $N/N_0 = 1/2$. En este ejemplo, hemos de hallar el tiempo de permanencia de dos tercios de la muestra, es decir, cuando la fracción N/N_0 sea de 0,667.

SOLUCIÓN

1. Expresar la fracción N/N_0 como una función exponencial: $\frac{N}{N_0} = 0{,}667 = e^{-\lambda t}$
2. Obtener los valores recíprocos de ambos miembros: $\frac{N_0}{N} = 1{,}50 = e^{\lambda t}$
3. Despejar t: $t = \frac{\ln 1{,}50}{\lambda} = \frac{0{,}405}{\lambda}$
4. La constante de desintegración está relacionada con el período de semidesintegración por medio de $\lambda = (\ln 2)/t_{1/2}$ (ecuación M.70). Sustituir $(\ln 2)/t_{1/2}$ por λ y calcular el tiempo: $t = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} t_{1/2} = \frac{\ln 1{,}5}{\ln 2} \times 5{,}27 \text{ años} = 3{,}08 \text{ años}$

COMPROBACIÓN Para que la masa de una muestra de ^{60}Co decreciese hasta el 50% de su masa inicial habrían de transcurrir 5,27 años. Por lo tanto, es de esperar que la muestra tardase menos de 5,27 años para perder el 33,3% de su masa. Por tanto, el resultado obtenido (3,08 años), concuerda con lo esperado.

PROBLEMAS PRÁCTICOS

27. La constante de tiempo de descarga de un condensador en ur que tarda el condensador en descargarse hasta e^{-1} (o sea 0,368) $\tau = 1$ s para un condensador, ¿cuánto tiempo t (en segundos) descargarse hasta el 50% de su carga inicial?
28. Si la población de coyotes en un determinado lugar está creci por década y continúa creciendo al mismo ritmo indefinidamer canzará una población 1,5 veces la actual?

M.12 CÁLCULO INTEGRAL

El **cálculo integral** se puede considerar el inverso del cálculo diferencial. Si una función $f(t)$ se integra, se obtiene una función $F(t)$, de forma que $f(t)$ es la derivada de $F(t)$ con respecto a t.

LA INTEGRAL COMO UN ÁREA BAJO UNA CURVA. ANÁLISIS DIMENSIONAL

La integración está relacionada con el problema de hallar el área bajo una curva. La figura M.27 muestra una función $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula en un punto cualquiera del intervalo Δt_i. Esta aproximación mejora si Δt_i es muy pequeño. Se halla el área total desde t_1 hasta t_2 sumando todos los elementos de área desde t_1 a t_2 y tomando el límite cuando Δt_i tiende a cero. Este límite se denomina la **integral** de f extendida al intervalo t_1, t_2 y se escribe

$$\int f\,dt = \text{área}_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i f_i \Delta t_i \qquad \text{M.74}$$

Las dimensiones físicas de una integral de una función $f(t)$ se hallan multiplicando las dimensiones del integrando (la función que se ha de integrar) por las dimensiones de la variable de in-

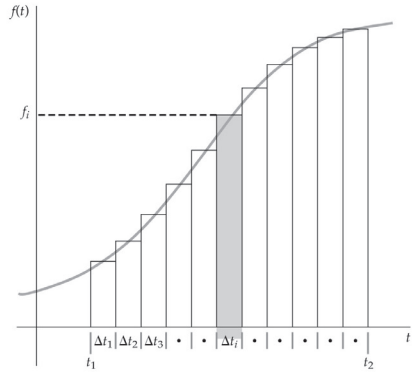


FIGURA M.27 Función general $f(t)$. El área del elemento sombreado es aproximadamente $f_i\,\Delta t_i$, en donde f_i se calcula para un punto cualquiera del intervalo.

Además, las notas al margen permiten a los estudiantes ver fácilmente la relación entre los conceptos físicos del texto y los conceptos matemáticos.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Cálculo diferencial

PEDAGOGÍA PARA ASEGURAR LA COMPRENSIÓN CONCEPTUAL

Se han añadido herramientas prácticas para los estudiantes para facilitar un mejor comprensión conceptual de la física.

- Se han introducido nuevos **Ejemplos conceptuales**, para ayudar a los estudiantes a comprender en profundidad conceptos físicos esenciales. Estos ejemplos utilizan la estrategia **Planteamiento**, **Solución** y **Comprobación**, de modo que los estudiantes no sólo obtienen una comprensión conceptual básica sino que tienen que evaluar sus respuestas.

Ejemplo 8.12 **Colisiones con masilla** ***Conceptual***

María tiene dos bolas de la misma masa, una bola de masilla y otra de goma. Lanza la bola de masilla contra un bloque suspendido por dos cuerdas como se muestra en la figura 8.20. La bola impacta contra el bloque y cae al suelo. Como consecuencia, el bloque asciende hasta una altura máxima h. Si hubiera lanzado la bola de goma con la misma velocidad, ¿el bloque habría ascendido a una altura mayor que h? La goma, a diferencia de la masilla, es elástica y hubiera rebotado contra el bloque.

PLANTEAMIENTO Durante el impacto, el cambio de momento del sistema bola-bloque es cero. Cuanto mayor es el cambio de momento de la bola, mayor será el cambio de momento del bloque. ¿Aumenta más el cambio de momento de la bola si rebota en el bloque que si no lo hace?

SOLUCIÓN

La bola de masilla pierde una fracción importante de su momento inicial. La bola de goma perdería todo el momento inicial para ganar momento en la dirección opuesta. Por tanto, la bola de goma perdería mayor cantidad de momento que la bola de masilla.

El bloque ascendería hasta una mayor altura después de ser impactado con la bola de goma que si hubiese sido impactado por la bola de masilla.

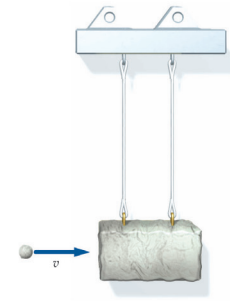


FIGURA 8.20

COMPROBACIÓN El bloque ejerce un impulso hacia atrás sobre la bola de masilla hasta hacerla parar. El mismo impulso hace detener la bola de goma, pero además el bloque ejerce un impulso adicional que la hacer retroceder. Así, el bloque ejerce un mayor impulso sobre la bola de goma que sobre la de masilla. Según la tercera ley de Newton, el impulso de la bola sobre el bloque es igual y opuesto al impulso del bloque sobre la bola. Entonces, la bola de goma ejerce un impulso mayor sobre el bloque confiriéndole un mayor cambio de momento.

- Las nuevas **Comprobaciones de conceptos** facilitan a los estudiantes comprobar su comprensión conceptual de conceptos físicos mientras leen los capítulos. Las respuestas están situadas al final de cada capítulo para permitir una comprobación inmediata. Las comprobaciones de conceptos se colocan cerca de temas relevantes, de modo que los estudiantes puedan releer inmediatamente cualquier material que no comprendan del todo.

- Los nuevos **avisos de errores frecuentes**, identificados mediante signos de exclamación, ayudan a los estudiantes a evitar errores habituales. Estos avisos están situados cerca de los temas que habitualmente causan confusión, de manera que los estudiantes puedan resolver de inmediato cualquier dificultad.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.1

La figura 3.9 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo t_6, cuando se halla momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su descenso. En la parte de su ascenso mostrada en el esquema, la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (a) en el instante t_6 y (b) en el instante t_9.

donde U_0 la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Por ejemplo, si a la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se le asigna un valor igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos asignar el valor cero de energía potencial al momento en que el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, donde y es la distancia del esquiador respecto al punto P.

Tenemos libertad para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia.

¡NUEVO! TEMAS DE ACTUALIDAD EN FÍSICA

Los **temas de actualidad en Física**, que aparecen al final de ciertos capítulos, tratan de aplicaciones actuales de la Física y relacionan estas aplicaciones con conceptos descritos en los capítulos. Estos temas van desde un parque eólico hasta termómetros moleculares y motores de detonación pulsar.

Temas de actualidad en Física

Soplando aire cálidos

Los parques eólicos están desperdigados por la costa danesa, las planicies del alto medio-oeste de EE.UU. y las montañas desde California hasta Vermont. El aprovechamiento de la energía cinética del viento no es nada nuevo. Durante siglos, los molinos de viento se han utilizado para bombear agua, ventilar minas[1] y moler el grano.

En la actualidad, las turbinas de viento hacen funcionar generadores eléctricos. Esas turbinas transforman energía cinética en energía electromagnética. Las turbinas modernas tienen precios, tamaños y rendimientos muy variados. Algunas de ellas son pequeñas y sencillas máquinas que cuestan unos 500 dólares y producen unos 100 watts de potencia.[2] Otras son gigantes y complejas y cuestan unos 2 millones de dólares pero generan hasta 2,5 MW por turbina.[3] Todas ellas funcionan gracias a una fuente de energía fácilmente disponible —el viento.

La teoría que hay detrás de la conversión de energía cinética en electromagnética es simple. Las moléculas de aire golpean sobre las aspas de la hélice y hacen girar la turbina. Las aspas hacer girar unos engranajes que hacen aumentar la velocidad de rotación que a su vez hace girar el rotor generador. El generador envía energía electromagnética a cables que soportan alta tensión.

Sin embargo, la conversión de la energía cinética del viento en energía electromagnética no es perfectamente eficiente; de hecho, no puede ser 100% eficiente. Si las turbinas convirtieran completamente la energía cinética del viento en energía eléctrica, el aire saldría de las turbinas sin energía cinética. Es decir, las turbinas pararían el aire. Si la turbina parase completamente el aire, éste fluiría alrededor de la turbina en lugar de fluir a través de ella.

Así, la turbina debe ser capaz de capturar la energía cinética del aire en movimiento y de evitar el flujo de aire a su alrededor. Las turbinas propulsadas por hélices son las más comunes y su eficiencia teórica varía de 30% a 59%.[4] (Las eficiencias teóricas varían en función de cómo el aire fluye alrededor de la turbina y a través de las hélices.)

En resumen, ni la más eficiente de las turbinas puede convertir el 100% de la energía disponible. ¿Qué sucede? Antes de llegar a la turbina el aire fluye de forma laminar mientras que al dejar atrás la turbina el aire se vuelve turbulento. La componente rotacional del movimiento del aire de detrás de la turbina, aumenta su energía aunque también hay alguna disipación debida a la viscosidad del aire. Si un determinado volumen de aire se mueve más lentamente, aparecerá un rozamiento entre este aire y el aire más veloz que fluye a su alrededor.[5] Las hélices se calientan y el aire también. Los engranajes de la turbina también disipan energía debido al rozamiento. Las hélices vibran individualmente —la energía absorbida para producir estas vibraciones también hace disminuir la eficiencia. Finalmente, la turbina necesita corriente para hacer funcionar los motores que lubrican los engranajes y el motor que orienta la turbina en la dirección más apropiada para la captura del viento.

Un parque eólico que convierte la energía cinética del aire en energía eléctrica. *(Image Slate.)*

MATERIAL COMPLEMENTARIO Y RECURSOS ADICIONALES

Esta nueva edición dispone de gran cantidad de recursos y materiales complementarios para alumnos y profesores. Todos estos materiales se encuentran disponibles en su versión original en inglés.

Si es usted profesor y piensa utilizar este libro como texto para su asignatura, puede acceder al material complementario registrándose en la siguiente página web, www.reverte.com/microsites/tipler6ed, o contactando con promocion@reverte.com

También está disponible en soporte físico el siguiente material:

Para el alumno

Student Solutions Manual proporciona la resolución completa de los problemas impares de final de capítulo.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 9781429203029
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429203036
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429203012

Study Guide destaca las magnitudes físicas y ecuaciones clave y los errores que deben evitarse. Incluye problemas prácticos y cuestiones para mejorar la comprensión de los conceptos físicos, además de test para su comprobación.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 978071784678
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429204101
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429204118

Para el profesor

Instructor's Resource CD-ROM contiene ilustraciones en formato jpg, presentaciones PowerPoint, un completo *test bank* con más de 4000 problemas tipo test y las herramientas para diseñar presentaciones y páginas web.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 9780716784708
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429202688
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429202671

Answer Booklet with Solution CD Resource son libros que contienen las respuestas de todos los problemas de final de capítulo e incluyen un CD-ROM con sus resoluciones completas. Estas soluciones también están disponibles en el Instructor's CD-ROM.

Volume 1 (Chapters 1-20, R) 9780716784791
Volume 2 (Chapters 21-33) 9781429204576
Volume 3 (Chapters 34-41) 9781429205146

Puede adquirir este material en Los Andes Libros S.L. a través de su página web, www.andeslibros.com, o contactando con libros@andeslibros.com.

FLEXIBILIDAD PARA LOS CURSOS DE FÍSICA

Nos damos cuenta de que no todos los cursos de física son iguales. Para facilitar la utilización del libro, *Física para la ciencia y la tecnología* se halla disponible en las siguientes versiones:

Volumen 1 *Mecánica/Oscilaciones y ondas/Termodinámica* (Capítulos 1–20, R) 978-84-291-4429-1

Volumen 2 *Electricidad y magnetismo/Luz* (Capítulos 21–33) 978-84-291-4430-7

Volumen 1A *Mecánica* (Capítulos 1–13) 978-84-291-4421-5

Volumen 1B *Oscilaciones y ondas* (Capítulos 14–16) 978-84-291-4422-2

Volumen 1C *Termodinámica* (Capítulos 17–20) 978-84-291-4423-9

Volumen 2A *Electricidad y magnetismo* (Capítulos 21–30) 978-84-291-4424-6

Volumen 2B *Luz* (Capítulos 31–33) 978-84-291-4425-3

Física moderna *Mecánica cuántica, relatividad y estructura de la materia* (Capítulos R, 34–41) 978-84-291-4426-0

Apéndices y respuestas 978-84-291-4427-7

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los diversos profesores, estudiantes, colaboradores y amigos que han contribuido a esta edición y a las anteriores.

Anthony J. Buffa, profesor emérito en California Polytechnic State University en California, escribió muchos de los nuevos problemas que aparecen al final de los capítulos y editó las secciones de problemas del final de cada capítulo. Laura Runkle escribió los Temas de actualidad en Física. Richard Mickey revisó la Revisión de matemáticas de la quinta edición, que ahora constituye el Apéndice de matemáticas de la sexta edición. David Mills, profesor emérito en el College of the Redwoods en California, revisó a fondo el Manual de Soluciones. Para redactar este libro y para comprobar la precisión y exactitud del texto y los problemas hemos contado con la ayuda inestimable de los siguientes profesores:

Thomas Foster
Southern Illinois University

Karamjeet Arya
San Jose State University

Mirley Bala
Texas A&M University—Corpus Christi

Michael Crivello
San Diego Mesa College

Carlos Delgado
Community College of Southern Nevada

David Faust
Mt. Hood Community College

Robin Jordan
Florida Atlantic University

Jerome Licini
Lehigh University

Dan Lucas
University of Wisconsin

Laura McCullough
University of Wisconsin, Stout

Jeannette Myers
Francis Marion University

Marian Peters
Appalachian State University

Todd K. Pedlar
Luther College

Paul Quinn
Kutztown University

Peter Sheldon
Randolph-Macon Woman's College

Michael G. Strauss
University of Oklahoma

Brad Trees
Ohio Wesleyan University

George Zober
Yough Senior High School

Patricia Zober
Ringgold High School

Muchos profesores y estudiantes han realizado revisiones exhaustivas y útiles de uno o más capítulos de esta edición. Cada uno de ellos ha contribuido de un modo fundamental a mejorar la calidad de esta revisión, y merecen por ello nuestro agradecimiento. Nos gustaría dar las gracias a los siguientes revisores:

Ahmad H. Abdelhadi
James Madison University

Edward Adelson
Ohio State University

Royal Albridge
Vanderbilt University

J. Robert Anderson
University of Maryland, College Park

Toby S. Anderson
Tennessee State University

Wickram Ariyasinghe
Baylor University

Yildirim Aktas
University of North Carolina, Charlotte

Eric Ayars
California State University

James Battat
Harvard University

Eugene W. Beier
University of Pennsylvania

Peter Beyersdorf
San Jose State University

Richard Bone
Florida International University

Juliet W. Brosing
Pacific University

Ronald Brown
California Polytechnic State University

Richard L. Cardenas
St. Mary's University

Troy Carter
University of California, Los Angeles

Alice D. Churukian
Concordia College

N. John DiNardo
Drexel University

Jianjun Dong
Auburn University

Fivos R Drymiotis
Clemson University

Mark A. Edwards
Hofstra University

James Evans
Broken Arrow Senior High

Nicola Fameli
University of British Columbia

N. G. Fazleev
University of Texas at Arlington

Thomas Furtak
Colorado School of Mines

Richard Gelderman
Western Kentucky University

Yuri Gershtein
Florida State University

Paolo Gondolo
University of Utah

Benjamin Grinstein
University of California, San Diego

Parameswar Hari
University of Tulsa

Joseph Harrison
University of Alabama—Birmingham

Patrick C. Hecking
Thiel College

Kristi R. G. Hendrickson
University of Puget Sound

Linnea Hess
Olympic College

Mark Hollabaugh
Normandale Community College

Daniel Holland
Illinois State University

Richard D. Holland II
Southern Illinois University

Eric Hudson
Massachusetts Institute of Technology

David C. Ingram
Ohio University

Colin Inglefield
Weber State University

Nathan Israeloff
Northeastern University

Donald J. Jacobs
California State University, Northridge

Erik L. Jensen
Chemeketa Community College

Colin P Jessop
University of Notre Dame

Ed Kearns
Boston University

Alice K. Kolakowska
Mississippi State University

Douglas Kurtze
Saint Joseph's University

Eric T. Lane
University of Tennessee at Chattanooga

Christie L. Larochelle
Franklin & Marshall College

Mary Lu Larsen
Towson University

Clifford L. Laurence
Colorado Technical University

Bruce W. Liby
Manhattan College

Ramon E. Lopez
Florida Institute of Technology

Ntungwa Maasha
Coastal Georgia Community Collegee and University Center

Jane H MacGibbon
University of North Florida

A. James Mallmann
Milwaukee School of Engineering

Rahul Mehta
University of Central Arkansas

R. A. McCorkle
University of Rhode Island

Linda McDonald
North Park University

Kenneth McLaughlin
Loras College

Eric R. Murray
Georgia Institute of Technology

Jeffrey S. Olafsen
University of Kansas

Richard P. Olenick
University of Dallas

Halina Opyrchal
New Jersey Institute of Technology

Russell L. Palma
Minnesota State University—Mankato

Todd K. Pedlar
Luther College

Daniel Phillips
Ohio University

Edward Pollack
University of Connecticut

Michael Politano
Marquette University

Robert L. Pompi
SUNY Binghamton

Damon A. Resnick
Montana State University

Richard Robinett
Pennsylvania State University

John Rollino
Rutgers University

Daniel V. Schroeder
Weber State University

Douglas Sherman
San Jose State University

Christopher Sirola
Marquette University

Larry K. Smith
Snow College

George Smoot
University of California at Berkeley

Zbigniew M. Stadnik
University of Ottawa

Kenny Stephens
Hardin-Simmons University

Daniel Stump
Michigan State University

Jorge Talamantes
California State University, Bakersfield

Charles G. Torre
Utah State University

Brad Trees
Ohio Wesleyan University

John K. Vassiliou
Villanova University

Theodore D. Violett
Western State College

Hai-Sheng Wu
Minnesota State University—Mankato

Anthony C. Zable
Portland Community College

Ulrich Zurcher
Cleveland State University

También estamos en deuda con los revisores de ediciones anteriores. Por lo que nos gustaría dar las gracias a los siguientes revisores, quienes nos proporcionaron un apoyo imprescindible mientras realizábamos la cuarta y la quinta ediciones:

Edward Adelson
The Ohio State University

Michael Arnett
Kirkwood Community College

Todd Averett
The College of William and Mary

Yildirim M. Aktas
University of North Carolina at Charlotte

Karamjeet Arya
San Jose State University

Alison Baski
Virginia Commonwealth University

William Bassichis
Texas A&M University

Joel C. Berlinghieri
The Citadel

Gary Stephen Blanpied
University of South Carolina

Frank Blatt
Michigan State University

Ronald Brown
California Polytechnic State University

Anthony J. Buffa
California Polytechnic State University

John E. Byrne
Gonzaga University

Wayne Carr
Stevens Institute of Technology

George Cassidy
University of Utah

Lay Nam Chang
Virginia Polytechnic Institute

I. V. Chivets
Trinity College, University of Dublin

Harry T. Chu
University of Akron

Alan Cresswell
Shippensburg University

Robert Coakley
University of Southern Maine

Robert Coleman
Emory University

Brent A. Corbin
UCLA

Andrew Cornelius
University of Nevada at Las Vegas

Mark W. Coffey
Colorado School of Mines

Peter P. Crooker
University of Hawaii

Jeff Culbert
London, Ontario

Paul Debevec
University of Illinois

Ricardo S. Decca
Indiana University-Purdue University

Robert W. Detenbeck
University of Vermont

N. John DiNardo
Drexel University

Bruce Doak
Arizona State University

Michael Dubson
University of Colorado at Boulder

John Elliott
University of Manchester, England

William Ellis
University of Technology — Sydney

Colonel Rolf Enger
U.S. Air Force Academy

John W. Farley
University of Nevada at Las Vegas

David Faust
Mount Hood Community College

Mirela S. Fetea
University of Richmond

David Flammer
Colorado School of Mines

Philip Fraundorf
University of Missouri, Saint Louis

Tom Furtak
Colorado School of Mines

James Garland
Retired

James Garner
University of North Florida

Ian Gatland
Georgia Institute of Technology

Ron Gautreau
New Jersey Institute of Technology

David Gavenda
University of Texas at Austin

Patrick C. Gibbons
Washington University

David Gordon Wilson
Massachusetts Institute of Technology

Christopher Gould
University of Southern California

Newton Greenberg
SUNY Binghamton

John B. Gruber
San Jose State University

Huidong Guo
Columbia University

Phuoc Ha
Creighton University

Richard Haracz
Drexel University

Clint Harper
Moorpark College

Michael Harris
University of Washington

Randy Harris
University of California at Davis

Tina Harriott
Mount Saint Vincent, Canada

Dieter Hartmann
Clemson University

Theresa Peggy Hartsell
Clark College

Kristi R.G. Hendrickson
University of Puget Sound

Michael Hildreth
University of Notre Dame

Robert Hollebeek
University of Pennsylvania

David Ingram
Ohio University

Shawn Jackson
The University of Tulsa

Madya Jalil
University of Malaya

Monwhea Jeng
University of California — Santa Barbara

James W. Johnson
Tallahassee Community College

Edwin R. Jones
University of South Carolina

Ilon Joseph
Columbia University

David Kaplan
University of California — Santa Barbara

William C. Kerr
Wake Forest University

John Kidder
Dartmouth College

Roger King
City College of San Francisco

James J. Kolata
University of Notre Dame

Boris Korsunsky
Northfield Mt. Hermon School

Thomas O. Krause
Towson University

Eric Lane
University of Tennessee, Chattanooga

Andrew Lang (graduate student)
University of Missouri

David Lange
University of California — Santa Barbara

Donald C. Larson
Drexel University

Paul L. Lee
California State University, Northridge

Peter M. Levy
New York University

Jerome Licini
Lehigh University

Isaac Leichter
Jerusalem College of Technology

William Lichten
Yale University

Robert Lieberman
Cornell University

Fred Lipschultz
University of Connecticut

Graeme Luke
Columbia University

Dan MacIsaac
Northern Arizona University

Edward McCliment
University of Iowa

Robert R. Marchini
The University of Memphis

Peter E. C. Markowitz
Florida International University

Daniel Marlow
Princeton University

Fernando Medina
Florida Atlantic University

Howard McAllister
University of Hawaii

John A. McClelland
University of Richmond

Laura McCullough
University of Wisconsin at Stout

M. Howard Miles
Washington State University

Matthew Moelter
University of Puget Sound

Eugene Mosca
U.S. Naval Academy

Carl Mungan
U.S. Naval Academy

Taha Mzoughi
Mississippi State University

Charles Niederriter
Gustavus Adolphus College

John W. Norbury
University of Wisconsin at Milwaukee

Aileen O'Donughue
St. Lawrence University

Jack Ord
University of Waterloo

Jeffry S. Olafsen
University of Kansas

Melvyn Jay Oremland
Pace University

Richard Packard
University of California

Antonio Pagnamenta
University of Illinois at Chicago

George W. Parker
North Carolina State University

John Parsons
Columbia University

Dinko Pocanic
University of Virginia

Edward Pollack
University of Connecticut

Robert Pompi
The State University of New York at Binghamton

Bernard G. Pope
Michigan State University

John M. Pratte
Clayton College and State University

Brooke Pridmore
Clayton State College

Yong-Zhong Qian
University of Minnesota

David Roberts
Brandeis University

Lyle D. Roelofs
Haverford College

R. J. Rollefson
Wesleyan University

Larry Rowan
University of North Carolina at Chapel Hill

Ajit S. Rupaal
Western Washington University

Todd G. Ruskell
Colorado School of Mines

Lewis H. Ryder
University of Kent, Canterbury

Andrew Scherbakov
Georgia Institute of Technology

Bruce A. Schumm
University of California, Santa Cruz

Cindy Schwarz
Vassar College

Mesgun Sebhatu
Winthrop University

Bernd Schuttler
University of Georgia

Murray Scureman
Amdahl Corporation

Marllin L. Simon
Auburn University

Scott Sinawi
Columbia University

Dave Smith
University of the Virgin Islands

Wesley H. Smith
University of Wisconsin

Kevork Spartalian
University of Vermont

Zbigniew M. Stadnik
University of Ottawa

G. R. Stewart
University of Florida

Michael G. Strauss
University of Oklahoma

Kaare Stegavik
University of Trondheim, Norway

Jay D. Strieb
Villanova University

Dan Styer
Oberlin College

Chun Fu Su
Mississippi State University

Jeffrey Sundquist
Palm Beach Community College — South

Cyrus Taylor
Case Western Reserve University

Martin Tiersten
City College of New York

Chin-Che Tin
Auburn University

Oscar Vilches
University of Washington

D. J. Wagner
Grove City College
Columbia University

George Watson
University of Delaware

Fred Watts
College of Charleston

David Winter

John A. Underwood
Austin Community College

John Weinstein
University of Mississippi

Stephen Weppner
Eckerd College

Suzanne E. Willis
Northern Illinois University

Frank L. H. Wolfe
University of Rochester

Frank Wolfs
University of Rochester

Roy C. Wood
New Mexico State University

Ron Zammit
California Polytechnic State University

Yuriy Zhestkov
Columbia University

Dean Zollman
Kansas State University

Fulin Zuo
University of Miami

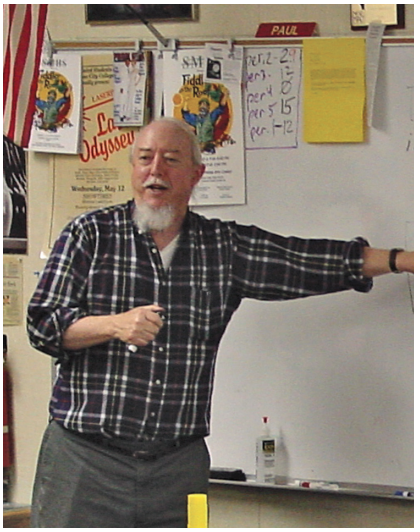
Es obvio que nuestro trabajo no termina nunca; por ello, esperamos recibir comentarios y sugerencias de nuestros lectores para poder mejorar el texto y corregir cualquier error. Si usted cree que ha hallado un error, o tiene cualquier otro comentario, sugerencia o pregunta, envíenos una nota a **producción@reverte.com** Incorporaremos las correcciones en el texto en posteriores reimpresiones.

Por último, nos gustaría agradecer a nuestros amigos de W. H. Freeman and Company su ayuda y aliento. Susan Brennan, Clancy Marshall, Kharissia Pettus, Georgia Lee Hadler, Susan Wein, Trumbull Rogers, Connie Parks, John Smith, Dena Digilio Betz, Ted Szczepanski y Liz Geller, quienes fueron muy generosos con su creatividad y duro trabajo en cada etapa del proceso.

También estamos agradecidos por las contribuciones y ayuda de nuestros colegas Larry Tankersley, John Ertel, Steve Montgomery y Don Treacy.

Acerca de los autores

Paul Tipler nació en la pequeña ciudad agrícola de Antigo, Wisconsin, en 1933. Realizó sus estudios medios en Oshkosh, Wisconsin, en donde su padre era superintendente de las Escuelas Públicas. Recibió el título de Bachelor of Science en la Universidad de Purdue en 1955 y obtuvo su Ph.D. en la Universidad de Illinois, en donde estudió la estructura del núcleo. Impartió la enseñanza durante un año en la Wesleyan University de Connecticut mientras redactaba su tesis. Después se trasladó a la Universidad de Oakland en Michigan, donde fue uno de los primeros miembros del Departamento de Física, y desempeñó un papel importante en el desarrollo de los planes de estudio. Durante los siguientes 20 años, enseñó casi todas las disciplinas de la física y escribió la primera y segunda ediciones de sus ampliamente difundidos textos *Física Moderna* (1969, 1978) y *Física* (1976, 1982). En 1982, se mudó a Berkeley, California, donde ahora reside y donde escribió *Física preuniversitaria* (1987) y la tercera edición de *Física* (1991). Además de la física, sus aficiones incluyen la música, excursionismo y camping. Es un excelente pianista de jazz y un buen jugador de póker.



Gene Mosca nació en la ciudad de Nueva York y se crió en Shelter Island, en el Estado de Nueva York. Estudió en la Universidad de Villanova, en la Universidad de Michigan y en la Universidad de Vermont, donde obtuvo su Ph.D. en física. Recientemente jubilado, Gene Mosca ha sido profesor en la U.S. Naval Academy, donde fue el impulsor de numerosas mejoras en la enseñanza de la Física, tanto en los laboratorios como en las aulas. Proclamado por Paul Tipler como "el mejor crítico que he tenido", Mosca se ha convertido en coautor del libro a partir de su quinta edición.

PARTE I MECÁNICA

CAPÍTULO 1

EN UNA PLAYA HAY DEMASIADOS GRANOS DE ARENA PARA CONTARLOS UNO POR UNO, PERO SE PUEDE OBTENER EL NÚMERO APROXIMADO POR MEDIO DE HIPÓTESIS RAZONABLES Y CÁLCULOS SENCILLOS. *(Corbis.)*

? ¿Cuántos granos de arena hay en su playa favorita? (Véase el ejemplo 17.)

Medida y vectores

1.1 La naturaleza de la física
1.2 Unidades
1.3 Conversión de unidades
1.4 Dimensiones de las magnitudes físicas
1.5 Cifras significativas y órdenes de magnitud
1.6 Vectores
1.7 Propiedades generales de los vectores

La humanidad siempre ha sentido curiosidad por el mundo que le rodea. Como demuestran los primeros documentos gráficos, siempre hemos buscado el modo de imponer orden en la enmarañada diversidad de los sucesos observados, el color del cielo, el cambio del sonido de un coche cuando pasa, el balanceo de un árbol, la salida y la puesta del Sol, el vuelo de un ave o de un avión. Esta búsqueda para entender ha adoptado distintas formas: una es la religión, otra es el arte y otra es la ciencia. Aunque el vocablo *ciencia* viene del latín y significa "saber", la ciencia no sólo es saber sino, especialmente, comprensión del mundo natural. La Física pretende describir los fundamentos del universo y cómo funciona. Es la ciencia de la materia y de la energía, del espacio y del tiempo.

Como toda ciencia, la Física se estructura de una forma específica y racional. Los físicos construyen, prueban y relacionan modelos con el objetivo de describir, explicar y predecir la realidad. Este proceso comporta elaborar hipótesis, llevar a cabo repetidamente experimentos y observaciones y, en consecuencia, elaborar nuevas hipótesis. El resultado final es un conjunto de principios fundamentales y de leyes que describen el mundo. Estas leyes y principios se aplican tanto a fenómenos exó-

ticos como los agujeros negros, la energía oscura y partículas con nombres tan peculiares como leptoquarks o bosones como a la vida cotidiana. Como veremos, hay innumerables cuestiones de nuestro entorno cotidiano que pueden explicarse con un conocimiento básico de física. ¿Por qué el cielo es azul? ¿Por qué los astronautas flotan en el espacio? ¿Cómo funcionan los reproductores de discos compactos? ¿Por qué un oboe suena distinto de una flauta? ¿Por qué un helicóptero debe tener dos rotores? ¿Por qué los objetos metálicos parecen más fríos que los objetos de madera a igual temperatura? ¿Por qué los relojes que se mueven van más lentos?

En este libro, aplicaremos los principios de la física para contestar estas y otras cuestiones. Estudiaremos los temas clásicos de la física, la mecánica, el sonido, la luz, el calor, la electricidad, el magnetismo, la física atómica y nuclear. También aprenderemos algunas técnicas útiles para la resolución de problemas. En este proceso esperamos que el lector tome conciencia de la importancia de la física y aprecie toda su belleza.

En este capítulo, empezaremos a prepararnos estudiando algunos conceptos previos que se necesitan para el estudio de la física. Examinaremos brevemente la naturaleza de la física, estableceremos algunas definiciones básicas, introduciremos los sistemas de unidades y aprenderemos a usarlos y presentaremos una introducción a la matemática de los vectores. También trataremos de la exactitud de las medidas, las cifras significativas y las estimaciones.

1.1 LA NATURALEZA DE LA FÍSICA

El vocablo *física* procede del griego y significa el conocimiento del mundo natural. Por lo tanto, no nos ha de sorprender que los primeros esfuerzos registrados por el ser humano para reunir sistemáticamente el conocimiento sobre el movimiento de los cuerpos procedan de la antigua Grecia. En la filosofía natural establecida por Aristóteles (384–322 a.C.), las explicaciones de los fenómenos físicos se deducían de hipótesis sobre el mundo y no de la experimentación. Por ejemplo, una hipótesis fundamental afirmaba que toda sustancia tenía un "lugar natural" en el universo. Se estableció que el movimiento era el resultado del intento de una sustancia de alcanzar su lugar natural. El acuerdo entre las deducciones de la física aristotélica y los movimientos observados en el universo físico, y la falta de una tradición experimental que derrocase la física antigua, hizo que el punto de vista de los griegos fuera aceptado durante casi dos mil años. Fue el científico italiano Galileo Galilei (1564–1642) quien, con sus brillantes experimentos sobre el movimiento, estableció para siempre la absoluta necesidad de la experimentación en la física e inició la desintegración de la física de Aristóteles. Unos cien años después, Isaac Newton generalizó los resultados experimentales de Galileo en sus tres leyes fundamentales del movimiento, y el reino de la filosofía natural de Aristóteles se extinguió.

Durante los siguientes doscientos años la experimentación aportó innumerables descubrimientos y surgieron nuevas preguntas. Se descubrieron los fenómenos térmicos y eléctricos, y algunos relacionados con la expansión y la compresión de los gases. Estos descubrimientos y las nuevas preguntas que planteaban inspiraron el desarrollo de nuevos modelos para su explicación. A finales del siglo XIX, las leyes de Newton referentes a los movimientos de los sistemas mecánicos se asociaron a las igualmente impresionantes leyes de James Maxwell, James Joule, Sadi Carnot y otros científicos, para describir el electromagnetismo y la termodinámica. Los temas que ocuparon a los físicos durante la última parte del siglo XIX —mecánica, luz, calor, sonido, electricidad y magnetismo— constituyen lo que se denomina *física clásica*. Dado que necesitamos la física clásica para comprender el mundo macroscópico donde vivimos, le dedicaremos las partes I a V de este libro.

El notable éxito alcanzado por la física clásica llevó a muchos científicos al convencimiento de que la descripción del universo físico se había completado. Sin embargo, el descubrimiento de los rayos X realizado por Wilhelm Roentgen en 1895 y el de la radiactividad por Antoine Becquerel y Marie y Pierre Curie poco

después parecían estar fuera del marco de la física clásica. La teoría de la relatividad especial propuesta por Albert Einstein en 1905 contradecía las ideas de espacio y tiempo de Galileo y Newton. En el mismo año, Einstein sugirió que la energía luminosa estaba cuantizada; es decir, que la luz se propaga en paquetes discretos de energía y no en forma ondulatoria y continua como suponía la física clásica. La generalización de esta idea a la cuantización de todos los tipos de energía es un concepto fundamental de la mecánica cuántica, con sorprendentes e importantes consecuencias. La aplicación de la relatividad especial y, particularmente, la teoría cuántica a sistemas microscópicos, tales como átomos, moléculas y núcleos, ha conducido a una comprensión detallada de sólidos, líquidos y gases, y constituye lo que generalmente se denomina *física moderna*, a la que dedicamos la parte VI de este texto.

Comenzaremos nuestro estudio de la física con los temas clásicos. Sin embargo, de vez en cuando elevaremos nuestra mirada para analizar la relación entre la física clásica y la física moderna. Así, por ejemplo, en el capítulo 2 dedicaremos un espacio a las velocidades próximas a la de la luz, atravesando brevemente el universo relativista imaginado primeramente por Einstein. Igualmente, después de abordar la conservación de la energía en el capítulo 7, trataremos de la cuantización de la energía y de la famosa relación de Einstein entre la masa y la energía, $E = mc^2$. Unos capítulos más adelante, en el capítulo R, estudiaremos la naturaleza del espacio y del tiempo, tal como fue desvelada por Einstein en 1905.

1.2 UNIDADES

Las leyes de la Física expresan relaciones entre magnitudes físicas. Las **magnitudes físicas** son números que se obtienen a partir de medir fenómenos físicos. Por ejemplo, las páginas que ocupa este libro, el tiempo que se necesita para leer un párrafo o la temperatura de la clase son magnitudes físicas.

La medida de toda magnitud física exige compararla con cierto valor unitario de la misma. Así, para medir la distancia entre dos puntos, la comparamos con una unidad estándar de distancia tal como el metro. La afirmación de que una cierta distancia es de 25 metros significa que equivale a 25 veces la longitud de la unidad metro; es decir, una regla métrica patrón se ajusta 25 veces en dicha distancia. Es importante añadir la unidad metros junto con el número 25 al expresar una distancia debido a que existen otras unidades de longitud de uso común. Decir que una distancia es 25 carece de significado. Toda magnitud física debe expresarse con una cifra y una unidad.

Algunas de las magnitudes físicas más básicas, como el tiempo, la distancia y la masa, se definen mediante los procesos que las miden. Una magnitud física se define frecuentemente de **forma operacional**, es decir, de una forma que define la magnitud física mediante el procedimiento que debe realizarse para medirla. Otras magnitudes físicas se definen haciendo explícito el procedimiento de cálculo a partir de las magnitudes fundamentales. La velocidad de un cuerpo, por ejemplo, se calcula dividiendo la distancia por el tiempo invertido en recorrerla. Muchas de las magnitudes físicas que se estudiarán, como la velocidad, la fuerza, el momento, el trabajo, la energía y la potencia, pueden expresarse en función de tres magnitudes fundamentales: la longitud, el tiempo y la masa. En consecuencia, basta con pocas magnitudes básicas para poder expresar todas las demás magnitudes físicas. La elección de las unidades estándar para expresar estas magnitudes fundamentales determina un sistema de unidades.

> ! Cuando se usa una cifra para determinar una magnitud física, el número debe ir acompañado siempre de una unidad.

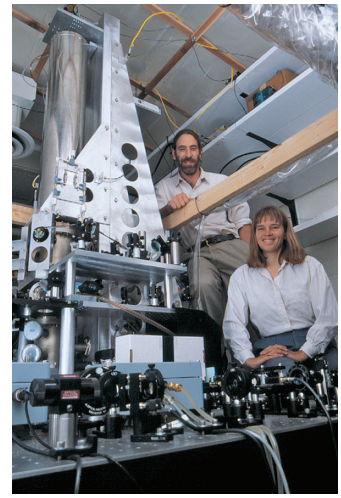
El reloj de agua usado para medir intervalos de tiempo durante el siglo XIII. *(The Granger Collection.)*

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

En física es importante usar un conjunto consistente de unidades. En el año 1960 un comité internacional estableció un conjunto estándar para la comunidad científica, denominado SI (a partir de Système International). En este sistema hay siete magnitudes fundamentales: longitud, masa, tiempo, intensidad eléctrica, tempera-

tura termodinámica, cantidad de sustancia e intensidad luminosa. Cada magnitud fundamental tiene su unidad. Para el tiempo es el segundo, para la longitud el metro y para la masa el kilogramo. Más adelante, cuando estudiemos la termodinámica y la electricidad, necesitaremos usar la unidad fundamental en el SI para la temperatura (el kelvin, K), para la cantidad de sustancia (el mol) y para la intensidad de corriente eléctrica (el ampere, A). La séptima unidad fundamental es la candela (cd) que determina la intensidad luminosa, aunque no tendremos ocasión de utilizarla en este libro. Las definiciones completas de las unidades del SI se dan en el Apéndice A donde se incluyen, además, otras unidades que se usan habitualmente en función de las unidades fundamentales.

Tiempo La unidad de tiempo, el **segundo** (s), se definió originalmente en función de la rotación de la Tierra, de modo que correspondía a $(1/60)(1/60)(1/24)$ del día solar medio. Sin embargo, los científicos han advertido que el periodo de rotación de la Tierra varía continuamente. Actualmente, el segundo se define en función de una frecuencia característica asociada con el átomo de cesio. Todos los átomos, después de absorber energía, emiten luz con longitudes de onda y frecuencias características del elemento considerado. Existe una frecuencia y una longitud de onda particulares asociadas a cada transición energética dentro del átomo de un elemento y todas las experiencias manifiestan que estas magnitudes son constantes. El segundo se define de modo que la frecuencia de la luz emitida en una determinada transición del cesio es de 9 192 631 770 por segundo.



Reloj de una fuente de cesio junto a los diseñadores del prototipo, Steve Jefferts y Dawn Meekhof. *(© 1999 Geoffrey Wheeler.)*

Longitud La unidad patrón de longitud es el **metro** (m), que estaba definida originalmente de modo que la distancia entre el Ecuador y el polo Norte a lo largo del meridiano que pasa por París fuese igual a diez millones de metros (figura 1.1). La distancia resultó difícil de medir con exactitud. Por lo tanto, en 1899 se definió como la distancia comprendida entre dos rayas grabadas sobre una barra de una aleación de platino e iridio que se guarda a una temperatura determinada. Con el tiempo, también se vio que la precisión de este estándar era insuficiente y se adoptaron nuevas definiciones del metro patrón. Actualmente, la definición del metro utiliza la velocidad de la luz en el vacío, que se define como 299 792 458 m/s. El metro, por tanto, es la distancia que recorre la luz en el vacío durante 1/299 792 458 segundos. Con estas definiciones, las unidades de longitud y de tiempo son accesibles a cualquier laboratorio del mundo.

FIGURA 1.1 El patrón de longitud, el metro, se escogió originalmente de modo que la distancia del Ecuador al polo Norte a lo largo del meridiano que pasa por París fuese 10^7 m.

Masa La unidad de masa, el **kilogramo** (kg), se definió como la masa de un litro de agua a 4 °C. (El volumen de un litro es el mismo que el de un cubo de 10 cm de arista.) Al igual que los patrones de tiempo y de longitud, la definición de kilogramo ha cambiado, y ahora se define como la masa de un cilindro de una aleación específica de platino e iridio. Este cilindro, denominado masa patrón, se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia. Un duplicado se guarda en el National Institute of Standards and Technology (NIST) en Gaithersburg, Maryland (EE.UU.). Estudiaremos con más detalle el concepto de masa en el capítulo 4. Como veremos, el peso de un objeto en un punto determinado de la Tierra es proporcional a su masa. Así, las masas de tamaño ordinario pueden compararse a partir de su peso.

La masa patrón es la masa de un cilindro de una aleación específica de iridio y platino que está guardado en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas en Sèvres, Francia. *(© BIPM; www.bipm.org.)*

Tabla 1.1 Prefijos de las potencias de 10*

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

* Los prefijos hecto (h), deca (da) y deci (d) no son múltiplos de 10^3 ó 10^{-3} y se utilizan con poca frecuencia. El otro prefijo que no es múltiplo de 10^3 ó 10^{-3} es centi (c). Los prefijos que se usan con más frecuencia en este libro se escriben en rojo. Observése que todos los símbolos de prefijos múltiplos de 10^6 y superiores se escriben en mayúsculas; las demás se escriben con minúsculas.

PREFIJOS

Muchas veces es necesario trabajar con medidas que son mucho más pequeñas o mucho mayores que la unidad estándar del SI. En estas situaciones, se pueden usar otras unidades que son múltiplos o submúltiplos (potencias de 10) de las unidades SI estándar. Estas unidades se expresan mediante un prefijo como, por ejemplo, el prefijo "kilo" que significa 1000, o 10^3, o el prefijo "micro" que significa 0,000 001, o 10^{-6}. En la tabla 1.1 se relacionan los prefijos de los múltiplos y submúltiplos más corrientes de las unidades del SI. Los prefijos pueden aplicarse a cualquier unidad del SI; por ejemplo, 0,001 segundos es un milisegundo (ms); 1 000 000 watts es un megawatt (MW).

PROBLEMA PRÁCTICO 1.1

Use los prefijos para describir: (*a*) el retraso de la señal al propagarse por el cable de la televisión por cable que es de 0,000 000 3 segundos o (*b*) la longitud de la circunferencia de un meridiano terrestre que es de 40 000 000 metros.

OTROS SISTEMAS DE UNIDADES

Además del SI, en determinadas circunstancias se usan otros sistemas de unidades. Uno de estos sistemas es el *sistema cgs*, basado en el centímetro, el gramo y el segundo. Otras unidades cgs son la dina (unidad de fuerza) y el erg (unidad de energía).

Existen otros sistemas de unidades como el sistema técnico inglés utilizado en los EE.UU. y otros países de habla inglesa, en el que se toma el pie como unidad de longitud, el segundo como unidad de tiempo y la libra como unidad funda-

mental de fuerza. En el capítulo 4, veremos que la masa es una elección mejor que la fuerza como unidad fundamental, por tratarse de una propiedad intrínseca de un objeto que es independiente de su localización. Actualmente, el sistema técnico inglés se define en base a las unidades del SI.

1.3 CONVERSIÓN DE UNIDADES

Cuando se usan distintos sistemas de unidades es importante saber cómo convertir magnitudes expresadas en una unidad de un sistema en unidades de otro sistema. Cuando estas magnitudes se suman, se multiplican o se dividen en una ecuación algebraica, las unidades pueden tratarse como cualquier otra magnitud algebraica. Por ejemplo, supongamos que deseamos hallar la distancia recorrida en 3 horas (h) por un coche que se mueve con una velocidad constante de 80 kilómetros por hora (km/h). La distancia x es precisamente la velocidad v multiplicada por el tiempo t:

$$x = vt = \frac{80 \text{ km}}{\cancel{\text{h}}} \times 3 \cancel{\text{h}} = 240 \text{ km}$$

Eliminamos la unidad de tiempo, la hora, igual que haríamos con cualquier otra magnitud algebraica para obtener la distancia en la unidad de longitud correspondiente, el kilómetro. Este método permite fácilmente pasar de una unidad de distancia a otra. A continuación, supongamos que queremos convertir los kilómetros (km) en millas (mi). Teniendo en cuenta que 1 mi = 1,609 km (véase el apéndice A). Si dividimos los dos miembros de esta igualdad por 1,609 km se obtiene

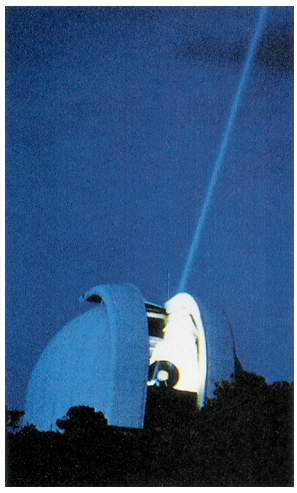
$$\frac{1 \text{ mi}}{1{,}609 \text{ km}} = 1$$

Obsérvese que el factor anterior es una fracción igual a 1. El factor (1 mi)/(1,609 km) se denomina **factor de conversión**. Todos los factores de conversión tienen el valor de 1 y se utilizan para pasar una magnitud expresada en una unidad de medida a su equivalente en otra unidad de medida.

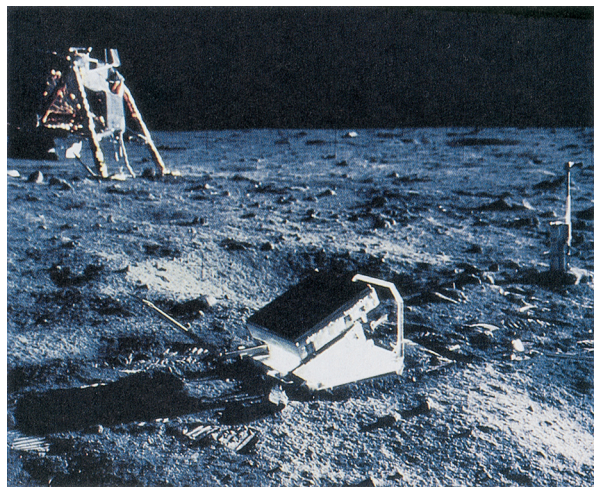
$$240 \text{ km} = 240 \cancel{\text{km}} \times \frac{1 \text{ mi}}{1{,}609 \cancel{\text{km}}} = 149 \text{ mi}$$

Escribiendo de forma explícita las unidades, no es necesario pensar si hay que multiplicar o dividir por 1,609 para pasar de kilómetros a millas, ya que las unidades indican si hemos escogido el factor correcto o el incorrecto.

! Si las unidades de una cantidad y el factor de conversión no se simplifican para dar las unidades deseadas, significa que la conversión no se ha realizado correctamente.



(*a*)



(*b*)

(*a*) Haces de láser emitidos desde el Observatorio Macdonald para medir la distancia hasta la Luna. Esta distancia se mide con un error de pocos centímetros midiendo el tiempo transcurrido en el viaje de ida y vuelta del rayo láser a la Luna después de reflejarse en un espejo (*b*) allí emplazado por los astronautas del *Apolo* 14. *(a, McDonald Observatory; b, Bruce Coleman).*

Ejemplo 1.1 Uso de los factores de conversión

Un empleado de una empresa con sede en Estados Unidos ha de viajar, por encargo de su empresa, a un país donde las señales de tráfico muestran la distancia en kilómetros y los velocímetros de los coches están calibrados en kilómetros por hora. Si con su vehículo viaja a 90 km por hora, ¿a cuánto equivale su velocidad expresada en metros por segundo y en millas por hora?

PLANTEAMIENTO Utilizaremos el hecho de que 1000 m = 1 km, 60 s = 1 min y 60 min = 1 h para convertir los kilómetros por hora en metros por segundo. Se multiplica la magnitud 90 km/h por una serie de factores de conversión de valor 1 de modo que el valor de la velocidad no varía. Para convertir la velocidad en millas por hora, se utiliza el factor de conversión (1 mi)/(1,609 km) = 1.

SOLUCIÓN

1. Multiplicar 90 km/h por los factores de conversión que transforman los kilómetros en metros y las horas en segundos:

$$\frac{90\ \text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} = \boxed{25\ \text{m/s}}$$

2. Multiplicar 90 km/h por 1 mi/1,61 km:

$$\frac{90\ \text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \text{mi}}{1{,}609\ \text{km}} = \boxed{56\ \text{mi/h}}$$

COMPROBACIÓN Verificar que las unidades, al final de cada paso, son las correctas. Si no se han tenido en cuenta los factores de conversión de forma correcta, por ejemplo si se multiplica por 1 km/1000 m en vez de por 1000 m/1 km, las unidades al final no son las correctas.

OBSERVACIÓN El primer paso puede simplificarse sustituyendo 1 h/3600 s por 1h/3,6 ks y eliminando los prefijos en ks y km. Es decir

$$\frac{90\ \text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3{,}6\ \text{ks}} = \boxed{25\ \text{m/s}}$$

Eliminar estos prefijos equivale a dividir el numerador y el denominador por 1000.

Puede resultar útil memorizar los resultados de este ejemplo, ya que puede facilitar la conversión de velocidades habituales rápidamente

$$25\ \text{m/s} = 90\ \text{km/h} \approx (60\ \text{mi/h})$$

Conocer estos valores puede ser útil para convertir de forma más rápida las velocidades a unidades con las que esté más familiarizado.

(Eunice Harris/Photo Researchers.)

1.4 DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

Dar un valor de una magnitud física comporta dar un número y la unidad en que está expresado. La unidad indica el estándar que se usa para la medida y la cifra nos muestra la comparación con una cantidad estándar. No obstante, para saber lo que se está midiendo hay que conocer la dimensión de la magnitud física. La longitud, el tiempo y la masa son dimensiones. La distancia entre dos objetos tiene dimensiones de longitud y expresamos esta relación como $[d] = \text{L}$, donde $[d]$ representa la dimensión de la distancia d y L es la dimensión de la longitud. Todas las dimensiones se representan con una letra mayúscula; así, T y M representan, respectivamente, las dimensiones del tiempo y de la masa. Las dimensiones de muchas magnitudes físicas pueden expresarse en función de estas tres dimensiones fundamentales. Por ejemplo, el área A de una superficie. Puesto que el área es el producto de dos longitudes, se dice que tiene dimensiones de longitud por longitud, o longitud al cuadrado, que suele escribirse $[A] = \text{L}^2$. En esta ecuación, $[A]$ representa la dimensión de A, y L es la dimensión de la longitud. La velocidad tiene dimensiones de longitud dividida por tiempo o L/T. Las dimensiones de otras magnitudes, tales como fuerza o energía, se escriben en función de las magnitudes fundamentales longitud, tiempo y masa. La suma de dos magnitudes físicas sólo tiene sentido si ambas tienen las mismas di-

mensiones. Por ejemplo, no podemos sumar un área a una velocidad y obtener una suma que signifique algo. Si tenemos una ecuación como

$$A = B + C$$

las magnitudes A, B y C deben tener las tres las mismas dimensiones. La suma de B y C exige que las dos magnitudes estén además expresadas en las mismas unidades. Por ejemplo, si B es un área de 500 cm^2 y C es 4 m^2, debemos convertir B en m^2 o C en cm^2 para hallar la suma de las dos áreas.

A veces pueden detectarse errores en un cálculo comprobando las dimensiones y unidades de las magnitudes que intervienen en él. Supóngase, por ejemplo, que estamos utilizando erróneamente la fórmula $A = 2\pi r$ para el área de un círculo. Veremos inmediatamente que esto no puede ser correcto, ya que $2\pi r$, tiene dimensiones de longitud, mientras que el área tiene dimensiones de longitud al cuadrado.

> **!** La coherencia dimensional es una condición necesaria, pero no suficiente, para que una ecuación sea correcta. Al expresar el área de un círculo el análisis dimensional no indicará si la expresión correcta es πr^2 o $2\pi r^2$. (La expresión correcta es πr^2.)

Ejemplo 1.2 Las dimensiones físicas de la presión

La presión de un fluido en movimiento depende de su densidad ρ y de su velocidad v. Determinar una combinación sencilla de densidad y velocidad que nos dé las dimensiones correctas de la presión.

PLANTEAMIENTO En la tabla 1.2 se ve que la presión tiene dimensiones de $M/(LT^2)$, la densidad es M/L^3 y la velocidad L/T. Además, se observa que tanto la presión como la densidad tienen unidades de masa en el numerador, mientras que la velocidad no contiene la dimensión M. Por lo tanto, tenemos que multiplicar o dividir dimensiones de densidad y dimensiones de velocidad para obtener la masa en las dimensiones de la presión. Para determinar con exactitud la relación comenzaremos dividiendo las unidades de presión por las de densidad e inspeccionemos el resultado con respecto a las dimensiones de la velocidad.

SOLUCIÓN

1. Se dividen las unidades de presión por las de densidad:
$$\frac{[P]}{[\rho]} = \frac{M/LT^2}{M/L^3} = \frac{L^2}{T^2}$$

2. El resultado tiene dimensiones de v^2. Las dimensiones de la presión son las mismas que las de densidad multiplicadas por las de velocidad al cuadrado:
$$[P] = [\rho][v^2] = \frac{M}{L^3} \times \left(\frac{L}{T}\right)^2 = \frac{M}{L^3} \times \frac{L^2}{T^2} = \boxed{\frac{M}{LT^2}}$$

COMPROBACIÓN Dividir las dimensiones de la presión por las dimensiones de la velocidad al cuadrado y el resultado tiene dimensiones de densidad $[P]/[v^2] = (M/LT^2)/(L^2/T^2) = M/L^3 = [\rho]$.

1.5 CIFRAS SIGNIFICATIVAS Y ÓRDENES DE MAGNITUD

Muchos de los números que se manejan en la ciencia son el resultado de una medida y, por lo tanto, sólo se conocen con cierta incertidumbre experimental. La magnitud de esta incertidumbre, que depende de la habilidad del científico y del aparato utilizado, frecuentemente sólo puede estimarse. Se suele dar una indicación aproximada de la incertidumbre de una medida mediante el número de dígitos que se utilizan. Por ejemplo, si decimos que la longitud de una mesa es 2,50 m, queremos indicar que probablemente su longitud se encuentra entre 2,495 m y 2,505 m; es decir, conocemos su longitud con una exactitud aproximada de ±0,005 m = ±0,5 cm de la longitud establecida. Si utilizamos un metro en el que se puede apreciar el milímetro y medimos esta misma longitud de la mesa cuidadosamente, podemos estimar que hemos medido la longitud con una precisión de ±0,5 mm, en lugar de ±0,5 cm. Indicamos esta precisión utilizando cuatro dígitos, como por ejemplo, 2,503 m, para expresar la longitud. Recibe el nombre de **cifra significativa** todo dígito (exceptuando el cero cuando

Tabla 1.2 Dimensiones de las magnitudes físicas

Magnitud	Símbolo	Dimensión
Área	A	L^2
Volumen	V	L^3
Velocidad	v	L/T
Aceleración	a	L/T^2
Fuerza	F	ML/T^2
Presión (F/A)	p	M/LT^2
Densidad (M/V)	ρ	M/L^3
Energía	E	ML^2/T^2
Potencia (E/T)	P	ML^2/T^3

se utiliza para situar el punto decimal) cuyo valor se conoce con seguridad. El número 2,50 tiene tres cifras significativas; 2,503 tiene cuatro. El número 0,00103 tiene tres cifras significativas. (Los tres primeros ceros no son cifras significativas, ya que simplemente sitúan la coma decimal.) En notación científica, este número se escribiría como $1{,}03 \times 10^{-3}$. Un error muy común entre los estudiantes, particularmente desde que se ha generalizado el uso de calculadoras de bolsillo, es arrastrar en el cálculo muchos más dígitos de los que en realidad se requieren.

Supongamos, por ejemplo, que medimos el área de un campo de juego circular midiendo el radio en pasos y utilizando la fórmula del área $A = \pi r^2$. Si estimamos que la longitud del radio es 8 m y utilizamos una calculadora de 10 dígitos para determinar el valor del área, obtenemos $\pi(8\text{ m})^2 = 201{,}0619298\text{ m}^2$. Los dígitos situados detrás del punto decimal no sólo dificultan el cálculo sino que inducen a confusión respecto a la exactitud con la que conocemos el área. Una regla general válida cuando se manejan diferentes números en una operación de multiplicación o división es:

> El número de cifras significativas del resultado de una multiplicación o división no debe ser mayor que el menor número de cifras significativas de cualesquiera de los factores.

En el ejemplo anterior sólo se conoce una cifra significativa del radio; por lo tanto, sólo se conoce una cifra significativa del área. Esta se debe expresar como $2 \times 10^2\text{ m}^2$, lo que implica que el área está comprendida entre 150 m^2 y 250 m^2.

La precisión de la suma o resta de dos medidas depende de la precisión menor de estas medidas. Una regla general es:

> El resultado de la suma o resta de dos números carece de cifras significativas más allá de la última cifra decimal en que ambos números originales tienen cifras significativas.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 1.1

¿Cuántas cifras significativas tiene el número 0,010 457?

! Los valores exactos tienen un número ilimitado de cifras significativas. Por ejemplo, un valor obtenido tras contar mesas no tiene incertidumbre, es un resultado exacto. Además, el factor de conversión 1 m/100 cm es un valor exacto porque 1 m es exactamente igual a 100 cm.

! Cuando trabajamos con números con incertidumbres debemos asegurarnos de no incluir más dígitos de los que incluye la precisión de las medidas.

Ejemplo 1.3 Cifras significativas

Determinar la resta de 1,040 de 1,21342.

PLANTEAMIENTO El primer número, 1,040, tiene sólo tres cifras significativas tras la coma decimal, mientras que el segundo, 0,21342, tiene cinco. De acuerdo con la regla anterior, la suma sólo puede tener tres cifras significativas después de la coma decimal.

SOLUCIÓN

Restar los números manteniendo sólo 3 dígitos más allá de la coma decimal: $1{,}213\,42 - 1{,}040 = 0{,}173\,42 = \boxed{0{,}173}$

COMPROBACIÓN La respuesta no puede tener una precisión mayor que la cifra menos precisa de la operación, es decir, 1,040 y, por lo tanto, la respuesta tiene, más allá de la coma, tres cifras significativas.

OBSERVACIÓN En este ejemplo, los números tienen cuatro y seis cifras significativas, pero la diferencia tiene sólo tres. La mayoría de los ejemplos y ejercicios de este libro tienen dos, tres o, excepcionalmente, cuatro cifras significativas.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.2 Aplicar la regla apropiada para determinar el número de cifras significativas en las operaciones: (*a*) $1{,}58 \times 0{,}03$, (*b*) $1{,}4 + 2{,}53$, (*c*) $2{,}456 - 2{,}453$.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

El manejo de números muy grandes o muy pequeños se simplifica utilizando la notación científica. En esta notación, el número se escribe como el producto de un número entre 1 y 10 y una potencia de 10, por ejemplo 10^2 (= 100) ó 10^3 (= 1000). Por ejemplo, el número 12 000 000 se escribe $1{,}2 \times 10^7$; la distancia entre la Tierra y el Sol, 150 000 000 000 m, aproximadamente, se escribe $1{,}5 \times 10^{11}$ m, donde hemos supuesto que ninguno de los ceros que sigue al cinco es una cifra significativa. Si alguno de los ceros que sigue al cinco fuera significativo escribiríamos el número

como $1{,}500 \times 10^{11}$ m. El número 11 en 10^{11} se llama **exponente**. Cuando los números son menores que 1, el exponente es negativo. Por ejemplo, $0{,}1 = 10^{-1}$, y $0{,}0001 = 10^{-4}$. El diámetro de un virus es, aproximadamente, igual a 0,000 000 01 m $= 1 \times 10^{-8}$ m. Observemos que al escribir los números de esta forma se identifican claramente las cifras significativas. Por ejemplo, en $1{,}5 \times 10^{11}$ m hay sólo dos cifras significativas (el 1 y el 5).

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Potencias

PROBLEMA PRÁCTICO 1.3
Aplicar la regla apropiada para las cifras significativas y calcular $2{,}34 \times 10^2 + 4{,}93$.

Utilice la siguiente estrategia de resolución de problemas para hacer cálculos con notación científica.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Notación científica

PLANTEAMIENTO Si las cifras de un determinado cálculo son muy grandes o muy pequeñas, es conveniente escribirlas en notación científica. Esta notación permite determinar fácilmente el número de cifras significativas que tiene una cantidad y hace más fácil llevar a cabo los cálculos.

SOLUCIÓN Use las siguientes recomendaciones para resolver problemas con notación científica.

1. Al multiplicar dos números con notación científica, los exponentes se suman; en la división, se restan. Estas reglas pueden comprobarse fácilmente en los siguientes ejemplos:

   Ejemplo: $10^2 \times 10^3 = 100 \times 1000 = 100\,000 = 10^5$

   Ejemplo: $\dfrac{10^2}{10^3} = \dfrac{100}{1000} = \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$

2. En la notación científica, 10^0 se define como 1. En efecto, dividamos por ejemplo 1000 por sí mismo. Resulta

   Ejemplo: $\dfrac{1000}{1000} = \dfrac{10^3}{10^3} = 10^{3-3} = 10^0 = 1$

3. Vaya con cuidado al sumar o restar números en notación científica si los exponentes no coinciden

   Ejemplo: $(1{,}200 \times 10^2) + (8 \times 10^{-1}) = 120{,}0 + 0{,}8 = 120{,}8$

4. Para hacer el cálculo anterior sin convertir las cifras a la forma decimal hay que reescribirlas de forma que tengan el mismo exponente

   Ejemplo: $(1200 \times 10^{-1}) + (8 \times 10^{-1}) = 1208 \times 10^{-1} = 120{,}8$

5. Cuando se eleva una potencia a otra potencia los exponentes se multiplican

   Ejemplo: $(10^2)^4 = 10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^8$

COMPROBACIÓN Al convertir a notación científica cifras inferiores a uno asegúrese que el exponente sea negativo. Compruebe con atención cuándo los exponentes se suman, se restan o se multiplican, ya que si se realiza la operación equivocada se obtiene una respuesta incorrecta a nivel de potencias de 10.

OBSERVACIÓN Al resolver un problema evite introducir en la calculadora resultados intermedios; es preferible conservar estos resultados en la memoria de la calculadora. Cuando se tengan que introducir los resultados intermedios en la calculadora, añada uno o dos dígitos más (no significativos). Esta técnica sirve para minimizar errores de redondeo.

Todos los exponentes son adimensionales y no tienen unidades.

Ejemplo 1.4 ¿Cuánta agua?

Un litro (L) es el volumen de un cubo de 10 cm × 10 cm × 10 cm. Si una persona bebe 1 L de agua, ¿qué volumen en centímetros cúbicos y en metros cúbicos ocupará este líquido en su estómago?

PLANTEAMIENTO El volumen de un cubo de lado ℓ es $V = \ell^3$. El volumen en cm^3 se determina directamente a partir de $\ell = 10$ cm. Para determinar el volumen en m^3 hay que transformar los cm^3 en m^3 utilizando el factor de conversión 1 cm $= 10^{-2}$ m.

SOLUCIÓN

1. Calcular el volumen en cm^3:

$$V = \ell^3 = (10\text{ cm})^3 = 1000\text{ cm}^3 = \boxed{10^3\text{ cm}^3}$$

2. Convertir a m^3:

$$10^3\text{ cm}^3 = 10^3\text{ cm}^3 \times \left(\frac{10^{-2}\text{ m}}{1\text{ cm}}\right)^3$$

El factor de conversión (igual a 1) puede elevarse a la tercera potencia sin modificar su valor, permitiéndonos cancelar las unidades implicadas.

$$= 10^3\text{ cm}^3 \times \frac{10^{-6}\text{ m}^3}{1\text{ cm}^3} = \boxed{10^{-3}\text{ m}^3}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que las respuestas se dan en m^3 y en cm^3. Estas respuestas son consistentes con el hecho de que el volumen es una longitud elevada al cubo. Obsérvese también que 10^3 es mayor que 10^{-3}, lo cual es consistente con que el metro es mayor que el centímetro.

Ejemplo 1.5 Recuento de átomos

En 12 g de carbono existen $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ átomos de esta sustancia (número de Avogadro). Si contáramos un átomo por segundo, ¿cuánto tiempo tardaríamos en contar los átomos de 1 g de carbono? Expresar el resultado en años.

PLANTEAMIENTO Necesitamos determinar el número total de átomos, N, que hemos de contar y tener en cuenta que el número contado es igual a la tasa de recuento R multiplicada por el tiempo t.

SOLUCIÓN

1. El tiempo es igual al número total de átomos N dividido por la tasa de recuento $R = 1$ átomo/s:

$$N = Rt$$

2. Determinar el número de átomos de carbono en 1 g:

$$N = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\text{ átomos}}{12{,}0\text{ g}} = 5{,}02 \times 10^{22}\text{ átomos}$$

3. Calcular el número de segundos necesarios para contar los átomos si contamos 1 por segundo:

$$t = \frac{N}{R} = \frac{5{,}02 \times 10^{22}\text{ átomos}}{1\text{ átomo/s}} = 5{,}02 \times 10^{22}\text{ s}$$

4. Calcular el número de segundos que contiene un año:

$$n = \frac{365\ \cancel{\text{d}}}{1{,}00\text{ a}} \times \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{d}}} \times \frac{3600\text{ s}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}15 \times 10^7\text{ s/a}$$

5. Utilizar el factor de conversión $3{,}15 \times 10^7$ s/a (una magnitud que conviene recordar) y convertir la respuesta del paso 3 en años:

$$t = 5{,}02 \times 10^{22}\text{ s} \times \frac{1{,}00\text{ a}}{3{,}15 \times 10^7\text{ s}}$$

$$= \frac{5{,}02}{3{,}15} \times 10^{22-7}\text{ a} = \boxed{1{,}59 \times 10^{15}\text{ a}}$$

COMPROBACIÓN La respuesta puede verificarse estimando que si se necesitan aproximadamente 10^{22} segundos para contar los átomos en un gramo de carbono y un año son unos 10^7 segundos, se necesitarían $10^{22}/10^7 = 10^{15}$ años.

OBSERVACIÓN El tiempo requerido es, aproximadamente, 100 000 veces la edad del universo.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.4 Si dividiéramos esta tarea de modo que cada persona contase átomos diferentes, ¿cuántos años tardaría un equipo formado por 5000 millones (5×10^9) de personas para contar los átomos que contiene 1 g de carbono?

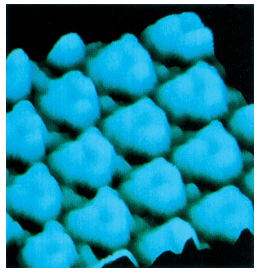
Tabla 1.3 El universo por órdenes de magnitud

Tamaño o distancia	(m)	Masa	(kg)	Intervalo de tiempo	(s)
Protón	10^{-15}	Electrón	10^{-30}	Tiempo invertido por la luz en atravesar un núcleo	10^{-23}
Átomo	10^{-10}	Protón	10^{-27}	Periodo de la radiación de luz visible	10^{-15}
Virus	10^{-7}	Aminoácido	10^{-25}	Periodo de las microondas	10^{-10}
Ameba gigante	10^{-4}	Hemoglobina	10^{-22}	Periodo de semidesintegración de un muón	10^{-6}
Nuez	10^{-2}	Virus de la gripe	10^{-19}	Periodo del sonido audible más alto	10^{-4}
Ser humano	10^{0}	Ameba gigante	10^{-8}	Periodo de las pulsaciones del corazón humano	10^{0}
Montaña más alta	10^{4}	Gota de lluvia	10^{-6}	Periodo de semidesintegración de un neutrón libre	10^{3}
Tierra	10^{7}	Hormiga	10^{-4}	Periodo de rotación terrestre	10^{3}
Sol	10^{9}	Ser humano	10^{2}	Periodo de revolución terrestre alrededor del Sol	10^{7}
Distancia Tierra-Sol	10^{11}	Cohete espacial Saturno 5	10^{6}		
Sistema solar	10^{13}	Pirámide	10^{10}	Vida media de un ser humano	10^{9}
Distancia de la estrella más cercana	10^{16}	Tierra	10^{24}	Periodo de semidesintegración del plutonio 239	10^{12}
		Sol	10^{30}	Vida media de una cordillera	10^{15}
Galaxia Vía Láctea	10^{21}	Galaxia Vía Láctea	10^{41}	Edad de la Tierra	10^{17}
Universo visible	10^{26}	Universo	10^{52}	Edad del universo	10^{18}

ORDEN DE MAGNITUD

Cuando se realizan cálculos aproximados o comparaciones se suele redondear un número hasta la potencia de 10 más próxima. Tal número recibe el nombre de **orden de magnitud**. Por ejemplo, la altura de un pequeño insecto, digamos un hormiga, puede ser 8×10^{-4} m ó, aproximadamente, 10^{-3} m. Diremos que el orden de magnitud de la altura de una hormiga es de 10^{-3} m. De igual modo, como la altura de la mayoría de las personas se encuentra próxima a 2 m, podemos redondear este número y decir que el orden de magnitud de la altura de una persona es $h \sim 10^{0}$, donde el símbolo $\sim$ significa "es del orden de magnitud de". Esto no quiere decir que la altura típica de una persona sea realmente de 1 m, sino que está más próxima a 1 m que a 10 m ó $10^{-1} = 0{,}1$ m. Podemos decir que una persona típica es tres órdenes de magnitud más alta que una hormiga típica, queriendo decir con esto que el cociente entre las alturas es, aproximadamente, igual a 10^{3} (relación 1000 a 1). Un orden de magnitud no proporciona cifras que se conozcan con precisión; es decir, debemos considerar que no tiene cifras significativas. La tabla 1.3 especifica los valores de los órdenes de magnitud de algunas longitudes, masas y tiempos relacionados con la Física.

En muchos casos, el orden de magnitud de una cantidad puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples. El físico Enrico Fermi era un maestro en el cálculo de respuestas aproximadas a cuestiones ingeniosas que parecían a primera vista imposibles de resolver por la limitada información disponible. El siguiente es un ejemplo de problema de Fermi.



Moléculas de benceno del orden de 10^{-10} m de diámetro, vistas mediante un microscopio electrónico de barrido. *(IBM Research, Almaden Research Center.)*

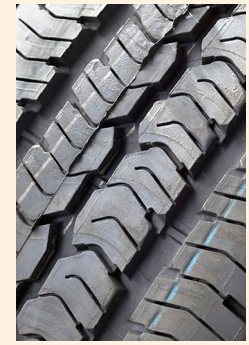
El diámetro de la galaxia Andrómeda es del orden de 10^{21} m. *(Smithsonian Institution.)*

Distancias familiares en nuestro mundo cotidiano. La altura de la muchacha es del orden de 10^{0} m y la de la montaña de 10^{4} m. *(Kent and Donnan Dannon/Photo Researchers.)*

Ejemplo 1.6 Desgaste de los neumáticos

¿Qué espesor de la banda de caucho de un neumático de automóvil se ha desgastado en un recorrido de 1 km?

PLANTEAMIENTO Supongamos que el espesor de la banda de un neumático nuevo es de 1 cm. Quizás varíe en un factor de 2, pero desde luego no es 1 mm, ni tampoco 10 cm. Como los neumáticos deben reemplazarse cada 60 000 km, podemos admitir que la banda está gastada completamente después de recorrer esta distancia, es decir, que su espesor disminuye a razón de 1 cm cada 60 000 km.



(Corbis.)

SOLUCIÓN

Utilizar la estimación de desgaste de 1 cm por cada 60 000 km de recorrido para calcular la disminución de espesor en 1 km:

$$\frac{\text{desgaste de 1 cm}}{\text{60 000 km recorrido}} = \frac{\text{desgaste de } 1{,}7 \times 10^{-5}\ \text{cm}}{\text{1 km recorrido}}$$

$$\approx \boxed{2 \times 10^{-7}\ \text{m de desgaste por km recorrido}}$$

COMPROBACIÓN Si se multiplica $1{,}7 \times 10^{-5}$ cm/km por 60 000 km se obtiene, aproximadamente, 1 cm, que es el espesor de la banda de un neumático nuevo.

OBSERVACIÓN El diámetro de los átomos es de unos 2×10^{-10} m. Así, el grosor desgastado por cada kilómetro de recorrido es equivalente a 1000 diámetros atómicos.

Ejemplo 1.7 ¿Cuántos granos de arena hay en una playa? *Póngalo en su contexto*

Para evitar caer en la somnolencia durante una clase después de un día cargado de actividades, no hay nada mejor que este reto que propone un profesor de física a sus alumnos consistente en estimar cuántos granos de arena hay en una playa.

PLANTEAMIENTO Primero tenemos que plantearnos qué características asumimos que tiene la playa y su arena. Suponemos que la playa ocupa una zona de forma rectangular de 500 m de largo, 100 de ancho y que la arena tiene unos 3 m de profundidad. Una búsqueda intensa mediante Internet nos lleva a estimar que los granos de arena tienen diámetros que oscilan entre 0,04 mm y 2 mm, pero en nuestro problema consideramos que los granos de arena son esferas con un diámetro medio de 1 mm. Por otra parte, suponemos que los granos están tan juntos entre ellos, que el volumen del espacio entre ellos es despreciable comparado con el volumen de la arena.

(Corbis.)

SOLUCIÓN

1. El volumen V_B de la playa es igual al número N de granos por el volumen de un grano V_G:
2. Usando la fórmula del volumen de una esfera, se calcula el volumen de un grano de arena:
3. Se despeja el número de granos. En nuestro cálculo los números tienen una cifra significativa únicamente, por lo que la respuesta también viene expresada con esta precisión:

$$V_B = NV_G$$

$$V_G = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_B = NV_G = N\frac{4}{3}\pi R^3$$

por lo tanto

$$N = \frac{3V_B}{4\pi R^3} = \frac{3(500\ \text{m})(100\ \text{m})(3\ \text{m})}{4\pi(0{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m})^3} = 2{,}9 \times 10^{14} \approx \boxed{3 \times 10^{14}}$$

COMPROBACIÓN Para comprobar la respuesta, divídase el volumen de la playa por el número de granos que se ha calculado. El resultado es $1{,}5 \times 10^5\ \text{m}^3 / 3 \times 10^{14}$ granos $= 5 \times 10^{-10}\ \text{m}^3$/grano.

Este resultado coincide con el volumen estimado de un grano de arena o $\frac{4}{3}\pi(0{,}5 \times 10^{-3})^3$.

OBSERVACIÓN Una forma de determinar el volumen del espacio entre los granos consiste en llenar un recipiente de un litro con arena seca. Una vez lleno echar agua en el recipiente hasta que la arena esté saturada de agua. Si suponemos que con 100 cm^3 de agua la arena del recipiente se satura, el volumen real de la arena es de 900 cm^3. Por lo tanto, hemos sobreestimado el número de granos de la playa. Teniendo en cuenta que la arena ocupa el 90% del volumen de su contenedor, en la playa hay un 90% de los granos calculados en el paso 3 de la solución del problema.

EJERCICIO PRÁCTICO 1.5 ¿Cuántos granos de arena hay en una playa que ocupa una zona de 2 km de longitud y de 500 m de anchura? *Suponer que la arena ocupa un espesor de 3,00 m y que el diámetro medio de los granos de arena es de 1,0 mm.*

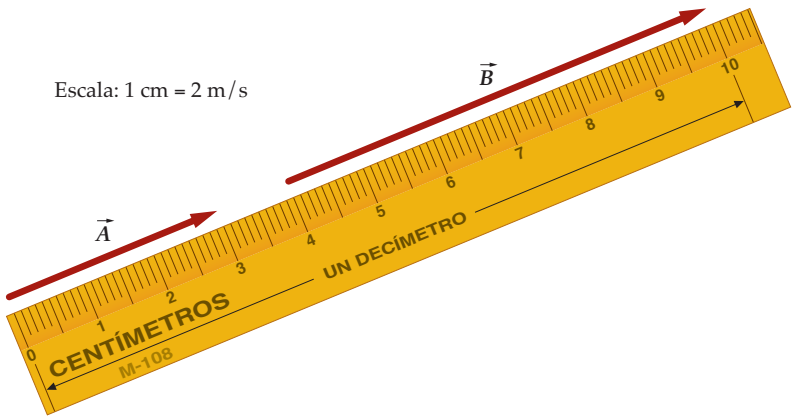


FIGURA 1.2 Los vectores velocidad $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen módulos de 6 m/s y 12 m/s, respectivamente. Las flechas que los representan están dibujadas usando una escala de 1 cm = 2 m/s, por lo que las flechas tienen longitudes de 3 y 6 cm, respectivamente.

1.6 VECTORES

Si un objeto se mueve siguiendo una línea recta, su movimiento queda descrito por la distancia que recorre o por la velocidad con que lo hace, e indicando si lo hace de derecha a izquierda o de izquierda a derecha de un punto de referencia, el origen. Pero cuando seguimos el movimiento en dos o tres dimensiones de un objeto para indicar la dirección, necesitamos algo más que simplemente un signo. Las magnitudes que tienen módulo y dirección, como la velocidad, la aceleración y la fuerza se denominan **vectores**. Aquellas magnitudes que no tienen dirección asociada, como la masa, el volumen y el tiempo, se denominan **escalares**.

Gráficamente representamos un vector usando una flecha. La longitud de la flecha, dibujada a escala, indica el módulo de la magnitud vectorial. La dirección de la flecha indica la dirección de la magnitud vectorial. En la figura 1.2 se muestra, por ejemplo, la representación gráfica de dos vectores velocidad, en la que un vector tiene el módulo doble del otro. Designaremos los vectores con letras negritas, como en $\vec{A}$. El módulo de $\vec{A}$ se escribe $|\vec{A}|$, $\|\vec{A}\|$, o simplemente A. En los vectores de la figura 1.2, $A = |\vec{A}| = 6$ m/s y $B = |\vec{B}| = 12$ m/s.

> ! Cuando se trabaja con vectores hay que incluir siempre una flecha sobre la letra para indicar que se trata de un vector. Una letra sin la flecha representa el módulo de la magnitud vectorial. Observése que el módulo de un vector nunca puede ser negativo.

1.7 PROPIEDADES GENERALES DE LOS VECTORES

Al igual que las magnitudes escalares, los vectores pueden sumarse, sustraerse y multiplicarse. Sin embargo, la tarea de manipular vectores algebraicamente requiere también tener en consideración su dirección. En esta sección, se examinan algunas de las propiedades generales de los vectores y cómo se trabaja con ellos (la multiplicación de dos vectores se tendrá en cuenta en los capítulos 6 y 9). A lo largo de la mayor parte de esta sección se consideran vectores desplazamiento, es decir, los vectores que representan un cambio en la posición, porque son los vectores más básicos. No obstante, estas propiedades no son exclusivas de los vectores desplazamiento sino que se aplican a todos los vectores.

DEFINICIONES BÁSICAS

Si un objeto se mueve desde A a B, tal como se muestra en la figura 1.3*a*, representamos su movimiento mediante una flecha que va desde A a B. La longitud de la flecha representa la distancia entre los dos puntos y la dirección de la flecha representa la dirección de A a B. El vector desplazamiento es un segmento de línea recta que une la posición inicial A con la posición final B y que representa el cambio en

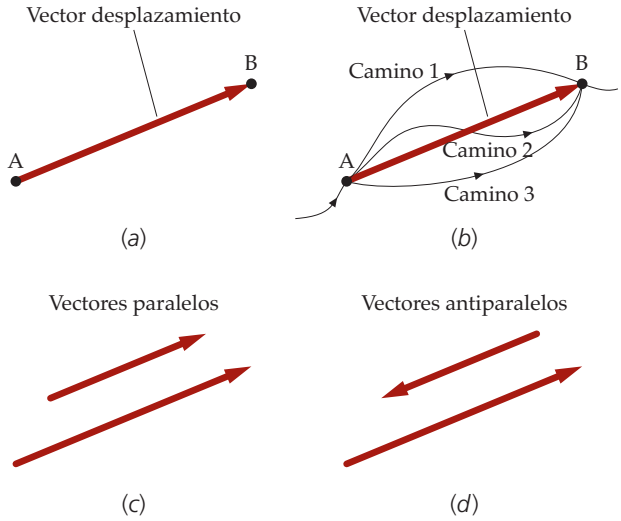


FIGURA 1.3 (*a*) Vector desplazamiento desde el punto A al punto B; (*b*) el mismo vector desplazamiento con tres caminos diferentes; (*c*) el mismo vector desplazamiento junto a un segundo vector desplazamiento paralelo pero de distinta longitud; (*d*) el mismo vector desplazamiento junto a un vector que es antiparalelo y que tiene distinta longitud.

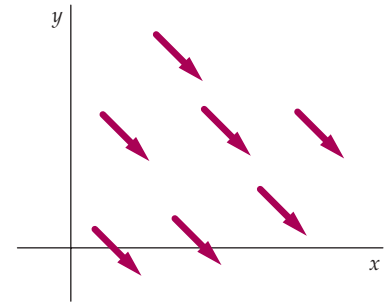


FIGURA 1.4 Los vectores son iguales si sus módulos y direcciones son los mismos. Todos los vectores de esta figura son iguales.

la posición de un objeto, aunque no representa el camino real que el objeto sigue. Por ejemplo, en la figura 1.3*b*, el mismo vector desplazamiento corresponde a los tres caminos distintos 1, 2 y 3 que unen el punto A con el B.

Si, tal como se muestra en la figura 1.3c, dos vectores desplazamiento tienen la misma dirección, son **paralelos**. Por el contrario, si tienen direcciones opuestas (figura 1.3*d*) son **antiparalelos**. Si dos vectores tienen el mismo módulo y la misma dirección se dice que son iguales. Gráficamente, esto significa que tienen la misma longitud y que son paralelos entre sí. Un vector puede dibujarse en distintos puntos siempre y cuando se dibuje con el módulo (la longitud) correcto y la dirección adecuada. Así, todos los vectores de la figura 1.4 son iguales. Si trasladamos o giramos el sistema de coordenadas, todos los vectores de la figura 1.4 permanecen iguales. Un *sistema de coordenadas* está formado por dos o tres ejes coordenados perpendiculares entre sí. Por tanto, un vector no depende del sistema de coordenadas utilizado para su representación (excepto los vectores de posición, que introduciremos en el capítulo 3).

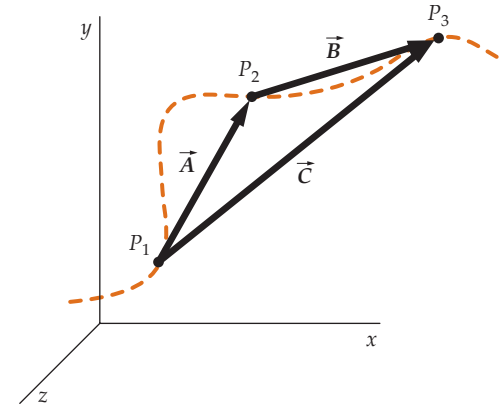


FIGURA 1.5

SUMA Y SUSTRACCIÓN DE VECTORES

Supongamos que vamos de excursión a un bosque y que la figura 1.5 muestra nuestra trayectoria cuando nos movemos desde el punto P_1 hasta un segundo punto P_2 y luego a un tercer punto P_3. El desplazamiento de P_1 a P_2 viene representado por el vector $\vec{A}$ y el desplazamiento de P_2 a P_3 por $\vec{B}$. Obsérvese que el vector desplazamiento depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria real que seguimos. El desplazamiento resultante de P_1 a P_3, llamado $\vec{C}$ es la suma de los dos desplazamientos sucesivos $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad 1.1$$

La suma de los dos vectores se denomina suma, el **vector suma**, o la **resultante**.

El signo + en la ecuación 1.1 se refiere al proceso denominado adición de vectores. Determinamos la suma geométricamente, ya que se tienen en cuenta tanto el módulo como la dirección de los vectores. Dos vectores desplazamiento se suman gráficamente situando el origen de uno en el extremo del otro (figura 1.6). El vector resultante se extiende desde el origen del primer vector al extremo final del segundo. Este método para la suma de vectores se denomina "**uno a continuación del otro**".

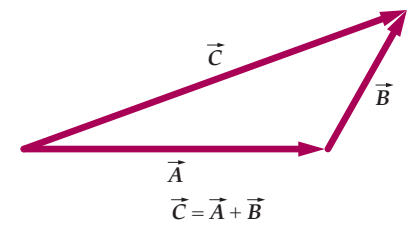


FIGURA 1.6 Método para la suma de vectores que consiste en situar los dos vectores uno a continuación del otro.

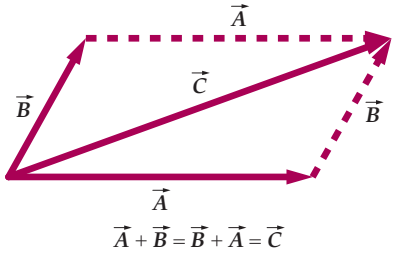


FIGURA 1.7 Método del paralelogramo para la suma de vectores.

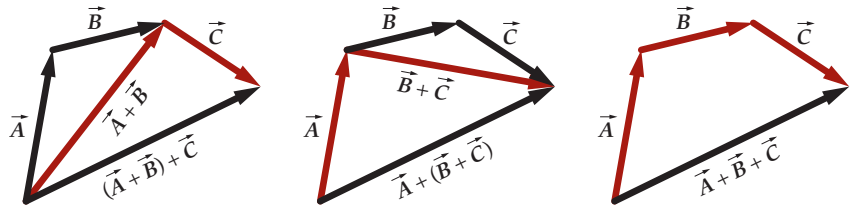


FIGURA 1.8 La suma de vectores es asociativa $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.

Una forma equivalente de sumar vectores es el llamado **método del paralelogramo**, que consiste en desplazar $\vec{B}$ hasta que coincida su origen con el de $\vec{A}$ (figura 1.7). La diagonal del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual a $\vec{C}$. Como puede verse en la figura 1.7, no existe diferencia en el orden en que sumemos los vectores; es decir, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$. Por lo tanto, la suma de vectores obedece la propiedad conmutativa.

La suma de más de dos vectores, por ejemplo $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$, se lleva a cabo sumando primero dos de ellos (figura 1.8) y sumando el resultado al tercero. El orden en que se agrupan los vectores para sumarlos no importa, ya que la suma de vectores es asociativa, es decir, $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$.

Si los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo módulo pero tienen la dirección opuesta, el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es un vector de módulo cero. Esto se puede demostrar utilizando el método geométrico para construir gráficamente el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$. Cualquier vector de módulo cero se denomina vector $\vec{0}$. No tiene sentido hablar de la dirección de un vector de módulo cero, por lo que a lo largo de este libro no hablaremos ni usaremos notación vectorial para el vector cero. Por lo tanto, si $\vec{A} + \vec{B} = 0$, $\vec{B} = -\vec{A}$, y viceversa, donde el negativo de $\vec{A}$ se escribe como $-\vec{A}$. Por tanto, ambos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son uno el negativo del otro sólo si tienen el mismo módulo y direcciones opuestas.

La sustracción del vector $\vec{B}$ del $\vec{A}$, consiste en sumar a $\vec{A}$ el negativo de $\vec{B}$. El resultado es $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ (figura 1.10a). Un método alternativo de sustraer $\vec{B}$ de $\vec{A}$ consiste en sumar $\vec{B}$ a los dos lados de la ecuación $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ con lo que se obtiene $\vec{B} + \vec{C} = \vec{A}$, y gráficamente sumar $\vec{B}$ con $\vec{C}$. Para ello, se dibuja $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de modo que coincida su origen y luego se dibuja $\vec{C}$ del extremo de $\vec{B}$ al de $\vec{A}$.

> **!** Obsérvese que C no es igual a $A + B$ a menos que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ estén en la misma dirección. Es decir, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ no implica que $C = A + B$.

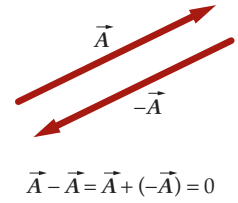


FIGURA 1.9

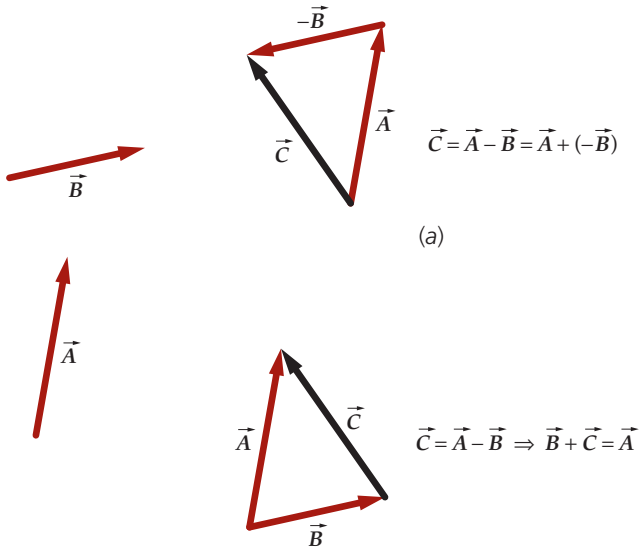


FIGURA 1.10 Formas alternativas de restar vectores. Sea $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$. (*a*) Para obtener $\vec{C}$, sumamos $-\vec{B}$ a $\vec{A}$. (*b*) Primero dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus orígenes unidos. $\vec{C}$ es el vector que sumamos a $\vec{B}$ para obtener $\vec{A}$.

Ejemplo 1.8 Desplazamiento *Conceptual*

Una persona se mueve 3 km hacia el este y luego 4 km hacia el norte. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

PLANTEAMIENTO El desplazamiento de la persona es el vector que va desde la posición inicial a la posición final. Para encontrar el desplazamiento resultante, se suman gráficamente los dos vectores desplazamiento. Para dibujar la resultante con exactitud, usamos una escala tal que 1 cm corresponda a un desplazamiento de 1 km.

SOLUCIÓN

1. Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los desplazamientos de 3,00 km hacia el este y de 4,00 km hacia el norte, respectivamente, y sea $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Dibuje $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con el origen de $\vec{B}$ en el extremo de $\vec{A}$, como se muestra en la figura 1.11. Usar la escala 1 cm = 1 km e incluir los ejes que señalan al norte y al este.
2. Determinar el módulo y la dirección de $\vec{C}$ usando el dibujo, teniendo en cuenta la escala 1 cm = 1 km, y un transportador.

La flecha que representa a $\vec{C}$ mide 5,00 cm, por lo que el módulo de $\vec{C}$ es de 5,00 km. La dirección de $\vec{C}$ es, aproximadamente, de 53° al nordeste.

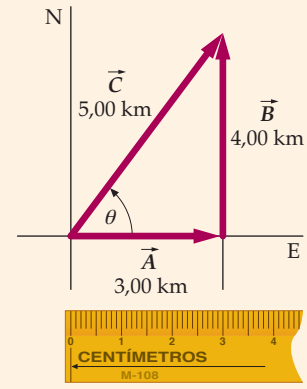


FIGURA 1.11

COMPROBACIÓN La distancia recorrida es 3,00 km + 4,00 km = 7,00 km y el módulo del desplazamiento neto es de 5 km. Este resultado es consistente con la frase "la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta". Igualmente, si nos movemos 3 km hacia el este y después 4 km hacia el norte es de esperar que estemos más de 45° al norte de nuestro punto de partida.

OBSERVACIÓN Un vector viene descrito por su módulo y dirección. En este ejemplo el desplazamiento resultante es un vector de longitud 5 km en una dirección 53,1° al norte del este.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

La expresión $3\vec{A}$, donde $\vec{A}$ es un vector arbitrario, corresponde a la suma $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A}$, es decir, $\vec{A} + \vec{A} + \vec{A} = 3\vec{A}$. Un vector $\vec{A}$ multiplicado por un escalar s es el vector $\vec{B} = s\vec{A}$, que tiene de módulo $|s|A$ y es paralelo a $\vec{A}$ si s es positivo, y antiparalelo a $\vec{A}$ si s es negativo. Las dimensiones de sA son las de s multiplicadas por las de $\vec{A}$. (Además, dividir $\vec{A}$ por un escalar s equivale a multiplicar $\vec{A}$ por $1/s$.)

COMPONENTES DE UN VECTOR

La suma y la resta algebraica de vectores se lleva a cabo expresando los vectores en función de sus componentes. La **componente** de un vector a lo largo de una línea en el espacio es la longitud de la proyección del vector sobre dicha línea. Se obtiene trazando una línea perpendicular a la línea desde el extremo o flecha de un vector, como indica la figura 1.12. Cuando se determinan las componentes x, y y z de un

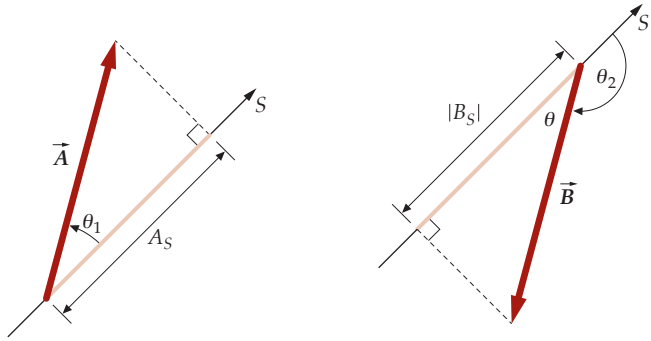


FIGURA 1.12 La componente de un vector en una dirección especificada es igual al módulo del vector multiplicado por el coseno del ángulo entre la dirección del vector y la dirección especificada. La componente del vector $\vec{A}$ en la dirección positiva de S es A_s siendo A_s positiva. La componente del vector $\vec{B}$ en la dirección positiva de S es B_s siendo B_s negativa.

vector se dice que se **descompone el vector** en sus componentes. Las componentes de un vector a lo largo de las direcciones x, y y z, ilustradas en la figura 1.13 para un vector en el plano xy, se denominan componentes rectangulares o cartesianas. Obsérvese que las componentes de un vector dependen del sistema de coordenadas utilizado para su representación, aunque el mismo vector no dependa de ello.

Para determinar las componentes de un vector usamos los triángulos rectángulos (véase la figura 1.13). Si θ es el ángulo comprendido entre $\vec{A}$ y el eje x, resulta

$$A_x = A\cos\theta \qquad 1.2$$

COMPONENTE x DE UN VECTOR

y

$$A_y = A\,\text{sen}\,\theta \qquad 1.3$$

COMPONENTE y DE UN VECTOR

donde A es el módulo del vector $\vec{A}$.

Si conocemos A_x y A_y, podemos obtener el ángulo θ a partir de

$$\text{tg}\,\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \theta = \text{arctg}\,\frac{A_y}{A_x} \qquad 1.4$$

y el módulo A a partir del teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad 1.5a$$

En tres dimensiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad 1.5b$$

Las componentes pueden ser positivas o negativas. La componente x de un vector es positiva si cuando nos movemos del origen hacia el extremo la coordenada x del vector aumenta. Por ejemplo, si $\vec{A}$ apunta en la dirección positiva de x, A_x es positiva y si $\vec{A}$ apunta en la dirección negativa de x, A_x es negativa.

Obsérvese que en la ecuación 1.4 la función inversa arctg no tiene un valor único. Este aspecto se practica en el ejemplo 1.9.

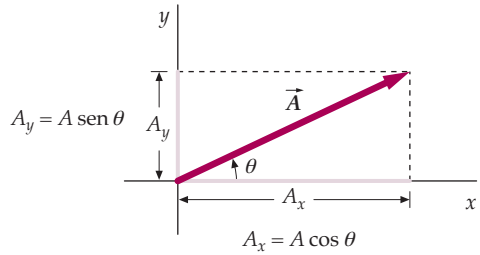


FIGURA 1.13 Componentes rectangulares de un vector. θ es el ángulo entre la dirección del vector y el sentido positivo de la dirección x. El ángulo comprendido entre el eje x y A es positivo si se recorre en el sentido contrario a las agujas de un reloj.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.6

Un coche recorre 20,0 km en dirección 30° noroeste. Se supone que el eje x apunta al este y el eje y al norte, como en la figura 1.14. Determinar las componentes x e y del vector desplazamiento del coche.

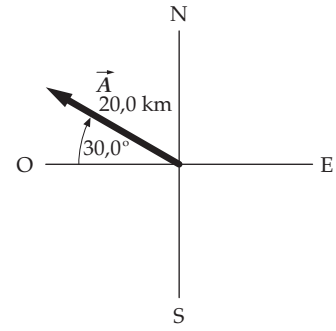


FIGURA 1.14

Cuando ya hemos expresado un vector en sus componentes, podemos manipular cada una de ellas individualmente. Consideremos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el plano xy. Las componentes rectangulares de cada vector y las de la suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ se muestran en la figura 1.15. Como puede verse, la ecuación vectorial $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es equivalente a las dos ecuaciones de las componentes:

$$C_x = A_x + B_x \qquad 1.6a$$

y

$$C_y = A_y + B_y \qquad 1.6b$$

En otras palabras, la suma de las componentes x es la componente x del vector resultante. El ángulo y el módulo del vector resultante se determinan, respectivamente, a partir de las ecuaciones 1.4 y 1.5a.

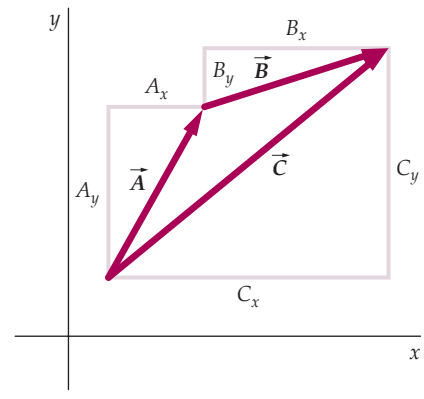


FIGURA 1.15

Ejemplo 1.9 El mapa del tesoro — *Póngalo en su contexto*

Suponga que usted trabaja en un centro turístico en una isla tropical y está encargado de diseñar una actividad para los turistas de búsqueda de un tesoro. Dispone de un mapa que le indica las direcciones a seguir para enterrar un "tesoro" en un lugar determinado. Usted no desea malgastar el tiempo dando vueltas por la isla, porque quiere acabar pronto para ir a la playa y hacer surfing. Las instrucciones son ir 3,00 km en dirección hacia el nordeste con un ángulo de 60° respecto del este y después moverse 4,00 km en dirección noroeste con un ángulo de 40° respecto del oeste. ¿En qué dirección debe moverse y cuánto tendrá que caminar para cumplir su objetivo con la máxima rapidez? Determine la respuesta (*a*) gráficamente y (*b*) usando componentes vectoriales.

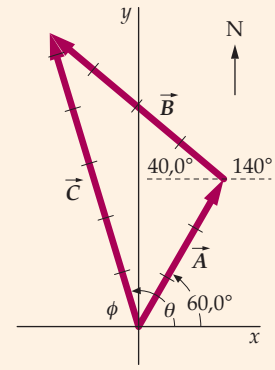


FIGURA 1.16

PLANTEAMIENTO En ambos casos hay que determinar la resultante del desplazamiento. En el apartado (*a*) use el método gráfico dibujando a escala cada uno de los desplazamientos y midiendo el desplazamiento resultante. Para el apartado (*b*) hay que descomponer cada vector en sus componentes individuales y utilizarlas para calcular el desplazamiento resultante.

SOLUCIÓN

(a) 1. Dibujamos el diagrama de suma de vectores a escala (figura 1.16). Primero trazamos los ejes coordenados correspondientes de modo que el eje x señale hacia el este y la dirección del eje y hacia el norte. A continuación, trazamos el primer vector desplazamiento $\vec{A}$ de 3,00 cm de largo formando un ángulo de 60° con el eje x, es decir, apuntando hacia el nordeste. Luego, a partir del extremo de $\vec{A}$ dibujamos el segundo vector $\vec{B}$ de 4,00 cm de largo, con un ángulo de 40° con la dirección oeste. (Necesitará un transportador para medir los ángulos). Finalmente, dibuje el vector resultante $\vec{C}$ uniendo el origen de $\vec{A}$ con el extremo de $\vec{B}$:

2. Determine la longitud de $\vec{C}$. Usando un transportador, mida el ángulo entre la dirección de $\vec{C}$ y la dirección -x:

$\vec{C}$ mide 5,40 cm de longitud. Por lo tanto, el módulo del desplazamiento resultante es de **5,40 km.** El ángulo entre el vector $\vec{C}$ y el eje $-x$ es, aproximadamente, de 73,2°. Por consiguiente, hay que caminar 5,40 km hacia el noroeste con un ángulo de **73,2° respecto a la dirección noroeste.**

(b) 1. Para resolver el problema utilizando las componentes vectoriales, sea $\vec{A}$ el primer desplazamiento y elegimos el eje x positivo en la dirección este y el eje y positivo en la dirección norte. Calculamos A_x y A_y de las ecuaciones 1.2 y 1.3:

$$A_x = (3{,}00\text{ km})\cos 60° = 1{,}50\text{ km}$$
$$A_y = (3{,}00\text{ km})\,\text{sen}\,60° = 2{,}60\text{ km}$$

2. De igual modo calculamos las componentes del segundo desplazamiento $\vec{B}$. El ángulo entre la dirección de $\vec{B}$ y la dirección $+x$ es 180,0° − 40,0° = 140°

$$B_x = (4{,}00\text{ km})\cos 140° = -3{,}06\text{ km}$$
$$B_y = (4{,}00\text{ km})\,\text{sen}\,140° = +2{,}57\text{ km}$$

3. Las componentes del desplazamiento resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ se obtienen por suma:

$$C_x = A_x + B_x = 1{,}50\text{ km} - 3{,}06\text{ km} = -1{,}56\text{ km}$$
$$C_y = A_y + B_y = 2{,}60\text{ km} + 2{,}57\text{ km} = 5{,}17\text{ km}$$

4. El teorema de Pitágoras nos permite obtener la magnitud de $\vec{C}$:

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 = (-1{,}56\text{ km})^2 + (5{,}17\text{ km})^2 = 29{,}2\text{ km}^2$$
$$C = \sqrt{29{,}2\text{ km}^2} = \boxed{5{,}40\text{ km}}$$

5. El cociente entre C_y y C_x es igual a la tangente del ángulo θ entre $\vec{C}$ y la dirección positiva de x. Al hacer los cálculos vaya con cuidado, ya que al valor de arctg que le devuelve la calculadora podría tener que sumarle 180°:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{C_y}{C_x} \quad \text{por lo tanto,}$$
$$\theta = \text{arctg}\,\frac{5{,}17\text{ km}}{-1{,}56\text{ km}} = \text{arctg}(-3{,}31)$$
$$= \text{o bien } -73{,}2° \quad \text{o} \quad (-73{,}2° + 180°)$$
$$= \text{o bien } -73{,}2° \quad \text{o} \quad +107°$$

6. C_y es positiva y C_x es negativa; por lo tanto, el ángulo θ nos lleva al segundo cuadrante:

$\theta =$ **107° en la dirección contraria a las agujas de un reloj**

$\phi =$ **73,2° hacia el noroeste**

COMPROBACIÓN El paso 4 del apartado (*b*) da de módulo 5,40 km y el apartado 6 concluye que la dirección es de 73,2° hacia el noroeste. Estos resultados están de acuerdo con los resultados del apartado (*a*) dentro de la exactitud de nuestras medidas.

OBSERVACIÓN Para especificar un vector se necesita saber el módulo y la dirección o todas sus componentes. En este ejemplo precisamente se ha practicado como calcularlas.

VECTORES UNITARIOS

Un vector unitario es un vector sin dimensiones de módulo unidad. El vector $\hat{A} = \vec{A}/A$ es un ejemplo de vector unitario que apunta en la dirección de $\vec{A}$. Los vectores unitarios se escriben en negritas con un pequeño ángulo o acento circunflejo en su parte superior. Los vectores unitarios que apuntan en las direcciones x, y y z son adecuados para expresar los vectores en función de sus componentes rectangulares. Normalmente, se escriben $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, y $\hat{\boldsymbol{k}}$, respectivamente. Así, el vector $A_x\hat{\boldsymbol{i}}$ tiene módulo $|A_x|$ y apunta en la dirección x positiva si A_x es positiva (o la dirección x negativa si A_x es negativa). Un vector A, en general, puede escribirse como suma de tres vectores, cada uno de ellos paralelo a un eje coordenado (figura 1.17):

$$\vec{A} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \qquad 1.7$$

La suma de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ puede escribirse en función de vectores unitarios en la forma

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= (A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}) + (B_x\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= (A_x + B_x)\hat{\boldsymbol{i}} + (A_y + B_y)\hat{\boldsymbol{j}} + (A_z + B_z)\hat{\boldsymbol{k}} \qquad 1.8\end{aligned}$$

Las propiedades generales de los vectores se resumen en la tabla 1.4.

PROBLEMA PRÁCTICO 1.7
Dados dos vectores $\vec{A} = (4{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{i}} + (3{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{j}}$ y $\vec{B} = (2{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{i}} - (3{,}00\text{ m})\hat{\boldsymbol{j}}$, determinar (*a*) A, (*b*) B, (*c*) $\vec{A} + \vec{B}$, y (*d*) $\vec{A} - \vec{B}$.

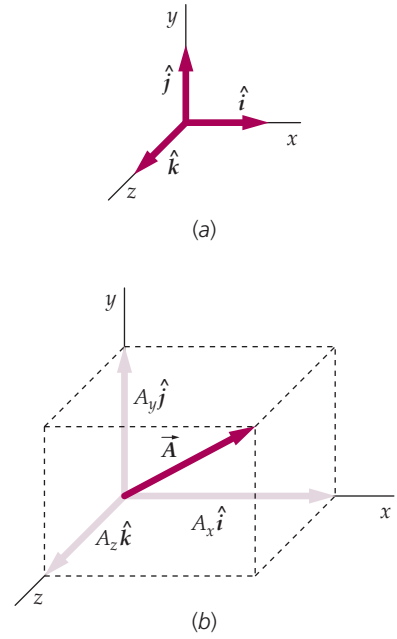
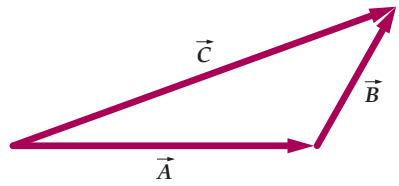
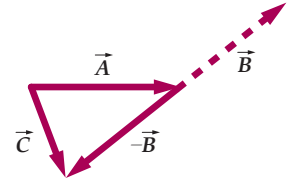
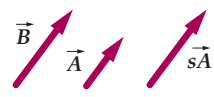


FIGURA 1.17 (*a*) Los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$, y $\hat{\boldsymbol{k}}$ en un sistema de coordenadas cartesiano (rectangular). (*b*) El vector $\vec{A}$ en función de los vectores unitarios: $\vec{A} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$.

Tabla 1.4 Propiedades de los vectores

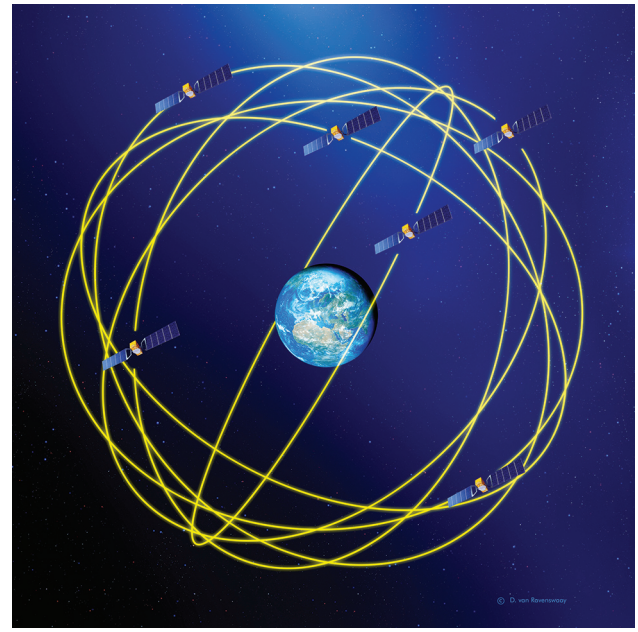
Propiedad	Explicación	Figura	Representación de las componentes
Igualdad	$\vec{A} = \vec{B}$ si $\lvert\vec{A}\rvert = \lvert\vec{B}\rvert$ y sus direcciones y sentidos son iguales		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Adición	$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negativo de un vector	$\vec{A} = -\vec{B}$ si $\lvert\vec{B}\rvert = \lvert\vec{A}\rvert$ y su sentido es opuesto		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Sustracción	$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplicación por un escalar	$\vec{B} = s\vec{A}$ tiene el módulo $\lvert\vec{B}\rvert = \lvert s\rvert\lvert\vec{A}\rvert$ y la misma dirección que $\vec{A}$ si s es positivo o $-\vec{A}$ si s es negativo		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

El año 2005: bisiesto por un segundo

El calendario del año 2005 fue un segundo más largo de lo habitual. Ese año fue entonces bisiesto por un segundo. Este ajuste fue necesario para sincronizar dos sistemas de medir el tiempo, uno basado en la rotación de la Tierra y el otro basado en un grupo seleccionado de relojes atómicos.

A lo largo de la historia, la medida del tiempo se ha relacionado con la posición del Sol en el cielo, determinada por la rotación de la Tierra alrededor de su eje y por su movimiento de traslación alrededor del Sol. Este tiempo astronómico, denominado actualmente el Tiempo Universal (UT1), asumía que el movimiento de rotación de la Tierra es uniforme. Sin embargo, a medida que se ha dispuesto de métodos de medida más precisos se ha hecho patente que la velocidad de rotación de la Tierra presenta ligeras irregularidades, lo cual implica también que se da una cierta variabilidad en la unidad estándar de medida científica del tiempo, el segundo, definido como (1/60)(1/60)(1/24) de un día solar medio.

En 1955, el National Physical Laboratory en Gran Bretaña desarrolló el primer reloj atómico de cesio, un dispositivo que tenía una exactitud mucho mayor que cualquier otro reloj que hubiera existido antes. La medida del tiempo se convirtió en un proceso independiente de las observaciones astronómicas y, en consecuencia, se consiguió una definición de segundo mucho más precisa basada en la frecuencia de la radiación emitida durante la transición entre dos niveles de energía del átomo cesio-133. Sin embargo, el sistema más familiar UT1 sigue siendo importante para sistemas de navegación y astronómicos. Por ello, es importante que ambos sistemas de medir el tiempo se sincronicen.



El sistema de posicionamiento global, GPS, requiere que haya 24 satélites básicos en servicio al menos el 70% del tiempo. Cada satélite básico tiene una órbita con un periodo de 1/2 de un día sideral (1 día sideral = ~ 23 h 56 min) y con un radio aproximadamente igual a cuatro veces el radio terrestre. Hay 6 planos orbitales, inclinados 55° con respecto al plano ecuatorial de la Tierra, cada uno de los cuales tiene cuatro satélites básicos. Además, hay otros satélites GPS que se utilizan en órbitas de reserva cuando alguno de los satélites básicos falla. Cuando este apartado se escribió (mayo del 2006) había 29 satélites operacionales en órbita. *(Detlev Van Ravenswaay/Photo Researchers.)*

Según el National Physical Laboratory, "…la solución adoptada para la sincronización ha sido construir una escala de tiempo atómica que sea la base para medir el tiempo denominada Tiempo Universal Coordinado (UTC). Esta escala combina la regularidad del tiempo atómico con la comodidad del UT1, y muchos países la han adoptado como la base legal para las medidas del tiempo."[1] La Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Sèvres, Francia, recoge datos de un selección de laboratorios que miden el tiempo repartidos por todo el mundo para proporcionar el tiempo internacional estándar, UTC.

Cuando se dan pequeñas diferencias entre el UTC y el UT1 a causa de las fluctuaciones en la rotación de la Tierra (normalmente son retrasos), se añade un segundo para corregir el desajuste. Es un concepto similar a los años bisiestos que se usan para corregir el calendario. Efectivamente, un año no son exactamente 365 días sino 365,242 días. Para tener en cuenta el desfase producido al considerar el año de 365 días, cada cuatro años el calendario incluye un 29 de febrero.

Desde 1972, la medida del tiempo se realiza por medio de relojes atómicos, y desde entonces, en 23 ocasiones se ha añadido un segundo al tiempo UTC. Por un acuerdo internacional, se añade un segundo cuando la diferencia entre el UT1 y el UTC alcanza los 0,9 segundos. Previamente, la International Earth Rotation and Reference System (IERS) anuncia la necesidad de este cambio con unos meses de antelación.

En un año normal, el último segundo del año es el 23:59:59 UTC del 31 de diciembre, en tanto que el primer segundo del nuevo año es el 00:00:00 UTC del 1 de enero. Sin embargo, el año 2005 se añadió un segundo a la hora 23:59:59 UTC del 31 de diciembre, por lo que los relojes antes de cambiar a 00:00:00 UTC señalaron la hora 23:59:60 UTC.

[1] http://www.npl.co.uk/time/leap_second.html

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Unidades	Las **cantidades físicas** son números que se obtienen a partir de medidas de los objetos físicos. También se pueden definir de forma práctica a partir de operaciones y procedimientos que, si se siguen, las determinan sin ambigüedad.
2. Unidades fundamentales	Las unidades fundamentales del Sistema Internacional (SI) son el metro (m), el segundo (s), el kilogramo (kg), el kelvin (K), el ampere (A), el mol (mol) y la candela (cd). Las unidades de cualquier magnitud física se pueden expresar en función de estas unidades fundamentales.
3. Las unidades en las ecuaciones	Las unidades en las ecuaciones se tratan de igual modo que cualquier otra magnitud algebraica.
4. Conversión	Los **factores de conversión**, que son siempre igual a 1, proporcionan un método adecuado para convertir un tipo de unidad en otra.
5. Dimensiones	Los dos miembros de una ecuación deben tener las mismas dimensiones.
6. Notación científica	Por conveniencia, los números muy grandes y muy pequeños se escriben por medio de un factor que multiplica a una potencia de 10.
7. Exponentes	
Multiplicación	Al multiplicar dos números en notación científica, los exponentes se suman.
División	Al dividir dos números en notación científica, los exponentes se restan.
Potencia	Cuando un número que contiene un exponente se eleva a otro exponente, los exponentes se multiplican.
8. Cifras significativas	
Multiplicación y división	El número de cifras significativas en el resultado de una multiplicación o división nunca será mayor que el menor número de cifras significativas de cualquiera de los factores.
Adición y sustracción	El resultado de la suma o resta de dos números no tiene cifras significativas más allá de la última cifra decimal en que ambos números originales tienen cifras significativas.
9. Orden de magnitud	Un número redondeado a la potencia más próxima de 10 se denomina orden de magnitud. El orden de magnitud puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples.
10. Vectores	
Definición	Los vectores son magnitudes que tienen módulo y dirección. Se suman como los desplazamientos.
Componentes	La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es su proyección sobre dicha línea. Si $\vec{A}$ forma un ángulo θ con el eje x, sus componentes x e y son $A_x = A\cos\theta$ (1.2) $A_y = A\,\text{sen}\,\theta$ (1.3)
Módulo	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ (1.5*a*)
Suma gráfica de vectores	Dos vectores cualesquiera cuyos módulos poseen las mismas unidades pueden sumarse gráficamente situando la cola de la flecha que representa a uno de ellos en el extremo o cabeza del otro.
Suma de vectores mediante componentes	Si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces $C_x = A_x + B_x$ (1.6*a*) y $C_y = A_y + B_y$ (1.6*b*)
Vectores unitarios	Un vector $\vec{A}$ puede escribirse en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$, de módulo unidad, dirigidos a lo largo de los ejes x, y y z, respectivamente $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ (1.7)

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

1.1 5

Respuestas a los problemas prácticos

1.1 (*a*) 300 ns, (*b*) 40 Mm

1.2 (*a*) 0,05, (*b*) 3,9, (*c*) 0,003

1.3 $2{,}39 \times 10^2$

1.4 $3{,}2 \times 10^5$ años

1.5 $\approx 6 \times 10^{15}$

1.6 $A_x = -17{,}3$ km, $A_y = 10{,}0$ km

1.7 (*a*) $A = 5{,}00$ m, (*b*) $B = 3{,}61$ m, (*c*) $\vec{A} + \vec{B} = (6{,}00\text{ m})\hat{i}$, (*d*) $\vec{A} - \vec{B} = (2{,}00\text{ m})\hat{i} + (6{,}00\text{ m})\hat{j}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Cuál de las siguientes magnitudes físicas no es una de las fundamentales del Sistema Internacional (SI)? (*a*) Masa. (*b*) Longitud. (*c*) Energía. (*d*) Tiempo. (*e*) Todas ellas son magnitudes físicas fundamentales. SSM

2 • Al hacer un cálculo, el resultado final tiene las dimensiones m/s en el numerador y m/s^2 en el denominador. ¿Cuáles son las unidades finales? (*a*) m^2/s^3, (*b*) 1/s, (*c*) s^3/m^2, (*d*) s, (*e*) m/s.

3 • El prefijo giga significa: (*a*) 10^3, (*b*) 10^6, (*c*) 10^9, (*d*) 10^{12}, (*e*) 10^{15}.

4 • El prefijo mega significa: (*a*) 10^{-9}, (*b*) 10^{-6}, (*c*) 10^{-3}, (*d*) 10^6, (*e*) 10^9.

5 • Demostrar que un pie equivale a 30,48 cm. ¿Cuántos centímetros hay en una milla? SSM

6 • El número 0,000 513 0 tiene _____ cifras significativas. (*a*) una, (*b*) tres, (*c*) cuatro, (*d*) siete, (*e*) ocho.

7 • El número 23,0040 tiene _____ cifras significativas. (*a*) dos, (*b*) tres, (*c*) cuatro, (*d*) cinco, (*e*) seis.

8 • Una fuerza tiene dimensiones de masa por aceleración. La aceleración tiene dimensiones de velocidad dividida por tiempo. La presión es una fuerza dividida por un área. ¿Cuáles son las dimensiones de la presión?

9 • Verdadero o falso: para multiplicar dos magnitudes es condición necesaria que tengan las mismas dimensiones.

10 • Un vector tiene la componente x negativa y la componente y positiva. Su ángulo medido en la dirección contraria a las agujas del reloj desde el eje x está (*a*) entre cero y 90 grados, (*b*) entre 90 y 180 grados, (*c*) más allá de los 180 grados.

11 • Un vector $\vec{A}$ señala en la dirección positiva del eje x. Mostrar gráficamente tres posibles elecciones para un vector $\vec{B}$ de forma que $\vec{B} + \vec{A}$ señale en la dirección positiva del eje y. SSM

12 • Un vector $\vec{A}$ señala en la dirección positiva del eje y. Mostrar gráficamente tres elecciones para un vector $\vec{B}$ de forma que $\vec{B} - \vec{A}$ señale en la dirección positiva del eje x.

13 • ¿Es posible que tres vectores del mismo módulo sumen cero? Si lo es, muestre la respuesta gráficamente. En caso contrario, explique por qué no es posible. SSM

CÁLCULO Y APROXIMACIONES

14 • El ángulo subtendido por el diámetro de la Luna en un punto de la Tierra es aproximadamente 0,524° (figura 1.18). Con este dato y sabiendo que la Luna dista 384 Mm de la Tierra, hallar su diámetro. (El ángulo θ subtendido por la Luna es, aproximadamente, igual a D/r_l, donde D es el diámetro de la Luna y r_l es la distancia a la misma.)

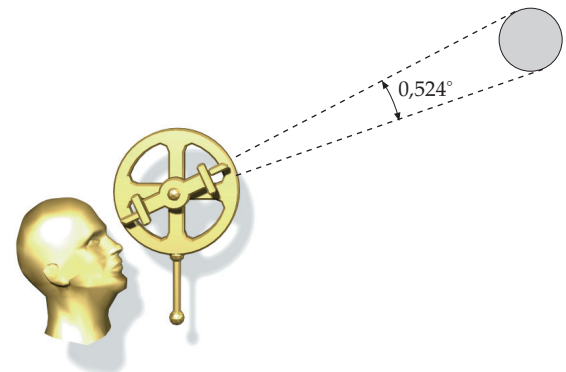
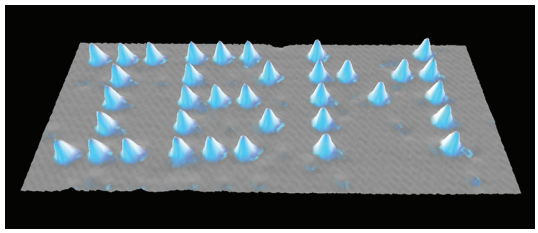


FIGURA 1.18 Problema 14

15 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Si se supone que el cuerpo humano está formado esencialmente de agua se puede hacer una sencilla estimación. La masa de una molécula de agua es $29{,}9 \times 10^{-27}$ kg. Estimar las moléculas de agua que forman una persona de 60 kg de masa. SSM

16 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En 1989, científicos de la compañía IBM consiguieron mover átomos con un microscopio de barrido de efecto tunel (STM). El público pudo apreciar esta tecnología cuando vio las letras IBM formadas a partir de átomos de xenon sobre una superficie de niquel. Las letras IBM se extendían una distancia que equivalía a unos 15 átomos de xenon. Si el espacio entre los centros de átomos de xenon adyacentes es de 5 nm (5×10^{-9} m), estimar cuántas veces puede escribirse la palabra "IBM" en una página de 21,6 cm de ancho.



(Gentileza de IBM Reasearch, Almaden Research Center.)

17 •• Se ha debatido públicamente con frecuencia cuáles son las consecuencias ambientales de usar pañales desechables o pañales reutilizables de tela. (*a*) Supóngase que un bebé, desde que nace y hasta los 2,5 años, usa tres pañales al día. Estimar cuántos pañales desechables se usan cada año en los Estados Unidos. (*b*) Calcular el volumen de vertedero ocupado por los pañales, suponiendo que 1000 kg de estos residuos ocupan 1 m^3. (*c*) Calcular la superficie que ocuparían anualmente estos residuos si se supone que necesitan una profundidad media en el vertedero de 10 m.

18 •• (*a*) Estimar cuántos litros de gasolina usan los automóviles cada día en los Estados Unidos y el coste asociado. (*b*) Si de un barril de crudo se obtienen 73,45 L de gasolina, calcular cuántos barriles de petróleo deben importarse en un año en los Estados Unidos para fabricar la gasolina necesaria para la automoción. ¿Cuántos barriles por día supone esta cifra?

19 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un megabyte (MB) es una unidad de almacenamiento en la memoria de los ordenadores. Un CD tiene una capacidad de almacenamiento de 700 MB y puede almacenar 70 minutos de música de alta calidad. (*a*) Si una canción típica dura 5 minutos, ¿cuántos megabytes ocupa una canción? (*b*) Si una página de texto impreso ocupa aproximadamente 5 kilobytes, estimar cuántas novelas se pueden guardar en un CD. SSM

UNIDADES

20 • Expresar las siguientes magnitudes usando los prefijos que se recogen en la tabla 1.1 y las abreviaturas de la página 5 (tabla 1.1); por ejemplo, 10 000 metros = 10 km. (*a*) 1 000 000 watts, (*b*) 0,002 gramos, (*c*) 3×10^{-6} metros, (*d*) 30 000 segundos.

21 • Escribir cada una de las siguientes magnitudes sin usar prefijos: (*a*) 40 μW, (*b*) 4 ns, (*c*) 3 MW, (*d*) 25 km.

22 • Escribir las siguientes magnitudes (que no se expresan en unidades del SI) usando prefijos (pero no sus abreviaturas). Por ejemplo, 10^3 metros = 1 kilómetro: (*a*) 10^{-12} abucheos, (*b*) 10^9 mugidos, (*c*) 10^{-6} teléfonos, (*d*) 10^{-18} chicos, (*e*) 10^6 teléfonos, (*f*) 10^{-9} cabras, (*g*) 10^{12} toros.

23 •• En las ecuaciones siguientes, la distancia x está en metros, el tiempo t en segundos y la velocidad v en metros por segundo. ¿Cuáles son las unidades del SI de las constantes C_1 y C_2? (*a*) $x = C_1 + C_2 t$, (*b*) $x = \frac{1}{2} C_1 t^2$, (*c*) $v^2 = 2C_1 x$, (*d*) $x = C_1 \cos C_2 t$, (*e*) $v^2 = 2C_1 v - (C_2 x)^2$. SSM

24 •• Si en el problema 23 se expresa x en pies, t en segundos y v en pies por segundo, ¿cuáles son las dimensiones de las constantes C_1 y C_2?

CONVERSIÓN DE UNIDADES

25 • **MÚLTIPLES PASOS** A partir de la definición original de metro en función de la distancia del Ecuador al polo Norte hallar en metros (*a*) la circunferencia de la Tierra y (*b*) el radio de la Tierra. (*c*) Convertir las respuestas dadas en (*a*) y (*b*) de metros a millas.

26 • La velocidad del sonido en el aire es 343 m/s. ¿Cuál es la velocidad de un avión supersónico que se mueve con una velocidad doble a la del sonido? Dar la respuesta en kilómetros por hora y millas por hora.

27 • Un jugador de baloncesto tiene una altura de 6 ft y 10,5 in. ¿Cuál es su altura en centímetros?

28 • Completar las siguientes igualdades: (*a*) 100 km/h = _____ mi/h, (*b*) 60 cm = _____ in, (*c*) 100 yd = _____ m.

29 • La mayor separación entre dos soportes del puente Golden Gate es de 4200 pies. Expresar esta distancia en kilómetros.

30 • Hallar el factor de conversión para convertir millas por hora en kilómetros por hora.

31 • Completar las siguientes expresiones: (*a*) $1{,}296 \times 10^5$ km/h^2 = _____ km/(h · s), (*b*) $1{,}296 \times 10^5$ km/h^2 = _____ m/s^2, (*c*) 60 mi/h = _____ ft/s, (*d*) 60 mi/h = _____ m/s.

32 • Una milla cuadrada tiene 640 acres. ¿Cuántos metros cuadrados tiene un acre?

33 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supongamos que usted es un repartidor de una compañía que comercializa agua mineral. Su camión transporta 4 palés cada uno de los cuales contiene 60 cajas de agua. Cada caja contiene 24 botellas de agua de un litro y la carretilla que usa para transportar el agua a los comercios tiene un límite de peso de 250 lb (114 kg.) (*a*) Si un mililitro de agua tiene una masa de 1 g, y un kilogramo pesa 2,2 libras, ¿cuál es el peso en libras de toda el agua del camión? (*b*) ¿Cuántas cajas llenas de agua puede transportar en la carretilla? SSM

34 •• Un cilindro circular recto tiene un diámetro de 6,8 in y una altura de 2 ft. ¿Cuál es el volumen del cilindro en (*a*) pies cúbicos, (*b*) metros cúbicos, (*c*) litros?

35 •• En las siguientes expresiones, x está en metros, t en segundos, v en metros por segundo y la aceleración a en metros por segundo cuadrado. Determinar las unidades del SI de cada combinación: (*a*) v^2/x, (*b*) $\sqrt{x/a}$, (*c*) $\frac{1}{2} a t^2$. SSM

DIMENSIONES DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS

36 • ¿Cuáles son las dimensiones de las constantes que aparecen en cada uno de los apartados del problema 23?

37 • La ley de desintegración radiactiva es $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, donde N_0 es el número de núcleos radiactivos en el instante $t = 0$, $N(t)$ es el número que permanece sin desintegrar en el tiempo t, y λ es la llamada constante de desintegración. ¿Qué dimensiones tiene λ?

38 •• La unidad del SI de fuerza, el kilogramo-metro por segundo cuadrado ($kg \cdot m/s^2$), se denomina newton (N). Hallar las dimensiones y las unidades del SI de la constante G en la ley de Newton de la gravitación $F = Gm_1 m_2 / r^2$.

39 •• Cuando un muelle se estira una distancia x a partir de su posición de equilibrio, el módulo de la fuerza (F) viene dado por $F = kx$ (ley de Hooke). (*a*) ¿Cuáles son las dimensiones de la constante k? (*b*) ¿Cuáles son las dimensiones y las unidades SI de kx^2?

40 •• Demostrar que el producto de la masa por la aceleración y la velocidad tiene las dimensiones de una potencia.

41 •• El momento lineal o ímpetu de un objeto es el producto de su masa por su velocidad. Demostrar que esta magnitud tiene las dimensiones de una fuerza multiplicada por el tiempo. SSM

42 •• ¿Qué combinación de la fuerza y otra magnitud física tiene las dimensiones de la potencia?

43 •• Cuando un objeto cae a través del aire, se produce una fuerza de arrastre que depende del producto del área superficial del objeto y del cuadrado de su velocidad, es decir, $F_{aire} = CAv^2$, donde C es una constante. Determinar las dimensiones de C. SSM

44 •• La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con el radio de su órbita r, la constante G de la ley de gravitación de Newton ($F = Gm_1m_2/r^2$), y la masa del Sol, M_S. ¿Qué combinación de estos factores ofrece las dimensiones correctas para el periodo de un planeta?

NOTACIÓN CIENTÍFICA Y CIFRAS SIGNIFICATIVAS

45 • Expresar los siguientes números como números decimales sin utilizar la notación de potencias de diez: (*a*) 3×10^4, (*b*) $6{,}2 \times 10^{-3}$, (*c*) 4×10^{-6}, (*d*) $2{,}17 \times 10^5$. SSM

46 • Escribir en notación científica los siguientes valores: (*a*) 1 345 100 m = _____ km, (*b*) 12 340 kW = _____ MW, (*c*) 54,32 ps = _____ s, (*d*) 3,0 m = _____ mm.

47 • Realizar las siguientes operaciones, redondeando hasta el número correcto de cifras significativas, y expresar el resultado en notación científica: (*a*) $(1{,}14)(9{,}99 \times 10^4)$, (*b*) $(2{,}78 \times 10^{-8}) - (5{,}31 \times 10^{-9})$, (*c*) $12\pi/(4{,}56 \times 10^{-3})$, (*d*) $27{,}6 + (5{,}99 \times 10^2)$. SSM

48 • Efectuar las siguientes operaciones redondeando al número correcto de cifras significativas y expresando el resultado en notación científica: (*a*) (200,9)(569,3), (*b*) (0,000 000 513) $(62{,}3 \times 10^7)$, (*c*) $28{,}401 + (5{,}78 \times 10^4)$, (*d*) $63{,}25/(4{,}17 \times 10^{-3})$.

49 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una membrana celular posee un espesor de 7 nm. ¿Cuántas membranas de este espesor deberían apilarse para conseguir una altura de 1 pulgada? SSM

50 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Hay que perforar un agujero circular de $8{,}470 \times 10^{-1}$ cm de radio en el panel frontal de un monitor. La *tolerancia* es de $1{,}0 \times 10^{-3}$ cm, lo cual significa que el radio del agujero real no puede diferir en una magnitud superior a esta cantidad. Si el agujero real excede al radio deseado precisamente en el margen de tolerancia, ¿cuál es la diferencia entre el área real del agujero y el área requerida para el mismo?

51 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un taco cuadrado debe ajustarse a un orificio de forma cuadrada. El lado del taco mide 42,9 mm y el del orificio 43,2 mm. (*a*) ¿Cuál es el área del espacio entre el taco y el orificio? (*b*) Si se hace el taco de forma rectangular limando 0,10 mm de material de un lado, ¿cuál es ahora el área vacia entre el taco y el orificio? SSM

VECTORES Y SUS PROPIEDADES

52 • **MÚLTIPLES PASOS** Se suman dos vectores de 7,0 y 5,5 unidades de longitud. El resultado es un vector de 10,0 unidades. (*a*) Mostrar gráficamente al menos una forma mediante la cual puede llevarse a cabo la suma. (*b*) Use el diagrama del apartado anterior para determinar el ángulo entre los dos vectores originales.

53 • Determinar las componentes x e y de los tres vectores siguientes del plano xy. (*a*) Un vector desplazamiento de 10 m que forma un ángulo de 30° en la dirección de las agujas de un reloj con la dirección positiva del eje y. (*b*) Un vector velocidad de 25 m/s que forma un ángulo de 40° contrario a las agujas del reloj con la dirección $-x$. (*c*) Un vector fuerza de 40 lb que forma un ángulo de 120° en la dirección contraria a las agujas de un reloj con la dirección $-y$. SSM

54 • Reescriba los vectores siguientes en función de su magnitud y su ángulo (en el sentido contrario a las agujas del reloj con respecto a la dirección $+x$). (*a*) Un vector desplazamiento con 8,5 m de componente x, y $-5{,}5$ m de componente y. (*b*) Un vector velocidad con -75 m/s de componente x y 35 m/s de componente y. (*c*) Un vector fuerza de 50 lb de módulo situado en el tercer cuadrante con una componente x cuyo módulo es de 40 lb.

55 • **CONCEPTUAL** Una persona camina 100 m siguiendo una línea recta sobre el plano horizontal. Si la persona se mueve 50 m hacia el este, ¿cuáles son los movimientos posibles de la persona hacia el norte o hacia el sur? ¿Cuáles son los ángulos posibles con respecto de la dirección este que el camino recorrido por la persona puede haber alcanzado?

56 • **APROXIMACIÓN** El destino final de un paseo está a 300 m en la dirección este considerada a partir del punto de partida. La primera etapa coincide con el paseo descrito en el problema anterior. La segunda etapa se desarrolla a lo largo de una línea recta. Estimar gráficamente la longitud y dirección de esta segunda etapa.

57 •• Dados los vectores siguientes: $\vec{A} = 3{,}4\hat{i} + 4{,}7\hat{j}$, $\vec{B} = (-7{,}7)\hat{i} + 3{,}2\hat{j}$, y $\vec{C} = 5{,}4\hat{i} + (-9{,}1)\hat{j}$. (*a*) Determinar el vector $\vec{D}$ en función de los vectores unitarios, de modo que $\vec{D} + 2\vec{A} - 3\vec{C} + 4\vec{B} = 0$. (*b*) Expresar la respuesta del apartado anterior en función del módulo y del ángulo con respecto la dirección positiva del eje x.

58 •• Dados los vectores siguientes: $\vec{A}$ de 25 lb de módulo y que forma un ángulo de 30° en el sentido de las agujas del reloj con la dirección positiva del eje x, y $\vec{B}$ de 42 lb de módulo y que forma un ángulo de 50° en el sentido de las agujas del reloj con la dirección positiva del eje y, (*a*) construir un esquema y estimar visualmente el módulo y el ángulo del vector $\vec{C}$ de forma que $2\vec{A} + \vec{C} - \vec{B}$ sea un vector de 35 lb de módulo orientado según la dirección positiva del eje x. (*b*) Repetir el cálculo del apartado (*a*) usando el método de las componentes y comparar el resultado con el estimado a partir del apartado (*a*).

59 •• Expresar en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$ el vector de módulo unidad opuesto a la dirección de cada uno de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ del problema 57. SSM

60 •• Los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ señalan al este y al norte, respectivamente. Calcular expresándolo en función de ellos, el vector unitario en las direcciones siguientes: (*a*) nordeste (*b*) 70° en la dirección de las agujas del reloj contados a partir de la dirección del eje $-y$; (*c*) sudoeste.

PROBLEMAS GENERALES

61 • En las misiones *Apolo* a la Luna durante los años 60 y 70, el viaje de la Tierra a la Luna duraba unos tres días desde el momento en que la cápsula abandonaba la órbita terrestre. Estimar la velocidad media del vehículo espacial en kilómetros por hora, millas por hora y metros por segundo. SSM

62 • Muchas de las carreteras de Canadá limitan la velocidad de los vehículos a 100 km/h. ¿Cuál es la velocidad límite en mi/h?

63 • Contando dólares a razón de 1 $ por segundo, ¿cuántos años necesitaríamos para contar 1000 millones de dólares?

64 • (*a*) La velocidad de la luz en el vacío es 186 000 mi/s = 3×10^8 m/s. Utilizar este dato para hallar el número de kilómetros que tiene una milla. (*b*) El peso de un pie cúbico de agua es 62,4 libras y 1,00 pie = 30,5 cm. Utilizar este dato y el hecho de que 1 cm^3 de agua tiene una masa de 1 g para hallar el peso en libras de 1 kg de masa.

65 • La masa de un átomo de uranio es $4{,}0 \times 10^{-26}$ kg. ¿Cuántos átomos de uranio hay en 8 g de uranio puro?

66 •• Durante una tormenta cae un total de 1,4 pulgadas de lluvia. ¿Cuánta agua ha caído sobre un acre de tierra? (1 mi^2 = 640 acres.) Expresar la respuesta en: (*a*) pugadas cúbicas, (*b*) pies cúbicos, (*c*) metros cúbicos, y (*d*) kilogramos. Obsérvese que la densidad del agua es 1000 kg/m^3.

67 •• Un núcleo de hierro tiene un radio de $5{,}4 \times 10^{-15}$ m y una masa de $9{,}3 \times 10^{-26}$ kg. (*a*) ¿Cuál es su masa por unidad de volumen en kilogramos por metro cúbico? (*b*) Si la Tierra tuviera la misma masa por unidad de volumen, ¿cuál sería su radio? (La masa de la Tierra es $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.)

68 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La compañía canadiense Canadian Norman Wells Oil Pipeline opera desde Norman Wells, en los Territorios del Noroeste, hasta Zama, en Alberta. El oleoducto de $8{,}68 \times 10^5$ m de longitud tiene un diámetro interno de 12 pulgadas y puede transportar petróleo a 35 L/s. (*a*) Si en un determinado momento el oleoducto está lleno, ¿cuál es el volumen total de petróleo en la instalación? (*b*) Si inicialmente el oleoducto estaba vacío, ¿cuánto tiempo cuesta llenarlo?

69 •• La unidad astronómica (UA) se define como la distancia media de la Tierra al Sol, a saber, $1{,}496 \times 10^{11}$ m. El parsec es la longitud radial desde la cual una UA de longitud de arco subtiende un ángulo de 1 segundo. El año luz es la distancia que la luz recorre en un año. (*a*) ¿Cuántos parsecs están contenidos en una unidad astronómica? (*b*) ¿Cuántos metros tiene un parsec? (*c*) ¿Cuántos metros existen en un año luz? (*d*) ¿Cuántas unidades astronómicas existen en un año luz? (*e*) ¿Cuántos años luz contiene un parsec?

70 •• Para que el universo deje algún día de expansionarse y comience a contraerse, su densidad media debe ser al menos de 6×10^{-27} kg/m^3. (*a*) ¿Cuántos electrones por metro cúbico deberían existir en el universo para alcanzar esta densidad crítica? (*b*) ¿Cuántos protones por metro cúbico producirían la densidad crítica? ($m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg; $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.)

71 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, HOJA DE CÁLCULO** Imagínese que usted es un astronauta que realiza experimentos de física en la Luna. En uno de estos experimentos analiza la caída de varios objetos, desde el reposo, y relaciona la distancia caída y con el tiempo t. Para una moneda ha obtenido los siguientes resultados

(*a*) y (m)	10	20	30	40	50
(*b*) t (s)	3,5	5,2	6,0	7,3	7,9

Usted espera obtener una relación general entre la distancia y y el tiempo t de la forma $y = Bt^C$, donde B y C son constantes que hay que determinar experimentalmente. Para ello, (*a*) represente los datos en un gráfico logarítmico (log-log), representando log(y)(ordenadas) respecto log(t)(abscisas). (*b*) Demuestre que si se toman logaritmos en la expresión $y = Bt^C$, se obtiene $\log(y) = \log(B) + C\log(t)$. (*c*) Compare esta relación lineal con el gráfico de los datos y estime los valores de B y C. (*d*) Si se deja caer una moneda desde 1,0 m de altura, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo? (*e*) En el capítulo siguiente se verá como la relación entre y y t es $y = 1/2at^2$, donde a es la aceleración del objeto. ¿Cuál es la aceleración de los objetos que caen en la Luna? SSM

72 ••• **HOJA DE CÁLCULO** El valor de las acciones de una compañía que cotiza en el mercado de valores varía dependiendo del mercado y del tipo de actividad de la empresa y, aparentemente, puede ser muy impredecible, pero la gente a menudo intenta encontrar patrones del comportamiento en bolsa de los valores a partir de fórmulas matemáticas. El valor de las acciones de una compañía de ingeniería de materiales denominada Corning, situada en el estado de Nueva York, cada día 3 de agosto, cada cinco años en el periodo 1981 – 2001 evoluciona según la tabla. Supongamos que el precio P de las acciones (en dólares) sigue una ley de potencias $P = Bt^C$, donde t se expresa en años. (*a*) Evalúe las constantes B y C (véase el método sugerido en el problema anterior). (*b*) De acuerdo con esta ley de potencias, ¿cuál fue el precio de las acciones de la compañía el 3 de agosto del año 2000? (El precio alcanzado en realidad fue 82,83 $.)

(*a*) Precio (en dólares)	2,10	4,19	9,14	10,82	16,85
(*b*) Años desde 1980	1	6	11	16	21

73 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El detector japonés de neutrinos Super-Kamiokande está formado por un largo cilindro transparente de 39,3 m de diámetro y 41,4 m de alto, relleno de agua extremadamente pura. Calcular la masa de agua que hay en el interior del cilindro. ¿Se corresponde la cifra obtenida con el dato que consta en el sitio web oficial del Super-K, según el cual el detector contiene 50 000 toneladas de agua? Densidad del agua: 1000 kg/m^3. SSM

74 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Imagínese que va de excursión con un amigo a una zona llana y que deciden estimar la altura del pico de una montaña distante (figura 1.19) y la distancia horizontal que hay que caminar hasta el pico. Para ello, desde el punto en que están, miden que el ángulo que forma con la horizontal la línea imaginaria que apunta hacia el pico es de 7,5° y que la misma línea está orientada 13° hacia el este. Mientras que usted se queda en el punto de observación, su amigo camina en dirección oeste 1,5 km. Desde la nueva posición su amigo sitúa el pico y observa que la línea imaginaria que apunta hacia el pico forma un ángulo de 15° con el norte. Calcule a qué distancia está la montaña de su posición y qué altura tiene el pico.

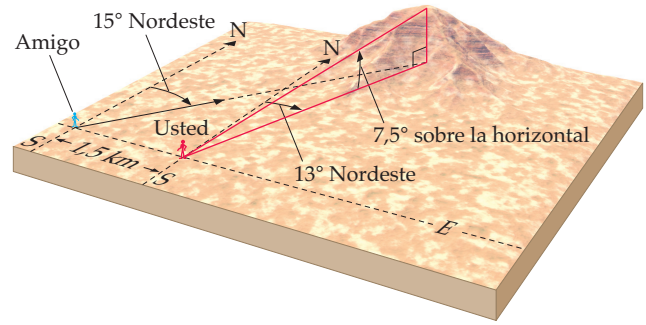


FIGURA 1.19 Problema 74

75 ••• **HOJA DE CÁLCULO** La tabla adjunta da el periodo T y el radio r de las órbitas correspondientes a los movimientos de cuatro satélites que giran alrededor de un asteroide pesado y denso. (*a*) Estos datos se relacionan mediante la fórmula $T = Cr^n$. Hallar C y n. (*b*) Se descubre un quinto satélite que tiene un periodo de 6,20 años. Determinar la órbita de este satélite que se ajuste a la misma fórmula.

(*a*) Periodo T, años	0,44	1,61	3,88	7,89
(*b*) Radio r, Gm	0,088	0,208	0,374	0,600

76 ••• **MÚLTIPLES PASOS** El periodo T de un péndulo simple depende de la longitud L del péndulo y de la aceleración g de la gravedad (dimensiones L/T^2). (*a*) Hallar una combinación sencilla de L y g que tenga las dimensiones de tiempo. (*b*) Comprobar la dependencia existente entre el periodo T y la longitud L midiendo el periodo (tiempo para una ida y vuelta completa) de un péndulo para dos valores diferentes de L. (*c*) En la fórmula correcta que relaciona T con L y g interviene una constante que es un múltiplo de π y que no puede obtenerse mediante el análisis dimensional de la parte (*a*). Puede hallarse experimentalmente como en la parte (*b*) si se conoce g. Utilizando el valor $g = 9{,}81$ m/s^2 y los resultados experimentales de la parte (*b*), hallar la fórmula que relaciona T con L y g.

77 ••• Un trineo está en reposo y tres amigos tiran de él sin conseguir moverlo. Paul tira en dirección nordeste con una fuerza de 50 lb. Johnny tira con una fuerza de 65 lb con un ángulo de 35° en dirección sudoeste y Connie tira del trineo con una fuerza que queremos determinar. (*a*) Expresar la fuerza ejercida tanto por Paul como por Johnny en función de los vectores unitarios. (*b*) Determinar la fuerza que realiza Connie primero expresándola en función de los vectores unitarios y después en forma de módulo y dirección (ángulo).

78 ••• La posición de un avión que vuela a 5,0 km de altura, la situamos a 1,5 km norte y 2,5 km este. (*a*) ¿Qué distancia hay desde el punto de observación hasta el avión? (*b*) ¿Con qué ángulo (respecto del norte en el plano horizontal) lo vemos? (*c*) Expresar el vector posición del avión desde nuestra situación en función de los vectores unitarios, si $\hat{i}$ se orienta hacia el este, $\hat{j}$ hacia el norte y $\hat{k}$ verticalmente hacia el cenit. (*d*) ¿Con qué ángulo de elevación (por encima del plano horizontal de nuestra posición) vemos el avión?

CAPÍTULO 2

El movimiento en una dirección se asemeja al movimiento a lo largo de una línea recta, como el de un coche en una carretera recta. El conductor se encuentra con semáforos y distintos límites de velocidad en su camino por la carretera hacia la escuela. *(Medio Images/Getty Images.)*

El movimiento en una dimensión

2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad
2.2 Aceleración
2.3 Movimiento con aceleración constante
2.4 Integración

? ¿Cómo puede estimar el tiempo que tardará en llegar? (Véase el ejemplo 2.3.)

Imaginemos un coche que acelera en una autopista. Hay muchas formas de describir el movimiento del vehículo. Por ejemplo, se puede dar la posición del coche, cómo se mueve de un punto a otro y si acelera o frena en su movimiento. Estos descriptores básicos del movimiento, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, son una parte esencial de la física. De hecho, la descripción del movimiento de los objetos supuso el inicio de la física hace más de 400 años.

El estudio del movimiento y de los conceptos relacionados fuerza y masa, es lo que se denomina **mecánica**. Comenzamos nuestro estudio del movimiento con la **cinemática**, la rama de la mecánica que trata de las características del movimiento. Es necesario entender la cinemática para poder comprender el resto de temas de este libro. El movimiento está presente en todas las disciplinas de la física y hay que saber cinemática para entender cómo la fuerza y la masa afectan al movimiento. En el capítulo 4 estudiamos la **dinámica**, ciencia que relaciona el movimiento con la fuerza y la masa.

Estudiamos ahora el caso más simple de la cinemática: el movimiento a lo largo de una línea recta. Desarrollaremos los modelos y las herramientas que se necesitan para describir el movimiento en una dimensión e introduciremos las definiciones de términos como desplazamiento, velocidad y aceleración necesarios habitualmente para describir el movimiento. Analizaremos con detalle el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Finalmente, veremos las formas de integración que se usan para describir el movimiento. En este capítulo, nos limitaremos al movimiento en una dimensión, con lo que no hace falta usar de forma completa la notación vectorial descrita en el capítulo 1. En una línea recta basta con un signo + o − para especificar la dirección del movimiento.

2.1 DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y MÓDULO DE LA VELOCIDAD

El ganador de una carrera de caballos es aquel caballo cuyo hocico cruza la línea de llegada en primer lugar. Se puede argumentar que lo que realmente es relevante durante la carrera es el movimiento del hocico del caballo y, por lo tanto, que el tamaño, la forma y el movimiento del resto del caballo no tienen importancia. En física, para analizar el movimiento de los objetos muchas veces esta simplificación es útil. Así, podemos describir el movimiento de un objeto siguiendo el movimiento de un punto del mismo. Por ejemplo, cuando un coche se mueve por una línea recta en una carretera, el movimiento del coche puede describirse examinando el movimiento de un punto del lateral del mismo. Un objeto que puede idealizarse de esta manera se denomina **partícula**. En cinemática, dado que no estamos interesados en el tamaño, la forma o el movimiento interno de un objeto, podemos considerar que este objeto es una partícula y, por este motivo, consideramos que coches, trenes y proyectiles son partículas. Incluso las personas y las galaxias pueden considerarse partículas.

(*Bettmann/Corbis.*)

POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

La descripción del movimiento consiste en saber la **posición** de una partícula y cómo la posición cambia con el movimiento de la partícula. En un movimiento en una dimensión, se suele elegir el eje x a lo largo de la línea por donde discurre el movimiento. Por ejemplo, la figura 2.1 muestra un estudiante que va en bicicleta que está en la posición x_i en el instante t_i y en la posición x_f en un instante posterior t_f. La variación de la posición del estudiante $x_f - x_i$, se denomina **desplazamiento**. Es costumbre utilizar la letra griega Δ para indicar la variación o incremento de una magnitud. Así pues, la variación de x se escribe

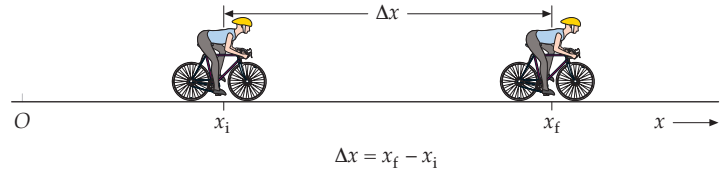


FIGURA 2.1 Un estudiante que va en bicicleta se mueve en línea recta en un sistema de coordenadas formado por una línea en la que se escoge un punto O como origen. A cada punto de la línea se asigna un número x, cuyo valor es proporcional a la distancia a O. Los puntos a la derecha de O son positivos y a la izquierda, negativos. Cuando la bicicleta se desplaza desde el punto x_i al punto x_f, su desplazamiento es $\Delta x = x_f - x_i$.

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad 2.1$$

DEFINICIÓN: DESPLAZAMIENTO

Es importante darse cuenta de la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. La distancia recorrida por una partícula es la longitud del camino que una partícula sigue desde su posición inicial hasta su posición final. Es, por lo tanto, una magnitud escalar que siempre es positiva. El desplazamiento es el cambio en la posición de la partícula. Es positivo si la partícula va en la dirección de x crecientes (la dirección $+x$), y negativa si va en la dirección de $-x$. El desplazamiento puede representarse mediante vectores, como vimos en el capítulo 1, pero usaremos la notación vectorial completa sólo cuando estudiemos el movimiento en dos o tres dimensiones en el capítulo 3.

! La notación Δx (léase "delta de x") corresponde a una sola magnitud, el cambio de x (no al producto de Δ y x, como tampoco cos θ es el producto de cos y θ). Por convenio, la variación experimentada por una magnitud es siempre su valor final menos su valor inicial.

Ejemplo 2.1 Distancia recorrida y desplazamiento de un perro

Cuando sacamos a pasear a nuestro perro, le lanzamos jugando un palo en línea recta hasta 20 ft de distancia para que lo recoja y nos lo devuelva. El can corre, alcanza el palo y regresa con él en la boca recorriendo 15 ft. Entonces se para, se echa al suelo y se pone a morder el objeto. (*a*) ¿Cuál es la distancia total que recorre el perro? (*b*) ¿Cuál es su desplazamiento neto? (*c*) Demostrar que el desplazamiento neto es la suma de los dos desplazamientos secuenciales realizados por el perro.

PLANTEAMIENTO La distancia total, s, se determina sumando las distancias individuales que recorre el perro. El desplazamiento es la posición final del perro menos la posición inicial. El perro arranca a correr en el instante 0, en el tiempo 1 alcanza el palo y en el tiempo 2 se echa al suelo para morderlo.

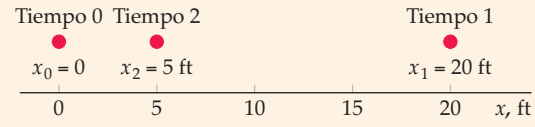


FIGURA 2.2 Los puntos rojos representan la posición del perro en instantes de tiempo diferentes.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Haga un diagrama del movimiento con un eje coordenado (figura 2.2).

2. Calcule la distancia total recorrida:

$$s_{02} = s_{01} + s_{12} = (20\text{ ft}) + (15\text{ ft}) = \boxed{35}\text{ ft}$$

(Los subíndices indican los intervalos de tiempo, donde s_{01} es la distancia recorrida durante el intervalo de tiempo de 0 a 1, y así sucesivamente.)

(*b*) El desplazamiento neto se determina a partir de su definición $\Delta x = x_f - x_i$, donde $x_i = x_0 = 0$ es la posición inicial del perro. La posición final está situada a 5 ft de la posición inicial $x_f = x_2 = 5$ ft:

$$\Delta x_{02} = x_2 - x_0 = 5\text{ ft} - 0\text{ ft} = \boxed{5\text{ ft}}$$

donde Δx_{02} es el desplazamiento durante el intervalo desde el tiempo 0 al tiempo 2.

(*c*) El desplazamiento neto se determina sumando el desplazamiento del primer tramo con el del segundo.

$$\Delta x_{01} = x_1 - x_0 = 20\text{ ft} - 0\text{ ft} = 20\text{ ft}$$
$$\Delta x_{12} = x_2 - x_1 = 5\text{ ft} - 20\text{ ft} = -15\text{ ft}$$

sumando se obtiene

$$\Delta x_{01} + \Delta x_{12} = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) = x_2 - x_0 = \Delta x_{02}$$

luego

$$\Delta x_{02} = \Delta x_{01} + \Delta x_{12} = 20\text{ ft} - 15\text{ ft} = \boxed{5\text{ ft}}$$

COMPROBACIÓN El desplazamiento en cualquier tramo del recorrido nunca es mayor que la distancia recorrida en el mismo tramo. El resultado del apartado (*b*), 5 ft, es menor que el del apartado (*a*), 35 ft, por lo que el resultado del apartado (*b*) es plausible.

OBSERVACIÓN La distancia total recorrida es igual a la suma de las distancias recorridas en cada tramo. El desplazamiento total neto siempre coincide con la suma de los desplazamientos de cada tramo del recorrido.

MÓDULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

Frecuentemente estamos interesados en el módulo de la velocidad o celeridad. El **módulo de la velocidad media** de una partícula es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo total desde el principio al final:

$$\text{Módulo de la velocida media} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{s}{\Delta t} \qquad 2.2$$

DEFINICIÓN DEL MÓDULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

La distancia total y el tiempo total son siempre positivos; por lo tanto, el módulo de la velocidad media también es positivo siempre.

Aunque el módulo de la velocidad es una magnitud útil, no incorpora información sobre la dirección del movimiento, ya que ni la distancia ni el tiempo total lle-

van asociada una dirección. Una magnitud más útil es la *velocidad* (como magnitud vectorial) que incorpora también información sobre la dirección en que se mueve un objeto. La **velocidad media** en la dirección del eje x, $v_{m\,x}$, se define como la razón entre el desplazamiento sobre el eje x y el intervalo de tiempo Δt:

$$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \qquad \text{(por tanto, } \Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t\text{)} \qquad 2.3$$

DEFINICIÓN DE LA VELOCIDAD MEDIA

Al igual que el desplazamiento, la velocidad media es una magnitud que puede ser positiva o negativa. Un valor positivo indica que el desplazamiento va en la dirección $+x$. Un valor negativo indica que el desplazamiento va en la dirección $-x$. Las dimensiones de la velocidad son L/T y la unidad de velocidad en el SI es el metro por segundo (m/s). Otras unidades habituales son el kilómetro por hora (km/h), el pie por segundo (ft/s) y la milla por hora (mi/h).

La figura 2.3 representa gráficamente la posición de una partícula en función del tiempo. Cada punto representa la posición x de una partícula en un tiempo t. Una línea recta une los puntos P_1 y P_2, y forma la hipotenusa del triángulo de catetos $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. El cociente $\Delta x/\Delta t$ es la pendiente de la línea y nos ofrece una interpretación geométrica de la velocidad media:

La velocidad media en el intervalo entre $t = t_1$ y $t = t_2$ en un gráfico x-t es la pendiente de la línea recta que conecta los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA VELOCIDAD MEDIA

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo escogido. Por ejemplo, si en la figura 2.3 tomamos un intervalo menor de tiempo, escogiendo un instante t_2' más próximo a t_1, la velocidad media será mayor, según indica la mayor inclinación de la línea que une los puntos P_1 y P_2'.

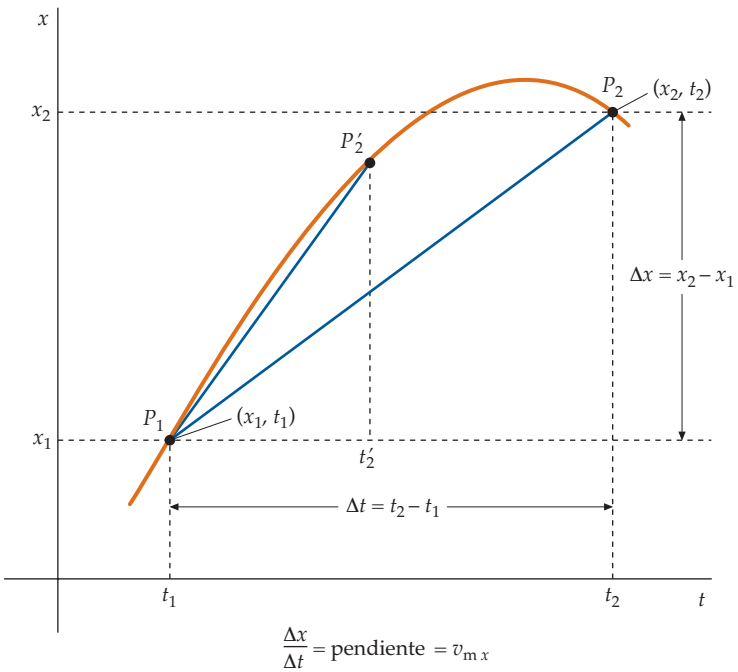


FIGURA 2.3 Gráfico de x en función de t para una partícula que se mueve en una dimensión. Cada punto de la curva representa la posición x en un tiempo determinado t. Se ha dibujado una línea recta entre las posiciones P_1 y P_2. El desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se indican en la figura. La línea recta entre P_1 y P_2 es la hipotenusa del triángulo de lados Δx y Δt y la relación $\Delta x/\Delta t$ es su pendiente. En términos geométricos, la pendiente es una medida de la inclinación de la recta.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Ecuaciones lineales

El módulo de la velocidad media y la velocidad media son los parámetros cinemáticos más básicos. Junto con otros parámetros que se introducen en este capítulo son necesarios para resolver los problemas de cinemática.

Ejemplo 2.2 Velocidad y velocidad media del perro

El perro del ejemplo 2.1 recorre 20 ft en 1 s para coger el palo y corre de vuelta 15 ft en 1,5 s (figura 2.4). Calcular (*a*) el módulo de la velocidad media del perro y (*b*) la velocidad media de todo el recorrido del juego.

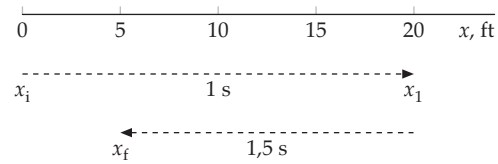


FIGURA 2.4

PLANTEAMIENTO Resolveremos el problema usando las definiciones del módulo de la velocidad media y de velocidad media, teniendo en cuenta que el módulo de la velocidad media es la distancia total dividida por el tiempo total, mientras que la velocidad media es el desplazamiento neto dividido por Δt.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. El módulo de la velocidad media es la distancia total dividida por el tiempo total:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{s}{\Delta t}$$

2. Calcular la distancia total recorrida y el tiempo total:

$$s = s_1 + s_2 = 20{,}0\ \text{ft} + 15{,}0\ \text{ft} = 35{,}0\ \text{ft}$$
$$\Delta t = (t_1 - t_i) + (t_f - t_2) = 1{,}0\ \text{s} + 1{,}5\ \text{s} = 2{,}5\ \text{s}$$

3. Usar s y Δt para determinar el módulo de la velocidad media del perro:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{35{,}0\ \text{ft}}{2{,}5\ \text{s}} = \boxed{14\ \text{ft/s}}$$

(*b*) 1. La velocidad media del perro es el cociente del desplazamiento neto Δx entre el intervalo de tiempo Δt:

$$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2. El desplazamiento neto del perro viene dado por $x_f - x_i$, donde $x_i = 0$ es la posición inicial del perro y $x_f = 5$ ft es su posición final:

$$\Delta x = x_f - x_i = 5{,}0\ \text{ft} - 0{,}0\ \text{ft} = 5{,}0\ \text{ft}$$

3. Usar Δx y Δt para determinar la velocidad media del perro:

$$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5{,}0\ \text{ft}}{2{,}5\ \text{s}} = \boxed{2{,}0\ \text{ft/s}}$$

COMPROBACIÓN Una búsqueda por Internet nos indica que un galgo puede mantener una velocidad media de unos 66 ft/s (casi 45 mi/h). En estas condiciones no es extraño que nuestro perro corra a una velocidad media de 14 ft/s (9,5 mi/h aproximadamente). Un resultado del apartado (*a*) superior a 66 mi/s no sería plausible.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el módulo de la velocidad del perro es mayor que la velocidad media porque la distancia total recorrida es mayor que el desplazamiento total. Asimismo, obsérvese que el desplazamiento es la suma de los desplazamientos individuales, es decir, $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (20{,}0\ \text{ft}) + (-15{,}0\ \text{ft}) = 5{,}0\ \text{ft}$, que es el resultado del punto 2 del apartado (*b*).

Ejemplo 2.3 Camino de la escuela

Habitualmente tardamos 10 minutos en ir de casa a la escuela situada a 5 km de distancia, yendo por una calle recta. Si un día salimos de casa 15 min antes del comienzo de la clase, pero nos encontramos con un semáforo estropeado que hace que la velocidad durante los 2 primeros kilómetros sea de 20 km/h, ¿llegaremos a tiempo?

PLANTEAMIENTO A fin de resolver el problema hay que encontrar el tiempo total que necesitamos para llegar a la escuela. Para ello, hay que calcular el tiempo $\Delta t_{2\,\text{km}}$ durante el cual vamos a 20 km/h y el tiempo $\Delta t_{3\,\text{km}}$ del resto del trayecto, durante el cual la velocidad es la habitual.

SOLUCIÓN

1. El tiempo total coincide con el tiempo invertido en los dos primeros kilómetros más el tiempo utilizado para recorrer los tres restantes:

$$\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2\,\text{km}} + \Delta t_{3\,\text{km}}$$

2. Usando $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$, determinar el tiempo que nos cuesta recorrer los dos primeros kilómetros a 20 km/h:

$$\Delta t_{2\,\text{km}} = \frac{\Delta x_1}{v_{m\,x}} = \frac{2{,}0\ \text{km}}{20\ \text{km/h}} = 0{,}10\ \text{h} = 6{,}0\ \text{min}$$

3. Usando $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$, calcular el tiempo que tardamos en recorrer los tres kilómetros restantes:

$$\Delta t_{3\,\text{km}} = \frac{\Delta x_2}{v_{m\,x}} = \frac{3{,}0\ \text{km}}{v_{\text{usual}\,x}}$$

4. Usando $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$, despejar $v_{\text{usual}\,x}$, la velocidad que nos permite recorrer 5 km en 10 min:

$$v_{\text{usual}\,x} = \frac{\Delta x_{\text{tot}}}{\Delta t_{\text{usual}}} = \frac{5{,}0\ \text{km}}{10\ \text{min}} = 0{,}50\ \text{km/min}$$

5. Utilizando los resultados de los pasos 3 y 4, despejamos $\Delta t_{3\,\text{km}}$: $\Delta t_{3\,\text{km}} = \dfrac{\Delta x_2}{v_{\text{usual}\,x}} = \dfrac{3{,}0\ \text{km}}{0{,}50\ \text{km/min}} = 6{,}0\ \text{min}$

6. Despejar el tiempo total: $\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2\,\text{km}} + \Delta t_{3\,\text{km}} = 12\ \text{min}$

7. El desplazamiento dura 12 minutos comparado con los 10 minutos habituales. Sin embargo, habíamos salido de casa con 15 minutos de antelación; por lo tanto, *no llegamos tarde a la escuela.*

COMPROBACIÓN Obsérvese que 20 km/60 min = 1,0 km/3,0 min. Desplazándose los 5 km a un ritmo de un kilómetro cada 3,0 minutos implica que a los 15 minutos se llega a la escuela. Como salimos con 15 minutos de tiempo, si la velocidad media se mantiene en 20 km/h se llega puntual.

Ejemplo 2.4 La aventura del pájaro viajero

Dos trenes separados 60 km se aproximan uno al otro por vías paralelas, moviéndose cada uno de ellos a 15 km/h. Un pájaro vuela de un tren al otro en el espacio que los separa, hasta que se cruzan. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el pájaro si éste vuela a 20 km/h?

PLANTEAMIENTO En este problema hay que determinar la distancia total que vuela el pájaro sabiendo la velocidad del ave, las velocidades de los trenes y la distancia inicial entre ellos. Una primera impresión parece aconsejar que hay que sumar las distancias recorridas por el pájaro cada vez que se mueve desde un tren hacia el otro. Sin embargo, hay una forma mucho más simple que consiste en usar el hecho de que el tiempo t que vuela el pájaro coincide con el tiempo que los trenes tardan en cruzarse. La distancia total que vuela el pájaro se calcula entonces multiplicando la velocidad del pájaro por el tiempo de vuelo. Para ello escribiremos en primer lugar una ecuación para la magnitud a determinar, es decir, la distancia total Δs recorrida por el pájaro.

SOLUCIÓN

1. La distancia total $s_{\text{pájaro}}$ es igual al módulo de la velocidad media multiplicado por el tiempo:
$$s_{\text{pájaro}} = (\text{módulo de la velocidad media})_{\text{pájaro}} \times t = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \times t$$

2. El tiempo t que el pájaro está en el aire es el tiempo que uno de los trenes invierte en recorrer la mitad de la distancia inicial D que separa los trenes. Como los trenes se mueven a la misma velocidad, cada tren se mueve 30 km antes de cruzarse con el otro:
$$\tfrac{1}{2}D = (\text{velocidad})_{\text{m tren}} \times t$$
por lo tanto,
$$t = \frac{D}{2(\text{velocidad})_{\text{m tren}}}$$

3. Sustituir el resultado del paso 2 por el tiempo obtenido del paso 1. La separación inicial de los dos trenes es de $D = 60$ km. Por lo tanto, la distancia total volada por el ave es:
$$s_{\text{pájaro}} = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}}\, t = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \frac{D}{2(\text{velocidad})_{\text{m tren}}}$$
$$= 20\ \text{km/h}\ \frac{60\ \text{km}}{2\ (15\ \text{km/h})} = \boxed{40\ \text{km}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad de cada tren es 3/4 de la velocidad del pájaro, de forma que la distancia recorrida por uno de los trenes será 3/4 de la distancia recorrida por el pájaro. Cada tren recorre 30 km. Como 30 km son 3/4 de 40 km, el resultado de la distancia recorrida por el pájaro resulta plausible.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA Y MÓDULO DE LA VELOCIDAD

Suponga que su velocidad media durante un viaje largo ha sido de 60 km/h. Esto no indica cómo ha variado la velocidad durante el viaje, ya que, por ejemplo, en determinados puntos del recorrido ha tenido que detenerse en semáforos y en otras zonas ha podido viajar más rápido para ganar tiempo. Para conocer los detalles del viaje hay que saber cuál ha sido la velocidad en cada instante. A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de la partícula en un solo instante, es decir, en un tiempo específico. En un instante determinado la partícula está en un solo punto. Si está en un solo punto, ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿cómo puede tener velocidad? Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta que para observar el movimiento, y así

definirlo, debemos observar la posición del objeto en más de un instante. Veamos ahora la figura 2.5. Cuando consideramos sucesivamente intervalos de tiempo más cortos a partir de t_1, la velocidad media para cada intervalo se aproxima más a la pendiente de la tangente en t_1. La pendiente de esta tangente se define como la **velocidad instantánea** en t_1. Esta tangente es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt, y por lo tanto Δx, se aproxima a cero. Así podremos decir,

La velocidad instantánea es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima al valor cero.

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$
$$= \text{pendiente de la línea tangente a la curva } x \text{ función de } t \qquad 2.4$$

DEFINICIÓN: VELOCIDAD INSTANTÁNEA

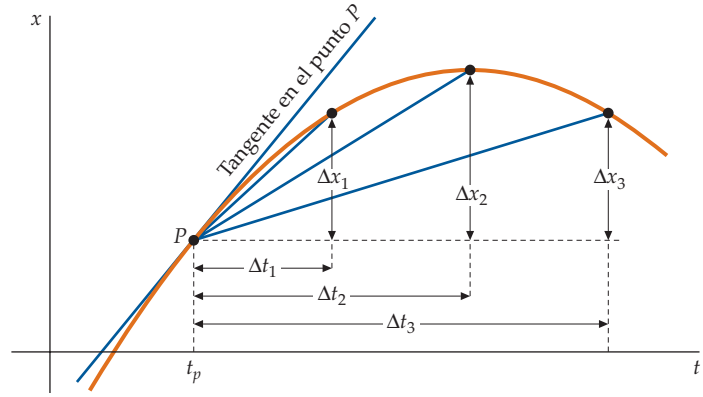


FIGURA 2.5 Gráfico de x en función de t. Obsérvese la secuencia de intervalos de tiempo sucesivamente más pequeños Δt_3, Δt_2, Δt_1, ... La velocidad media de cada intervalo es la pendiente de la línea recta para dicho intervalo. A medida que los intervalos se hacen más pequeños, estas pendientes se aproximan a la pendiente de la tangente a la curva en el punto t_1. La pendiente de esta línea se define como la velocidad instantánea en el tiempo t_1.

Este límite se denomina derivada de x respecto a t. La notación habitual para la derivada es dx/dt. Utilizando esta notación, la ecuación 2.4 se convierte en

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad 2.5$$

Esta pendiente puede ser positiva, negativa o nula; por consiguiente, en un movimiento unidimensional la velocidad instantánea puede ser positiva (x creciente) o negativa (x decreciente) o nula (no hay movimiento). En un objeto que se mueve a velocidad constante, la velocidad instantánea coincide con la velocidad media. El gráfico de la posición respecto del tiempo del movimiento del objeto (figura 2.6) es una línea recta, cuya pendiente es la velocidad.

La velocidad instántanea es un vector. Su módulo lo denominamos módulo de la **velocidad instantánea**. En lo que queda de texto se utilizará "velocidad" en lugar de "velocidad instantánea" y "módulo de la velocidad" en lugar de "módulo de la velocidad instantánea", excepto cuando sea recomendable el uso del adjetivo "instantáneo" para mayor énfasis o claridad.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Cálculo diferencial**

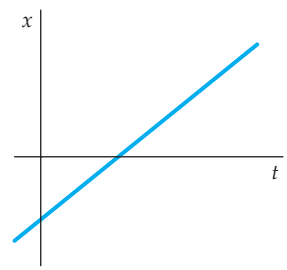


FIGURA 2.6 Gráfico posición-tiempo de una partícula que se mueve a velocidad constante.

Ejemplo 2.5 Posición de una partícula en función del tiempo *Inténtelo usted mismo*

La posición de una partícula viene descrita por la función indicada en la figura 2.7. Hallar la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ s. ¿Cuándo es mayor la velocidad? ¿Cuándo es nula? ¿Es negativa alguna vez?

PLANTEAMIENTO En la figura 2.7 hemos dibujado la línea tangente a la curva en el instante $t = 2$ s. La pendiente de la línea tangente es la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo dado. Puede utilizarse esta figura para medir la pendiente de la línea tangente.

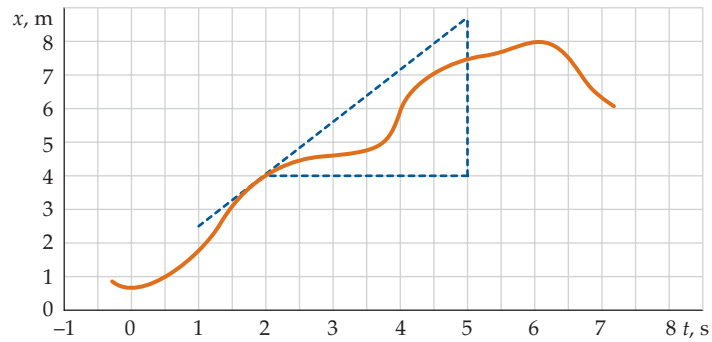


FIGURA 2.7

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Determinar los valores x_1 y x_2 sobre la línea tangente en los instantes $t_1 = 2{,}0$ s y $t_2 = 5{,}0$ s.
2. Calcular la pendiente de la línea tangente a partir de estos valores. Esta pendiente es igual a la velocidad instantánea en $t = 2{,}0$ s.
3. Según la figura, la pendiente (y, por lo tanto, la velocidad instantánea) es [mayor en aproximadamente $t \approx 4{,}0$ s]. La pendiente y la velocidad son [cero para $t = 0{,}0$ y $t = 6{,}0$ s] y son [negativas antes de 0,0 y después de 6,0 s].

Respuestas

$x_1 \approx 4{,}0$ m, $x_2 \approx 8{,}5$ m

$$v_x = \text{pendiente} \approx \frac{8{,}5\text{ m} - 4{,}0\text{ m}}{5{,}0\text{ s} - 2{,}0\text{ s}} = \boxed{1{,}5\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN La posición de la partícula cambia desde la posición 1,8 m en el instante 1,0 segundos hasta que la posición es de 4,0 m a los 2,0 segundos, por lo que la velocidad media para el intervalo comprendido entre 1,0 s y 2,0 s es de 2,2 m/s. Esta velocidad tiene el mismo orden de magnitud que la velocidad instantánea a los 1,8 s, por lo que el paso 2 es plausible.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.1 ¿Cuál es la velocidad media de esta partícula entre $t = 2{,}0$ s y $t = 5{,}0$ s?

Ejemplo 2.6 Caída de una piedra desde un acantilado

La posición de una piedra que a partir del reposo se deja caer desde un acantilado viene dada por $x = 5t^2$, donde x se mide en metros y hacia abajo desde la posición inicial cuando $t = 0$, y t se expresa en segundos. Hallar la velocidad en un instante t cualquiera. (Se omite la indicación explícita de la unidades para simplificar la notación.)

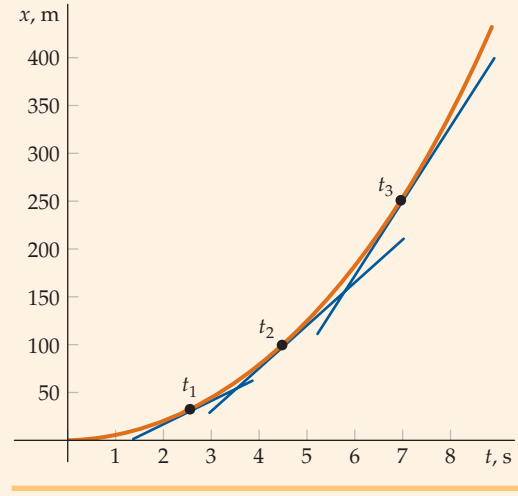


FIGURA 2.8

PLANTEAMIENTO Podemos calcular la velocidad de un instante determinado t calculando la derivada dx/dt directamente a partir de su definición en la ecuación 2.4. En la figura 2.8 se muestra la curva correspondiente que nos da x en función de t. Las líneas tangentes están dibujadas en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Las pendientes de estas líneas tangentes crecen uniformemente, indicando que la velocidad instantánea crece uniformemente con el tiempo.

SOLUCIÓN

1. Por definición la velocidad instantánea es: $$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
2. Podemos calcular el desplazamiento Δx a partir de la función posición $x(t)$: $$x(t) = 5t^2$$
3. En un tiempo posterior $t + \Delta t$, la posición $x(t + \Delta t)$, viene dada por: $$x(t + \Delta t) = 5(t + \Delta t)^2 = 5[t^2 + 2t\,\Delta t + (\Delta t)^2] = 5t^2 + 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2$$
4. El desplazamiento para este intervalo de tiempo será: $$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = [5t^2 + 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2] - 5t^2 = 10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2$$
5. Dividir Δx por Δt para determinar la velocidad media en este intervalo de tiempo: $$v_{m\,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10t\,\Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t + 5\,\Delta t$$
6. A medida que consideramos intervalos de tiempo cada vez más cortos, Δt se aproxima a cero y el segundo termino, $5\Delta t$, tiende a cero; en cambio, el primer término, $10t$, permanece invariable: $$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10t + 5\,\Delta t) = \boxed{10t}$$ donde v_x se da en m/s y t se da en s.

COMPROBACIÓN La piedra parte del reposo y va cada vez más deprisa. El resultado para la velocidad es $v_x = 10t$, es decir, 0 cuando $t = 0$, y aumenta a medida que lo hace el tiempo. Por lo tanto, $v_x = 10t$ es un resultado plausible.

OBSERVACIÓN Si hubiéramos hecho $\Delta t = 0$ en los pasos 4 y 5, el desplazamiento hubiera sido $\Delta x = 0$, en cuyo caso la relación $\Delta x/\Delta t$ quedaría indefinida. En su lugar, hemos dejado Δt como una variable hasta el paso final, cuando el límite $\Delta t \to 0$ está bien definido.

Para calcular las derivadas de forma rápida, utilizaremos unas reglas que están basadas en el cálculo de límites como en el ejemplo anterior (véase tabla A.4 en el Apéndice A). Una regla particularmente útil es

$$\text{Si} \quad x = Ct^n, \quad \text{entonces} \quad \frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1} \qquad 2.6$$

donde C y n son constantes. Utilizando esta regla en el ejemplo 2.6, resulta $x = 5t^2$ y $v_x = dx/dt = 10t$, de acuerdo con los resultados anteriores.

2.2 ACELERACIÓN

La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad instantánea. Cuando, por ejemplo, un conductor aprieta el pedal del acelerador de su coche, espera cambiar su velocidad. La **aceleración media** en un intervalo particular de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, se define como el cociente $\Delta v/\Delta t$, donde $\Delta v = v_f - v_i$:

$$a_{m\,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{f\,x} - v_{i\,x}}{t_f - t_i} \qquad \text{(por tanto, } \Delta v_x = a_{m\,x}\,\Delta t\text{)} \qquad 2.7$$

DEFINICIÓN: ACELERACIÓN MEDIA

La aceleración tiene dimensiones de velocidad (L/T) dividida por el tiempo (T), es decir, tiene las dimensiones de una longitud dividida por el tiempo al cuadrado. La unidad en el SI es m/s^2. Al igual que el desplazamiento y la velocidad, la aceleración es una magnitud vectorial. En un movimiento unidimensional, usamos los signos + y − para indicar la dirección de la aceleración. La ecuación 2.7 nos indica que para que a_m sea positiva Δv_x debe ser positivo y viceversa.

La **aceleración instantánea** es el límite del cociente $\Delta v/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero. Si representamos la velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en el tiempo t se define como la pendiente de la línea tangente a la curva en ese tiempo.

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$
$$= \text{pendiente de la línea tangente a la curva de } v \text{ en función de } t \qquad 2.8$$

DEFINICIÓN: ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

La aceleración es, por lo tanto, la derivada de la velocidad v_x respecto al tiempo, dv_x/dt. Como la velocidad es también la derivada de la posición x respecto a t, la aceleración es la segunda derivada de x respecto a t, d^2x/dt^2. Podemos ver el origen de esta notación escribiendo la aceleración como dv_x/dt, y sustituyendo v_x por dx/dt:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad 2.9$$

Obsérvese que cuando el intervalo de tiempo se hace muy pequeño, la aceleración media y la aceleración instantánea coinciden. Por lo tanto, a partir de ahora utilizaremos el vocablo aceleración para referirnos a la "aceleración instantánea".

Es importante darse cuenta que el signo de la aceleración de un objeto no indica si está aumentando o disminuyendo su velocidad. Para saberlo hay que comparar los signos de la velocidad y de la aceleración. Si v_x y a_x son ambas positivas, v_x se hace cada vez más positiva, por lo que el módulo de la velocidad aumenta. Si v_x y a_x son ambas negativas, v_x se hace cada vez más negativa por lo que el módulo de la velocidad aumenta. Cuando v_x y a_x tienen signos opuestos, el objeto se frena. Si v_x es positiva y a_x negativa, v_x se hace cada vez menos positiva de forma que el módulo de la velocidad disminuye. Si v_x es negativa y a_x positiva, v_x se hará cada vez

¡ La deceleración no significa que la aceleración sea negativa sino que los signos de la velocidad y de la aceleración son distintos.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 2.1

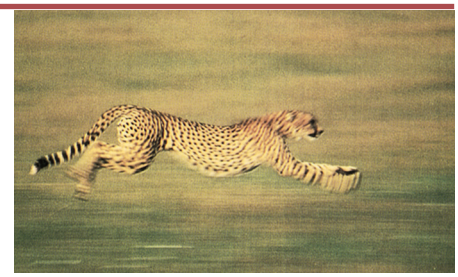
Usted va en su coche siguiendo a otro coche que circula a gran velocidad. De repente, el conductor del vehículo de delante frena bruscamente hasta parar para evitar pasar por un enorme bache. Tres centésimas de segundo después de que usted vea las luces de freno iluminarse, usted frena. Suponga que los dos coches se mueven a la misma velocidad y que ambos vehículos frenan de la misma forma, es decir, disminuyen su velocidad con el mismo ritmo. La distancia entre los dos coches, ¿es constante cuando los dos coches frenan al unísono?

menos negativa de forma que el módulo de la velocidad disminuye. En resumen, si v_x y a_x tienen el mismo signo, el módulo de la velocidad aumenta, mientras que si tienen signos opuestos, el módulo de la velocidad disminuye. Cuando un objeto se frena decimos que se desacelera.

Si la aceleración es cero, no hay cambio temporal de la velocidad —la velocidad es constante. En este caso, el gráfico de x en función de t es una línea recta. Si la aceleración no es cero pero es constante, como en el ejemplo 2.13, entonces la velocidad varía linealmente con el tiempo y x varía cuadráticamente con el tiempo.

Ejemplo 2.7 Un felino rápido

Un guepardo puede acelerar de 0 a 96 km/h en 2 s, mientras que una moto requiere 4,5 s. Calcular las aceleraciones medias del guepardo y de la moto, y compararlas con la aceleración de caída libre debida a la gravedad, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$.



(Gunther Ziesler/Peter Arnold.)

PLANTEAMIENTO Tenemos las velocidades iniciales y finales y el intervalo de tiempo que utilizan el felino y la moto, por lo que usando la ecuación 2.7 podemos determinar la aceleración de ambos.

SOLUCIÓN

1. Convertir 96 km/h a m/s:
$$96\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\right)\left(\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\right) = 26{,}7\ \text{m/s}$$

2. Determinar la aceleración media a partir de los datos suministrados:
guepardo $a_{m\,x} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{26{,}7\ \text{m/s} - 0}{2{,}0\ \text{s}} = 13{,}3\ \text{m/s}^2 = \boxed{13\ \text{m/s}^2}$

moto $a_{m\,x} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{26{,}7\ \text{m/s} - 0}{4{,}5\ \text{s}} = 5{,}93\ \text{m/s}^2 = \boxed{5{,}9\ \text{m/s}^2}$

3. Comparar los resultados con la aceleración de la gravedad, multiplicando por el factor de conversión $1g/9{,}81\ \text{m/s}^2$:
guepardo $13{,}3\ \text{m/s}^2 \times \dfrac{1g}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 1{,}36g = \boxed{1{,}4g}$

moto $5{,}93\ \text{m/s}^2 \times \dfrac{1g}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}604g = \boxed{0{,}60g}$

COMPROBACIÓN La moto tarda casi el doble que el guepardo para acelerar hasta la misma velocidad, con lo cual tiene sentido que la aceleración de la moto sea algo menor que la mitad de la aceleración del guepardo.

OBSERVACIÓN Para reducir los errores de redondeo, los cálculos hay que hacerlos usando valores con al menos tres dígitos aunque al final los resultados se presenten usando sólo dos dígitos significativos.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.2 Un coche se mueve a 45 km/h en el tiempo $t = 0$. El coche acelera de forma constante a razón de 10 km/(h·s). (*a*) ¿Cuál es su velocidad cuando $t = 2{,}0$ s? (*b*) ¿En qué momento el coche se mueve a 70 km/h?

Ejemplo 2.8 La velocidad y la aceleración en función del tiempo

La posición de una partícula viene dada por $x = Ct^3$, siendo C una constante cuyas unidades son m/s^3. Hallar la velocidad y aceleración en función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Podemos determinar la velocidad aplicando $dx/dt = Cnt^{n-1}$ (ecuación 2.6) a la posición de la partícula, donde en este caso n vale 3. A continuación, repetimos el proceso para calcular la derivada temporal de la velocidad.

SOLUCIÓN

1. Las dimensiones de x y t son L y T, respectivamente:
$$C = \frac{x}{t^3} \Rightarrow [C] = \frac{[x]}{[t]^3} = \boxed{\frac{\text{L}}{\text{T}^3}}$$

2. La velocidad puede determinarse aplicando $dx/dt = Cnt^{n-1}$ (ecuación 2.6):
$$x = Ct^n = Ct^3$$
$$v_x = \frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1} = C3t^{3-1} = \boxed{3Ct^2}$$

3. La derivada de la velocidad respecto al tiempo nos da la aceleración: $a = \frac{dv_x}{dt} = Cnt^{n-1} = 3C(2)(t^{2-1}) = \boxed{6Ct}$

COMPROBACIÓN Podemos comprobar las dimensiones de nuestras respuestas. Para la velocidad $[v_x] = [C][t^2] = (L/T^3)(T^2) = L/T$. Para la aceleración $[a_x] = [C][t] = (L/T^3)(T) = L/T^2$.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.3 Si un coche acelera desde el reposo en $x = 0$ con aceleración constante a_x, su velocidad v_x depende de a_x y de la distancia recorrida. ¿Cuál de las ecuaciones siguientes tiene las dimensiones correctas y, por lo tanto, es una forma plausible de relacionar x, a_x, y v_x?

(*a*) $v_x = 2a_x x$ (*b*) $v_x^2 = 2a_x/x$ (*c*) $v_x = 2a_x x^2$ (*d*) $v_x^2 = 2a_x x$

DIAGRAMAS DEL MOVIMIENTO

Frecuentemente, al resolver problemas de física hay que estimar la dirección del vector aceleración* a partir de la descripción del movimiento. Los diagramas del movimiento pueden resultar útiles. El móvil se dibuja a intervalos de tiempo constantes. Por ejemplo, supongamos que estamos en un trampolín y que queremos describir el movimiento desde que saltamos para caer en el trampolín y salir rebotados. En la figura 2.9*a* se muestra el diagrama del movimiento de la primera fase. Los puntos representan nuestra posición a intervalos de tiempo iguales, por lo que el espacio entre puntos consecutivos aumenta, ya que la velocidad aumenta también. Las cifras que aparecen junto a los puntos indican la progresión del tiempo y junto a cada punto una flecha representa la velocidad. La dirección de cada flecha indica la dirección de la velocidad en cada instante y la longitud de la flecha representa el módulo de la velocidad. El vector aceleración va en la dirección en que el vector velocidad cambia, que es hacia abajo. En general, si las flechas de la velocidad se alargan a medida que el tiempo progresa, la aceleración va en la misma dirección que la velocidad. Por otro lado, si las flechas de la velocidad se hacen más cortas a medida que avanza el tiempo (figura 2.9*b*), la aceleración va en la dirección opuesta a la velocidad. La figura 2.9*b* es el diagrama de nuestro movimiento cuando después de saltar sobre el trampolín, nos movemos hacia arriba.

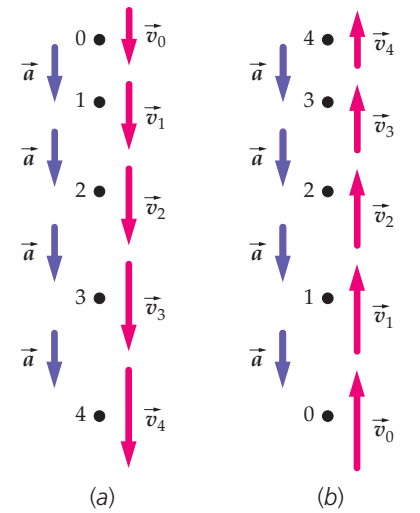


FIGURA 2.9 Diagramas del movimiento. Los intervalos de tiempo entre puntos sucesivos son idénticos. (*a*) El vector velocidad aumenta, lo cual significa que la aceleración va en la dirección del vector velocidad. (*b*) El vector velocidad disminuye, lo cual significa que la aceleración va en la dirección opuesta a la del vector velocidad.

2.3 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

El movimiento de una partícula que tiene aceleración casi constante es corriente en la naturaleza. Por ejemplo, cerca de la superficie de la Tierra todos los objetos caen verticalmente con aceleración de la gravedad constante (si puede despreciarse la resistencia del aire). Otros ejemplos de aceleración casi constante podrían ser un avión acelerando por la pista para despegar, el movimiento de un coche frenando frente a un semáforo en rojo o un coche acelerando cuando el semáforo cambia a verde. En una partícula en movimiento, la velocidad final v_x es igual a la velocidad inicial más el cambio de la velocidad, y el cambio de la velocidad es la aceleración media multiplicada por el tiempo. Es decir,

$$v_x = v_{0x} + \Delta v = v_{0x} + a_{m\,x}\,\Delta t \qquad 2.10$$

Si una partícula tiene aceleración constante a_x, su aceleración instantánea y su aceleración media coinciden. Es decir,

$$a_x = a_{m\,x} \qquad (a_x \text{ es constante}) \qquad 2.11$$

Dado que son frecuentes las situaciones en que la aceleración es constante, podemos utilizar las ecuaciones de la aceleración y la velocidad para obtener un conjunto especial de **ecuaciones cinemáticas** para aquellos problemas que comporten aceleración constante en una dimensión.

* En el capítulo 1 se introdujeron el vector velocidad y el vector aceleración, y se tratarán con más detalle en el capítulo 3.

DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Supongamos que una partícula que se mueve con aceleración constante a_x tiene una velocidad v_{0x} cuando el tiempo vale $t_0 = 0$, y v_x es la velocidad en un tiempo t posterior. Combinando las ecuaciones 2.10 y 2.11, tenemos

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (a_x \text{ es constante}) \qquad 2.12$$

ACELERACIÓN CONSTANTE, v EN FUNCIÓN DE t

Esta es la ecuación de una línea recta en un gráfico de v en función de t (figura 2.10). La pendiente de la línea es la aceleración a_x.

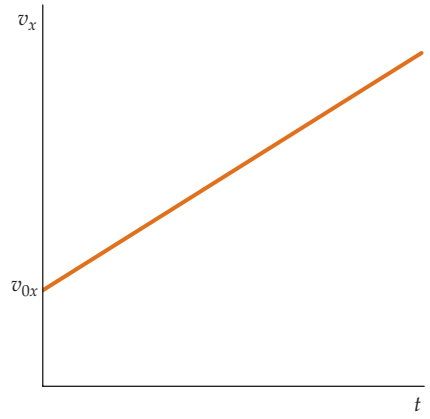


FIGURA 2.10 Gráfico de la velocidad en función del tiempo con aceleración constante.

Si buscamos una ecuación para la posición de x en función del tiempo, consideramos primero el caso especial del movimiento a velocidad constante $v_x = v_{0x}$ (figura 2.11). El desplazamiento Δx en el intervalo de tiempo Δt es

$$\Delta x = v_{0x}\,\Delta t \qquad (a_x = 0)$$

El área del rectángulo sombreado en el gráfico v_x-t (figura 2.11*a*) se calcula multiplicando la altura v_{0x} por la anchura Δt, por lo que el desplazamiento Δx es el área bajo la curva. Si v_{0x} es negativo (figura 2.11*b*), tanto el área como el desplazamiento son negativos. Normalmente, el área es una magnitud positiva. Sin embargo, en este contexto este no es el caso. Si v_{0x} es negativo, la altura de la curva es negativa y el área bajo la curva es la magnitud negativa $v_{0x}\,\Delta t$.

La interpretación geométrica del desplazamiento a partir del área bajo la curva v_x-t no sólo vale si la velocidad es constante sino que vale en general, tal como se ilustra en la figura 2.12. Para demostrar esta afirmación, dividimos primero el intervalo de tiempo en pequeños intervalos Δt_1, Δt_2, y así sucesivamente. Tal como se muestra en la figura, se dibujan unos rectángulos. El área del rectángulo correspondiente al intervalo Δt_i es $v_i\,\Delta t_i$ que es, aproximadamente, igual al desplazamiento Δx_i

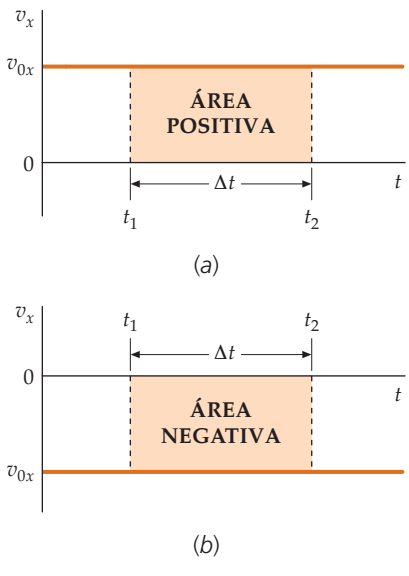


FIGURA 2.11 Gráficos del movimiento a velocidad constante.

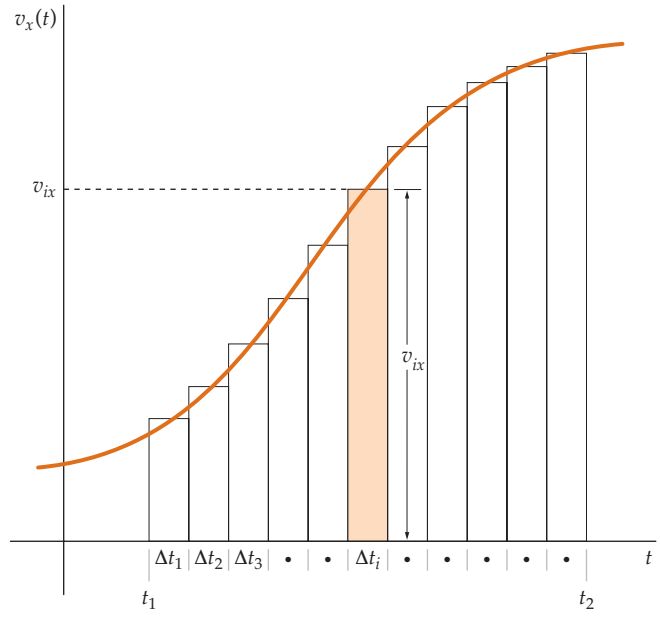


FIGURA 2.12 Gráfico de una curva general de $v_x(t)$ en función de t. El desplazamiento total desde t_1 hasta t_2 es el área bajo la curva en este intervalo, que puede obtenerse, aproximadamente, sumando las áreas de los rectángulos.

durante el intervalo Δt_i. La suma de las áreas de los rectángulos es, aproximadamente, igual a la suma de cada uno de los desplazamientos en cada intervalo de tiempo y coincide, aproximadamente, con el desplazamiento total entre los tiempos t_1 y t_2. Podemos hacer la aproximación tan precisa como queramos poniendo tantos rectángulos bajo la curva como queramos, cada uno de los cuales tendrá un valor de Δt más pequeño. En el límite de rectángulos infinitamente pequeños, la suma resultante se aproxima al valor del área bajo la curva, que a su vez coincide con el desplazamiento. Así, el desplazamiento Δx es el área bajo la curva v_x-t.

Para una aceleración constante (figura 2.13*a*), Δx es el área de la región sombreada. Esta región se divide en un rectángulo y un triángulo de área $v_{1x}\,\Delta t$ y $\frac{1}{2}a_x(\Delta t)^2$, respectivamente, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Por lo tanto

$$\Delta x = v_{1x}\,\Delta t + \tfrac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 \qquad 2.13$$

Si $t_1 = 0$ y $t_2 = t$, la ecuación 2.13 resulta

$$x - x_0 = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad 2.14$$

ACELERACIÓN CONSTANTE: $x(t)$

donde x_0 y v_{0x} son la posición y la velocidad en el tiempo $t = 0$, y $x = x(t)$ es la posición en el tiempo t. El término $v_{0x}t$ representa el desplazamiento que tendría lugar si a_x fuera cero y el término $\frac{1}{2}a_x t^2$ es el desplazamiento adicional debido a la aceleración constante.

Usamos ahora las ecuaciones 2.12 y 2.14 para obtener dos ecuaciones cinemáticas para el caso de la aceleración constante. Despejando t de la ecuación 2.12 y sustituyendo su valor en la ecuación 2.14, se obtiene

$$\Delta x = v_{0x}\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Multiplicando ambos lados por $2a_x$, obtenemos

$$2a_x\,\Delta x = 2v_{0x}(v_x - v_{0x}) + (v_x - v_{0x})^2$$

Simplificando y ordenando los términos, se llega a

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x \qquad 2.15$$

ACELERACIÓN CONSTANTE: $v_x(x)$

La definición de velocidad media (ecuación 2.3) queda

$$\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$$

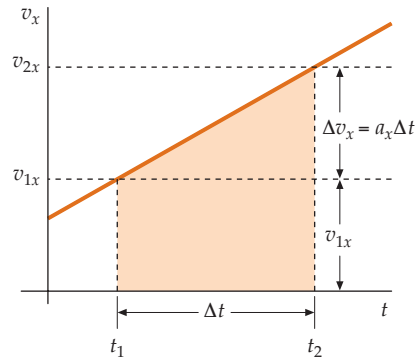
donde $v_{m\,x}\,\Delta t$ es el área bajo la línea horizontal de altura $v_{m\,x}$ en la figura 2.13*b*, y Δx es el área bajo la curva v_x-t en la figura 2.13*a*. Se puede ver que si $v_{m\,x} = \frac{1}{2}(v_{1x} + v_{2x})$, el área bajo la línea de altura v_m en la figura 2.13*a* y el área bajo la curva v_x-t en la figura 2.13*b* son iguales. Así

$$v_{m\,x} = \tfrac{1}{2}(v_{1x} + v_{2x}) \qquad 2.16$$

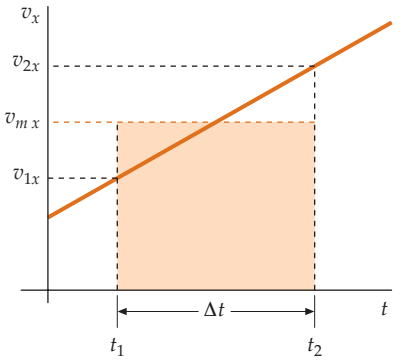
ACELERACIÓN CONSTANTE: $v_{m\,x}$ Y v_x

En un movimiento con aceleración constante, la velocidad media es la media de las velocidades final e inicial.

Un ejemplo de una situación en que la ecuación 2.16 no se puede aplicar, sería el de un corredor que tarda 40,0 min en recorrer una distancia de 10,0 km. La velocidad media de la carrera es 0,250 km/min, calculada usando la definición de



(*a*)



(*b*)

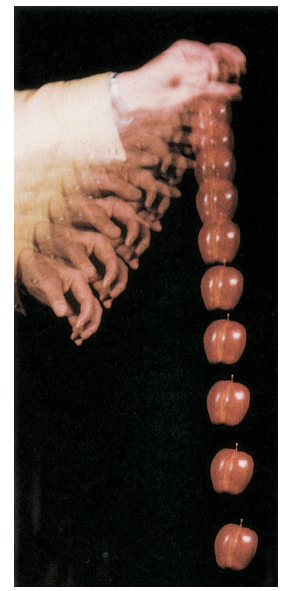
FIGURA 2.13 Gráficos del movimiento con aceleración constante.

"Va de cero a 60 en unos 3 segundos." *(© Sydney Harris.)*

! La ecuación 2.16 es aplicable sólo cuando la aceleración es constante durante los intervalos de tiempo.

velocidad media ($v_{m\,x} = \Delta x/\Delta t$). El corredor comienza la carrera desde el reposo ($v_{1x} = 0$) y durante los primeros segundos su velocidad aumenta rápidamente alcanzando el valor constante v_{2x} que se mantiene durante el resto de la carrera. El valor de v_{2x} es ligeramente superior al de la velocidad media mientras que si calculamos la velocidad media mediante la ecuación 2.16 resulta un valor de 0,125 km/h, que es, aproximadamente, la mitad del valor dado por la definición de velocidad media. La ecuación 2.16 no puede aplicarse, ya que la aceleración no es constante durante toda la carrera.

Las ecuaciones 2.12, 2.14, 2.15 y 2.16 se usan para resolver problemas cinemáticos con aceleración constante en una dimensión. La elección de qué ecuación o ecuaciones se usan para un problema particular depende de la información de la que se disponga y de qué pregunta se tiene que resolver. La ecuación 2.15 es útil, por ejemplo, si se quiere determinar la velocidad final de una pelota que cae, partiendo del reposo, desde una altura x cuando no estamos interesados en saber la duración de la caída.



Fotografía estroboscópica de la caída de una manzana a 60 destellos por segundo. La aceleración de la manzana viene indicada por el mayor espaciado que se observa en las imágenes inferiores. *(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press.)*

USO DE LAS ECUACIONES CINEMÁTICAS CON LA ACELERACIÓN CONSTANTE

Revise la Estrategia de resolución de problemas para resolver problemas usando las ecuaciones cinemáticas. Examine entonces los ejemplos de movimiento unidimensional con aceleración constante que hay a continuación.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento en una dimensión con aceleración constante

PLANTEAMIENTO Averiguar si el problema pide determinar el tiempo, la distancia, la velocidad o la aceleración de un objeto.

SOLUCIÓN Siga los pasos siguientes para resolver problemas de un movimiento con aceleración constante en una dimensión.

1. Dibuje una figura que muestre la posición inicial y final de la partícula. La figura debe contener un eje de coordenadas indicando los sentidos positivo y negativo, y señale las coordenadas y la velocidad inicial y final del objeto. Señale la aceleración.
2. Seleccione una de las ecuaciones cinemáticas con aceleración constante (ecuaciones 2.12. 2.14, 2.15 y 2.16). Sustituya los valores en la ecuación y, si es posible, despeje la magnitud deseada.
3. Si es necesario, seleccione otra de las ecuaciones cinemáticas con aceleración constante, sustituya los valores dados en ella y despeje la magnitud deseada.

COMPROBACIÓN Hay que comprobar que las respuestas sean dimensionalmente consistentes y que las unidades sean correctas. Además, compruebe que los signos y el orden de magnitud del resultado concuerdan con lo que era razonable esperar.

Problemas con un objeto Empezaremos con diversos ejemplos que muestran el movimiento de un objeto.

Ejemplo 2.9 Distancia de frenado de un vehículo

Una persona que conduce un vehículo de noche por una autopista ve de pronto, a cierta distancia, un coche parado y frena hasta detenerse con una aceleración de 5 m/s^2. ¿Cuál es la distancia de frenado del vehículo si su velocidad inicial es (a) 15 m/s o (b) 30 m/s?

PLANTEAMIENTO Use la Estrategia para la resolución de problemas que precede a este ejemplo. En la figura, el coche se dibuja mediante un punto. Elegimos la dirección x como la

dirección del movimiento y la posición incial $x_0 = 0$. Entonces, la velocidad inicial es $v_{0x} = +15\ \text{m/s}$, la velocidad final es $v_x = 0$ y la aceleración es $a_x = -5\ \text{m/s}^2$, ya que la velocidad disminuye. Queremos determinar la distancia recorrida, Δx. Como no necesitamos conocer el tiempo que tarda el coche en detenerse, utilizamos la ecuación 2.15 como la más conveniente.

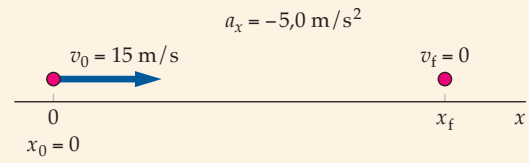


FIGURA 2.14

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibuje el coche en sus posiciones inicial y final (figura 2.14). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos.

2. Usando la ecuación 2.15 calcule el desplazamiento Δx:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$$
$$0 = (15\ \text{m/s})^2 + 2(-5{,}0\ \text{m/s}^2)\Delta x$$
$$\Delta x = 22{,}5\ \text{m} = \boxed{23\ \text{m}}$$

(*b*) Sustituya la velocidad inicial de 30 m/s en la expresión para Δx obtenida en la parte (*a*) (véase la figura 2.14):

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$$
$$0 = (30\ \text{m/s})^2 + 2(-5{,}0\ \text{m/s}^2)\Delta x$$
$$\Delta x = \boxed{90\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad del coche disminuye 5,0 m/s cada segundo. Si su velocidad inicial es 15 m/s invertirá 3,0 s hasta pararse. Durante los 3,0 s tiene una velocidad media igual a la mitad de 15 m/s, por lo que recorrerá $\frac{1}{2}(15\ \text{m/s})(3{,}0\ \text{s}) = 23\ \text{m}$. Esto confirma nuestro resultado del apartado (*a*). El resultado del apartado (*b*) puede confirmarse de forma parecida.

Ejemplo 2.10 Distancia de frenado *Inténtelo usted mismo*

En el ejemplo 2.9, (*a*) ¿cuánto tiempo tarda el coche en detenerse si su velocidad inicial es 30 m/s? (*b*) ¿Qué distancia recorre el coche durante el último segundo?

PLANTEAMIENTO Use la Estrategia para la resolución de problemas que precede al ejemplo 2.9. (*a*) En este apartado del problema se pide determinar el tiempo que el coche tarda en pararse. Se conoce la velocidad inicial $v_{0x} = 30\ \text{m/s}$. A partir del ejemplo 2.9, se sabe que el coche lleva una aceleración $a_x = -5{,}0\ \text{m/s}^2$. La ecuación 2.12 relaciona el tiempo, la velocidad y la aceleración. (*b*) Como la velocidad disminuye en 5 m/s cada segundo, la velocidad que tendrá el coche 1 s antes de detenerse debe ser de 5 m/s. Determinar la velocidad media durante el último segundo y con ella calcular la distancia recorrida.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
(*a*) 1. Represente el coche mediante un punto pequeño en sus posiciones inicial y final (Figura 2.15). Incluya un eje de coordenadas y los parámetros cinemáticos.	
2. Use la ecuación 2.12 para determinar el tiempo que le cuesta parar Δt.	$\Delta t =$ 6,0 s
(*b*) 1. Represente el coche, mediante un punto pequeño, en sus posiciones inicial y final (figura 2.16). Incluya un eje de coordenadas.	
2. Calcular la velocidad media durante el último segundo, a partir de $v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})$.	$v_{mx} = 2{,}5\ \text{m/s}$
3. Calcular la distancia recorrida a partir de $\Delta x = v_{mx}\,\Delta t$.	$\Delta x = v_{mx}\,\Delta t =$ 2,5 m

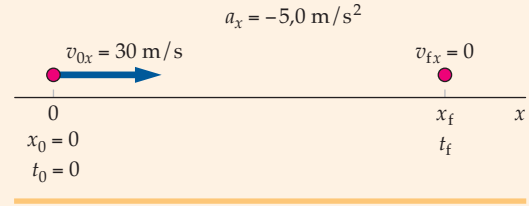


FIGURA 2.15

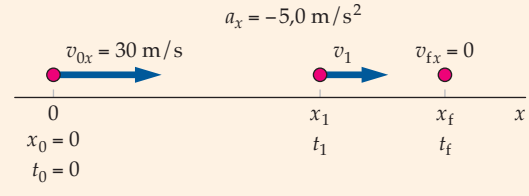


FIGURA 2.16

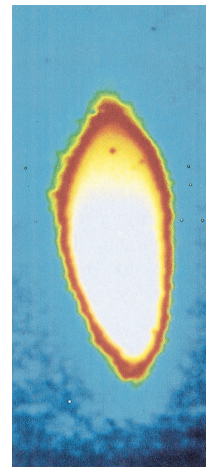
COMPROBACIÓN No esperamos que el coche se mueva muy rápido durante el último segundo. Así que el resultado de 2,5 m del apartado (*b*) parece plausible.

Ejemplo 2.11 Un electrón viajero

Inténtelo usted mismo

Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera desde el reposo con una aceleración constante de $5{,}33 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2$ durante 0,150 μs ($1\ \mu\text{s} = 10^{-6}$ s). El electrón se mueve otros 0,200 μs a velocidad constante y, finalmente, se para con una aceleración de $-2{,}67 \times 10^{13}\ \text{m/s}^2$. ¿Qué distancia recorre el electrón?

PLANTEAMIENTO La aceleración cambia dos veces durante el movimiento del electrón, por lo que no se pueden aplicar las ecuaciones con aceleración constante a todo el movimiento de la partícula. Sin embargo, se puede dividir el movimiento del electrón en tres intervalos, cada uno de los cuales tiene una aceleración constante distinta, usando la posición y la velocidad final del primer intervalo como las condiciones iniciales para el segundo intervalo y la posición y la velocidad final del segundo intervalo como las condiciones iniciales para el tercer intervalo. Aplique la Estrategia para la resolución de problemas que precede al ejemplo 2.9 en cada uno de los tres intervalos con aceleración constante. Elija el origen de coordenadas en la posición inicial del electrón y el sentido positivo en el sentido de movimiento de la partícula.



Acelerador lineal de unos tres kilómetros de longitud de la Universidad de Stanford (EE.UU.). Se utiliza para acelerar electrones y positrones en línea recta a velocidades próximas a las de la luz. Sección transversal del haz de electrones del acelerador, tal como se observa en un monitor de vídeo. *(Stanford Limear Accelerator, U.S. Department of Energy.)*

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Dibuje el electrón en sus posiciones inicial y final para cada uno de los tres intervalos de su movimiento (figura 2.17). Señale los parámetros cinemáticos y dibuje el eje de coordenadas.

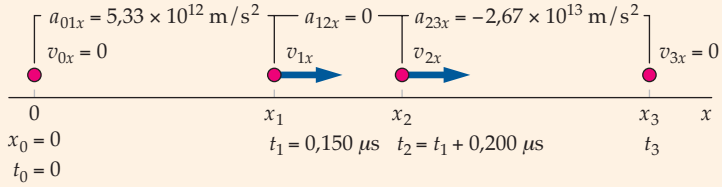


FIGURA 2.17

2. Si el electrón parte del reposo, $v_{0x} = 0$. Use las ecuaciones 2.12 y 2.14 para determinar la posición x_1 y v_{1x} al final del primer intervalo de 0,150 μs.

3. La aceleración es cero durante el segundo intervalo, por lo que la velocidad es constante.

4. Si la velocidad es constante durante el segundo intervalo, el desplazamiento Δx_{12} es igual a la velocidad, v_{1x} multiplicada por 0,200 μs.

5. Para calcular el desplazamiento durante el tercer intervalo, use la ecuación 2.15 con $v_{3x} = 0$.

Respuestas

$x_1 = 6{,}00$ cm, $v_{1x} = 8{,}00 \times 10^5$ m/s

$v_{2x} = v_{1x} = 8{,}00 \times 10^5$ m/s

$\Delta x_{12} = 16{,}0$ cm; por lo tanto, $x_2 = 22{,}0$ cm

$\Delta x_{23} = 1{,}20$ cm; por lo tanto, $x_3 =$ **23,2 cm**

COMPROBACIÓN Las velocidades medias son grandes, pero los intervalos de tiempo son pequeños, por lo que las distancias recorridas son modestas, como era de esperar.

Algunas veces para tener una idea del movimiento de un objeto conviene utilizar las formulas con aceleración constante aunque en realidad la aceleración varíe. Los resultados son sólo aproximaciones, no cálculos exactos. Este es el caso del ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.12 El choque de prueba *Póngalo en su contexto*

Un coche que va a 100 km/h choca contra una pared de hormigón rígida. ¿Cuál es su aceleración?

(© 1994 General Motors Corporation, all rights reserved GM Archives.)

PLANTEAMIENTO En este ejemplo no es correcto considerar el coche como una partícula, ya que las distintas partes del mismo sufrirán aceleraciones distintas al arrugarse sobre la pared. El parachoques delantero se para de forma casi instantánea mientras que el trasero lo hace posteriormente. Resolveremos el problema para la parte del coche que no se arruga, la que ocupa el conductor, y que está representada por el tornillo que fija el asiento al chasis. Realmente no esperamos que la aceleración de este tornillo sea constante. Para resolver este problema necesitamos más información: la distancia de detención o el tiempo de detención del coche. Podemos estimar la distancia de detención utilizando el sentido común. Después del impacto, el centro del coche se desplazará hacia adelante algo menos que la mitad de la longitud del coche. Tomaremos para nuestra estimación el valor razonable de 0,75 m. Como el problema no nos proporciona el tiempo, utilizaremos la relación $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x$.

SOLUCIÓN

1. Represente el tornillo mediante un círculo pequeño en sus posiciones final e inicial (figura 2.18). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos:

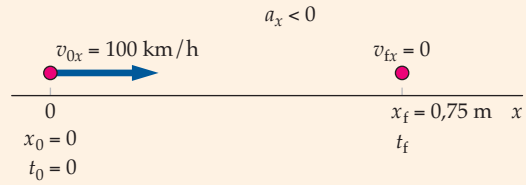


FIGURA 2.18

2. Convertir la velocidad expresada en km/h en m/s:

$$(100\ \cancel{\text{km}}/\cancel{\text{h}}) \times \left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{60\ \cancel{\text{min}}}\right) \times \left(\frac{1\ \cancel{\text{min}}}{60\ \text{s}}\right) \times \left(\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\right) = 27{,}8\ \text{m/s}$$

3. Usando $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x$, obtener la aceleración:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x$$

por lo tanto

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2\Delta x} = \frac{0^2 - (27{,}8\ \text{m/s})^2}{2(0{,}75\ \text{m})}$$

4. Completar el cálculo de la aceleración:

$$a_x = -\frac{(27{,}8\ \text{m/s})^2}{1{,}5\ \text{m}} = -514\ \text{m/s}^2 \approx \boxed{-500\ \text{m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que el módulo de esta aceleración es superior a 50 g. Este resultado es plausible, ya que se espera que se pongan en juego aceleraciones grandes cuando se produce una colisión a altas velocidades.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.4 Estime el tiempo que tarda el coche en detenerse.

Caída libre Muchos problemas prácticos se refieren a objetos en caída libre, es decir, objetos que caen bajo la única influencia de la gravedad. Todos los objetos en caída libre que parten de la misma velocidad inicial se mueven de forma idéntica. Como se ve en la figura 2.19, se sueltan desde el reposo, simultáneamente, una pluma y una manzana en una cámara de vacío, de modo que caen con el mismo movimiento. Ambos objetos tienen la misma aceleración. El módulo de la aceleración causada por la gravedad se designa por g, cuyo valor aproximado es $a = g \approx 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 32{,}2\ \text{ft/s}^2$. Como g es el módulo de una aceleración, siempre es positiva. Si la dirección hacia abajo se considera positiva, la aceleración debida a la gravedad es $a_y = +g$; si se considera positiva hacia arriba, entonces $a_y = -g$.

FIGURA 2.19 Se dejan caer simultáneamente una manzana y una pluma en el vacío. Ambas describen el mismo movimiento. *(James Sugar/Black Star.)*

> ! Como g es el *módulo* de la aceleración, g es *siempre* positiva.

Ejemplo 2.13 El birrete volador

Un estudiante de física contento por su graduación lanza su birrete hacia arriba con una velocidad inicial de 14,7 m/s. Considerando que su aceleración es 9,81 m/s² hacia abajo (despreciamos la resistencia del aire), (*a*) ¿cuánto tiempo tardará el birrete en alcanzar su punto más alto? (*b*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada? (*c*) Suponiendo que el birrete se recoge a la misma altura de la que ha salido, ¿cuánto tiempo permanece en el aire?

PLANTEAMIENTO Cuando el birrete alcanza su punto más alto, su velocidad instantánea es cero. Así convertimos la expresión "punto más alto" a la condición matemática $v_y = 0$.

SOLUCIÓN

(a) 1. Dibujar el birrete en su posición inicial y en el punto más alto de su trayectoria. Incluir un eje de coordenadas y señalar el origen y las dos posiciones del birrete:

2. El tiempo se relaciona con la velocidad y la aceleración:
$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

3. Hacer $v_y = 0$ y despejar t:
$$t = \frac{0 - v_{0y}}{a_y} = \frac{-14{,}7\ \text{m/s}}{-9{,}81\ \text{m/s}^2} = \boxed{1{,}50\ \text{s}}$$

(b) Determinar la distancia recorrida a partir del tiempo t y la velocidad media:
$$\Delta y = v_{m\,y} t = \tfrac{1}{2}(v_{0y} + v_y)\Delta t$$
$$= \tfrac{1}{2}(14{,}7\ \text{m/s} + 0)(1{,}50\ \text{s}) = \boxed{11{,}0\ \text{m}}$$

(c) 1. Hacer $y = y_0$ en la ecuación 2.14 y despejar t:
$$\Delta y = v_{0_y} t + \tfrac{1}{2} a_y t^2$$
$$0 = (v_{0y} + \tfrac{1}{2} a_y t)t$$

2. Hay dos soluciones para t cuando $y = y_0$. La primera corresponde al tiempo en que se lanza el birrete y la segunda corresponde al tiempo en que se recoge:
$$t = 0 \qquad \text{(primera solución)}$$
$$t = -\frac{2v_{0y}}{a_y} = -\frac{2(14{,}7\ \text{m/s})}{-9{,}81\ \text{m/s}^2} = \boxed{3{,}00\ \text{s}} \qquad \text{(segunda solución)}$$

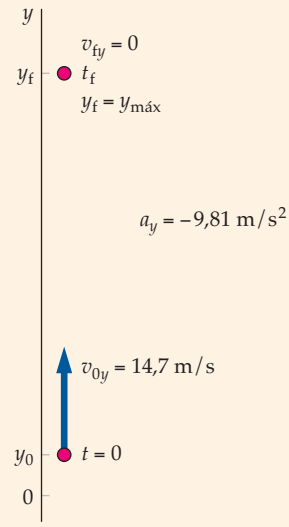


FIGURA 2.20

COMPROBACIÓN Cuando el birrete sube, su velocidad disminuye con una tasa de 9,81 m/s cada segundo. Su velocidad inicial es 14,7 m/s, por lo que esperamos que su ascenso dure más de 1,0 s, pero menos de 2,0 s. Por lo tanto, si sube 1,5 s nos parece razonable.

OBSERVACIÓN En la figura 2.21*b* se representa la velocidad frente al tiempo. Obsérvese que la pendiente es constante, incluso cuando $v_y = 0$. La pendiente es la aceleración instantánea, una constante que vale $-9{,}81\ \text{m/s}^2$. En el gráfico de la figura 2.21*a* se representa la altura frente al tiempo, siendo el tiempo de ascenso el mismo que el tiempo de descenso. En realidad, la aceleración del birrete no es constante, ya que la resistencia del aire produce un efecto significativo sobre un objeto ligero como el birrete. Si no se puede despreciar la resistencia del aire, la caída será más larga que el ascenso.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.5 Hallar $y_{máx} - y_0$ usando la ecuación 2.15. Determinar la velocidad del birrete cuando llega de nuevo al punto de partida.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.6 ¿Cuál es la velocidad del birrete en los siguientes instantes de tiempo? (*a*) 0,100 s antes de que llegue al punto más alto; (*b*) 0,100 s después de que haya pasado por el punto más alto. (*c*) Calcular $\Delta v_y / \Delta t$ durante este intervalo de tiempo de 0,200 s.

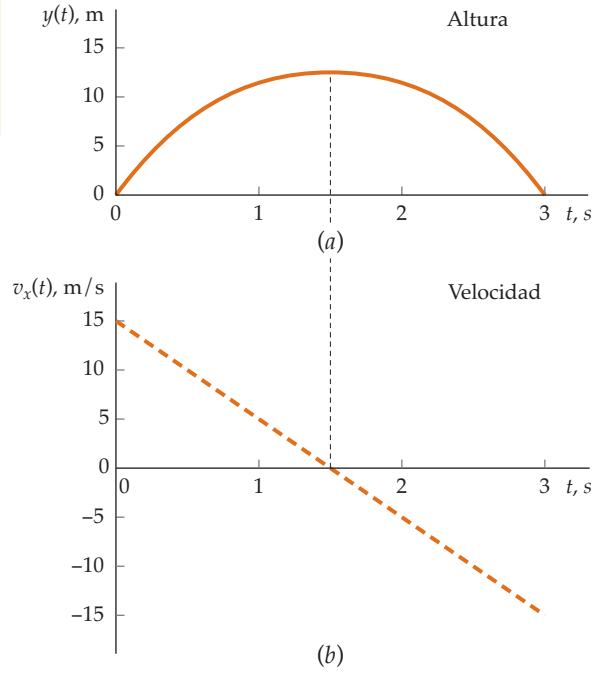


FIGURA 2.21 Se representan, uno encima del otro, los gráficos de la altura y la velocidad de forma que pueden verse el valor de ambos parámetros en el mismo instante de tiempo.

Problemas con dos objetos A continuación, exponemos algunos problemas que incluyen dos objetos que se mueven con aceleración constante.

Ejemplo 2.14 A la caza de un coche con exceso de velocidad

Un coche lleva una velocidad de 25 m/s (= 90 km/h) en una zona escolar. Un coche de policía, que está parado, arranca cuando el infractor le adelanta y acelera con una aceleración constante de 5 m/s^2. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda el coche de policía en alcanzar al vehículo infractor? (*b*) ¿Qué velocidad lleva el coche de policía cuando le alcanza?

PLANTEAMIENTO Para determinar cuando los dos coches se encuentran en la misma posición, expresamos las posiciones x_S del vehículo infractor y x_P del coche de policía en función del tiempo y despejamos t para $x_S = x_P$. Una vez que sabemos cuándo el coche de policía alcanza al infractor, podemos determinar la velocidad del coche de policía en el momento en que alcanza al coche infractor usando la ecuación $v_x = a_x t$.

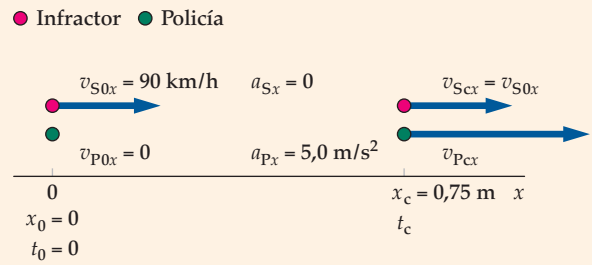


FIGURA 2.22 El coche del infractor y del policía tienen la misma posición cuando $t = 0$ y, de nuevo, cuando $t = t_c$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibuje los dos coches en sus posiciones iniciales ($t = 0$) y finales ($t = t_c$) (figura 2.22). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos:

2. Escriba las funciones de posición del infractor y del policía: $x_S = v_{Sx}t$ y $x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$

3. Hacer $x_S = x_P$ y resolver para el tiempo t_c para $t_c > 0$:

$$v_{Sx}t_c = \tfrac{1}{2}a_{Px}t_c^2 \Rightarrow v_{Sx} = \tfrac{1}{2}a_{Px}t_c \qquad t_c \neq 0$$

$$t_c = \frac{2v_{Sx}}{a_{Px}} = \frac{2(25\text{ m/s})}{5{,}0\text{ m/s}^2} = \boxed{10\text{ s}}$$

(*b*) La velocidad del coche de policía viene expresada por $v_x = v_{0x} + a_x t$, donde $v_{0x} = 0$:

$$v_{Px} = a_{Px}t_c = (5{,}0\text{ m/s}^2)(10\text{ s}) = \boxed{50\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad final del coche de policía en (*b*) es, exactamente, el doble que la del coche infractor. Como los dos coches cubren la misma distancia en igual tiempo, ambos hicieron el recorrido con igual velocidad media. La velocidad media del infractor es, por supuesto, de 25 m/s. Como el policía parte del reposo y su velocidad media es de 25 m/s, debe alcanzar una velocidad final de 50 m/s.

PROBLEMA PRÁCTICO 2.7 ¿Qué distancia han recorrido los coches cuando el policía alcanza al infractor?

Ejemplo 2.15 El coche de policía — *Inténtelo usted mismo*

¿Qué velocidad lleva el coche de policía del ejemplo 2.14 cuando se encuentra a 25 m por detrás del vehículo infractor?

PLANTEAMIENTO La velocidad viene expresada por $v_P = a_x t_1$, donde t_1 es el tiempo en el cual $x_S - x_P = 25$ m.

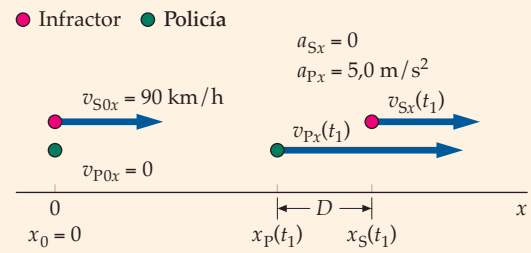


FIGURA 2.23

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Dibujar una curva x-t que muestre las posiciones de los dos coches (figura 2.24). En este gráfico identificar la distancia $D = x_S - x_P$ entre los dos coches para un instante dado.

Respuestas

2. Utilizar las ecuaciones para x_P y x_S del ejemplo 2.14 y despejar t_1 cuando $x_S - x_P = 25$ m. Hay dos soluciones, una que corresponde a pocos instantes después del inicio del movimiento y otra que corresponde a poco antes de que el vehículo con exceso de velocidad sea alcanzado. $t_1 = (5 \pm \sqrt{15})$ s
3. Utilizar $v_{P1} = a_{Px}t_1$ para calcular la velocidad del coche de policía cuando $x_S - x_P = 25$ m. $v_{P1} =$ 5,64 m/s y 44,4 m/s

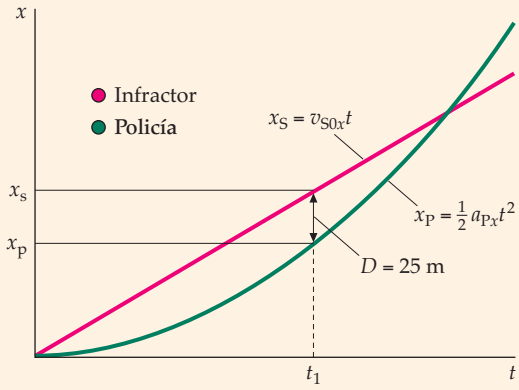


FIGURA 2.24

COMPROBACIÓN En la figura 2.24 se observa que la distancia entre los dos coches al principio es cero, crece hasta un valor máximo y luego disminuye. Para una determinada distancia de separación esperamos dos velocidades distintas.

OBSERVACIÓN La separación en cualquier momento viene dada por $D = x_S - x_P = v_{Sx}t - \frac{1}{2}a_{Px}t^2$. Cuando la separación es máxima, $dD/dt = 0$, lo cual ocurre en el instante $t = 5{,}0$ s. Para intervalos de tiempo iguales antes y después de $t = 5{,}0$ s, las separaciones son las mismas.

Ejemplo 2.16 Un ascensor en movimiento

Una persona en un ascensor ve un tornillo que cae del techo. La altura del ascensor es de 3 m. ¿Cuánto tiempo tarda el tornillo en chocar contra el suelo si el ascensor asciende con una aceleración constante = 4,0 m/s²?

PLANTEAMIENTO Cuando el tornillo llegue al suelo, la posición del tornillo y el suelo son la misma. Iguale las posiciones y despeje el tiempo.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama que muestre las posiciones inicial y final del tornillo y del suelo del ascensor (Figura 2.25). Incluya un eje de coordenadas y señale los parámetros cinemáticos. El tornillo y el suelo tienen la misma velocidad inicial, pero diferentes aceleraciones. Escoger como origen la posición inicial del suelo y elegir la dirección hacia arriba como la dirección y positiva. El tornillo llega al suelo al tiempo t_f:

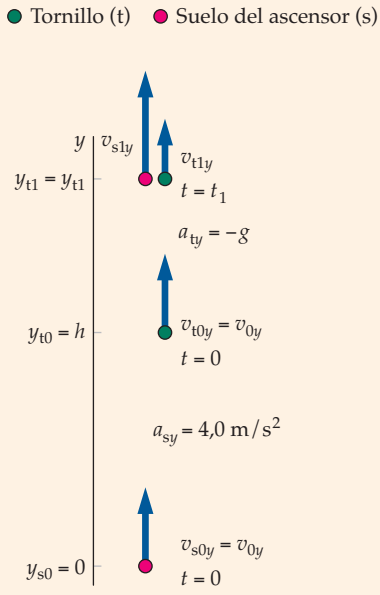


FIGURA 2.25 El eje y está fijado al edificio.

2. Escribir las ecuaciones que especifiquen la posición y_s del suelo del ascensor y la posición y_t del tornillo. Ambos tienen la misma velocidad inicial v_{0y}:

$$y_s - y_{s0} = v_{s0y}t + \tfrac{1}{2}a_{sy}t^2$$
$$y_s - 0 = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_{sy}t^2$$
$$y_t - y_{t0} = v_{t0y}t + \tfrac{1}{2}a_{ty}t^2$$
$$y_t - h = v_{0y}t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2$$

3. Igualar las expresiones para y_s e y_t cuando $t = t_f$ y simplificar:

$$y_t = y_s$$
$$h + v_{0y}t_f - \tfrac{1}{2}gt_f^2 = v_{0y}t_f + \tfrac{1}{2}a_{sy}t_f^2$$
$$h - \tfrac{1}{2}gt_f^2 = \tfrac{1}{2}a_{sy}t_f^2$$

4. Despejar el tiempo y sustituir los valores:

$$h = \tfrac{1}{2}(a_{sy} + g)t_f^2 \quad \text{por lo tanto}$$
$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{a_{sy} + g}} = \sqrt{\frac{2(3{,}0\text{ m})}{4{,}0\text{ m/s}^2 + 9{,}81\text{ m/s}^2}} = 0{,}659\text{ s} = \boxed{0{,}66\text{ s}}$$

COMPROBACIÓN Si el ascensor fuera estacionario, la distancia que cae el tornillo sería $h = \frac{1}{2}gt_f^2$. Si $h = 3{,}0$ m, el tiempo que tarda en llegar al suelo es $t_f = 0{,}78$ s. A causa de la aceleración del ascensor, esperamos que el tornillo tarde menos en caer. El resultado que se ha obtenido satisface esta suposición.

Ejemplo 2.17 Un ascensor en movimiento — *Inténtelo usted mismo*

Considerar el ascensor y el tornillo del ejemplo 2.16. Suponer que la velocidad de subida del ascensor es de 16 m/s cuando el tornillo se desprende del techo y empieza a caer. (*a*) ¿Qué distancia recorre el ascensor mientras el tornillo cae? ¿Qué distancia recorre el tornillo? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del tornillo y del ascensor en el momento del impacto de aquél en el suelo?

PLANTEAMIENTO El tiempo de vuelo del tornillo se ha obtenido en la solución del ejemplo 2.16. Usar este tiempo para resolver los apartados (*a*) y (*b*).

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

(*a*) 1. Usar la ecuación 2.13 para calcular la distancia que se mueve el suelo del ascensor entre el tiempo $t = 0$ y $t = t_f$, donde t_f se ha calculado en el paso 4 del ejemplo 2.16.

2. Entre $t = 0$ y $t = t_f$, el desplazamiento del tornillo es inferior al del suelo en unos 3,0 m.

(*b*) Usar la ecuación 2.12, $v_y = v_{0y} + a_y t$, para encontrar la velocidad del impacto del tornillo con el suelo del ascensor.

Respuestas

$\Delta y_s = v_{si} t_f + \frac{1}{2} a_s t_f^2 = \boxed{11{,}4\ \text{m}}$

$\Delta y_t = \boxed{+8{,}4\ \text{m}}$

$v_{ty} = v_{tiy} - g t_f = \boxed{9{,}5\ \text{m/s}}$

$v_{sy} = v_{siy} + a_{sy} t_f = \boxed{19\ \text{m/s}}$

COMPROBACIÓN Los resultados del apartado (*b*) para la velocidad del tornillo y del suelo del ascensor en el momento del impacto son ambos positivos, indicando que las dos velocidades van hacia arriba. Para que se dé el impacto el ascensor debe moverse más rápido que el tornillo. Este resultado es consistente con lo que se ha obtenido en el apartado (*b*).

OBSERVACIÓN El tornillo impacta con el suelo del ascensor 8,4 m por encima de su posición inicial. Con respecto al edificio, en el momento del contacto el tornillo todavía está subiendo. Obsérvese que en el momento del impacto la velocidad del tornillo relativa al edificio es positiva.

2.4 INTEGRACIÓN

En esta sección usamos el cálculo integral para obtener las ecuaciones del movimiento. Puede encontrarse un tratamiento conciso del cálculo en el Apéndice de Matemáticas.

Para determinar la velocidad a partir de una determinada aceleración, observemos que la velocidad es la función $v_x(t)$ cuya derivada es la aceleración $a_x(t)$:

$$\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t)$$

Si la aceleración es constante, la velocidad es aquella función del tiempo que cuando se deriva es igual a esta constante. Por ejemplo

$$v_x = a_x t \qquad a_x \text{ es constante}$$

De un modo más general, podemos añadir a la función $a_x t$ cualquier constante sin que se modifique la derivada respecto al tiempo. Llamando c a esta nueva constante, resulta

$$v_x = a_x t + c$$

Cuando $t = 0$, $v_x = c$. Así pues, c es la velocidad inicial v_{0x}.

Análogamente, la función posición $x(t)$ es aquella función cuya derivada es la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} + a_x t$$

Cada uno de estos términos puede tratarse separadamente. La función cuya derivada es una constante v_{0x} es $v_{0x}t$ más cualquier constante. La función cuya derivada es $a_x t$ es $\frac{1}{2}at^2$ más cualquier constante. Llamando x_0 a la suma combinada de todas estas constantes arbitrarias, resulta

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

Cuando $t = 0$, $x = x_0$. Así pues, x_0 es la posición inicial.

Siempre que se obtiene una función a partir de su derivada, debe añadirse una constante arbitraria en la función general. Como para obtener $x(t)$ a partir de la aceleración debemos integrar dos veces, aparecen dos constantes. Normalmente estas constantes se determinan a partir de la velocidad y la posición iniciales en un instante determinado. Generalmente se elige el instante en que $t = 0$. Por ello, estas constantes reciben el nombre de **condiciones iniciales**. Un problema común llamado **problema del valor inicial** toma la forma: "dado $a_x(t)$ y los valores iniciales de x y de v_x determinar $x(t)$". Este problema es particularmente importante en física porque la aceleración de una partícula está determinada por las fuerzas que actúan sobre ella. Así pues, si conocemos las fuerzas que actúan sobre una partícula y su posición y velocidad en un instante determinado, podemos hallar su posición en cualquier otro instante.

Una función $F(t)$ cuya derivada (respecto a t) es igual a la función $f(t)$ se denomina **antiderivada** de $f(t)$. (Ya que $v_x = dx/dt$ y $a_x = dv_x/dt$, x es la antiderivada de v_x y v_x es la antiderivada de a_x.) El problema de la antiderivada está relacionado con el de la obtención del área bajo una curva.

Al obtener la ecuación 2.14 se demostró que el cambio en la posición Δx es igual al área bajo la curva velocidad-tiempo. Para demostrar esto (véase la figura 2.12) vemos que el área bajo la curva puede aproximarse dividiendo el intervalo de tiempo en cierto número de pequeños intervalos Δt_1, Δt_2, etc., y trazando una serie de áreas rectangulares. El área del rectángulo correspondiente al intervalo de tiempo Δt_i es $v_{ix}\,\Delta t_i$, el cual es aproximadamente igual al desplazamiento Δx_i durante el intervalo Δt_i. La suma de las áreas de los rectángulos es, por lo tanto, la suma de los desplazamientos realizados durante los intervalos de tiempo correspondientes y es aproximadamente igual al desplazamiento total desde el instante t_1 al t_2. Matemáticamente, escribiremos esto en la forma

$$\Delta x \approx \sum_i v_{ix}\,\Delta t_i$$

donde la letra $\sum$ (sigma mayúscula) representa una "suma". Podemos hacer la aproximación tan exacta como queramos escogiendo suficientes rectángulos bajo la curva, cada uno de los cuales corresponde a un valor pequeño de Δt. En el límite correspondiente a intervalos de tiempo cada vez más pequeños, esta suma es igual al área comprendida bajo la curva, que equivale, por lo tanto, al desplazamiento. Este límite se denomina **integral** y se escribe del modo siguiente.

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_i v_{ix}\,\Delta t_i\right) = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad 2.17$$

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Integrales

Es útil imaginar que el signo integral $\int$ es una S alargada que indica una suma. Los límites t_1 y t_2 indican los valores inicial y final de la variable de integración t.

El proceso de calcular una integral se llama **integración**. En la ecuación 2.17, v_x es la derivada de x, y x es la antiderivada de v_x. Éste es un ejemplo del teorema fundamental de cálculo, cuya formulación durante el siglo XVII aceleró el desarrollo matemático de la física:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \quad \text{entonces} \quad F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \qquad 2.18$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

La antiderivada de una función se denomina también integral indefinida de la función y se escribe sin límites sobre el signo integral:

$$x = \int v_x\, dt$$

La operación de determinar x a partir de la derivada v_x (es decir, determinar la antiderivada) se llama también integración. Por ejemplo, si $v_x = v_{0x}$ (una constante) entonces,

$$x = \int v_{0x}\, dt = v_{0x}t + x_0$$

donde x_0 es la constante arbitraria de integración. A partir de la ecuación 2.6 que expresa la regla general para la derivada de una potencia, podemos determinar una regla general para la integración de una potencia de t. El resultado es

$$\int t^n\, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad 2.19$$

donde C es una constante arbitraria. Puede comprobarse fácilmente derivando el segundo miembro mediante la regla de la ecuación 2.6. (Y para el caso especial $n = -1$, $\int t^{-1}dt = \ln t + C$, donde ln t es el logaritmo natural de t.)

Dado que $a_x = dv_x/dt$, el cambio de velocidad durante cierto intervalo de tiempo puede interpretarse análogamente como el área bajo la curva a_x en función de t en dicho intervalo. Así se escribe

$$\Delta v_x = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\sum_i a_{ix}\,\Delta t_i\right) = \int_{t_1}^{t_2} a_x\, dt \qquad 2.20$$

Así pueden deducirse las ecuaciones de la aceleración constante calculando las integrales indefinidas de la aceleración y la velocidad. Si a_x es constante, tenemos

$$v_x = \int a_x dt = a_x \int dt = v_{0x} + a_x t \qquad 2.21$$

donde hemos escrito en primer lugar la constante de integración v_{0x}. Integrando de nuevo y llamando x_0 a la constante de integración, resulta

$$x = \int (v_{0x} + a_x t)dt = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \qquad 2.22$$

Es instructivo deducir las ecuaciones 2.21 y 2.22 usando integrales definidas en vez de integrales indefinidas. Si la aceleración es constante, la ecuación 2.20, cuando $t_1 = 0$, nos da

$$v_x(t_2) - v_x(0) = a_x \int_0^{t_2} dt = a_x(t_2 - 0)$$

donde el tiempo t_2 es arbitrario. Como es arbitrario, se puede considerar $t_2 = t$, y se obtiene

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

donde $v_x = v_x(t)$ y $v_{0x} = v_x(0)$. Para obtener la ecuación 2.22, se sustituye $v_{0x} + a_x t$ por v_x en la ecuación 2.17 con $t_1 = 0$. Esto nos lleva a

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_{0x} + a_x t)dt$$

Esta integral es igual al área bajo la curva v_x-t (figura 2.26). Evaluando la integral y resolviendo para x nos da

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_{0x} + a_x t)dt = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2\Big|_0^{t_2} = v_{0x}t_2 + \tfrac{1}{2}a_x t_2^2$$

donde t_2 es arbitrario. Poniendo $t_2 = t$, obtenemos

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2$$

donde $x = x(t)$ y $x_0 = x(0)$.

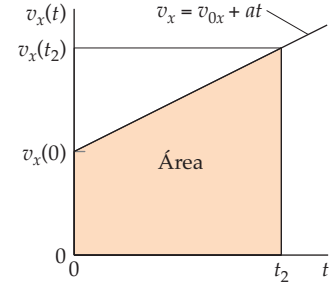


FIGURA 2.26 El área bajo la curva v_x-t es el desplazamiento $\Delta x = x(t_2) - x(0)$.

La definición de velocidad media es $\Delta x = v_{m\,x}\,\Delta t$ (ecuación 2.3). Además, $\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$ (ecuación 2.17). Igualando estas ecuaciones y resolviendo para $v_{m\,x}$, resulta

$$v_{m\,x} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad 2.23$$

DEFINICIÓN ALTERNATIVA DE VELOCIDAD MEDIA

donde $\Delta t = t_2 - t_1$. La ecuación 2.23 equivale matemáticamente a la definición de velocidad media, por lo que ambas ecuaciones sirven como definición.

Ejemplo 2.18 Un transbordador

Un transbordador lleva una velocidad constante $v_{0x} = 8{,}0$ m/s durante 60 s. A continuación, para sus motores y se acerca a la costa. Su velocidad es entonces una función del tiempo dada por la expresión $v_x = v_{0x}t_1^2/t^2$, siendo $t_1 = 60$ s. ¿Cuál es el desplazamiento del transbordador en el intervalo $0 < t < \infty$?

(Gene Mosca.)

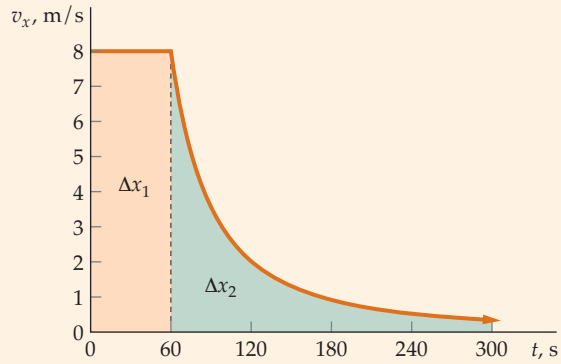


FIGURA 2.27

PLANTEAMIENTO La función velocidad viene representada por la figura 2.27. El desplazamiento total se calcula sumando el desplazamiento Δx_1 correspondiente al intervalo $0 < t < t_1 = 60$ s y el desplazamiento Δx_2 durante el intervalo $t_1 < t < \infty$.

SOLUCIÓN

1. La velocidad del transbordador es constante durante los primeros 60 segundos; así, el desplazamiento es simplemente el producto de la velocidad por el tiempo transcurrido:

$$\Delta x_1 = v_{0x}\,\Delta t = v_{0x}t_1 = (8{,}0\text{ m/s})(60\text{ s}) = 480\text{ m}$$

2. El desplazamiento restante viene dado por la integral de la velocidad desde $t = t_1$ hasta $t = \infty$. Utilizamos la ecuación 2.17 para calcular la integral:

$$\Delta x_2 = \int_{t_1}^{\infty} v_x\,dt = \int_{t_1}^{\infty}\frac{v_{0x}t_1^2}{t^2}\,dt = v_{0x}t_1^2\int_{t_1}^{\infty} t^{-2}\,dt$$

$$= v_{0x}t_1^2\left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_{t_1}^{\infty} = -v_{0x}t_1^2\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{t_1}\right)$$

$$= -(0 - v_{0x}t_1) = (8\text{ m/s})(60\text{ s}) = 480\text{ m}$$

3. El desplazamiento total es la suma de los dos desplazamientos anteriores:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 480\text{ m} + 480\text{ m} = \boxed{960\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Las expresiones obtenidas para los desplazamientos en los pasos 1 y 2 son la velocidad multiplicada por el tiempo, por lo que ambos son dimensionalmente correctos.

OBSERVACIÓN El área bajo la curva de v en función del tiempo es finita. Así, aunque el transbordador nunca deja de moverse, viaja sólo una distancia finita. Una representación mejor de la velocidad de un buque que bordea la costa con los motores parados sería una función exponencialmente decreciente $v_x = v_{0x}e^{-b(t-t_1)}$, donde b es una constante positiva. En este caso, el buque se acercaría a la costa también una distancia finita en el intervalo $t_1 \le t \le \infty$.

Aceleradores lineales

Los aceleradores lineales son unos instrumentos que aceleran partículas cargadas eléctricamente por un largo conducto hasta que chocan con un blanco. Los grandes aceleradores proporcionan a las partículas una energía cinética grande, del orden de miles de millones de electronvolt, que sirve para estudiar las partículas fundamentales de la materia y las fuerzas que las mantienen unidas. (La energía que se requiere para extraer un electrón de un átomo es del orden del electronvolt.) En el acelerador lineal de dos millas de longitud de la Universidad de Stanford, las ondas electromagnéticas impulsan a gran velocidad a los electrones o positrones que se mueven en un tubo de cobre. Cuando las partículas chocan a gran velocidad con el blanco, se producen diversas clases de partículas subatómicas además de rayos X y rayos gamma. Estas partículas pasan por unos dispositivos de detección denominados detectores de partículas.

El cilindro de color beige del fondo es el acelerador del Naval Academy Tandem Accelerator Laboratory. Un haz de protones de gran velocidad se mueve por el acelerador hacia el blanco en primer plano. *(Gene Mosca.)*

Los experimentos con los aceleradores han permitido a los físicos determinar que los protones y los neutrones, que hace tiempo se pensaba que eran partículas elementales del núcleo atómico, están formados, a su vez, por otras partículas elementales más fundamentales denominadas quarks. Se ha identificado también otro grupo de partículas, los leptones, que incluye los electrones, los neutrinos y unas cuantas partículas más. Los centros de investigación con los aceleradores más grandes, como el Fermi National Accelerator Laboratory en Batavia, Illinois, para conseguir mayores velocidades de las partículas usan series de aceleradores lineales y circulares. A medida que la velocidad de una partícula se aproxima a la velocidad de la luz, la energía que se requiere para acelerarla hasta esta velocidad tiende a infinito.

Aunque los grandes aceleradores son los que llaman más la atención, en todo el mundo se usan miles de aceleradores lineales para numerosas aplicaciones prácticas. Una de las más comunes es el tubo de rayos catódicos (TRC) de un aparato de televisión o de un monitor de ordenador. En un tubo de rayos catódicos, electrones del cátodo (un filamento calentado) se aceleran en un entorno vacío hacia un ánodo cargado positivamente. Unos electroimanes controlan la dirección del haz de electrones que se dirigen hacia una pantalla cubierta de fósforo, un material que emite luz cuando inciden en él electrones. La energía cinética de los electrones en un tubo de rayos catódicos alcanza un máximo de 30 000 electronvolt, que corresponde a una velocidad que es un tercio de la que tendría el electrón si se moviera a la velocidad de la luz.

En la práctica médica de tratamiento radiológico del cáncer, se usan aceleradores lineales que tienen una potencia que es unas mil veces mayor que la de los tubos de rayos catódicos. "El acelerador lineal usa tecnología de microondas (similar a la usada en el radar) para acelerar electrones en una zona denominada "guía de ondas" que los impele hacia un pesado blanco de metal. Como consecuencia de las colisiones, del blanco salen rayos X de gran energía que convenientemente canalizados y con una determinada forma del haz se focalizan en el tumor del paciente".[1]

Otra aplicación de los aceleradores consiste en la producción de radioisótopos como trazadores en medicina y biología, para la esterilización de material quirúrgico, y para determinar la composición de materiales. Por ejemplo, en una técnica denominada emisión de rayos X inducida por partículas (PIXE), un haz de iones, habitualmente protones, produce la emisión de rayos X en átomos blanco lo cual permite saber de qué átomos se trata. Esta técnica se ha utilizado en el estudio de materiales arqueológicos y en una gran variedad de otra clase de muestras.

[1] The American College of Radiology and the Radiological Society of North America, http//www.radiologyinfo.org/content/therapy/linear_accelerator.htm.

Resumen

El desplazamiento, la velocidad y la aceleración son magnitudes cinemáticas *definidas* importantes.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Desplazamiento	$\Delta x = x_2 - x_1$	2.1
Interpretación gráfica	El desplazamiento es el área bajo la curva v_x en función de t.	
2. Velocidad		
Velocidad media	$v_{m\,x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ o $v_{m\,x} = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$	2.3, 2.23
Velocidad instantánea	$v_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$	2.5
Interpretación gráfica	La velocidad instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la recta tangente de la curva x en función de t.	
3. Módulo de la velocidad		
Módulo de la velocidad media	Módulo de la velocidad media $= \dfrac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \dfrac{s}{t}$	2.2
Módulo de la velocidad instantánea	Módulo de la velocidad instantánea $= \lvert v_x \rvert$	
4. Aceleración		
Aceleración media	$a_{m\,x} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$	2.7
Aceleración instantánea	$a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$	2.9
Interpretación gráfica	La aceleración instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la curva v_x en función del tiempo t.	
Aceleración debida a la gravedad	La aceleración de un objeto próximo a la superficie de la Tierra en caída libre bajo la influencia de la gravedad está dirigida hacia abajo y su módulo es $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 32{,}2\ \text{ft/s}^2$	
5. Ecuaciones cinemáticas para la aceleración constante		
Velocidad	$v_x = v_{0x} + a_x t$	2.12
Velocidad media	$v_{m\,x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)$	2.16
Desplazamiento en función de $v_{m\,x}$	$\Delta x = x - x_0 = v_{m\,x} t = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	
Desplazamiento en función del tiempo	$\Delta x = x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	2.14
v_x^2 en función de Δx	$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x$	2.15
6. El desplazamiento y la velocidad como integrales	El desplazamiento se representa gráficamente por el área bajo la curva v_x en función del tiempo. Esta área es la integral de v_x extendida al tiempo, desde cierto valor inicial t_1 a cierto valor final t_2, y se expresa del modo siguiente: $\Delta x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_i v_{i\,x}\,\Delta t_i = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt$	2.17
	Igualmente, el cambio de velocidad durante cierto tiempo se representa gráficamente por el área bajo la curva a_x en función de t: $\Delta v_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_i a_{i\,x}\,\Delta t_i = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt$	2.20

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

2.1 No. La distancia entre los dos coches no permanece constante. En cambio, la distancia disminuirá constantemente. Cuando usted empieza a frenar, la velocidad de su coche es mayor que la velocidad del coche de delante, ya que éste comenzó la frenada 0,3 s antes. Los dos coches frenan igual; por lo tanto, la velocidad de su coche siempre será mayor durante toda la frenada.

Respuesta a los problemas prácticos

2.1 1,2 m/s

2.2 (*a*) 65 km/h (*b*) 2,5 s

2.3 Sólo (*d*) tiene las mismas dimensiones a los dos lados de la ecuación. Aunque no podemos obtener la ecuación exacta a partir del análisis dimensional, podemos obtener la dependencia funcional.

2.4 54 ms

2.5 (*a*) y (*b*) $y_{máx} - y_0 = 11{,}0$ m (*c*) −14,7 m/s; obsérvese que el módulo de la velocidad final es el mismo que el inicial.

2.6 (*a*) +0,981 m/s (*b*) −0,981 m/s
(*c*) [(−0,981 m/s) − (+0,981 m/s]/(0,200 s) = $-9{,}81$ m/s^2

2.7 250 m

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s^2 para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Cuál es la velocidad media del recorrido de "ida y vuelta" de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba y que vuelve a caer en el mismo sitio desde donde ha sido lanzado?

2 • Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba vuelve al suelo T segundos más tarde. Su altura máxima es H metros y su altura en el momento de soltarlo es despreciable. También es despreciable la resistencia del aire. El módulo de su velocidad media durante estos T segundos es: (*a*) H/T, (*b*) 0, (*c*) $H/(2T)$, (*d*) $2H/T$.

3 • Usando la información del problema anterior, ¿cuál es el módulo de la velocidad media durante la primera mitad del recorrido? ¿Cuál es el módulo de la velocidad media durante la segunda mitad del recorrido? (Dar la respuesta en función de H y T.)

4 • Dé un ejemplo de la realidad cotidiana de un movimiento en una dimensión donde (*a*) la velocidad sea positiva y la aceleración sea negativa, y (*b*) donde la velocidad sea positiva y la aceleración sea positiva.

5 • Póngase en el centro de una habitación espaciosa. Considere que el movimiento hacia su derecha es positivo y el movimiento hacia su izquierda, negativo. Muévase por la habitación en línea recta con una aceleración constante para alcanzar rápidamente una velocidad estacionaria en la dirección negativa. Una vez alcanzada la velocidad estacionaria, mantenga la velocidad negativa pero con aceleración positiva. (*a*) Describa cómo varía su velocidad a medida que se mueve. (*b*) Dibuje un gráfico x-t del movimiento suponiendo que ha empezado en $x = 0$. (*c*) Directamente en el gráfico del apartado (*b*) dibuje un gráfico v_x-t. SSM

6 • Verdadero o falso: El desplazamiento *siempre* es igual al producto de la velocidad media por el tiempo. Explique la respuesta.

7 • Verdadero o falso: Para que la velocidad sea constante, la aceleración *debe ser* cero. Explique la respuesta.

8 •• **MÚLTIPLES PASOS** Dibuje cuidadosamente los gráficos que representan la posición, la velocidad y la aceleración en un periodo de tiempo $0 \leq t \leq 30$ s para un automóvil que se mueve a velocidad constante de 5,0 m/s en la dirección $+x$ y pasa por el origen cuando $t = 0{,}0$ s. Durante 5,0 s sigue a 5 m/s, después acelera durante 10,0 s a una tasa de 0,50 m/s por cada segundo. A partir de entonces, el automóvil pierde velocidad a una tasa de 0,50 m/s durante los 15,0 segundos restantes.

9 • Verdadero o falso: La velocidad media siempre se calcula como la semisuma de las velocidades final e inicial. Explique la respuesta.

10 • Dos hermanos gemelos idénticos lanzan simultáneamente dos piedras al agua desde un puente horizontal. Una piedra llega al agua antes que la otra. ¿Puede darse esta situación? Explique qué es lo que han hecho diferente. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

11 •• El Dr. Josiah S. Carberry está en lo alto de la torre Sears en Chicago. Con el objetivo de emular a Galileo, e ignorando la seguridad de los peatones que se mueven en la zona cercana a la base del edificio, suelta una bola desde lo más alto del edificio. Un segundo más tarde suelta una segunda bola. Mientras las bolas están en el aire, su separación (*a*) ¿aumenta con el tiempo, (*b*) disminuye, o (*c*) se mantiene constante? Ignórense los efectos de la resistencia del aire. SSM

12 •• ¿Cuál de las curvas posición-tiempo de la figura 2.23 describe mejor el movimiento de un objeto sometido (*a*) a una aceleración positiva, (*b*) con velocidad constante positiva, (*c*) que está siempre en re-

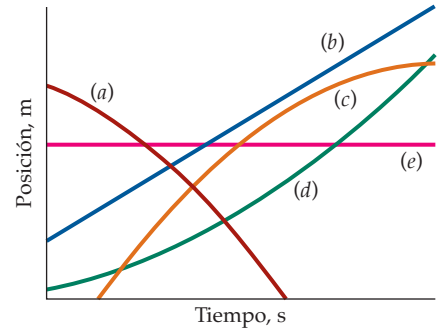


FIGURA 2.28
Problema 12

poso y (*d*) con aceleración negativa? (Puede haber más de una respuesta correcta en cada parte del problema.)

13 •• ¿Cuál de las curvas velocidad-tiempo de la figura 2.29 describe mejor el movimiento de un objeto sometido (*a*) a una aceleración constante y positiva, (*b*) con una aceleración positiva que decrece con el tiempo, (*c*) con una aceleración positiva que aumenta con el tiempo, y (*d*) sin aceleración? (Puede haber más de una respuesta correcta en cada parte del problema.) SSM

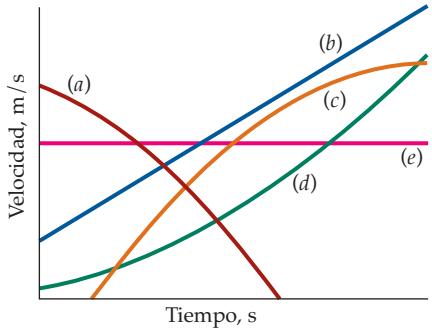


FIGURA 2.29
Problema 13

14 •• El diagrama de la figura 2.30 representa la trayectoria de un objeto que se mueve en línea recta a lo largo del eje *x*. Suponga que el objeto se encuentra en el origen ($x_0 = 0$) en $t = 0$. De los cinco tiempos que se muestran, ¿qué tiempo (o tiempos) representa cuando el objeto está (*a*) lo más alejado del origen, (*b*) en reposo por un instante, (*c*) cuando está en reposo durante un cierto tiempo, y (*d*) alejándose del origen?

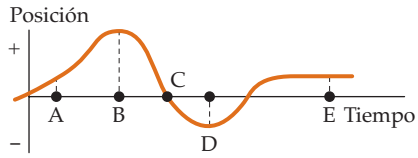


FIGURA 2.30 Problemas 14 y 15

15 •• Un objeto se mueve a lo largo del eje *x* como indica la figura 2.30 en un gráfico posición-tiempo. ¿Para qué tiempo o tiempos (*a*) la velocidad es máxima, (*b*) la aceleración es positiva, y (*c*) la velocidad es negativa? SSM

16 •• En cada uno de los cuatro gráficos de *x* en función de *t* de la figura 2.31 indicar: (*a*) si la velocidad en el instante t_2 es mayor, menor o igual que la velocidad en el instante t_1, (*b*) si el módulo de la velocidad en el tiempo t_2 es mayor, menor o igual que en el tiempo t_1.

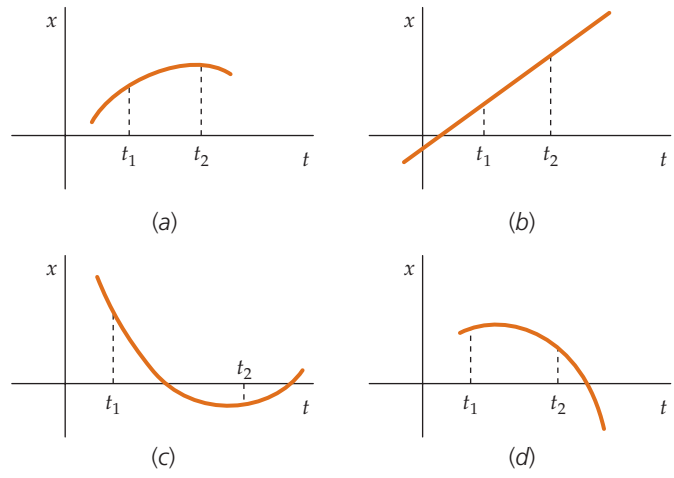


FIGURA 2.31 Problema 16

17 •• Verdadero o falso:

(*a*) Si la aceleración es cero, la partícula no puede estar moviéndose.
(*b*) Si la aceleración es cero, la curva *x* en función de *t* es una línea recta.
(*c*) Si la aceleración es distinta de cero en un instante, en este instante el objeto puede estar en reposo.

Explicar los argumentos para cada respuesta. Si la respuesta es *verdadero*, dar un ejemplo.

18 •• Una pelota de tenis se mueve horizontalmente cuando golpea contra una pared vertical de hormigón de un frontón con incidencia perpendicular y rebota. Desprecie cualquier efecto debido a la gravedad durante el breve intervalo de tiempo del rebote. Suponga que la dirección hacia la pared es positiva $+x$. ¿Cuáles son las direcciones de la velocidad y de la aceleración: (*a*) inmediatamente antes de chocar con la pared, (*b*) en el momento del choque y, (*c*) inmediatamente después del choque?

19 •• Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es su velocidad en el punto más alto de su movimiento? (*b*) ¿Cuál es la aceleración en ese punto? (*c*) ¿Qué es diferente respecto a la velocidad y la aceleración en el punto más alto del movimiento si la bola choca y rebota contra el techo? SSM

20 •• Se lanza hacia arriba un objeto desde el suelo, alcanza una altura *H* y cae *T* segundos más tarde en el mismo sitio desde donde había salido. Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire. (*a*) Expresar el módulo de la velocidad media para todo el recorrido en función de *H* y *T*. (*b*) Expresar el módulo de la velocidad media para el mismo intervalo de tiempo en función de la velocidad inicial v_0.

21 •• Se lanza hacia arriba una pequeña bola de plomo. Verdadero o falso: (Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire.) (*a*) El módulo de su aceleración disminuye durante el camino ascendente. (*b*) La dirección de su aceleración cuando va hacia arriba es opuesta a la dirección de la aceleración cuando cae de vuelta. (*c*) La dirección de la velocidad cuando cae es opuesta a la dirección de la velocidad cuando la bola está subiendo.

22 •• En el instante $t = 0$, un objeto A se deja caer desde el tejado de una casa. En el mismo instante, otro objeto B se deja caer desde una ventana a 10 m por debajo del tejado. La resistencia del aire es despreciable. Durante el descenso de B al suelo la distancia entre los dos objetos (*a*) es proporcional a *t*, (*b*) es proporcional a t^2, (*c*) decrece, (*d*) permanece igual a 10 m constantemente.

23 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un automóvil Porsche acelera uniformemente de 80,5 km/h en el instante $t = 0$ hasta 113 km/h en $t = 9$ s. (*a*) ¿Qué gráfico de la figura 2.32 representa mejor el movimiento del coche? (*b*) Dibujar el gráfico posición-tiempo mostrando la posición del coche durante los nueve segundos, suponiendo que en $t = 0$ su posición es $x = 0$.

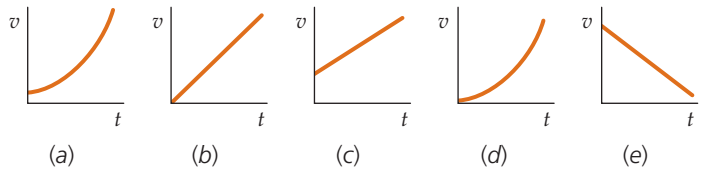


FIGURA 2.32 Problema 23

24 •• Un objeto cae, partiendo del reposo, y recorre una distancia *D* en un tiempo *T*. Si el tiempo de la caída fuera el doble, 2*T*: (*a*) ¿cuál será la distancia recorrida desde su posición inicial?, (*b*) ¿cuál será su velocidad?, y (*c*) ¿cuál será su aceleración? (Despreciar la resistencia del aire.)

25 •• En un determinado instante de una carrera, dos caballos corren uno junto al otro en la misma dirección (la dirección $+x$). La velocidad y la aceleración instantánea del caballo A son +10 m/s y +2,0 m/s², respectivamente, y la velocidad y la aceleración instantánea del caballo B son +12 m/s y −1,0 m/s², respectivamente. ¿Cuál de los dos caballos está adelantando al otro? Explique la respuesta.

26 •• Verdadero o falso: (*a*) La ecuación $x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ es válida para todo movimiento de partículas en una dimensión. (*b*) Si la velocidad en un instante determinado es cero, la aceleración en dicho instante también debe ser cero. (*c*) La ecuación $\Delta x = v_m \, \Delta t$ es válida para todo movimiento en una dimensión.

27 •• Si un objeto se mueve con aceleración constante sobre una línea recta, su velocidad instantánea a la mitad de la distancia recorrida en cualquier intervalo de tiempo es: (*a*) mayor que su velocidad media, (*b*) menor que su velocidad media, (*c*) igual que su velocidad media, (*d*) la mitad de su velocidad media, (*e*) dos veces su velocidad media.

28 •• Una tortuga ve cómo su cuidador le pone lechuga fresca al otro lado del terrario. Empieza a acelerar (a ritmo constante) en dirección a la comida a partir del reposo en el tiempo $t = 0$. Sea t_1 el tiempo en el que la tortuga ha recorrido la mitad de la distancia que la separa de la comida. Obtener una expresión para el cociente t_2/t_1, donde t_2 es el tiempo que la tortuga invierte en llegar a la comida.

29 •• En la figura 2.33 se representan en función del tiempo las posiciones de dos coches que siguen carriles paralelos y rectos en una autopista. Sean los valores de x positivos los que están a la derecha del origen. Responder cualitativamente a las preguntas siguientes: (*a*) ¿Los dos coches están en algún momento uno al lado del otro? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuándo? (*b*) ¿Siempre se mueven en la misma dirección o en algún momento se mueven en direcciones opuestas? Si es así, ¿cuándo? (*c*) ¿Se mueven siempre a la misma velocidad? Si es así, ¿cuándo? (*d*) ¿Cuándo los dos coches están más alejados el uno del otro? (*e*) Dibujar la curva velocidad-tiempo para cada coche (sin números). SSM

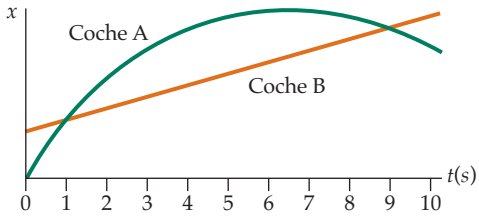


FIGURA 2.33 Problema 29

30 •• Un coche que se mueve a velocidad constante pasa por el origen cuando $t = 0$. En ese momento, un camión, en reposo en el origen, empieza a acelerar. La figura 2.34 muestra un dibujo cualitativo de las velocidades del coche y del camión en función del tiempo. Comparar sus desplazamientos (desde el origen), velocidades y aceleraciones en el instante en que sus curvas se cruzan.

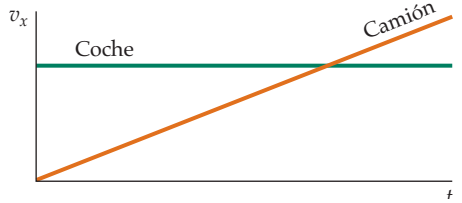


FIGURA 2.34 Problema 30

31 •• Reginaldo sale a correr por la mañana. Sigue un recorrido recto y su velocidad en función del tiempo viene representada por la figura 2.35. Inicia su recorrido partiendo del reposo, alcanza su velocidad máxima $v_{máx}$ cuando el tiempo vale $t_{máx}$ y acaba su recorrido en reposo. Otra persona, Josie, corre a velocidad constante v_J desde $t = 0$ hasta $t = t_f$ de modo que ambos, durante el mismo intervalo de tiempo, recorren la misma distancia. Observación: t_f NO es dos veces $t_{máx}$, sino que representa un tiempo arbitrario. ¿Cuál es la relación entre v_J y $v_{máx}$?

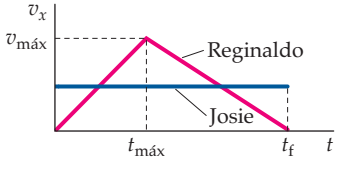


FIGURA 2.35 Problema 31

32 •• De los gráficos v_x en función de t representados en la figura 2.36, ¿cuál describe mejor el movimiento de una partícula con (*a*) velocidad positiva y módulo de la velocidad creciente, (*b*) velocidad positiva y aceleración cero, (*c*) aceleración constante distinta de cero, y (*d*) una disminución del módulo de la velocidad?

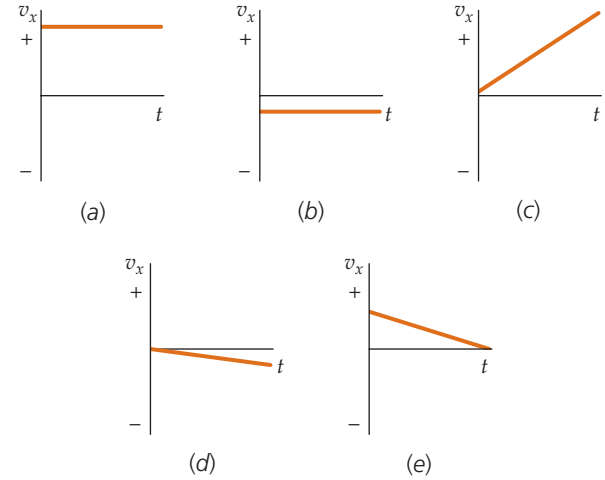


FIGURA 2.36 Problemas 32 y 33

33 •• De los gráficos v_x en función de t representados en la figura 2.36, ¿cuál describe mejor el movimiento de una partícula con (*a*) velocidad negativa y módulo de la velocidad creciente, (*b*) velocidad negativa y aceleración cero, (*c*) aceleración variable, y (*d*) módulo de la velocidad creciente?

34 •• Representar las curvas v en función de t para cada una de las siguientes condiciones: (*a*) La aceleración es cero y constante, pero la velocidad no es nula. (*b*) La aceleración es constante, pero no cero. (*c*) La velocidad y la aceleración son positivas. (*d*) La velocidad y la aceleración son negativas. (*e*) La velocidad es positiva y la aceleración negativa. (*f*) La velocidad es negativa y la aceleración positiva. (*g*) La velocidad es momentáneamente nula, pero la aceleración no lo es.

35 •• En la figura 2.37 se representan nueve gráficos de posición, velocidad y aceleración para objetos en movimiento lineal. Indicar los gráficos que cumplen las siguientes condiciones: (*a*) La velocidad es constante. (*b*) La velocidad invierte su dirección. (*c*) La aceleración es

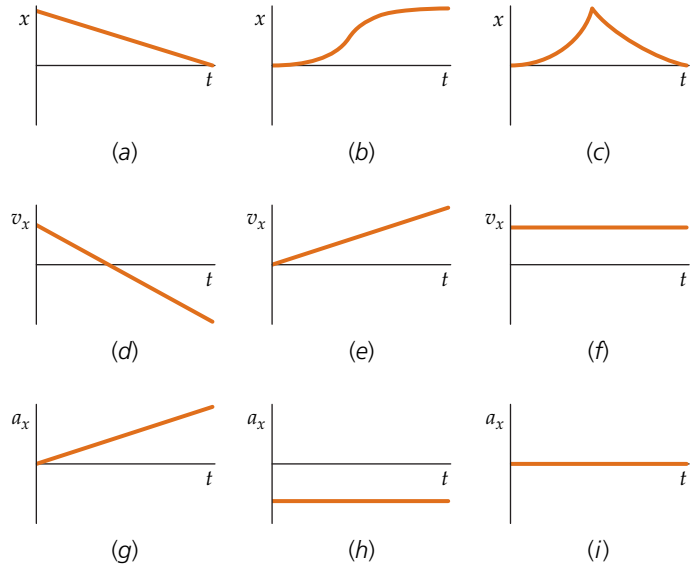


FIGURA 2.37 Problema 35

constante. (*d*) La aceleración no es constante. (*e*) ¿Qué gráficos de posición, velocidad y aceleración son mutuamente coherentes?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

36 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Totalmente absorto pensando en la excitante lectura que el profesor de física le acaba de dar, usted camina directamente hacia la pared en vez de hacia la puerta de la clase. Estimar la magnitud de la aceleración media cuando usted se da cuenta y frena en seco.

37 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** De vez en cuando, tenemos noticia de personas que sobreviven a caídas desde grandes alturas cuando la superficie sobre la que caen es suficientemente blanda. Durante una escalada por la vía norte del Eiger (montaña de los Alpes suizos), una fijación del montañero Carlos Ragone cedió de forma que sufrió una caída de 150 m sobre la nieve. Sorprendentemente sufrió únicamente unas pocas magulladuras y un tirón en el hombro. Suponiendo que su impacto dejó un agujero de 122 cm en la nieve, estimar la aceleración a la que estuvo sometido durante el frenado mientras estaba impactando en la nieve. (Se supone que la aceleración fue constante.) SSM

38 •• Cuando se resuelven problemas relacionados con la caída libre en la atmósfera de la Tierra, es importante recordar que siempre se da la resistencia del aire. Por lo tanto, si para simplificar, suponemos que los objetos caen con aceleración constante, podemos obtener resultados erróneos en varios órdenes de magnitud. ¿Qué podríamos decir sobre cuándo es válido ignorar los efectos de la resistencia del aire? Una forma de darse cuenta es que la resistencia del aire aumenta con la velocidad. Cuando un cuerpo cae, partiendo del reposo, a través del aire, a medida que su velocidad aumenta, su aceleración disminuye. La velocidad se aproxima, aunque nunca la alcanza, a la velocidad terminal o velocidad límite, que depende de la masa y del área transversal del objeto. A la velocidad terminal, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por la resistencia del aire se igualan y, por lo tanto, la aceleración es cero. Para un paracaidista, una estimación razonable de la velocidad terminal es de unos 50 m/s. Si el paracaidista lleva la mitad de esta velocidad, su aceleración es $\frac{3}{4}g$. Tomemos la mitad de la velocidad límite como un límite superior por encima del cual no podemos usar las fórmulas de la aceleración constante para calcular la velocidad y el desplazamiento. Suponiendo que el paracaidista parte del reposo, (a) estimar cuánto debe caer el paracaidista para que no podamos seguir utilizando la aproximación de aceleración constante. (*b*) Repetir el análisis para una pelota de ping pong que tiene una velocidad terminal aproximada de 5,0 m/s. (*c*) ¿Qué se puede concluir al comparar las respuestas de los apartados (*a*) y (*b*)?

39 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** El 16 de agosto de 2008 el jamaicano Usain Bolt estableció un nuevo récord del mundo en los 100 m lisos con una marca de $t = 9{,}77$ s. Supongamos que aceleró desde el reposo a aceleración constante a y que alcanzó su velocidad máxima en 3,00 s, la cual mantuvo hasta llegar a la meta. ¿Cuál fue su aceleración en la prueba del récord?

40 •• La figura 2.38 muestra la fotografía tomada con tiempos de exposición cortos (1/30 s) de un malabarista con dos pelotas de tenis en el aire. (*a*) La pelota de tenis que está a mayor altura está menos borrosa que la otra. ¿Por qué? (*b*) ¿Puede estimarse la velocidad de esta última pelota? (*c*) Determinar hasta qué altura por encima del punto de lanzamiento es probable que llegue la pelota y compararla con la estimación a partir de la fotografía. *Sugerencia: tiene una escala de distancia integrada si asigna un valor razonable a la atura del malabarista.*

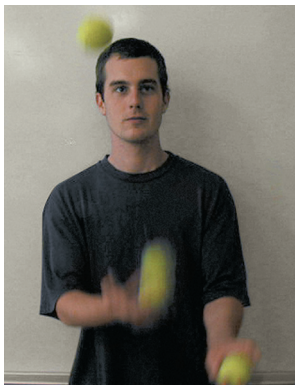


FIGURA 2.38
Problema 40
(Gentileza de Chuck Adler.)

41 •• Una regla popular para determinar la distancia entre nuestra posición y el punto donde se ha producido el relámpago es contar los segundos que transcurren entre la luz del relámpago y el sonido del trueno (producido por la rápida dilatación del aire como consecuencia de las altas temperaturas producidas por la chispa). Suponiendo que la velocidad del sonido es de 1224 km/h, (*a*) estimar a qué distancia se ha producido el relámpago si el ruido del trueno ha tardado 5 s en llegar. (*b*) Estimar la inexactitud en la medida de la distancia del apartado (*a*). Explicar las suposiciones y el razonamiento. *Sugerencia: la velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y la forma de contar es inexacta.*

DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y MÓDULO DE LA VELOCIDAD

42 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** (*a*) Un electrón de un tubo de televisión recorre los 16 cm de distancia de la rejilla a la pantalla con una velocidad media de 4×10^7 m/s. ¿Qué tiempo transcurre en ese trayecto? (*b*) Un electrón en un conductor por el que circula una corriente se mueve con una velocidad media de 4×10^{-5} m/s. ¿Qué tiempo tarda en recorrer 16 cm?

43 • Un atleta corre 2,5 km en línea recta en 9 min y luego tarda 30 min en volver andando al punto de partida. (*a*) ¿Cuál es la velocidad media durante los primeros 9 minutos? (*b*) ¿Cuál es la velocidad media durante el tiempo que camina? (*c*) ¿Cuál es la velocidad media a lo largo de todo el recorrido? (*d*) ¿Cuál es el valor del módulo de la velocidad media para todo el recorrido? SSM

44 • Un coche viaja en línea recta con una velocidad media de 80 km/h durante 2,5 h y luego con velocidad media de 40 km/h durante 1,5 h. (*a*) ¿Cuál es el desplazamiento total en el viaje de 4 h? (*b*) ¿Cuál es la velocidad media del viaje completo?

45 • Una ruta aérea muy concurrida a través del Océano Atlántico tiene una longitud aproximada de 5500 km. (*a*) ¿Cuánto tiempo tardaba el reactor supersónico Concorde, que ahora ya no presta servicio, y que volaba al doble de la velocidad del sonido en recorrer esta ruta? Utilizar el valor 330 m/s como velocidad del sonido. (*b*) ¿Cuánto tardaría un avión subsónico en realizar el mismo viaje volando a 0,9 veces la velocidad del sonido?

46 • La luz se propaga con una velocidad de $c = 3 \times 10^8$ m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en ir del Sol a la Tierra al recorrer una distancia de $1{,}5 \times 10^{11}$ m? (*b*) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en recorrer la distancia Luna-Tierra que es de $3{,}84 \times 10^8$ m?

47 • Proxima Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, aparte del Sol, es una enana roja muy poco luminosa próxima a la estrella Alfa Centauri y situada a $4{,}1 \times 10^{13}$ km de distancia de nuestro planeta. Desde la proximidad de esta estrella, Gregor manda una orden a la empresa Tony's Pizza de Hoboken, New Jersey, para lo cual utiliza una señal de comunicación luminosa. La nave más rápida de Tony viaja a la velocidad de $10^{-4}\,c$ (véase problema 46). (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar la orden a la empresa? (*b*) ¿Cuánto tiempo tendrá que esperar Gregor entre que envía la señal y recibe la pizza? Si las normas de distribución de Tony dicen que la tardanza máxima en servir la pizza es de 1000 años y que si sobrepasa este plazo el servicio será gratuito, ¿tendrá Gregor que pagar la pizza? SSM

48 • Un coche que tiene que recorrer 100 km cubre los primeros 50 km a 40 km/h. ¿A qué velocidad debe recorrer los segundos 50 km para que la velocidad media en todo el trayecto sea de 50 km/h?

49 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Al final de un partido de hockey sobre hielo, a veces el equipo que pierde usa a su portero como ju-

gador de campo para añadir un jugador ofensivo adicional y, de este modo, incrementar la posibilidad de marcar. En estas condiciones, el equipo adversario tiene una oportunidad de marcar dado que la portería está libre a 55 m. Suponga que usted es el portero de este equipo y que intenta marcar en la portería desguarnecida del equipo contrario. Lanza el puck (disco) y, finalmente, oye un desilusionante ruido, que significa que el disco ha golpeado en el poste de la portería a los 2,5 s de haberlo lanzado. En este caso, ¿a qué velocidad ha lanzado el puck con su disparo? Suponer que la velocidad del sonido es de 343 m/s.

50 •• El cosmonauta Andrei, su compañero en la Estación Espacial Internacional, le lanza una banana a una velocidad de 15 m/s. En el mismo instante, usted le lanza a Andrei un cucharón de helado en la misma trayectoria. La colisión entre la banana y el helado produce un helado con banana a 7,2 m de usted y 1,2 s después del lanzamiento de ambos objetos. (*a*) ¿A qué velocidad lanzó el helado? (*b*) ¿Qué distancia les separaba en ese instante? (Despreciar los efectos de la gravedad.)

51 •• La figura 2.39 muestra la posición de una partícula en función del tiempo. Determinar la velocidad media en los intervalos de tiempo *a*, *b*, *c* y *d* indicados en la figura.

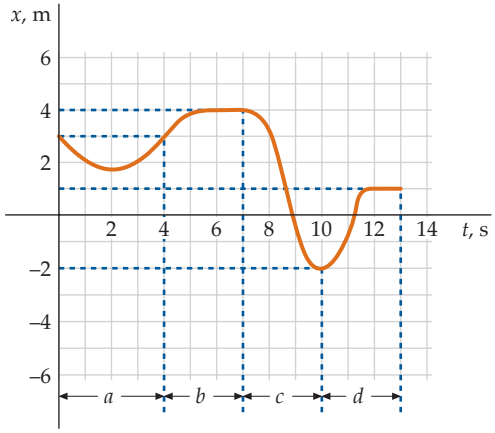


FIGURA 2.39 **Problema 51**

52 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Se sabe que las galaxias se alejan de la Tierra a una velocidad proporcional a su distancia de nuestro planeta, fenómeno conocido como ley de Hubble en honor de Sir Edwin Hubble, descubridor de esta propiedad. La velocidad de una galaxia a la distancia r es $v = Hr$, siendo H la constante de Hubble, de valor $1{,}58 \times 10^{-18}$ s^{-1}. Determine la velocidad de una galaxia (*a*) que dista $5{,}00 \times 10^{22}$ m de la Tierra y (*b*) otra que dista $2{,}00 \times 10^{25}$ m de la Tierra. (*c*) Si cada una de estas galaxias viaja con velocidad constante, ¿cuánto tiempo ha transcurrido desde que ambas estuvieron en el mismo lugar que la Tierra?

53 •• Un guepardo puede correr a $v_1 = 113$ km/h, un halcón puede volar a $v_2 = 161$ km/h y un pez vela puede nadar a $v_3 = 105$ km/h. Si nos imaginamos que los tres animales forman un equipo y corren una carrera de relevos, cada uno recorriendo una distancia L a su velocidad máxima, ¿cuál sería la velocidad media del equipo? Comparar el resultado obtenido con la media de las tres velocidades. Explicar por qué el módulo de la velocidad media del equipo de relevos no es igual a la media numérica de las tres velocidades. SSM

54 •• Dos coches circulan por una carretera recta. El coche A mantiene una velocidad constante de 80 km/h; el coche B mantiene una velocidad constante de 110 km/h. En $t = 0$, el coche B está a 45 km detrás del coche A. (*a*) ¿A qué distancia medida desde el punto en que $t = 0$ el coche B adelantará al coche A? (*b*) ¿A qué distancia por delante de A estará el coche B a los 30 s de haberlo adelantado?

55 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un coche que marcha con una velocidad constante de 20 m/s pasa por un cruce en el instante $t = 0$. Un segundo coche que viaja en el mismo sentido a 30 m/s pasa por el mismo cruce 5 segundos después. (*a*) Hacer un gráfico de las funciones de posición $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de ambos coches. (*b*) Determinar cuándo el segundo coche adelanta al primero. (*c*) ¿Cuánto han recorrido ambos coches desde el cruce al producirse el adelantamiento? (*d*) ¿Dónde se encuentra el primer coche cuando el segundo pasa el cruce? SSM

56 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Los murciélagos usan la ecolocalización para determinar la distancia que los separa de objetos que no pueden ver fácilmente en la oscuridad. El tiempo entre la emisión de un pulso de alta frecuencia y la detección de su eco se usa para determinar la distancia. Suponer que un murciélago vuela a velocidad constante de 19,5 m/s en línea recta hacia la pared vertical de una cueva, lanza un pulso y recibe el eco transcurridos 0,15 s. Suponiendo que sigue volando a la misma velocidad, ¿a qué distancia está de la pared cuando recibe el eco? Suponer que la velocidad del sonido es 343 m/s.

57 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un submarino usa el sonar (pulsos de sonido que se mueven por el agua) para determinar la distancia hacia otros objetos. El tiempo entre el pulso emitido y el eco recibido se usa para determinar las distancias. Alternativamente, midiendo el tiempo entre ecos *sucesivos* que responden a otros tantos pulsos emitidos, comparándolos con los *intervalos de tiempo* entre los pulsos, se puede calcular la velocidad del submarino. Supongamos que el operador de sonar de un submarino que se mueve a velocidad constante bajo el agua por el Mediterráneo Oriental, donde la velocidad del sonido en el agua es 1522 m/s, envía pulsos cada 2,00 s y estos le vuelven reflejados cada 1,98 s. ¿A qué velocidad se mueve el submarino?

ACELERACIÓN

58 • Un coche deportivo acelera con la tercera marcha de 48,3 km/h a 80,5 km/h en 3,70 s. (*a*) ¿Cuál es su aceleración media en m/s^2? (*b*) Si el coche continúa con esta aceleración otro segundo, ¿cuál será su velocidad?

59 • En el instante $t = 5{,}0$ s, un objeto situado en $x = +3{,}0$ m se mueve a +5,0 m/s. Para $t = 8{,}0$ s, se encuentra en $x = +9{,}0$ m y su velocidad es −1,0 m/s. Determinar la aceleración media para este intervalo $5{,}0\text{ s} < t < 8{,}0$ s. SSM

60 •• Una partícula se mueve a lo largo del eje x con una velocidad $v_x = (8{,}0\text{ m/s}^2)t - 7{,}0$ m/s, donde v_x se expresa en metros por segundo y t en segundos. (*a*) Determinar la aceleración media para intervalos de un segundo comenzando en $t = 3{,}0$ s y $t = 4{,}0$ s. (*b*) Representar v_x en función de t en el intervalo $0 < t < 10$ s. (*c*) ¿Cuál es la aceleración instantánea en el medio de cada uno de los dos intervalos especificados en el apartado (*a*) comparadas con las aceleraciones calculadas en el apartado (*a*)? Explique la respuesta.

61 •• **MÚLTIPLES PASOS** La posición de cierta partícula depende del tiempo según la ecuación $x(t) = t^2 - 5{,}0t + 1{,}0$, donde x se expresa en metros y t en segundos. (*a*) Determinar el desplazamiento y la velocidad media durante el intervalo $3{,}0\text{ s} \le t \le 4{,}0\text{ s}$. (*b*) Hallar la fórmula general para el desplazamiento durante el intervalo entre t y $t + \Delta t$. (*c*) Hallar la velocidad instantánea para cualquier tiempo t haciendo el límite cuando Δt tiende a cero. SSM

62 •• La posición de un objeto en función del tiempo viene dada por $x = At^2 - Bt + C$, donde $A = 8{,}0$ m/s^2, $B = 6{,}0$ m/s, y $C = 4{,}0$ m. Determinar la velocidad instantánea y la aceleración en función del tiempo.

63 ••• El movimiento unidimensional de una partícula viene representado en la figura 2.40. (*a*) ¿Cuál es la aceleración media en los intervalos *AB*, *BC* y *CE*? (*b*) ¿A qué distancia de su punto de partida se encuentra la partícula al cabo de 10 s? (*c*) Representar el desplazamiento de la partícula en función del tiempo, indicando en la gráfica los instantes *A*, *B*, *C*, *D* y *E*. (*d*) ¿En qué instante la partícula se mueve más lentamente?

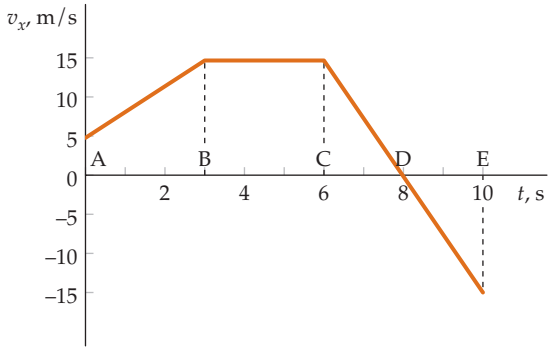


FIGURA 2.40 Problema 63

ACELERACIÓN CONSTANTE Y CAÍDA LIBRE

64 • Un objeto lanzado hacia arriba con velocidad inicial v_0 alcanza una altura h. Otro objeto lanzado en las mismas condiciones con velocidad inicial $2v_0$ alcanzará una altura de (*a*) $4h$, (*b*) $3h$, (*c*) $2h$, (*d*) h. (Resistencia del aire despreciable.)

65 • Un coche parado en la posición $x = 50$ m acelera con aceleración constante de 8,0 m/s^2. (*a*) Transcurridos 10 s, ¿cuál es su velocidad? (*b*) ¿Qué distancia ha recorrido? (*c*) ¿Cuál es su velocidad media en el intervalo $0 \leq t \leq 10$ s?

66 • Un objeto con una velocidad inicial de +5,0 m/s posee una aceleración constante de +2 m/s^2. Cuando su velocidad es de 15 m/s, ¿qué distancia ha recorrido?

67 • Un objeto con aceleración constante posee una velocidad de +10 m/s cuando se encuentra en $x = 6{,}0$ m y de 15 m/s cuando se encuentra en $x = 10{,}0$ m. ¿Cuál es su aceleración? SSM

68 • La velocidad de un objeto aumenta a un ritmo constante de +4,0 m/s cada segundo. Su velocidad es +1,0 m/s cuando $t = 0{,}0$, instante en el que está en $x = +7$ m. ¿Con qué velocidad se mueve cuando está en $x = +8{,}0$ m? ¿Cuándo sucederá esto?

69 •• Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. (La resistencia del aire es despreciable.) (*a*) ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire? (*b*) ¿Cuál es la mayor altura alcanzada por la pelota? (*c*) ¿Cuándo está la pelota a 15 m por encima del punto de lanzamiento?

70 •• En el corrimiento de tierras de Blackhawk, en California, una masa de rocas y barro cayó 460 m al desprenderse de una montaña y luego recorrió 8,0 km a través de una llanura (según algunas hipótesis se desplazó sobre una capa de vapor de agua). Suponiendo que esta masa cayera con la aceleración de la gravedad y después se deslizara horizontalmente con desaceleración constante, (*a*) ¿cuánto tiempo tardó en caer los 460 m? (*b*) ¿Cuál era su velocidad al llegar al fondo? (*c*) ¿Cuánto tiempo tardó en deslizarse horizontalmente a lo largo de los 8,0 km?

71 •• Una grúa levanta una carga de ladrillos a la velocidad constante de 5,0 m/s cuando a 6 m del suelo se desprende un ladrillo de la carga. (*a*) Describir el movimiento del ladrillo desprendido representando $y(t)$ en función de t. (*b*) ¿Cuál es la altura máxima respecto al suelo que alcanza el ladrillo? (*c*) ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo? (*d*) ¿Cuál es su velocidad en el momento de chocar contra el suelo? SSM

72 •• Un tornillo se desprende del fondo exterior de un ascensor que se mueve hacia arriba a la velocidad de 6,0 m/s. El tornillo alcanza el fondo del hueco del ascensor en 3,0 s. (*a*) ¿A qué altura estaba el ascensor cuando se desprendió el tornillo? (*b*) ¿Qué velocidad tiene el tornillo al chocar contra el fondo del hueco del ascensor?

73 •• Un objeto cae desde el reposo de una altura de 120 m. Determinar la distancia que recorre durante su último segundo en el aire.

74 •• Un objeto cae desde el reposo de una altura h. Durante el segundo final de su caída recorre 38 m. ¿Cuánto vale h?

75 •• Una piedra se lanza verticalmente hacia abajo desde un acantilado de 200 m de altura. Durante el último medio segundo de su caída la piedra recorre una distancia de 45 m. Determinar la velocidad inicial de la piedra. SSM

76 •• Un objeto en caída libre desde una altura h recorre $0{,}4\,h$ durante el primer segundo de su descenso. Determinar la velocidad media del objeto durante su caída.

77 •• Un autobús acelera a 1,5 m/s^2 desde el reposo durante 12 s. A continuación, se mueve a velocidad constante durante 25 s, después de los cuales frena hasta parar con una aceleración de módulo 1,5 m/s^2. (*a*) ¿Qué distancia total recorrió el autobús? (*b*) ¿Cuál fue su velocidad media?

78 •• Álvaro y Berta han salido a correr por un camino que discurre por el interior de un bosque. Mantienen una velocidad de 0,75 m/s. Álvaro ve que el final del camino y del bosque se encuentra a unos 35 m y acelera con una aceleración constante de 0,50 m/s^2, dejando atrás a Berta, que continúa a velocidad constante. (*a*) ¿Cuánto le cuesta a Álvaro llegar al final del camino? (*b*) Cuando alcanza la meta, inmediatamente se da la vuelta y deshace el camino a la velocidad constante de 0,85 m/s. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se cruza con Berta? (*c*) ¿A qué distancia del final del camino se encuentran cuando se cruzan?

79 •• Se ha diseñado un cohete para tomar muestras de la polución de la atmósfera. El cohete se lanza verticalmente hacia arriba con una aceleración de 20 m/s^2. Al cabo de 25 s, el combustible se agota y el cohete continúa como una partícula libre hasta que alcanza el suelo. (La resistencia del aire es despreciable.) Se quiere obtener una muestra de aire a una altura de 20 km. (*a*) ¿Llegará el cohete a esa altura? Si no llega, ¿qué hay que cambiar para que el cohete alcance esta altura? (*b*) Determinar el tiempo total que el cohete está en el aire. (*c*) Calcular la velocidad del cohete justo antes de chocar contra el suelo.

80 •• Una maceta cae desde una repisa de un edificio de apartamentos. Una persona de un apartamento inferior que dispone de un cronómetro, observa que la maceta tarda 0,2 s en pasar a través de su ventana que tiene 4,0 m de altura. ¿A qué altura sobre el borde superior de la ventana está la repisa de la cual cayó la maceta? (Despreciar los efectos de la resistencia del aire.)

81 •• En una experiencia de cátedra un cuerpo se desliza a lo largo de una pista de aire inclinada sin rozamiento con una aceleración constante a. Se le impulsa desde el extremo inferior de la pista ($x = 0$) con una velocidad inicial v_0. En el instante $t = 8{,}0$ s se encuentra en $x = 100$ cm y se mueve a lo largo de la pista con velocidad $v = -15$ cm/s. Determinar la velocidad inicial v_0 y la aceleración a. SSM

82 •• Una piedra que cae de lo alto de un acantilado recorre un tercio de su distancia total al suelo en el último segundo de su caída. ¿Qué altura tiene el acantilado? (La resistencia del aire es despreciable.)

83 •• Un automóvil cuando frena en seco tiene una desaceleración máxima de unos 7,0 m/s²; el tiempo de reacción típico para aplicar los frenos es de 0,50 s. Un cartel indica que la velocidad límite en una zona escolar debe cumplir la condición de que todos los coches puedan detenerse en una distancia de frenado de 4,0 m. (*a*) ¿Qué velocidad máxima puede alcanzar en esa zona un automóvil? (*b*) ¿Qué fracción de los 4,0 m corresponde al tiempo de reacción? SSM

84 •• Dos trenes se acercan uno al otro sobre vías adyacentes. Inicialmente están en reposo con una separación de 40 m entre sus cabezas. El tren de la izquierda acelera hacia la derecha a 1,0 m/s². El tren de la derecha acelera hacia la izquierda a 1,3 m/s². (*a*) ¿Qué distancia recorre el tren de la izquierda antes de que se produzca el cruce de ambos? (*b*) Si los trenes tienen una longitud de 150 m, ¿cuánto tiempo tardan en cruzarse completamente, suponiendo que sus aceleraciones son constantes?

85 •• Dos piedras se dejan caer desde el borde de un acantilado de 60 m. La segunda piedra se deja caer 1,6 s después de la primera. ¿Qué distancia ha recorrido la segunda piedra cuando la separación entre ambas es de 36 m?

86 •• Una policía motorista escondida en un cruce de calles observa que un coche no respeta la señal de stop, cruza la intersección y continúa a velocidad constante. La policía emprende su persecución 2,0 s después de que el coche sobrepase la señal, acelera a 4,2 m/s² y alcanza una velocidad de 110 km/h; continúa con esta velocidad hasta que alcanza al coche infractor. En ese instante, el coche se encuentra a 1,4 km del cruce. (*a*) ¿Qué tiempo le lleva a la policía alcanzar al coche? (*b*) ¿Qué velocidad llevaba el coche?

87 •• En el instante $t = 0$, se deja caer una piedra desde un acantilado sobre un lago; 1,6 s más tarde, otra piedra se lanza hacia abajo desde el mismo punto con una velocidad inicial de 32 m/s. Ambas piedras chocan con el agua al mismo tiempo. Determinar la altura del acantilado.

88 •• Un tren de pasajeros circula a 29 m/s cuando el conductor ve delante de él un tren de carga a 360 m de distancia circulando por la misma vía en la misma dirección. El tren de carga lleva una velocidad de 6,0 m/s. (*a*) Si el tiempo de reacción del conductor es de 0,40 s, ¿cuál debe ser la desaceleración mínima del tren de pasajeros para evitar la colisión? (*b*) Si el tiempo de reacción es 0,80 s y el tren desacelera con el valor obtenido en el apartado (*a*), ¿con qué velocidad el tren de pasajeros se acerca al de mercancías cuando ambos colisionan? (*c*) Calcular, para los dos tiempos de reacción, qué distancia recorre el tren de pasajeros desde que ve por primera vez el tren de mercancías hasta que se produce la colisión.

89 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Algunos elatéridos (insectos coleópteros) pueden proyectarse verticalmente por sí mismos con una aceleración de unos $400g$ (un orden de magnitud superior al que un ser humano puede resistir). Los elatéridos saltan "desdoblando" sus patas, que tienen una longitud aproximada de $d = 0{,}60$ cm. (*a*) ¿Hasta qué altura pueden saltar? (*b*) ¿Cuánto tiempo permanecen en el aire? (Suponer la aceleración constante mientras está en contacto con el suelo y despreciar la resistencia del aire.)

90 •• Un automóvil acelera desde el reposo a 2,0 m/s² durante 20 s. La velocidad se mantiene durante otros 20 s y a partir de entonces el coche está sometido a una aceleración de −3,0 m/s² hasta que el vehículo se detiene. ¿Qué distancia total recorre?

91 •• Consideremos el movimiento de una partícula que experimenta un movimiento de caída libre con aceleración constante. Antes de disponer de los modernos sistemas de adquisición de datos informatizados, el experimento de caída libre de un objeto, como, por ejemplo, un disco de hockey, se realizaba usando una cinta teñida colocada verticalmente junto a la trayectoria de caída del disco hecho conductor. Con el uso de un generador de alto voltaje se hacía saltar una chispa, a intervalos regulares de tiempo, entre dos conductores paralelos en el punto donde se encontraba el disco gracias a sus propiedades conductoras. De este modo en la cinta quedaba registrada la posición del disco a intervalos de tiempo sucesivos. Mostrar que la posición del disco seguía la *Regla de Galileo de los números impares* $\Delta y_{21} = 3\Delta y_{10}$, $\Delta y_{32} = 5\Delta y_{10}, \ldots$, donde Δy_{10} es el cambio en y durante el primer intervalo de tiempo Δt; Δy_{21} es el cambio en y durante el segundo intervalo de duración Δt, etc. SSM

92 •• Una partícula se mueve a lo largo del eje x con aceleración constante de +3 m/s². En el instante $t = 4{,}0$ s, está en $x = -100$ m; en $t = 6$ s posee una velocidad $v = +15$ m/s. Determinar su posición en $t = 6$ s.

93 •• Si fuera posible diseñar una nave espacial que pudiera mantener una aceleración constante de forma indefinida, los viajes a los planetas del Sistema Solar serían cuestión de días o semanas, y los viajes a estrellas próximas se podrían llevar a cabo en pocos años. (*a*) Usando los datos que aparecen en las tablas al final del libro, determinar el tiempo que se invertiría para ir desde la Tierra a Marte (el planeta más cercano a la Tierra) suponiendo que una nave parte del reposo, sigue una trayectoria recta, acelera durante media trayectoria con aceleración g, se da la vuelta y el resto del viaje desacelera con una aceleración g. (*b*) Repetir el cálculo para un viaje de $4{,}1 \times 10^{13}$ km a Proxima Centauri, nuestra vecina extrasolar más próxima. (Véase el problema 47.) SSM

94 •• La Stratosphere Tower de Las Vegas es un edificio de 293,35 m de altura. Un ascensor rápido invierte 1 minuto y 20 segundos en subir desde la planta baja hasta el último piso del edificio. Suponiendo que el ascensor mantiene una aceleración constante, determinar su valor expresándola en función de la aceleración de la gravedad.

95 •• Un tren sale de una estación con una aceleración de 0,40 m/s². Una pasajera llega corriendo al andén 6,0 s después de que el tren haya iniciado la marcha. ¿Cuál es la velocidad constante mínima con que debe correr la pasajera para poder alcanzar al tren? Dibuje un esquema de las curvas del movimiento del tren y de la pasajera en función del tiempo.

96 ••• Una bola A se suelta desde lo más alto de un edificio de altura h en el mismo instante en que otra bola B se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo. Cuando las bolas chocan, ambas se mueven en sentido contrario y la velocidad de la bola A es dos veces la velocidad de la bola B. ¿En qué fracción de la altura del edificio ocurre el encuentro?

97 ••• Resuelva el problema 96 si la colisión ocurre cuando las dos bolas se mueven en el mismo sentido y la velocidad de A es 4 veces la velocidad de B.

98 ••• Un metro parte de una estación y acelera desde el reposo con una aceleración de 1,00 m/s² hasta la mitad de la distancia que le separa de la siguiente estación; después, desacelera con el mismo ritmo durante la segunda mitad del trayecto. La distancia total entre estaciones es de 900 m. (*a*) Representar gráficamente la velocidad v en función del tiempo a lo largo de todo el recorrido. (*b*) Representar gráficamente la distancia recorrida en función del tiempo para todo el viaje. Dar valores numéricos apropiados a lo largo de ambos ejes.

99 ••• Un coche de policía pretende alcanzar a un coche que marcha a 125 km/h. La velocidad máxima del coche de policía es de 190 km/h, y arranca desde el reposo con aceleración constante de (8,0 km/h)/s, hasta que su velocidad alcanza los 190 km/h y luego prosigue con velocidad constante. (*a*) ¿Cuándo alcanzará al otro coche si se pone en marcha al pasar éste junto a él? (*b*) ¿Qué espacio habrán recorrido entonces ambos coches? (*c*) Hacer un gráfico de $x(t)$ para cada coche. SSM

100 ••• Cuando el coche de policía del problema 99 (marchando a 190 km/h) está 100 metros detrás del otro coche (que circula a 125 km/h) el conductor observa que le siguen y acciona los frenos bloqueando las ruedas. (*a*) Suponiendo que cada coche pueda frenar con una aceleración negativa de 6,0 m/s² y que la conductora del coche de policía frena tan pronto como ve encenderse las luces de freno del coche que persigue, es decir, sin tiempo muerto de reacción, demostrar que los coches chocan. (*b*) ¿En qué momento chocan contando a partir del instante que empiezan a frenar? (*c*) Analizar cómo el tiempo de reacción afecta a la resolución de este problema.

101 ••• Necesitando urgentemente el premio en metálico, Lou se apunta a una competición de automóviles en la cual el coche del concursante comienza y termina la prueba parado, recorriendo una distancia L en el tiempo más corto posible. Hay que ser buen conductor y demostrar qué coche es el mejor en la combinación total de aceleración y deceleración. La carrera está diseñada de modo que las velocidades máximas de los automóviles no se alcanzan nunca. (*a*) Si el coche de Lou mantiene una aceleración máxima a en el arranque y una desaceleración máxima $2a$ en la frenada, ¿en qué fracción de L debe Lou mover su pie desde el pedal del acelerador al pedal del freno? (*b*) ¿Qué fracción de tiempo utilizado en el trayecto total ha transcurrido hasta este momento? (*c*) ¿Cuál es la máxima velocidad que alcanza el coche de Lou? Despreciar el tiempo de reacción de Lou y elaborar la respuesta en función de a y L.

102 ••• Una profesora de física prueba su equipo anti-gravedad saltando con velocidad inicial cero desde un helicóptero situado a 575 m de altura (despreciar la resistencia del aire). Durante 8,0 s la profesora se mueve en caída libre; inmediatamente después conecta los cohetes propulsores y frena con una aceleración de 15 m/s^2 hasta que su velocidad de caída se sitúa en 5 m/s, que es cuando ajusta los controles de modo que se mantenga esta velocidad hasta llegar al suelo. (*a*) En una única figura, dibuje la aceleración y la velocidad de la profesora en función del tiempo. (Considerar positivo el sentido hacia arriba.) (*b*) ¿Cuál es su velocidad transcurridos los primeros 8,0 s del salto? (*c*) ¿Durante cuánto tiempo está frenando? (*d*) ¿Qué distancia recorre mientras su velocidad disminuye? (*e*) ¿Cuál es el tiempo invertido en todo el salto? (*f*) ¿Cuál es la velocidad media durante el salto completo?

INTEGRACIÓN Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO

103 • La velocidad de una partícula viene dada por $v_x(t) = (6{,}0\ \text{m/s}^2)t + (3\ \text{m/s})$. (*a*) Hacer un gráfico de v en función de t y hallar el área limitada por la curva en el intervalo de $t = 0$ s a $t = 5{,}0$ s. (*b*) Hallar la función de posición $x(t)$. Utilizarla para calcular el desplazamiento durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 5{,}0$ s. SSM

104 • La figura 2.41 muestra la velocidad de una partícula en función del tiempo. (*a*) ¿Cuál es el valor en metros del área del rectángulo señalado? (*b*) Estimar el desplazamiento de la partícula para los intervalos de 1 s que empiezan a partir de $t = 1{,}0$ s y $t = 2{,}0$ s. (*c*) ¿Estimar la velocidad media para el intervalo $1{,}0\,\text{s} \le t \le 3{,}0\,\text{s}$. (*d*) La ecuación de la curva es $v = (0{,}5\ \text{m/s}^3)t^2$. Determinar el desplazamiento de la partícula en el intervalo $1\text{s} \le t \le 3\text{s}$ por integración y comparar la respuesta con la del apartado (*b*). En este caso, ¿la velocidad media es igual a la semisuma de las velocidades inicial y final?

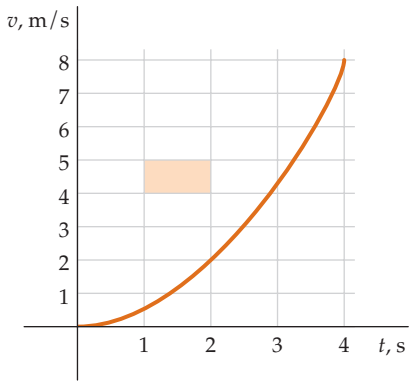


FIGURA 2.41 Problema 104

105 •• La velocidad de una partícula está dada por $v_x = (7{,}0\ \text{m/s}^3)t^2 - 5{,}0\ \text{m/s}$. Si la partícula está en el origen cuando $t_0 = 0$, determinar la función de posición $x(t)$.

106 •• Considere el gráfico velocidad-tiempo de la figura 2.42. Suponiendo que $x = 0$ cuando $t = 0$, escriba las expresiones algebraicas correctas para $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$, con los valores apropiados de todas las constantes.

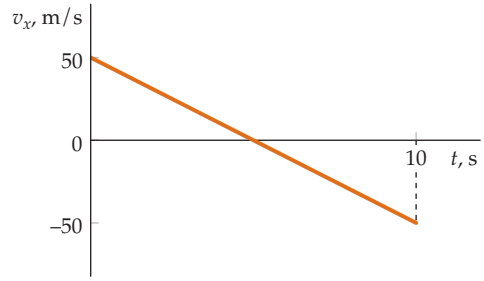


FIGURA 2.42 Problema 106

107 ••• La figura 2.43 muestra la aceleración de una partícula en función del tiempo. (*a*) ¿Cuál es el valor del área del rectángulo señalado, en m/s? (*b*) La partícula parte del reposo a $t = 0$. Hallar la velocidad en los tiempos $t = 1{,}0$ s, 2,0 s y 3,0 s contando los cuadrados bajo la curva. (*c*) Hacer un gráfico v_x a partir de los resultados de la parte (*b*) y hallar un valor estimado de la distancia recorrida por la partícula en el intervalo de $t = 0$ a $t = 3{,}0$ s.

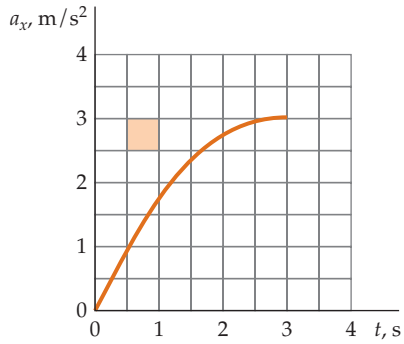


FIGURA 2.43 Problema 107

108 ••• La figura 2.44 muestra un gráfico v_x en función de t para una partícula que se mueve sobre una recta. Su posición en el instante $t = 0$ es $x_0 = 5$ m. (*a*) Hallar x para varios tiempos t contando cuadrados y dibujar x en función de t. (*b*) Dibujar una gráfica de la aceleración a_x en función de t. (*c*) Determinar el desplazamiento de la partícula entre $t = 3{,}0$ s y 7,0 s.

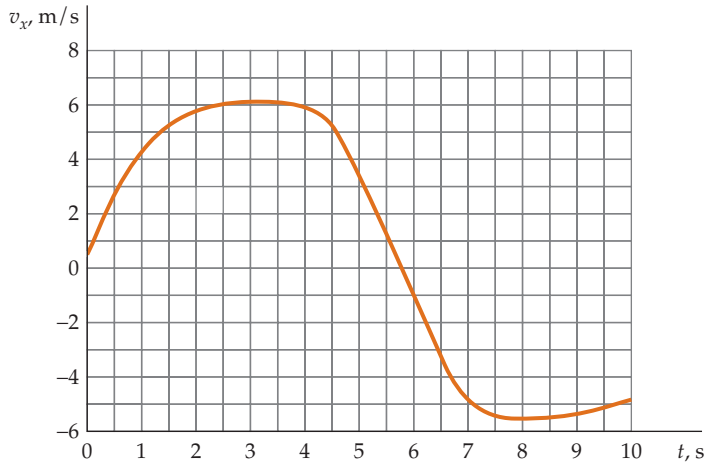


FIGURA 2.44 Problema 108

109 ••• **CONCEPTUAL** La figura 2.45 muestra un gráfico de x en función de t para un cuerpo que se mueve en línea recta. Dibujar gráficos aproximados (*a*) de v_x en función de t y (*b*) de a_x en función de t para este movimiento. (*c*) Usar los gráficos para comparar cualitativamente el tiempo en que el objeto está a la mayor distancia del origen con el tiempo en que su velocidad es máxima. Explicar por qué los tiempos no coinciden. (*d*) Usar los dibujos para comparar cualitativamente el tiempo con que el objeto se mueve más rápido con el tiempo en que su aceleración es máxima. Explicar por qué los tiempos *no* coinciden. SSM

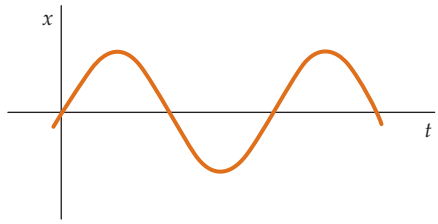


FIGURA 2.45 Problema 109

110 ••• **MÚLTIPLES PASOS** La aceleración de un cohete viene dada por $a_x = bt$, donde b es una constante positiva. (*a*) Determinar la posición en función del tiempo $x(t)$ si $x = x_0$ y $v_x = v_{0x}$ cuando $t = 0$. (*b*) Calcular la posición y la velocidad cuando $t = 5$ s si $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ y $b = 3{,}0\ \text{m/s}^3$. (*c*) Calcular la velocidad media del cohete entre $t = 4{,}5$ s y 5,5 s si $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ y $b = 3{,}0\ \text{m/s}^3$. Comparar esta velocidad media con la velocidad instantánea en $t = 5{,}0$ s.

111 ••• La aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión durante el intervalo de tiempo comprendido entre 0,0 y 10,0 s viene dada por $a_x = (0{,}20\ \text{m/s}^3)t$. Sea el movimiento hacia la derecha la dirección $+x$. La partícula inicialmente tiene una velocidad hacia la derecha de 9,5 m/s y está a 5,0 m a la izquierda del origen. Determinar la velocidad media entre $t = 0{,}0$ s y 10,0 s, y comparar con la media de las velocidades instantáneas al inicio y al final. ¿Son las dos medias iguales? Explicarlo. SSM

112 ••• Considere el movimiento de una partícula que está sometida a una aceleración variable a_x dada por $a_x = a_{0x} + bt$, donde a_{0x} y b son constantes y $x = x_0$ y $v_x = v_{0x}$ si $t = 0$. (*a*) Calcular la velocidad instantánea en función del tiempo. (*b*) Determinar la posición en función del tiempo. (*c*) Calcular la velocidad media en el mismo intervalo de tiempo, entre un tiempo inicial 0 y un tiempo final arbitrario t. (*d*) Comparar la media de las velocidades inicial y final con la respuesta del apartado (*c*). ¿Las dos medias son iguales? Explique la respuesta.

PROBLEMAS GENERALES

113 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En una clase de ciencias, con el objetivo de determinar la aceleración de caída libre de los cuerpos, se monta un dispositivo experimental con dos células fotoeléctricas. (Nota: Las células fotoeléctricas nos han de resultar familiares, ya que están presentes en la vida cotidiana como en las puertas de algunas tiendas o como sistema de vigilancia que accionan un timbre cuando alguien cruza el haz de luz que las conecta). Una célula se coloca en el borde de una mesa de 1,0 m de altura y la otra 0,50 m exactamente debajo. Se suelta una canica desde el borde de la mesa de modo que, cuando pasa por la primera célula, pone en marcha un reloj y, cuando pasa por la segunda, lo para. (*a*) Probar que el valor de la aceleración de caída libre g se determina mediante la expresión $g_{\text{exp}} = (2\Delta y)/(\Delta t)^2$, donde Δy es la distancia vertical entre las células fotoeléctricas y Δt es el tiempo medido por el cronómetro. (*b*) ¿Qué valor de Δt se espera medir, suponiendo para g_{exp} el valor estándar ($9{,}81\ \text{m/s}^2$)? (*c*) Durante el experimento, un estudiante poco cuidadoso coloca la primera célula 0,50 cm por debajo la mesa, mientras la segunda célula está bien colocada a 0,50 m por encima del suelo. Sin embargo, la canica se suelta desde la misma altura en que se soltó cuando la célula estaba exactamente a 1,00 m del suelo. ¿Qué valor de g_{exp} obtendrá? ¿Qué porcentaje de diferencia habrá entre el valor obtenido y el valor común de esta magnitud?

114 ••• **MÚLTIPLES PASOS** La posición de un cuerpo que oscila sobre un muelle viene dada por $x = A$ sen ωt, donde A y ω son constantes de valores $A = 5{,}0$ cm y $\omega = 0{,}175\ \text{s}^{-1}$. (*a*) Representar x en función de t para $0 \leq t \leq 36$ s. (*b*) Medir la pendiente del gráfico en $t = 0$ para determinar la velocidad en ese instante. (*c*) Calcular la velocidad media para una serie de intervalos que comienzan en $t = 0$ y terminan en $t = 6{,}0$, 3,0, 2,0, 1,0, 0,50 y 0,25 s. (*d*) Calcular dx/dt y determinar la velocidad en el instante $t = 0$. (*e*) Comparar los resultados de los apartados (*c*) y (*d*) y explicar por qué los resultados del apartado (*c*) se aproximan a los resultados del apartado (*d*)).

115 ••• **CONCEPTUAL** Considere un objeto que se mueve con una velocidad descrita por la ecuación $v = B$ sen(ωt), con B y ω constantes y ω se expresa en radianes/s. (*a*) Explicar por qué B es igual al valor máximo de la velocidad $v_{\text{máx}}$. (*b*) ¿Cuál es la aceleración del objeto en función del tiempo? ¿Es constante la aceleración? (*c*) ¿Cuál es la máxima aceleración del objeto en función de ω y $v_{\text{máx}}$? (*d*) Cuando $t = 0$, la posición es x_0. Determinar la posición en función del tiempo en función de t, ω, x_0 y $v_{\text{máx}}$. SSM

116 ••• Suponga que la aceleración de una partícula es una función de x, donde $a_x(x) = (2{,}0\ \text{s}^{-2})x$. (*a*) Si para $x = 1{,}0$ m la velocidad es cero, ¿cuál es la velocidad de la partícula en $x = 3{,}0$ m? (*b*) ¿Cuánto tiempo invierte la partícula en moverse desde $x = 1{,}0$ m hasta $x = 3{,}0$ m?

117 ••• Una piedra se hunde en el agua con una aceleración que decrece con el tiempo según $a_y = g - bv_y$, donde b es una constante positiva (La dirección $+y$ está dirigida hacia abajo.) (*a*) ¿Cuáles son las unidades SI de b? (*b*) Demostrar matemáticamente que si la roca empieza a hundirse cuando $t = 0$, la aceleración dependerá del tiempo exponencialmente de acuerdo con $a_y(t) = ge^{-bt}$. (*c*) ¿Cuál es la velocidad terminal de la roca en función de g y de b? (Véase el problema 38 para una explicación de la *velocidad terminal*.) SSM

118 ••• En el problema 117, una piedra cae en el agua con una aceleración que viene dada por $a_y(t) = ge^{-bt}$, donde b es una constante positiva que depende de la forma y del tamaño de la piedra y de las propiedades físicas del agua. Basándose en este resultado, deduzca una expresión para la velocidad y la posición de la piedra en función del tiempo, suponiendo que tanto la velocidad como la posición iniciales son cero y que la dirección $+y$ se dirige hacia abajo.

119 ••• **HOJA DE CÁLCULO** La aceleración de una paracaidista que se lanza al vacío desde un avión viene dada, antes de abrir el paracaídas, por la fórmula $a_y = g - bv_y^2$, donde b es una constante que depende del área transversal de la saltadora y de la densidad de la atmósfera que le rodea. La dirección $+y$ está dirigida hacia abajo. (*a*) Si su velocidad inicial en el momento del salto es 0, demostrar que su velocidad en función del tiempo viene dada por la fórmula $v_y(t) = v_t \tanh(t/T)$, donde v_t es la velocidad límite (véase el problema 38) dada por $v_t = \sqrt{g/b}$ y $T = v_t/g$ es un parámetro de escala temporal. (*b*) ¿A qué fracción de velocidad terminal corresponde la velocidad en $t = T$? (*c*) Use un programa de una hoja de cálculo para representar $v_y(t)$ en función del tiempo, usando una velocidad terminal de 56 m/s (use este valor para calcular b y T). ¿Tiene sentido la curva resultante?

120 ••• **APROXIMACIÓN** Imagine que está junto a un pozo de aquellos en los que se suelen formular deseos y que usted afirma que sabe a qué profundidad está la superficie del agua. Formula un deseo y tira la moneda. Pasados tres segundos se oye el sonido que indica que la moneda ha llegado al agua. Si la velocidad del sonido en el aire es 343 m/s, ¿a qué profundidad se halla la superficie del agua? Despreciar cualquier efecto debido a la resistencia del aire.

121 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un coche va a la velocidad máxima permitida de 40 km/h cuando a 65 m de un semáforo su conductor observa que la luz cambia a amarilla. La luz amarilla dura 5,0 s. El conductor invierte 1 s en pensar si todavía tiene tiempo de pasar y, a continuación, acelera con una aceleración constante. El coche de 4,5 m de longitud atraviesa el cruce, que tiene una anchura de 15 m, justo en el momento que el semáforo cambia a rojo, evitando una multa. Inmediatamente después de pasar el cruce, el conductor levanta el pie del acelerador. Pero, a pesar de ello, es multado por exceso de velocidad. Determinar la velocidad que llevaba el coche al pasar el cruce y decidir si tiene sentido reclamar ante la imposición de la multa, explicando los motivos.

122 ••• En un objeto celeste de radio R, la aceleración de la gravedad g a una distancia x del centro del objeto viene dada por $g = g_0R^2/x^2$, donde g_0 es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del objeto y $x > R$. Para la Luna, $g_0 = 1{,}63\ \text{m/s}^2$ y $R = 3200$ km. Si se suelta una piedra a partir del reposo desde una altura de $4R$ por encima de la superficie lunar, ¿con qué velocidad impacta la piedra en la Luna? *Sugerencia: la aceleración es una función de la posición y aumenta a medida que el objeto cae. Por lo tanto, no hay que utilizar las ecuaciones válidas para la caída libre con aceleración constante.*

CAPÍTULO 3

Los veleros no navegan en línea recta hacia su destino sino que siguen una trayectoria en zig-zag a través del viento. El velero de la foto, que se dirige hacia un puerto situado al sudeste, navega primero hacia el este, después hacia el sur y de nuevo hacia el este. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

Movimiento en dos y tres dimensiones

3.1 Desplazamiento, velocidad y aceleración

3.2 Primer caso particular: movimiento de proyectiles

3.3 Segundo caso particular: movimiento circular

? ¿Cómo podemos calcular el desplazamiento y la velocidad medias? (Véase el ejemplo 3.1.)

El movimiento de un velero en zig-zag contra el viento o la trayectoria de una pelota de béisbol cuando sale del estadio no se pueden describir completamente utilizando las ecuaciones del capítulo 2. Para describir estos movimientos, debemos extender la idea de movimiento en una dimensión discutida en el capítulo 2 a dos y tres dimensiones. Con tal fin, debemos revisar el concepto de vector y usarlo para analizar y describir movimientos en más de una dimensión.

En este capítulo, estudiaremos los vectores desplazamiento, velocidad y aceleración con más detalle. Además, analizaremos dos tipos específicos de movimientos: el movimiento de proyectiles y el movimiento circular. Para estudiar este capítulo es necesario estar familiarizado con el material sobre vectores de las secciones 6 y 7 del capítulo 1. Le aconsejamos que revise esas secciones antes de empezar con este capítulo.

3.1 DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración se utilizaron en el capítulo 2 para describir el movimiento de un objeto en línea recta. Ahora utilizaremos el concepto de vector para extender esos conceptos al movimiento en dos y tres dimensiones.

VECTORES POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

El **vector posición** de una partícula es un vector trazado desde el origen de un sistema de coordenadas hasta la posición de la partícula. Para una partícula en el plano x, y en el punto con coordenadas (x, y) su vector posición $\vec{r}$ es

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad 3.1$$

DEFINICIÓN: VECTOR POSICIÓN

Obsérvese que x e y, componentes de posición $\vec{r}$, son las coordenadas cartesianas (figura 3.1) de la partícula.

La figura 3.2 representa la trayectoria o camino real seguido por la partícula. En el instante t_1, la partícula se encuentra en P_1, y su vector posición es $\vec{r}_1$; en el instante t_2 la partícula se ha movido a P_2 y el vector posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición de la partícula es el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad 3.2$$

DEFINICIÓN: VECTOR DESPLAZAMIENTO

Utilizando los vectores unitarios, podemos escribir el vector desplazamiento como

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} \qquad 3.3$$

VECTORES VELOCIDAD

La velocidad media se define como el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo transcurrido. El cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el **vector velocidad media**.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad 3.4$$

DEFINICIÓN: VECTOR VELOCIDAD MEDIA

El vector velocidad media y el vector desplazamiento tienen la misma dirección.

El módulo del vector desplazamiento es inferior a la distancia recorrida a lo largo de la curva a menos que la partícula se mueva en línea recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños (figura 3.3), el desplazamiento se aproxima a la distancia real recorrida por la partícula a lo largo de la curva, y el ángulo entre $\Delta\vec{r}$ y la tangente a la curva en el comienzo del intervalo tienden a cero. Definimos el vector velocidad instantánea como el límite del vector velocidad media cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad 3.5$$

DEFINICIÓN: VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

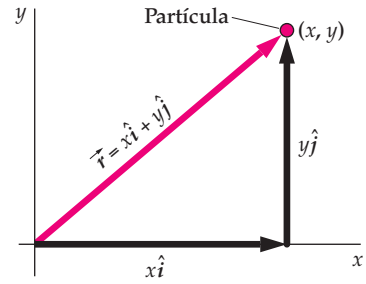


FIGURA 3.1 Las componentes x e y del vector posición $\vec{r}$ de una partícula son las coordenadas (cartesianas) de la partícula.

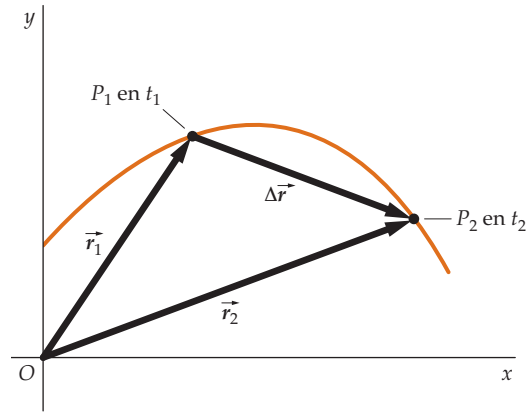


FIGURA 3.2 El vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ es la diferencia de los vectores de posición $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Análogamente, $\Delta\vec{r}$ es el vector que, sumado al vector de posición inicial $\vec{r}_1$, nos da el nuevo vector posición final $\vec{r}_2$.

! No confundir la trayectoria de los gráficos x frente a y con los gráficos x en función de t del capítulo 2.

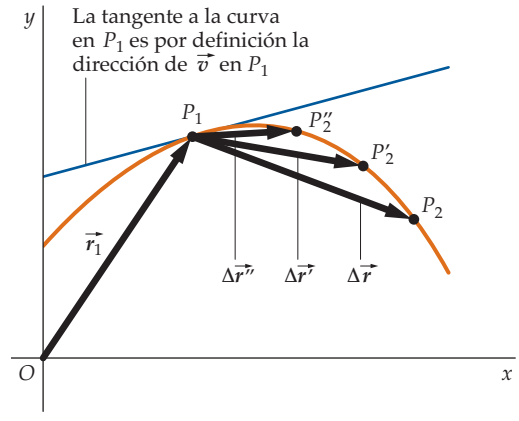


FIGURA 3.3 Al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, el ángulo entre la dirección $\Delta\vec{r}$ y la tangente a la curva tiende a cero.

El vector velocidad instantánea es la derivada del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad escalar y su dirección coincide con la tangente a la curva en la dirección del movimiento de la partícula.

Para calcular la derivada en la ecuación 3.5, expresamos el vector posición en función de sus componentes (ecuación 3.1).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{j}$$

es decir,

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \qquad 3.6$$

donde $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$ son las componentes x e y de la velocidad.

El módulo del vector velocidad viene dado por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad 3.7$$

y la dirección de la velocidad viene dada por

$$\theta = \text{arctg}\frac{v_y}{v_x} \qquad 3.8$$

¡ Vaya con cuidado a la hora de utilizar la calculadora para calcular el valor de θ en la ecuación 3.8. La mayoría de las calculadoras dan el valor correcto para θ si v_x es positivo. No obstante, si v_x es negativo se deberán añadir 180° (π rad) al resultado que devuelve la calculadora.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Trigonometría

Ejemplo 3.1 La velocidad de un velero

Un barco de vela tiene las coordenadas $(x_1, y_1) = (130\text{ m}, 205\text{ m})$ en el instante $t_1 = 60{,}0$ s. Dos minutos más tarde, en el instante t_2, sus coordenadas son $(x_2, y_2) = (110\text{ m}, 218\text{ m})$. (*a*) Determinar la velocidad media en este intervalo de dos minutos. Expresar $\vec{v}_m$ en función de sus componentes rectangulares. (*b*) Determinar el módulo y la dirección de esta velocidad media. (*c*) Para $t \geq 20$ s, la posición del barco en función del tiempo es $x(t) = b_1 + b_2 t$ e $y(t) = c_1 + c_2/t$, donde $b_1 = 100$ m, $b_2 = 0{,}500$ m/s, $c_1 = 200$ m y $c_2 = 360\text{ m}\cdot\text{s}$. Calcular la velocidad instantánea en función del tiempo para $t \geq 20$ s.

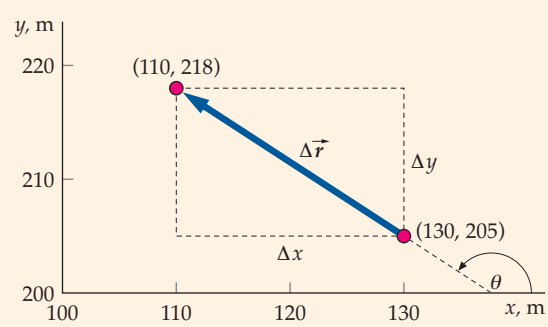


FIGURA 3.4

PLANTEAMIENTO Se conocen las posiciones inicial y final del barco de vela. Como el movimiento del velero es bidimensional, necesitamos expresar el desplazamiento, la velocidad media y la velocidad instantánea como vectores. Podemos utilizar las ecuaciones 3.5 a 3.8 para obtener dichos valores.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibuje un sistema de coordenadas (figura 3.4) y muestre el desplazamiento del velero. Dibuje el vector velocidad media (su dirección coincide con la del vector de desplazamiento):

2. Las componentes x e y de la velocidad media $\vec{v}_m$ se calculan directamente a partir de sus definiciones:

$$\vec{v}_m = v_{x\,m}\hat{i} + v_{y\,m}\hat{j}$$

donde

$$v_{x\,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{110\text{ m} - 130\text{ m}}{120\text{ s}} = -0{,}167\text{ m/s}$$

$$v_{y\,m} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{218\text{ m} - 205\text{ m}}{120\text{ s}} = 0{,}108\text{ m/s}$$

por lo tanto

$$\vec{v}_m = \boxed{-(0{,}167\text{ m/s})\hat{i} + (0{,}108\text{ m/s})\hat{j}}$$

(*b*) 1. El módulo de $\vec{v}_m$ se deduce del teorema de Pitágoras:

$$v_m = \sqrt{(v_{x\,m})^2 + (v_{y\,m})^2} = \boxed{0{,}199\text{ m/s}}$$

2. El cociente entre $v_{y,m}$ y $v_{x,m}$ expresa el valor de la tangente del ángulo θ entre $\vec{v}_m$ y el eje x (añadimos 180° al ángulo de −33,0° que proporciona la calculadora puesto que v_x es negativa):

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v_{y\,m}}{v_{x\,m}}$$

luego

$$\theta = \text{arctg}\frac{v_{y\,m}}{v_{x\,m}} = \text{arctg}\frac{0{,}108\text{ m/s}}{-0{,}167\text{ m/s}} = -33{,}0° + 180° = \boxed{147°}$$

(*c*) La velocidad instantánea $\vec{v}$ se obtiene calculando dx/dt y dy/dt:

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = b_2\hat{i} - c_2 t^{-2}\hat{j} = \boxed{(0{,}500\ \text{m/s})\hat{i} - \frac{360\ \text{m}\cdot\text{s}}{t^2}\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN El módulo de $\vec{v}_m$ es mayor que el valor absoluto de su componente x o de su componente y. Si t se da en segundos, las unidades para la componente y de $\vec{v}$ del apartado (*c*) son $\text{m}\cdot\text{s}/\text{s}^2 = \text{m/s}$, que son las unidades propias de la velocidad.

VELOCIDAD RELATIVA

Si usted está sentado en un avión que se mueve a 800 km/h hacia el este, su velocidad es la misma que la del avión. Esta velocidad podría ser su velocidad relativa a la superficie de la Tierra o su velocidad relativa al aire exterior del aparato. (Esas dos velocidades serían diferentes si el avión volara dentro de una corriente en chorro.) Además, su velocidad es cero si se mide respecto del avión.

La superficie de la Tierra, el aire exterior del avión y el propio aparato son **sistemas de referencia**. Un sistema de referencia es un objeto o colección de objetos materiales cuyas partes están en reposo entre sí.

Para medir la posición de los objetos se usan ejes de coordenadas fijos a sistemas de referencia. (Decimos que un eje de coordenadas está fijo a un sistema de referencia si el eje de coordenadas está en reposo respecto del sistema de referencia.) Usted estaría en reposo respecto del sistema de referencia fijo al avión. (Siempre y cuando permanezca sentado en su asiento.) Sin embargo, para un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto de la superficie de la Tierra y para un sistema de coordenadas horizontal fijo al aire exterior del avión, su posición cambia continuamente. (Si tiene problemas para imaginarse un sistema de coordenadas fijo en el aire exterior, imagínese un sistema de coordenadas ligado a un globo que flota en el aire. El aire y el globo están en reposo mutuo, por lo cual forman un único sistema de referencia.)

Si una partícula p se mueve con velocidad $\vec{v}_{pA}$ en relación al sistema de coordenadas A y éste a su vez se mueve con velocidad $\vec{v}_{AB}$ relativa a un sistema de referencia B, la velocidad $\vec{v}_{pB}$ de la partícula relativa a B está relacionada con $\vec{v}_{pA}$ y $\vec{v}_{AB}$ mediante

$$\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB} \qquad 3.9$$

Por ejemplo, si una persona p está sobre una vagoneta C que se mueve con velocidad $\vec{v}_{CG}$ relativa al suelo G (figura 3.5*a*), y la persona camina con velocidad $\vec{v}_{pC}$ sobre la vagoneta (figura 3.5*b*), entonces la velocidad de la persona relativa al suelo es la suma vectorial de ambas velocidades: $\vec{v}_{pG} = \vec{v}_{pC} + \vec{v}_{CG}$ (figura 3.5*c*).

La velocidad de un objeto A relativa al objeto B tiene el mismo módulo pero dirección contraria a la velocidad del objeto B relativa al objeto A. Por ejemplo, $\vec{v}_{pC}$ es igual a $-\vec{v}_{Cp}$, donde $\vec{v}_{pC}$ es la velocidad de la persona relativa a la vagoneta, y $\vec{v}_{Cp}$ es la velocidad de la vagoneta relativa a la persona.

Abastecimiento de combustible en el aire. Cada uno de los aviones está prácticamente en reposo relativo con respecto a los otros aunque se muevan a grandes velocidades respecto a la Tierra. *(Novastock/Dembinsky Photo Associates.)*

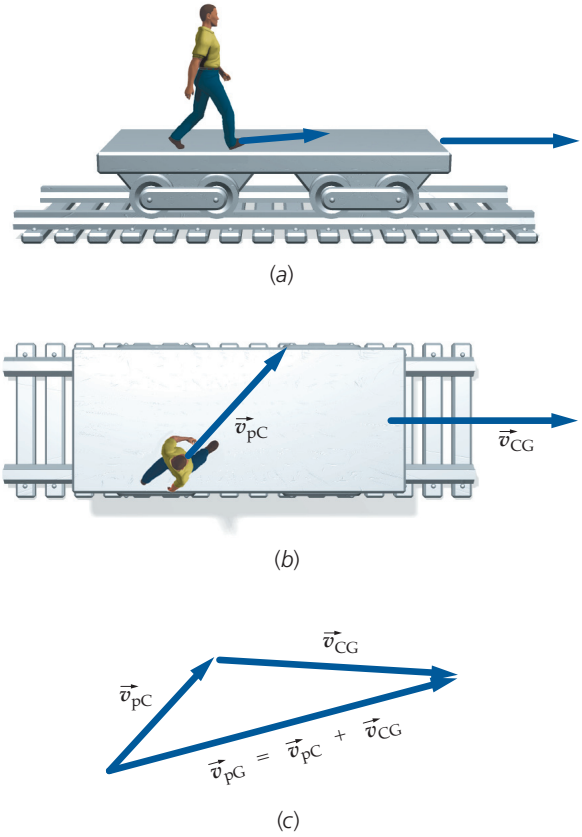


FIGURA 3.5 La velocidad de una persona relativa al suelo es igual a la velocidad de la persona relativa a la vagoneta más la velocidad de la vagoneta relativa al suelo.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Velocidad relativa

PLANTEAMIENTO El primer paso para la resolución de problemas de velocidad relativa es identificar y marcar los sistemas de referencia relevantes. Aquí les llamaremos sistema de referencia A y B.

SOLUCIÓN

1. Utilizando $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ (ecuación 3.9), relacione la velocidad del objeto móvil (partícula p) relativa al sistema A con la velocidad de la partícula relativa al sistema B.
2. Trace un diagrama de suma vectorial para la ecuación $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$. Incluya ejes de coordenadas en el dibujo.
3. Calcule la incógnita en cuestión. Utilice la trigonometría cuando sea necesario.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que obtiene la velocidad o posición del cuerpo respecto del sistema de referencia correcto.

! Es muy importante el orden de los subíndices utilizados para expresar la velocidad relativa. Cuando utilice vectores velocidad relativa procure escribir los subíndices en el orden adecuado.

Ejemplo 3.2 Movimiento de un avión

Un avión debe volar hacia el norte. La velocidad del avión respecto al aire es 200 km/h y el viento sopla de oeste a este a 90 km/h. (*a*) ¿Cuál debe ser el rumbo del avión? (*b*) ¿Qué velocidad debe llevar el avión respecto al suelo?

PLANTEAMIENTO Como el viento sopla hacia el este, un avión con rumbo hacia el norte derivará hacia el este. Para compensar el viento de través, el avión debe dirigirse hacia el noroeste. La velocidad del avión respecto al suelo $\vec{v}_{pG}$ será la suma de la velocidad del avión respecto al aire $\vec{v}_{pA}$ más la velocidad del aire respecto al suelo $\vec{v}_{AG}$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La velocidad del avión respecto al suelo viene dada por la ecuación 3.9:

$$\vec{v}_{pG} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AG}$$

2. Incluya un diagrama (figura 3.6) que muestre la suma de los vectores del paso 1. Incluya los ejes de referencia:

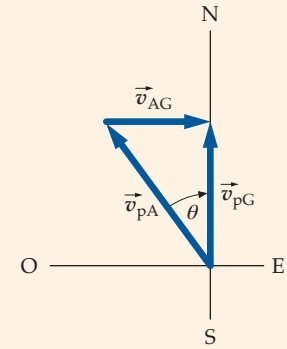


FIGURA 3.6

3. El seno del ángulo θ formado por la velocidad del avión y la dirección norte es igual al cociente entre v_{AG} y v_{pA}:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_{AG}}{v_{pA}} = \frac{90\ \text{km/h}}{200\ \text{km/h}} = \frac{9}{20}$$

por lo tanto,

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{9}{20} = \boxed{27^\circ \text{ noroeste}}$$

(*b*) Como $\vec{v}_{AG}$ y $\vec{v}_{pG}$ son perpendiculares podemos utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el módulo de $\vec{v}_{pG}$:

$$v_{pA}^2 = v_{pG}^2 + v_{AG}^2$$

con lo cual,

$$v_{pG} = \sqrt{v_{pA}^2 - v_{AG}^2}$$

$$= \sqrt{(200\ \text{km/h})^2 - (90\ \text{km/h})^2} = \boxed{180\ \text{km/h}}$$

COMPROBACIÓN Poniendo rumbo en contra del viento a 90 km/h obtendríamos una velocidad respecto al suelo de 200 km/h − 90 km/h = 110 km/h. El resultado de 180 km/h del apartado (*b*) es mayor que 110 km/h y menor que 200 km/h, como era de esperar.

VECTORES DE ACELERACIÓN

Se define el **vector aceleración media** como el cociente entre la variación del vector velocidad instantánea $\Delta\vec{v}$ y el intervalo de tiempo transcurrido Δt:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad 3.10$$

DEFINICIÓN: VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

El **vector aceleración instantánea** es el límite de esta relación cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero; es decir, el vector aceleración instantánea, es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad 3.11$$

DEFINICIÓN: VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Para calcular la aceleración instantánea, expresaremos $\vec{v}$ en función de sus coordenadas rectangulares:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Por lo tanto,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$
$$= a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad 3.12$$

donde las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Ejemplo 3.3 El movimiento de una pelota de béisbol

La posición de una pelota de béisbol golpeada por el bateador viene dada por la expresión $\vec{r} = [1{,}5\text{ m} + (12\text{ m/s})t]\hat{i} + [(16\text{ m/s})t - (4{,}9\text{ m/s}^2)t^2]\,\hat{j}$. Determinar su velocidad y aceleración en función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Recordemos que $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ (ecuación 3.1). Podemos encontrar las componentes x e y de la velocidad y aceleración, tomando las derivadas temporales de x e y.

SOLUCIÓN

1. Calculamos las componentes x e y de $\vec{r}$:
$$x = 1{,}5\text{ m} + (12\text{ m/s})t$$
$$y = (16\text{ m/s})t - (4{,}9\text{ m/s}^2)t^2$$

2. Las componentes x e y de la velocidad se obtienen derivando x e y:
$$v_x = \frac{dx}{dt} = 12\text{ m/s}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = (16\text{ m/s}) - 2(4{,}9\text{ m/s}^2)t$$

3. Derivando de nuevo se obtienen las componentes de la aceleración:
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -9{,}8\text{ m/s}^2$$

4. Utilizando la notación vectorial, la velocidad y la aceleración son:
$$\vec{v} = \boxed{(12\text{ m/s})\hat{i} + [16\text{ m/s} - (9{,}8\text{ m/s}^2)t]\hat{j}}$$
$$\vec{a} = \boxed{(-9{,}8\text{ m/s}^2)\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades de la velocidad y aceleración son m/s y m/s^2, respectivamente. En el paso 4, los resultados para la velocidad y aceleración tienen las unidades correctas de m/s y m/s^2.

Para que un vector sea constante, tanto su módulo como su dirección deben permanecer constantes. Si cualquiera de ellas cambia, el vector se modifica. Por lo tanto, si un coche toma una curva en la carretera con el módulo de la velocidad constante, experimenta una aceleración, ya que el vector velocidad se modifica debido al cambio de dirección.

Ejemplo 3.4 Tomando una curva

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

PLANTEAMIENTO Calculamos la aceleración media a partir de su definición, $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Primero calculamos $\Delta\vec{v}$ que es el vector que sumado a $\vec{v}_i$ nos da $\vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo:
$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$
2. Para hallar $\Delta\vec{v}$, debemos especificar primero $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$. Dibujemos $\vec{v}_i$ y $\vec{v}_f$ (figura 3.7*a*), y tracemos el diagrama de suma vectorial (figura 3.7*b*) correspondiente a $\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$:
3. El cambio de velocidad viene determinado por las velocidades inicial y final:
$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \Delta\vec{v}$$
4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media:
$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{60\ \text{km/h}\ \hat{j} - 60\ \text{km/h}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}}$$
5. Convierta 60 km/h a metros por segundo:
$$60\ \cancel{\text{km}}/\cancel{\text{h}} \times \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 16{,}7\ \text{m/s}$$
6. Exprese la aceleración en metros por segundo al cuadrado:
$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{j} - 16{,}7\ \text{m/s}\ \hat{i}}{5{,}0\ \text{s}} = \boxed{-3{,}4\ \text{m/s}^2\hat{i} + 3{,}4\ \text{m/s}^2\hat{j}}$$

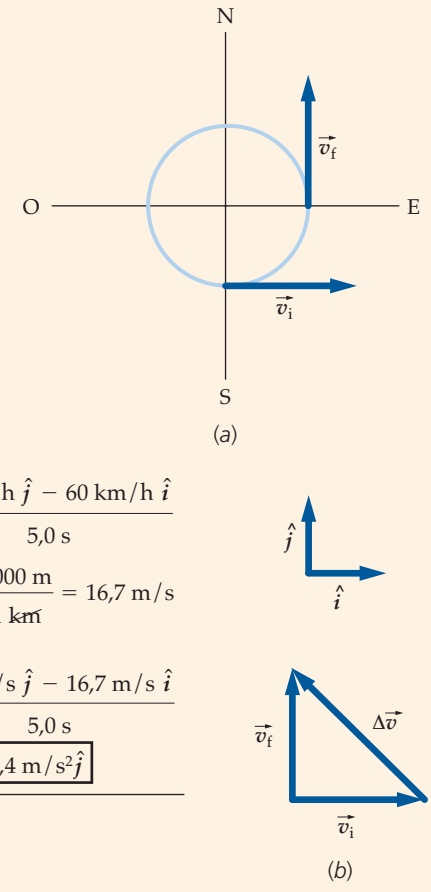


FIGURA 3.7

COMPROBACIÓN La componente de la velocidad en dirección este disminuye de 60 km/h a cero, de tal forma que cabría esperar que la componente x de la aceleración fuese negativa. Así mismo, la componente de la velocidad en dirección norte aumenta de cero a 60 km/h, de forma que cabría esperar que la componente y de la aceleración fuese positiva. El resultado del apartado 6 concuerda con estas expectativas.

OBSERVACIÓN Obsérvese que el coche sigue acelerando aunque el módulo de su velocidad se mantenga constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.1 Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media.

El movimiento de un objeto alrededor de una circunferencia es un ejemplo corriente de movimiento en el cual la velocidad de un objeto cambia, aunque su módulo permanezca constante.

¡ No hay que suponer que la aceleración de un cuerpo es cero sólo porque se mueva a velocidad cuyo módulo sea constante. Para que la aceleración sea cero, ni el módulo ni la dirección pueden cambiar.

LA DIRECCIÓN DEL VECTOR ACELERACIÓN

En los capítulos siguientes será necesario determinar la dirección del vector aceleración a partir de una descripción del movimiento. Para ello, analicemos el movimiento de una saltadora de bungee saltando en una plataforma elástica cuando alcanza el punto más bajo de un salto y frena y, posteriormente, cambia el sentido de su velocidad iniciando un nuevo salto. Para determinar la dirección de la aceleración cuando está frenando, en la figura 3.8*a* dibujamos una serie de puntos que muestran su posición en sucesivos instantes de tiempo. Cuanto más rápido se

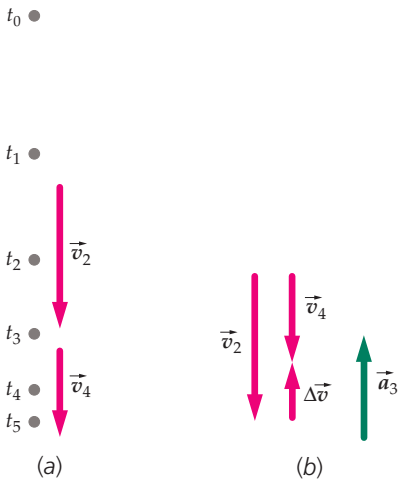


FIGURA 3.8 (*a*) Diagrama del movimiento del frenado de una saltadora de bungee cuando llega al suelo. Los puntos se han dibujado a instantes de tiempo consecutivos. (*b*) Dibujamos los vectores $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_4$ en el mismo punto y determinamos $\Delta\vec{v}$ como el vector que une el extremo de $\vec{v}_2$ con el punto que alcanza $\vec{v}_4$ de modo que $\vec{v}_2 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_4$. La aceleración $\vec{a}_3$ va en la misma dirección y sentido que $\Delta\vec{v}$.

mueve, mayor es la distancia que recorre en instantes de tiempo sucesivos y, por lo tanto, mayor es la distancia entre los correspondientes puntos de la figura. Numeramos los puntos correlativamente, empezando con el cero. En el instante t_0 la saltadora está en el punto 0, en el instante t_1 en el punto 1 y así sucesivamente. Para determinar la dirección de la aceleración en el instante t_3, dibujamos los vectores que representan la velocidad de la saltadora en los instantes t_2 y t_4. La aceleración media en el intervalo entre t_2 y t_4 es $\Delta\vec{v}/\Delta t$, donde $\Delta\vec{v} = \vec{v}_4 - \vec{v}_2$ y $\Delta t = t_4 - t_2$. Usamos estas expresiones para estimar la aceleración de la saltadora en el instante de tiempo t_3, es decir, como a_3 y $\Delta\vec{v}$ van en la misma dirección, determinando la dirección de Δv averiguamos también la dirección de $\vec{a}_3$. La dirección de $\Delta\vec{v}$ se obtiene usando la relación $\vec{v}_2 + \Delta\vec{v} = \vec{v}_4$ y dibujando el correspondiente diagrama de suma de vectores (figura 3.8*b*). Como la saltadora se mueve más rápido en el instante t_2 que en el instante t_4 (los puntos están más separados), la longitud de $\vec{v}_2$ es superior a la de $\vec{v}_4$. A partir de la figura podemos ver que $\Delta\vec{v}$ y, por lo tanto, la dirección de $\vec{a}_3$ está dirigida hacia arriba.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.1

La figura 3.9 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo t_6, cuando se halla momentáneamente en reposo en el punto más bajo de su descenso. En la parte de su ascenso mostrada en el esquema, la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (*a*) en el instante t_6 y (*b*) en el instante t_9.

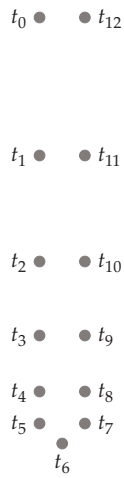


FIGURA 3.9 Los puntos que representan el ascenso de la saltadora se dibujan a la derecha de aquellos que representan su descenso con el objetivo de que no se superpongan. Sin embargo, el movimiento de la saltadora está dirigido en la misma dirección aunque con sentido contrario.

Ejemplo 3.5 La bala humana *Póngalo en su contexto*

Un circo patrocinado por su universidad le pide sustituir a un actor que está enfermo. El trabajo consistiría en ser disparado desde un cañón. Usted acepta el reto encantado. El tubo del cañón se inclina un ángulo de 60º respecto al eje horizontal. Su profesor de física general le ofrece un punto extra en la nota final si usted es capaz de estimar correctamente la dirección de su aceleración durante el ascenso mediante un diagrama de movimiento.

PLANTEAMIENTO Durante el ascenso, usted viaja a lo largo de una trayectoria curva con velocidad decreciente. Utilice $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ para estimar la dirección de su aceleración. Para estimar la dirección de $\Delta\vec{v}$ trace el diagrama de movimiento y entonces dibuje la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$.

SOLUCIÓN

1. Dibujamos el diagrama del movimiento para la etapa ascendente del vuelo (figura 3.10*a*). Como la velocidad decrece conforme usted asciende, el espacio entre puntos consecutivos del diagrama también decrece conforme usted asciende:
2. Elija un punto del diagrama del movimiento y dibuje el vector velocidad sobre el diagrama para los puntos anterior y posterior. Los vectores deben ser tangentes a la trayectoria.

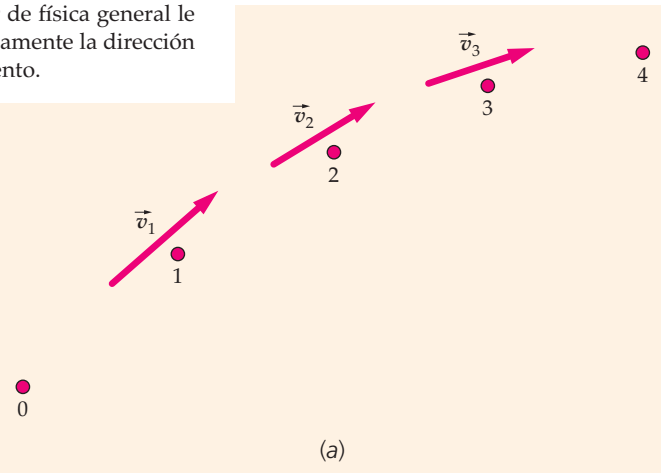
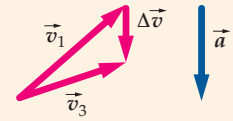


FIGURA 3.10

3. Trace el diagrama para la suma vectorial (figura 3.10*b*) de la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$. Comience dibujando los dos vectores velocidad aplicados sobre el mismo punto. Esos vectores tienen el mismo módulo y dirección que los vectores dibujados en el apartado 2. Finalmente, dibuje el vector $\Delta\vec{v}$ desde el extremo de $\vec{v}_i$ hasta el de $\vec{v}_f$.
4. Dibuje el vector aceleración estimado en la misma dirección que $\Delta\vec{v}$, pero sin el mismo módulo ($\vec{a} \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$).

COMPROBACIÓN La componente vertical hacia arriba de la velocidad decrece durante el ascenso, de forma que cabría esperar que $\Delta\vec{v}$ tuviera una componente vertical hacia abajo. En el paso 3 se comprueba este hecho.

OBSERVACIÓN Determinar la dirección de la aceleración utilizando un diagrama de movimiento no es un método totalmente preciso. Por lo tanto, el resultado debe entenderse como una estimación de la dirección de la aceleración.



(*b*)

FIGURA 3.10 *(continuación)*

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 3.2

Utilice un diagrama del movimiento para estimar la dirección de la aceleración del ejemplo 3.5 durante la parte descendente del movimiento.

3.2 CASO PARTICULAR 1: MOVIMIENTO DE PROYECTILES

En el béisbol, en una carrera o en un tiro de falta, la pelota sigue una trayectoria curva a través del aire. Este tipo de movimiento denomina **movimiento de proyectiles** y ocurre cuando el cuerpo (proyectil) se lanza al aire y se mueve libremente. El proyectil puede ser una pelota, un dardo, un chorro de agua que emana de una fuente o incluso un cuerpo humano durante un salto largo. Si podemos despreciar la fricción del aire decimos que el proyectil está en caída libre. La aceleración de los cuerpos en caída libre, cerca de la superficie terrestre, es la aceleración debida a la gravedad.

La figura 3.11 muestra el lanzamiento de una partícula con velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ_0 con el eje horizontal. Sea (x_0, y_0) el punto de lanzamiento, siendo y positiva hacia arriba y x positiva hacia la derecha. Las componentes de la velocidad inicial $\vec{v}_0$ son

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad 3.13a$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \qquad 3.13b$$

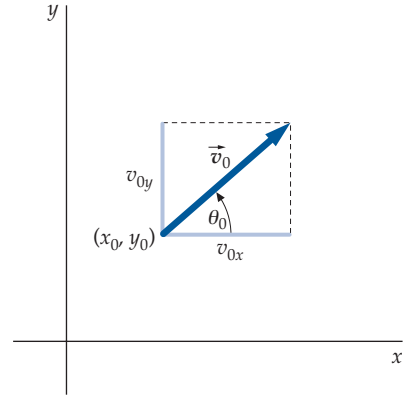


FIGURA 3.11 Las componentes de $\vec{v}_0$ son $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$, donde θ_0 es el ángulo que forma $\vec{v}_0$ con el eje x.

En ausencia de la resistencia del aire, la aceleración es la de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo:

$$a_x = 0 \qquad 3.14a$$

y

$$a_y = -g \qquad 3.14b$$

Como la aceleración es constante, podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas estudiadas en el capítulo 2. La componente x de la velocidad $\vec{v}$ es constante, ya que no existe aceleración horizontal:

$$v_x = v_{0x} \qquad 3.15a$$

La componente y varía con el tiempo según $v_y = v_{0y} + a_y t$ (ecuación 2.12), y siendo $a_y = -g$:

$$v_y = v_{0y} - gt \qquad 3.15b$$

Obsérvese que v_x no depende de v_y y viceversa. Las componentes horizontal y vertical del movimiento de proyectiles son independientes. Esto puede demostrarse dejando caer una bola desde cierta altura y lanzando horizontalmente desde la

misma altura una segunda bola al mismo tiempo. Ambas bolas chocan contra el suelo simultáneamente (ver figura 3.12).

Los desplazamientos x e y vienen dados por (véase ecuación 2.14.)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad 3.16a$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad 3.16b$$

La notación $x(t)$ e $y(t)$ destaca simplemente que x e y son funciones del tiempo. Si se conoce la componente y de la velocidad inicial, la ecuación 3.16*b* nos permite determinar el instante t en que la partícula se encuentra a la altura y. La posición horizontal en ese mismo tiempo puede calcularse a partir de la ecuación 3.16*a*. (La forma vectorial de las ecuaciones 3.14 a 3.16 se verá justo antes del ejemplo 3.10.)

La ecuación general para la trayectoria $y(x)$ puede obtenerse a partir de las ecuaciones 3.16 eliminando la variable t entre ambas. Escogiendo $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$, se obtiene $t = x/v_{0x}$ de la ecuación 3.16*a*. Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.16*b*, se obtiene

$$y(x) = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

Teniendo en cuenta los valores de las componentes de las velocidades, resulta

$$y(x) = (\operatorname{tg}\theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2 \qquad 3.17$$

TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL

para la trayectoria de un proyectil. Esta ecuación es de la forma $y = ax + bx^2$, que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. La figura 3.13 muestra la trayectoria de un proyectil con el vector velocidad y sus componentes indicadas en diversos puntos. Esta trayectoria se refiere a un proyectil que choca con el suelo en el punto P. La distancia horizontal $|\Delta x|$ entre el punto de lanzamiento y el de impacto es el alcance R.

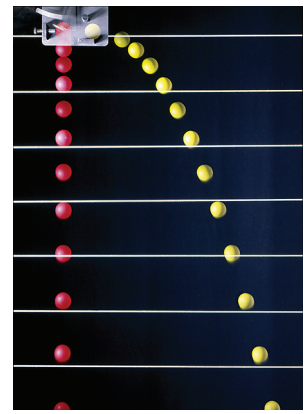


FIGURA 3.12 La bola roja parte del reposo en el instante en que la bola amarilla sale rodando por la parte superior de la mesa. Las posiciones de las dos bolas se muestran en intervalos de tiempo idénticos. El movimiento vertical de la bola amarilla es idéntico al de la bola roja. De esta manera se comprueba que los movimientos horizontal y vertical de la bola amarilla son independientes entre sí. *(Richard Megna/Fundamental Photographs.)*

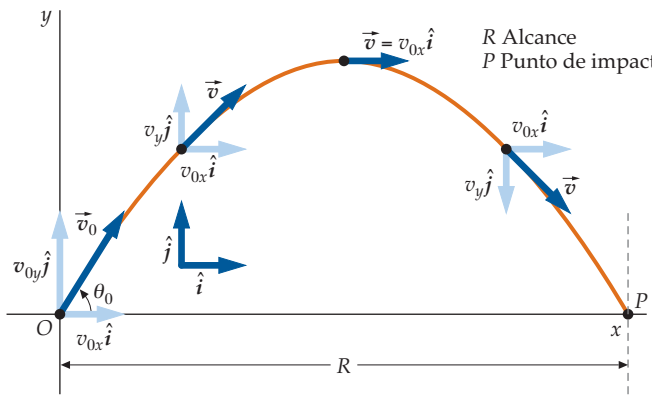


FIGURA 3.13 Trayectoria de un proyectil, en donde se indican los vectores velocidad en diferentes instantes de tiempo.

> ! No es correcto afirmar que la velocidad (en sentido vectorial) de un proyectil es cero cuando éste alcanza el punto más alto de su trayectoria. En el punto más alto v_y es cero, pero el proyectil puede seguir en movimiento horizontal.

Ejemplo 3.6 Un birrete en el aire

Un estudiante de física lanza un birrete al aire con una velocidad inicial de 24,5 m/s, formando un ángulo de 36,9° con la horizontal. Posteriormente, otro estudiante lo coge. Determinar (*a*) el tiempo total que el birrete está en el aire y (*b*) la distancia total horizontal recorrida.

PLANTEAMIENTO Elegimos la posición inicial del birrete como origen, de modo que $x_0 = y_0 = 0$. Suponemos que el otro estudiante lo coge a la misma altura. El tiempo total que el birrete está en el aire se determina considerando $y(t) = 0$ en $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ (ecuación 3.16*b*). Este resultado puede utilizarse en $x(t) = x_0 + v_{0x}t$ (ecuación 3.16*a*) para determinar la distancia total recorrida.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Sustituimos $y = 0$ en la ecuación 3.16*b*:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$0 = t(v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt)$$

2. Existen dos soluciones para t:

$$t_1 = 0 \text{ (instante inicial)}$$
$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g}$$

3. Utilizamos la trigonometría para relacionar v_{0y} con v_0 y θ_0 (ver figura 3.11):

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$$

4. Sustituimos este resultado en v_{0y} del paso 2 para determinar el tiempo total t_2:

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{g} = \frac{2(24{,}5\ \text{m/s})\operatorname{sen}36{,}9^\circ}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \boxed{3{,}00\ \text{s}}$$

(*b*) Utilizamos este valor del tiempo para calcular la distancia total horizontal recorrida:

$$x = v_{0x}t_2 = (v_0\cos\theta_0)t_2 = (24{,}5\ \text{m/s})\cos 36{,}9^\circ(3{,}00\ \text{s}) = \boxed{58{,}8\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN Si el birrete viajara con velocidad horizontal constante de 24,5 m/s durante 3 segundos habría recorrido una distancia de 73,5 m. Como fue lanzado con un ángulo, la componente horizontal de su velocidad sería inferior a 24,5 m/s de forma que cabría esperar que la distancia horizontal recorrida fuese menor que 73,5 m. El resultado de 58,8 m del apartado (*b*) confirma este razonamiento.

OBSERVACIÓN El tiempo que el birrete está en el aire es el mismo que obtuvimos en el ejemplo 2.13, en donde el birrete fue lanzado verticalmente hacia arriba con $v_0 = 14{,}7$ m/s. La figura 3.14 muestra la altura y en función de t para el birrete. Esta curva es idéntica a la representada en la figura 2.20*a* (ejemplo 2.13) porque ambos birretes están sometidos a la misma aceleración y velocidad vertical. La figura 3.14 puede reinterpretarse como un gráfico de y en función de x si su escala de tiempo se convierte en una escala de longitud. Para ello basta multiplicar los valores del tiempo por 19,6 m/s, ya que el birrete se desplaza horizontalmente a (24,5 m/s) cos 36,9° = 19,6 m/s. La curva y en función de x es una parábola.

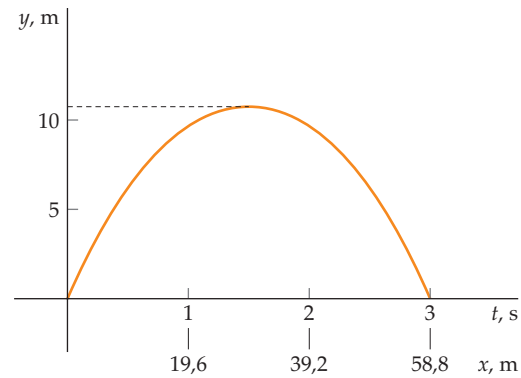


FIGURA 3.14 Gráfico de y en función de t y de y en función de x.

Ejemplo 3.7 La caída de un paquete de aprovisionamiento

Un helicóptero deja caer un paquete con suministros a las víctimas de una inundación que se hallan en una balsa. Cuando el paquete se lanza, el helicóptero se encuentra a 100 m por encima de la balsa, volando a 25 m/s y formando un ángulo de 36,9° sobre la horizontal. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo estará el paquete en el aire? (*b*) ¿Dónde caerá el paquete? (*c*) Si el helicóptero vuela a velocidad constante, ¿cuál será su posición en el instante en que el paquete llega al suelo?

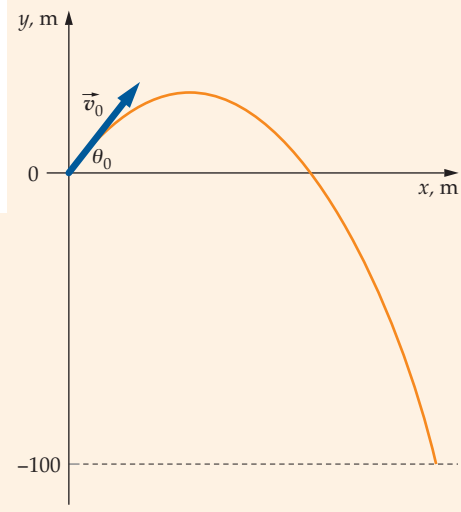


FIGURA 3.15 La parábola se cruza con la recta $y = -100$ m dos veces, pero sólo en una de ellas el tiempo es positivo.

PLANTEAMIENTO La distancia horizontal recorrida por el paquete viene dada por la ecuación 3.16*a*, en donde t es el tiempo que el paquete se encuentra en el aire. El valor de t puede determinarse a partir de la ecuación 3.16*b*. Escoger el origen directamente por debajo del helicóptero cuando el paquete se lanza. La velocidad inicial del paquete es la velocidad inicial del helicóptero.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La trayectoria del paquete durante el tiempo que está en el aire se muestra en la figura 3.15:

2. Para determinar el tiempo que el paquete está en el aire escribimos la ecuación $y(t)$, y luego sustituimos por $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$
$$y = 0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

3. La solución de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ viene dada por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Utilizando esta expresión, resuelve la ecuación del apartado 2 para determinar t:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

por lo tanto,

$$0 = \tfrac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y$$

y

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy}}{g}$$

4. Calculamos t cuando $y(t) = -100$ m. Para ello, primero se calcula $v_{0y} = -100$ m, y luego usamos el valor de v_{0y} para calcular t.

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 = (25{,}0\ \text{m/s})\operatorname{sen}36{,}9° = 15{,}0\ \text{m/s}$$

por lo tanto,

$$t = \frac{15{,}0\ \text{m/s} \pm \sqrt{(15{,}0\ \text{m/s})^2 - 2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(-100\,\text{m})}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}$$

por lo tanto,

$t = -3{,}24$ s o $t = 6{,}30$ s

Dado que el paquete se suelta cuando $t = 0$, el tiempo que transcurre hasta el impacto no puede ser negativo. Por lo tanto:

$$t = \boxed{6{,}30\ \text{s}}$$

(*b*) 1. En el momento del impacto, el paquete ha recorrido una distancia horizontal x, donde x es la velocidad horizontal por el tiempo de vuelo. Primero hallamos la velocidad horizontal:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 = (25{,}0\ \text{m/s})\cos 36{,}9° = 20{,}0\ \text{m/s}$$

2. Luego sustituimos v_{0x} en $x = x_0 + v_{0x}t$ (ecuación 3.16*a*) y hallamos x.

$$x = v_{0x}t = (20{,}0\ \text{m/s})(6{,}30\ \text{s}) = \boxed{126\ \text{m}}$$

(*c*) Las coordenadas de la posición del helicóptero en el momento del impacto del paquete con el agua son:

$$x_h = v_{0x}t = (20{,}0\ \text{m/s})(6{,}30\ \text{s}) = 126\ \text{m}$$
$$y_h = y_{h0} + v_{h0}t = 0 + (15{,}0\ \text{m/s})(6{,}30\ \text{s}) = 94{,}4\ \text{m}$$

En el momento del impacto el helicóptero está

$$\boxed{194\ \text{m exactamente encima del paquete}}.$$

COMPROBACIÓN El helicóptero se encuentra exactamente encima del paquete cuando éste llega al agua. Esto es debido a que la componente horizontal de las velocidades del paquete y el helicóptero son iguales en el momento del lanzamiento del paquete y, además, permanecen constantes durante sus respectivos vuelos.

OBSERVACIÓN El tiempo positivo es el apropiado, ya que corresponde a un tiempo posterior al lanzamiento del paquete (que tiene lugar para $t = 0$). La solución negativa del tiempo corresponde al instante en que el paquete se encontraría a $y = -100$ m si su movimiento hubiera comenzado con anterioridad, como indica la figura 3.16.

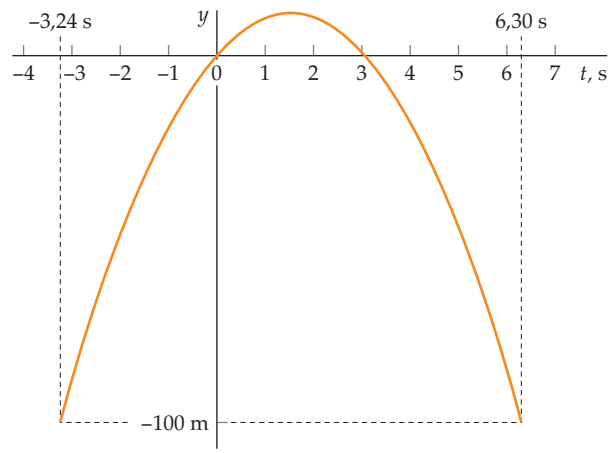


FIGURA 3.16

Ejemplo 3.8 Lanzamiento de suministros *Inténtelo usted mismo*

En el ejemplo 3.7, (*a*) determinar el tiempo t_1 que tarda el paquete en alcanzar su máxima altura h, (*b*) calcular esta altura máxima h y (*c*) determinar el tiempo t_2 transcurrido desde que el paquete alcanza su altura máxima hasta que llega al suelo.

PLANTEAMIENTO El tiempo t_1 es el tiempo en el cual la componente vertical de la velocidad es cero. Utilizando $v_y(t) = v_{0y} - gt$ (ecuación 3.15*b*) hallamos t_1.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
(*a*) 1. Expresar $v_y(t)$ para el paquete.	$v_y(t) = v_{0y} - gt$
2. Hacer $v_y(t_1) = 0$ y despejar t_1.	$t_1 =$ 1,53 s
(*b*) 1. Determinar $v_{y\,\mathrm{m}}$ durante el tiempo en que el paquete se mueve hacia arriba.	$v_{y\,\mathrm{m}} = 7{,}505$ m/s
2. Utilizar $v_{y\,\mathrm{m}}$ para determinar la distancia recorrida hacia arriba. A continuación, calcular h.	$\Delta y = 11{,}48$ m, por lo tanto, $h =$ 111 m
(*c*) Hallar el tiempo transcurrido mientras el paquete cae la distancia h.	$t_2 =$ 4,77 s

COMPROBACIÓN De acuerdo con el ejemplo 3.7, $t_1 + t_2 = 6{,}30$ s. Así mismo, observe que t_1 es menor que t_2. Esto era de esperar pues el paquete asciende una distancia de 12 m mientras que cae a una distancia de 111 m.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.2 Resolver el apartado (*b*) del ejemplo 3.8 usando la expresión para $y(t)$ de la ecuación 3.21*b* en vez de calcular $v_{y\,\mathrm{m}}$.

ALCANCE HORIZONTAL DE UN PROYECTIL

El alcance R de un proyectil se puede expresar en función de su velocidad inicial y del ángulo de lanzamiento con respecto al eje horizontal. Como en los ejemplos anteriores, el alcance se obtiene multiplicando la componente x de la velocidad por el tiempo total que el proyectil está en el aire. El tiempo total de vuelo T se obtiene haciendo $y = 0$ y $t = T$ en $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ (ecuación 3.16*b*).

$$0 = v_{0y}T - \tfrac{1}{2}gT^2 \qquad T > 0$$

Dividiendo por T, nos da

$$v_{0y} - \tfrac{1}{2}gT = 0$$

El tiempo de vuelo del proyectil es entonces

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0$$

Para calcular el alcance horizontal R, sustituimos T en lugar de t en $x(t) = v_{0x}t$ (ecuación 3.16*a*) para obtener

$$R = v_{0x}T = (v_0\cos\theta_0)\left(\frac{2v_0}{g}\operatorname{sen}\theta_0\right) = \frac{2v_0^2}{g}\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$$

Esta expresión puede simplificarse si consideramos la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Entonces,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta_0 \qquad 3.18$$

ALCANCE HORIZONTAL DE UN PROYECTIL

PROBLEMA PRÁCTICO 3.3

Utilizar la ecuación 3.18 para verificar la respuesta del apartado (*b*) del ejemplo 3.6.

La ecuación 3.18 es útil para determinar el alcance de proyectiles con elevaciones inicial y final iguales. Es importante destacar que esta ecuación muestra cómo el alcance depende de θ. Como el valor máximo de sen 2θ es 1, cuando $2\theta = 90°$, o sea, $\theta = 45°$, el alcance del proyectil es máximo cuando $\theta = 45°$. La figura 3.17 muestra una serie de gráficos de las distancias verticales en función de las distancias horizontales para proyectiles de velocidad inicial 24,5 m/s y varios ángulos iniciales distintos. Los ángulos representados son 45°, que es el de alcance máximo, y pares de ángulos que difieren el mismo número de grados por encima y por debajo de 45°. Obsérvese que estos pares de ángulos tienen el mismo alcance. La curva verde tiene un ángulo inicial de 36,9° (0,64 rad), como en el ejemplo 3.6.

En muchas aplicaciones prácticas, las cotas de altura inicial y final pueden no ser iguales y son importantes otras consideraciones. Por ejemplo, en el lanzamiento de peso, la bola termina su recorrido cuando choca contra el suelo, pero ha sido proyectada desde una altura inicial de unos 2 m sobre el suelo. Esto hace que el alcance sea máximo para un ángulo algo inferior a 45°, como se indica en la figura 3.18. Los estudios realizados de los mejores lanzadores de peso muestran que el alcance máximo tiene lugar para un ángulo inicial de unos 42°.

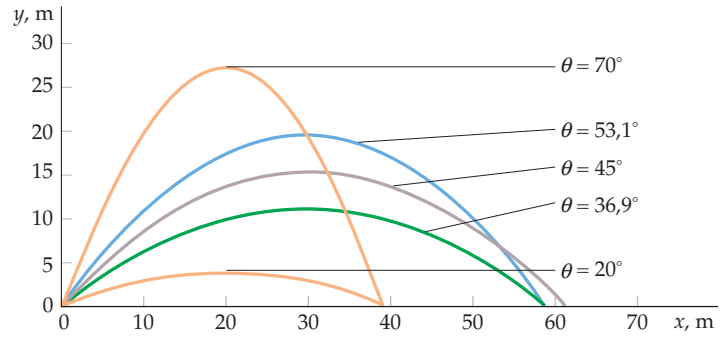


FIGURA 3.17 El módulo de la velocidad inicial es el mismo en cada trayectoria.

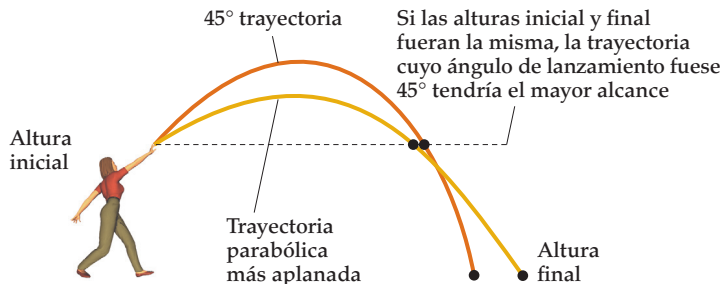


FIGURA 3.18 Si un proyectil cae al suelo a una altura inferior a la de lanzamiento, el alcance máximo se logra bajo un ángulo de tiro algo menor de 45°.

Ejemplo 3.9 A la caza del ladrón

Un policía persigue a un consumado ladrón de joyas a través de los tejados de la ciudad. Ambos están corriendo a la velocidad de 5 m/s cuando llegan a un espacio vacío entre dos edificios que tiene 4 m de anchura y un desnivel de 3 m, tal como muestra la figura 3.19. El ladrón, que tiene algunos conocimientos de física, salta a 5 m/s con una inclinación de 45° y salva el hueco con facilidad. El policía nunca estudió física y piensa que lo mejor sería saltar con el máximo de velocidad horizontal, de modo que salta a 5 m/s horizontalmente. (*a*) ¿Conseguirá salvar el obstáculo? (*b*) ¿A qué distancia del borde del segundo edificio llegó el ladrón?

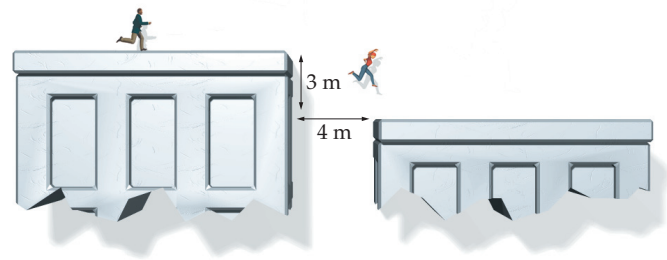


FIGURA 3.19

PLANTEAMIENTO El tiempo en el aire durante el salto depende sólo del movimiento vertical. Elegir como origen el punto de lanzamiento con la dirección positiva hacia arriba, para poder aplicar las ecuaciones 3.16. Utilizar la ecuación 3.16*b* para $y(t)$ y deducir de ella el tiempo para $y = -3$ m para $\theta_0 = 0$ y de nuevo para $\theta_0 = 45{,}0°$. El valor de x correspondiente a este tiempo es la distancia horizontal recorrida.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir $y(t)$ para el policía y calcular t cuando $y = -3$ m:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 - 3{,}00\text{ m} = 0 + 0 - \tfrac{1}{2}(9{,}81\text{ m/s}^2)t^2$$

$$t = 0{,}782\text{ s}$$

2. Determinar la distancia horizontal recorrida durante este tiempo:

$$x = x_0 + v_{x0}t$$

$$x = 0 + (5{,}00\text{ m/s})(0{,}782\text{ s})$$

$$x = \boxed{3{,}91\text{ m}}$$

Como esta distancia es menor de 4 m, el policía no puede cruzar el espacio vacío entre los edificios.

(*b*) 1. Escribir $y(t)$ para el ladrón y sustituir $y = -3\text{m}$. $y(t)$ es una ecuación de segundo grado con dos soluciones, pero sólo una es aceptable:

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 - 3{,}00\text{ m} = 0 + (5{,}00\text{ m/s})\,\text{sen}\,45{,}0° - \tfrac{1}{2}(9{,}81\text{ m/s}^2)t^2$$

$t = -0{,}500$ s o $t = 1{,}22$ s

Obviamente, el ladrón alcanza el techo después de saltar, de modo que $t = 1{,}22$ s

2. Calcular la distancia horizontal correspondiente al valor positivo de t:

$$x = x_0 + v_{0x}t = 0 + (5{,}00\text{ m/s})\cos 45°\,(1{,}22\text{ s}) = 4{,}31\text{ m}$$

3. Restar 4 m de esta distancia:

$$4{,}31\text{ m} - 4{,}00\text{ m} = \boxed{0{,}31\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La componente horizontal de la velocidad del policía se mantiene en los 5 m/s durante el salto. De esta forma, el policía recorre los 4 m de distancia hasta el próximo edificio en 4 m/(5 m/s) = 0,8 s. Como en el apartado (*a*), el resultado es inferior a 0,8 s, sabemos que el policía cae en el hueco antes de llegar el segundo edificio, lo que está de acuerdo con el resultado del paso 2 del apartado (*a*).

OBSERVACIÓN Considerando al policía como una partícula, hemos encontrado que se hallaba ligeramente por debajo de la azotea en el momento del impacto. Sin embargo, no podemos concluir que no completó el salto porque el policía no es una partícula. Posiblemente lo lograra, estirando el pie.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES EN FORMA VECTORIAL

Sabemos que en el movimiento de proyectiles $a_x = 0$ y $a_y = -g$ (ecuaciones 3.14*a* y 3.14*b*), donde la dirección $+y$ se dirige hacia arriba. Para expresar esas ecuaciones en forma vectorial, multiplicamos ambos lados de la ecuación por los vectores unitarios apropiados y luego sumamos las ecuaciones resultantes. Esto es, $a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} = 0\hat{\boldsymbol{\imath}}$ más $a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ dan

$$a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}} \quad \text{o} \quad \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{g}} \qquad 3.14c$$

donde $\vec{\boldsymbol{g}}$ es el vector aceleración correspondiente a la caída libre. En la superficie de la Tierra el valor de $\vec{\boldsymbol{g}}$ es $g = 9{,}81\text{ m/s}^2$.

Combinando las ecuaciones $v_x = v_{0x}$ y $v_y = v_{0y} - gt$ de forma análoga, tenemos

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0 + \vec{\boldsymbol{g}}t \;(\text{o } \Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{g}}t) \qquad 3.15c$$

donde $\vec{\boldsymbol{v}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{\boldsymbol{v}}_0 = v_{0x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{0y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, y $\vec{\boldsymbol{g}} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Repitiendo el proceso para las ecuaciones $x(t) = x_0 + v_{0x}t$ e $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$, se obtiene

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}_0 + \vec{\boldsymbol{v}}_0t + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{g}}t^2 \quad (\text{o } \Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}_0t + \tfrac{1}{2}\vec{\boldsymbol{g}}t^2) \qquad 3.16c$$

donde $\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\vec{\boldsymbol{r}}_0 = x_0\hat{\boldsymbol{\imath}} + y_0\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Para determinados problemas conviene utilizar las formas vectoriales de las ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 3.15*c* y 3.16*c*). Éste es el caso del ejemplo que sigue.

Ejemplo 3.10 El guardabosques y el mono

Un guardabosques con una cerbatana intenta disparar un dardo tranquilizante a un mono que cuelga de una rama (figura 3.20). El guardabosques apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá una trayectoria parabólica y pasará, por lo tanto, por debajo del mono. Sin embargo, éste, viendo salir el dardo de la cerbatana, se suelta de la rama y cae del árbol, esperando evitar el dardo. (*a*) Demostrar que el mono será alcanzado independientemente de cuál sea la velocidad inicial del dardo, con tal de que ésta sea lo suficientemente grande para que el dardo recorra la distancia horizontal que hay hasta el árbol antes de dar contra el suelo. Suponer que el tiempo de reacción del mono es despreciable. (*b*) Sea $\vec{\boldsymbol{v}}_{d0}$ la velocidad del dardo al salir de la cerbatana. Determine la velocidad del dardo relativa al mono para un tiempo arbitrario t durante el vuelo del dardo.

PLANTEAMIENTO En este ejemplo tanto el mono como el dardo describen un movimiento de proyectil. Para mostrar que el dardo alcanza al mono, debemos demostrar que en un cierto tiempo t, el dardo y el mono tiene las mismas coordenadas, independientemente de la

velocidad inicial del dardo. Para ello tendremos que aplicar las ecuaciones 3.16*c* al mono y al dardo. Para la parte (*b*), podemos emplear la ecuación 3.15*c*, sin olvidarnos de los sistemas de referencia relativos.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Se aplica la ecuación 3.16*c* al mono en el tiempo *t*: $\Delta\vec{r}_m = \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
(La velocidad inicial del mono es nula.)

2. Se aplica la ecuación 3.16*c* al dardo en el tiempo *t*: $\Delta\vec{r}_d = \vec{v}_{d0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$
donde $\vec{v}_{d0}$ es la velocidad inicial del dardo cuando sale de la cerbatana.

3. La figura 3.20 refleja un esquema del mono, el dardo y la cerbatana. Se muestra el dardo y el mono en sus posiciones en el instante inicial y en el tiempo *t*. Los vectores muestran los diferentes términos de los pasos 1 y 2:

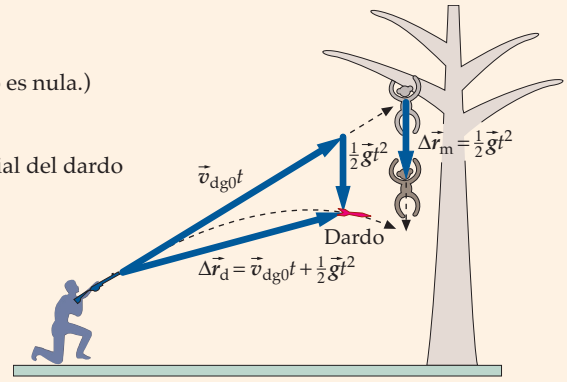


FIGURA 3.20

4. Obsérvese que en el tiempo *t* el dardo y el mono están a una distancia $\frac{1}{2}gt^2$ por debajo de la línea de mira de la cerbatana: El dardo impactará con el mono cuando el dardo alcance la línea de caída del mono.

(*b*) 1. La velocidad del dardo relativa al mono iguala la velocidad del dardo relativa a la cerbatana más la velocidad del arma relativa al animal: $\vec{v}_{dm} = \vec{v}_{dg} + \vec{v}_{gm}$

2. La velocidad de la cerbatana relativa al mono es igual a la velocidad del animal relativa al arma cambiada de signo: $\vec{v}_{dm} = \vec{v}_{dg} - \vec{v}_{mg}$

3. Con el uso de la ecuación 3.15*c* $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ se consigue expresar la velocidad del dardo relativa a la cerbatana y la velocidad del animal relativa al arma: $\vec{v}_{dg} = \vec{v}_{dg0} + \vec{g}t$, $\vec{v}_{mg} = \vec{g}t$

4. La sustitución de estas expresiones en el paso 2 del apartado *b* lleva a: $\vec{v}_{dm} = (\vec{v}_{dg0} + \vec{g}t) - (\vec{g}t) = \boxed{\vec{v}_{dg0}}$

COMPROBACIÓN Los pasos 4 de los apartados (*a*) y (*b*) concuerdan entre sí. Concuerdan con el hecho de que el dardo impactará sobre el mono siempre y cuando el dardo alcance la línea de caída del mono antes que éste llegue al suelo.

OBSERVACIÓN Con respecto al mono, el dardo se mueve con velocidad constante $\vec{v}_{d0}$ siguiendo una línea recta. El dardo impacta en el animal en el instante de tiempo $t = L/v_{d0}$, donde *L* es la distancia desde la boca del arma hasta la posición inicial del mono.

En una experiencia magistral, un blanco se cuelga de un electroimán. Cuando el dardo sale del arma, el circuito que controla el electroimán se interrumpe y el blanco cae. La velocidad inicial del dardo se puede variar de modo que para valores de v_{dg0} grandes el dardo alcanza al blanco muy cerca de su posición inicial, mientras que si v_{dg0} tiene un valor pequeño, el dardo impacta con el blanco poco antes de que éste alcance el suelo.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.4 Un jugador de hockey sobre hielo golpea el disco de forma que éste no impacta en la red sino que impacta sobre la parte superior de la portería en la valla de Plexiglass de 2,80 m de altura que limita la pista. El tiempo de vuelo del disco cuando alcanza la valla es $t_1 = 0{,}650$ s, siendo $x_1 = 12{,}0$ m la distancia horizontal desde el punto donde el jugador golpea el disco. (*a*) Calcular la velocidad y la dirección inicial del disco. (*b*) ¿Cuándo alcanza el disco su altura máxima? (*c*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el disco?

3.3 CASO PARTICULAR 2: MOVIMIENTO CIRCULAR

La figura 3.21 muestra una masa sujeta a una cuerda, de modo que forma un péndulo que oscila en el plano vertical. La trayectoria que sigue la masa en su continua oscilación corresponde a una fracción de una trayectoria circular. El movimiento a lo largo de una trayectoria circular, o de una parte de ella, se denomina **movimiento circular**.

FIGURA 3.21 La lenteja de un péndulo oscila describiendo un arco circular centrado en el punto de soporte de la cuerda.

Ejemplo 3.11 El péndulo que oscila — *Conceptual*

Consideremos el movimiento de la masa del péndulo de la figura 3.21. Usando el diagrama del movimiento de la figura 3.21, determinar la dirección del vector aceleración cuando la masa está oscilando de izquierda a derecha, (*a*) en la porción descendente de su movimiento, (*b*) cuando pasa por el punto más bajo de su recorrido, y (*c*) en la porción ascendente de su recorrido.

PLANTEAMIENTO Cuando la masa desciende aumenta la velocidad y cambia su dirección. La aceleración está relacionada con el cambio de la velocidad mediante $\vec{a} \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$. La dirección de la aceleración en un punto puede estimarse dibujando el diagrama de adición de vectores para la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$ para determinar la dirección de $\Delta\vec{v}$ y, por lo tanto, la dirección del vector aceleración.

SOLUCIÓN

(a) 1. La figura 3.22*a* muestra la representación de una oscilación completa de izquierda a derecha de la masa del péndulo. La distancia entre los puntos es mayor en los puntos más bajos de la trayectoria, ya que en ellos la velocidad es mayor:

2. Para el punto en t_2, se determina la diferencia entre la velocidad en el punto inmediatamente anterior y en el punto inmediatamente posterior (los puntos en t_1 y t_3). Obsérvese que los vectores velocidad se dibujan tangentes a la trayectoria y que su longitud es proporcional a la velocidad (figura 3.22*a*):

3. Se representa la expresión gráfica de la relación $\vec{v}_i + \Delta\vec{v} = \vec{v}_f$ y el vector aceleración, ya que dado que $\vec{a} \approx \Delta\vec{v}/\Delta t$, $\vec{a}$ va en la misma dirección que $\Delta\vec{v}$:

(b) Se repiten los pasos 2 y 3 (figura 3.22*c*) para el punto en t_4:

(c) Se repiten los pasos 2 y 3 (figura 3.22*d*) para un punto en la porción ascendente de la trayectoria:

COMPROBACIÓN En el punto más bajo (en t_4) la componente horizontal de $\vec{v}$ es máxima, de forma que cabe esperar que la componente horizontal de $\vec{a}$ sea cero. En las proximidades del punto más bajo, la componente vertical de $\vec{v}$ es negativa justo antes de t_4 y es positiva justo después de t_4; así pues, la componente vertical de $\vec{v}$ es creciente en t_4. Esto implica que la componente vertical de $\vec{a}$ debería ser positiva en t_4. El vector aceleración de la figura 3.22*c* concuerda con estos razonamientos.

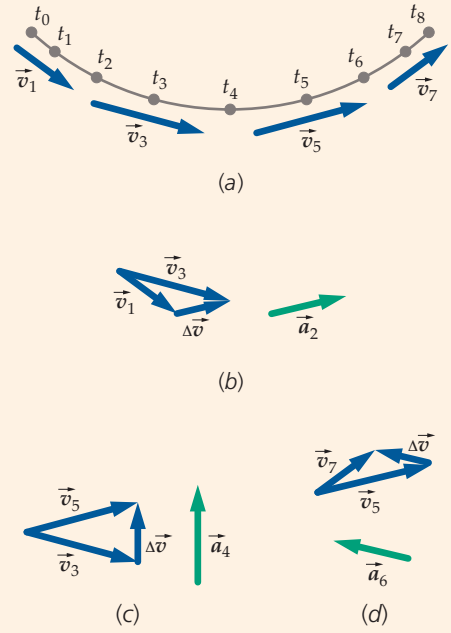


FIGURA 3.22

En el ejemplo 3.11 vimos que el vector aceleración se dirigía hacia arriba en el punto más bajo de la oscilación del péndulo (figura 3.23) apuntando hacia el punto P del centro del círculo. Allí donde el módulo de la velocidad sea creciente (parte descendente) el vector aceleración tendrá una componente a lo largo de la dirección del vector velocidad y otra componente en dirección a P. Allí donde el módulo de la velocidad sea decreciente, el vector aceleración tendrá una componente en la dirección opuesta al vector velocidad e igualmente otra componente en dirección al punto P.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular, la dirección que desde la partícula señala el centro de la trayectoria se denomina **dirección centrípeta** y la dirección del vector velocidad se llama **dirección tangencial**. En la figura 3.23 se ha visto que la aceleración en el punto más bajo de la trayectoria de la masa del péndulo va en la dirección centrípeta. En los restantes puntos de la trayectoria, la aceleración tiene una componente centrípeta y una componente tangencial.

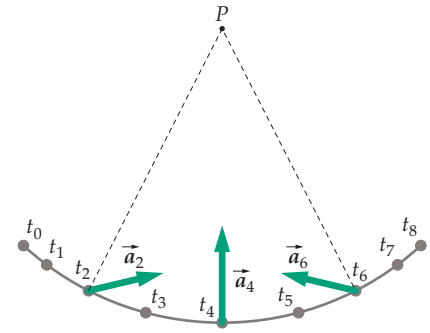


FIGURA 3.23

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

El movimiento en un círculo a velocidad escalar constante se denomina **movimiento circular uniforme**. El movimiento de una partícula es acelerado incluso cuando el módulo la velocidad en movimiento circular es constante. Usaremos el método del ejemplo 3.11 para determinar la dirección de la aceleración a fin de encontrar la expresión de la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo a velocidad constante. Los vectores posición y velocidad de una partícula que se está moviendo en un círculo a velocidad constante se muestran en la figura 3.24. El ángulo $\Delta\theta$ entre $\vec{v}(t)$ y $\vec{v}(t + \Delta t)$ es el mismo que entre $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$, ya que los vectores posición y velo-

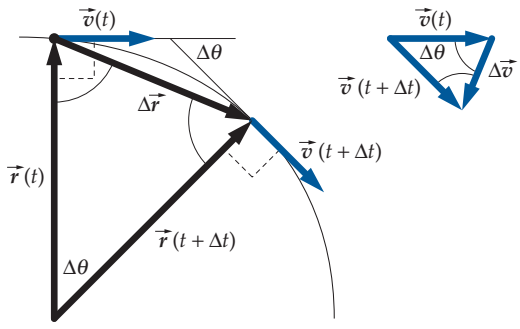


FIGURA 3.24

cidad deben girar el mismo ángulo para conservar su perpendicularidad mutua. Con los dos vectores velocidad y con $\Delta\vec{v}$ se forma un primer triángulo isósceles. El segundo triángulo isósceles se forma con los dos vectores posición y con $\Delta\vec{r}$.

Para encontrar la dirección del vector aceleración, examinamos el triángulo formado por los dos vectores velocidad y $\Delta\vec{v}$. La suma de los ángulos de un triángulo es 180° y los ángulos de la base de cualquier triángulo isósceles son iguales. En el límite en que Δt es muy pequeño, $\Delta\theta$ también es muy pequeño por lo que en este límite los dos ángulos de la base se aproximan a 90°. Esto significa que $\Delta\vec{v}$ es perpendicular a la velocidad. Si $\Delta\vec{v}$ se dibuja en la posición de la partícula señala en la dirección centrípeta.

Los dos triángulos son semejantes y las correspondientes longitues de figuras geométricamente similares son proporcionales. Entonces

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{r}$$

Multiplicando ambos lados por $|\Delta\vec{r}|\ /\Delta t$, se obtiene

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \qquad 3.19$$

En el límite cuando Δt es muy pequeño, el término $|\Delta\vec{r}|/\Delta t$ se parece cada vez más al módulo de la aceleración instantánea a, y el término $|\Delta\vec{r}|/\Delta t$ se parece a v, el módulo de la velocidad instantánea. Entonces, en el límite $\Delta t \to 0$, la ecuación 3.19 se transforma en $a = v^2/r$. El vector aceleración está en la dirección centrípeta, así $a_c = a$, donde a_c es la componente del vector aceleración en la dirección centrípeta.

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad 3.20$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA

La **aceleración centrípeta** es la componente del vector aceleración en la dirección centrípeta. Habitualmente, se describe el movimiento de una partícula en un círculo con velocidad constante a partir del tiempo T requerido para realizar una vuelta completa, magnitud que se denomina **periodo**. Durante un periodo, la partícula se mueve una distancia $2\pi r$ (donde r es el radio del círculo), por lo que su velocidad está relacionada con r y con T mediante la expresión

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad 3.21$$

Ejemplo 3.12 Movimiento de un satélite

Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra y cerca de la superficie de la Tierra. Si su aceleración es $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$, determinar (*a*) su velocidad escalar y (*b*) el tiempo que invierte en una revolución completa.

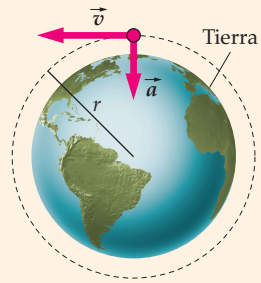


FIGURA 3.25 Satélite en órbita circular cercana a la Tierra.

PLANTEAMIENTO Como el satélite tiene su órbita cerca de la superficie de la Tierra, consideraremos que el radio de la órbita es el radio de la Tierra, $r = 6370$ km. Así, podremos utilizar las ecuaciones 3.20 y 3.21 para hallar la velocidad del satélite y el tiempo que emplea en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

SOLUCIÓN

(*a*) Se hace un dibujo de la órbita del satélite cerca de la superficie terrestre (figura 3.25). Se incluye los vectores velocidad y aceleración:

La aceleración centrípeta v^2/r se iguala a g, y se despeja v:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = g, \quad \text{luego}$$

$$v = \sqrt{rg} = \sqrt{(6370\ \text{km})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}$$

$$= \boxed{7{,}91\ \text{km/s} = 17\,700\ \text{mi/h} = 4{,}91\ \text{mi/s}}$$

(*b*) Para calcular el valor del periodo T se usa la ecuación 3.21:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6370\ \text{km})}{7{,}91\ \text{km/s}} = \boxed{5060\ \text{s} = 84{,}3\ \text{min}}$$

COMPROBACIÓN Se sabe que el período orbital de los satélites que orbitan justo por encima de la atmósfera de la Tierra es de unos 90 min, lo que concuerda bastante bien con el resultado de 84,3 min del apartado (*b*).

OBSERVACIÓN La órbita real de los satélites se sitúa unos pocos centenares de kilómetros por encima de la superficie terrestre, es decir, r excede ligeramente el radio terrestre (6370 km). En consecuencia, la aceleración centrípeta es algo inferior a 9,81 m/s^2 a causa del descenso de la fuerza gravitatoria con respecto a la distancia del centro de la Tierra. Las órbitas que están justamente por encima de la atmósfera terrestre se denominan *órbitas terrestres bajas*. Muchos satélites, incluyendo el telescopio *Hubble* y la Estación Espacial Internacional se hallan en órbitas terrestres bajas. En la web www.nasa.org se puede encontrar información sobre estos y otros satélites.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.5 Un coche va a 48 km/h y sigue una curva de 40 m de radio. ¿Cuál es su aceleración centrípeta?

ACELERACIÓN TANGENCIAL

Una partícula que se mueve en un círculo con velocidad variable tiene una componente de la aceleración tangente a la trayectoria, a_t, y una componente en la dirección del radio, la aceleración centrípeta, v^2/r. Al analizar, en general, el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, la trayectoria se puede dividir en arcos de circunferencia (figura 3.26). La partícula en cada uno de estos arcos de circunferencia tiene una aceleración centrípeta v^2/r dirigida hacia el centro de curvatura y, si varía la velocidad, tiene además una aceleración tangencial dada por

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad 3.22$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL

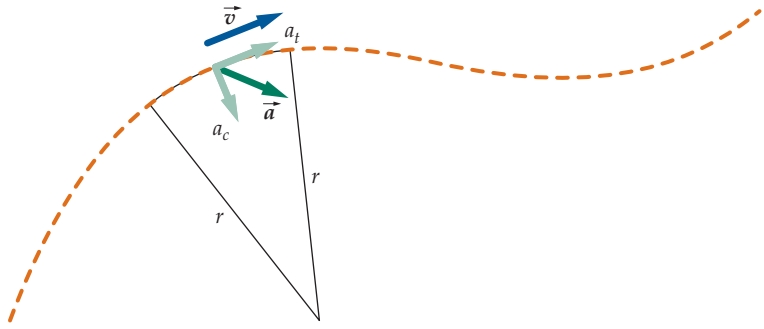


FIGURA 3.26 Componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curvilínea.

PROBLEMA PRÁCTICO 3.6
Imagínese que está en una vagoneta que se desplaza por el raíl de una montaña rusa y empieza a entrar en un bucle. En el instante en que ha recorrido una cuarta parte del bucle, la vagoneta va en dirección vertical a 20 m/s perdiendo velocidad a un ritmo de 5 m/s^2. El radio de curvatura del bucle es de 25 m. ¿Cuánto valen las componentes tangencial y centrípeta de la aceleración en ese instante?

Temas de actualidad en Física

GPS: cálculo de vectores mientras se desplaza

Si se desplaza en avión a otra ciudad y alquila un automóvil para llegar a su destino, usted podría alquilar, junto con su automóvil, un Sistema de Posicionamiento Global (GPS). Muchas personas utilizan navegadores GPS, pero no todas saben que esos ordenadores están constantemente calculando vectores.

Veinticuatro satélites GPS giran alrededor de la Tierra a una altitud de 17 700 m.[1] En la mayoría de los lugares son visibles por lo menos tres satélites (por encima del horizonte). En muchos casos son visibles incluso hasta cuatro satélites o más. Cada satélite emite una señal continua que incluye su identificación, información acerca de su órbita y un marcador temporal que tiene una precisión de una billonésima de segundo.[2] Los relojes internos de los satélites y las órbitas se verifican desde una estación terrestre que puede enviar la información corregida.

Los sistemas de navegación que utilizan los automóviles obtienen la información de los satélites GPS y la utilizan para calcular los vectores posición y velocidad del coche. A veces, calculan a ojo el vector desplazamiento del coche. *(Andrew Fox/Corbis.)*

Un receptor de GPS detecta las señales procedentes de los satélites. Cuando puede conseguir señales de tres o más satélites, el receptor es capaz de calcular a qué distancia está cada satélite mediante la diferencia entre los marcadores temporales de los satélites y el tiempo que registra el reloj interno del receptor en el momento en que el marcador es detectado. Como se conocen de antemano las órbitas de cada satélite, una vez conocida la distancia a cada satélite el receptor puede triangular su propia posición. Si se dispone de tres satélites, el cálculo puede proporcionar longitud y latitud. Si se dispone de cuatro satélites, se puede calcular también la altitud.

¿Pero dónde entran los vectores? El receptor no triangula su posición una sola vez; la posición resultante se reduciría a un solo punto. El receptor está constantemente detectando los satélites y calcula sus cambios de posición a partir de los cambios en los resultados de las triangulaciones. De esta forma, se calcula cualquier cambio en la distancia y dirección a partir de la posición anterior. Durante un breve intervalo de tiempo, el receptor toma diferentes lecturas, suficientes como para poder calcular la velocidad del trayecto. En definitiva, los cálculos del receptor proporcionan una velocidad en una dirección particular, es decir, un vector velocidad.

Pero este vector no se calcula para hacer bonito en la pantalla. A menudo no es posible una buena conexión entre el receptor y el satélite, como sucede cuando pasamos bajo un puente o a través de un túnel. Si el receptor no detecta una señal mínimamente intensa, trabajará a partir de la última posición conocida. Utilizará entonces la última velocidad y dirección para calcular a ojo. Hasta que no consiga una señal apropiada, el receptor supondrá que el movimiento continúa en la misma dirección y con la misma velocidad. Una vez consiga buena señal hará las correcciones oportunas.

Cuando comenzó a funcionar el GPS, la señal temporal de los satélites estaba codificada con ruido o *disponibilidad selectiva* que podía eliminarse únicamente con decodificadores fabricados con fines militares. Los receptores militares podían determinar rastros con una precisión de seis metros mientras que los civiles lo hacían con sólo 45 metros de precisión.[3] La codificación fue eliminada en el año 2000. En teoría, un GPS con buenas señales debería ser capaz de darnos una posición con una precisión inferior al grosor de un dedo[4] e igualmente darnos la dirección y velocidad con la misma precisión; y todo esto a una distancia de 17 700 metros.

[1] El número real de satélites operativos va cambiando. Hay más de 24 satélites, por si acaso falla alguno. "Block II Satellite Information." *ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt* United States Naval Observatory. March 2006.

[2] "GPS: The Role of Atomic Clocks—It Started with Basic Research." *http://www.beyonddiscovery.org/content/view.page.asp?I=464* Beyond Discovery. The National Academy of Sciences. March 2006.

[3] "Comparison of Positions With and Without Selective Availability: Full 24 Hour Data Sets." *http://www.ngs.noaa.gov/FGCS/info/sans_SA/compare/ERLA.htm* National Geodetic Survey. March, 2006.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Vectores cinemáticos	
Vector posición	El vector posición $\vec{r}$ apunta desde el origen del sistema de coordenadas a la posición de la partícula.
Vector velocidad instantánea	El vector velocidad $\vec{v}$ es la variación del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad y su dirección es la del movimiento. $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ 3.5
Vector aceleración instantánea	$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ 3.11
2. Velocidad relativa	Si una partícula se mueve con velocidad $\vec{v}_{pA}$ respecto a un sistema de coordenadas A, el cual a su vez se mueve con velocidad $\vec{v}_{AB}$ respecto a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula respecto a B es $\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$ 3.9
3. Movimientos de proyectiles sin rozamiento con el aire	En las ecuaciones de esta sección se considera que la dirección positiva del eje x es horizontal y que la dirección positiva del eje y es vertical dirigida hacia arriba.
Independencia del movimiento	En el movimiento de proyectiles, los movimientos horizontal y vertical son independientes.
Aceleración	$a_x = 0$ y $a_y = -g$
Dependencia con el tiempo	$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$ y $v_y(t) = v_{0y} + a_y t$ 2-12 $\Delta x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ y $\Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$ 2-14 donde $v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ y $v_{y0} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$. Alternativamente, $\Delta \vec{v} = \vec{g} t$ y $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$ 3.15*c*, 3.16*c*
Alcance	El alcance se obtiene multiplicando v_x por el tiempo total del proyectil en el aire.
4. Movimiento circular	
Aceleración centrípeta	$a_c = \frac{v^2}{r}$ 3.20
Aceleración tangencial	$a_t = \frac{dv}{dt}$ 3.22 donde v es el módulo de la velocidad instantánea.
Periodo	$v = \frac{2\pi r}{T}$ 3.21

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

3.1 (*a*) Hacia arriba, (*b*) hacia arriba.

3.2 Vertical y hacia abajo.

Respuestas a los problemas prácticos

3.1 $a_m = 4{,}7\ \text{m/s}^2$ a 45° noroeste

3.2 $y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$
$= 0 + (25{,}0\ \text{m/s}) \operatorname{sen} 36{,}9° (1{,}43\ \text{s}) + \frac{1}{2}(9{,}81\ \text{m/s}^2)(1{,}43\ \text{s})^2$
$= 11{,}48\ \text{m}$
$\therefore h = 111\ \text{m}$

3.3 $R = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{(24{,}5\ \text{m/s})^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \operatorname{sen}(2 \times 36{,}9°) = 58{,}8°$

3.4 (*a*) $\vec{v}_0 = 20{,}0\ \text{m/s}$ a $\theta_0 = 22{,}0°$, (*b*) $t = 0{,}764\ \text{s}$, (*c*) $v_{ym} t = 2{,}86\ \text{m}$

3.5 $4{,}44\ \text{m/s}^2$

3.6 $a_c = 16\ \text{m/s}^2$ y $a_t = -5{,}0\ \text{m/s}^2$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Puede el módulo del desplazamiento de una partícula ser menor que la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria? ¿Puede su módulo ser mayor que la distancia recorrida? Razonar la respuesta. SSM

2 • Dar un ejemplo en el que la distancia recorrida sea una magnitud significativa, mientras que el correspondiente desplazamiento sea nulo. ¿Es posible lo contrario? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

3 • En un partido de béisbol, ¿cuál es la velocidad media aproximada de un bateador que consigue una carrera (desde el momento en que golpea la pelota hasta que llega a la meta pasando por todas las bases)?

4 • Una pelota de béisbol golpeada con un bate sale formando un ángulo de 30° con el eje horizontal. Sale del bate a una altura de 1 m sobre el suelo y cae golpeando una vez sobre el suelo. Describa cómo cambia el ángulo entre los vectores aceleración y velocidad durante el vuelo, es decir, desde que la pelota sale del bate hasta que llega al suelo.

5 • Si un objeto se mueve hacia el oeste, ¿en qué dirección acelera? (*a*) Norte, (*b*) Este, (*c*) Oeste, (*d*) Sur, (*e*) puede ser cualquier dirección.

6 • Dos astronautas están instalando un telescopio sobre la superficie lunar. La aceleración de la gravedad en la Luna es sólo de 1,64 m/s^2. Uno de los astronautas le lanza una llave inglesa a otro, pero la velocidad del lanzamiento es excesiva, de forma que la llave se dirige a la cabeza del compañero. Cuando la llave está en el punto más alto de su trayectoria, (*a*) su velocidad y aceleración son cero, (*b*) su velocidad es cero pero la aceleración no, (*c*) su aceleración es cero pero su velocidad no, (*d*) ninguna es cero, (*e*) falta información para elegir alguna de las respuestas anteriores.

7 • La velocidad de una partícula se dirige hacia el este mientras que su aceleración se dirige hacia el noroeste, como muestra la figura 3.27. La partícula (*a*) está acelerando y girando hacia el norte, (*b*) está acelerando y girando hacia el sur, (*c*) está frenando y girando hacia el norte, (*d*) está frenando y girando hacia el sur, (*e*) mantiene constante su velocidad y gira hacia el sur.

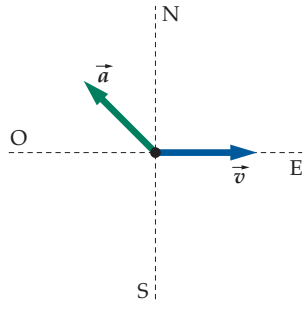


FIGURA 3.27
Problema 7

8 • Si se conocen los vectores posición de una partícula en dos puntos de su trayectoria y el tiempo que tarda en moverse de un punto a otro, se puede calcular (*a*) la velocidad media de la partícula, (*b*) la aceleración media de la partícula, (*c*) la velocidad instantánea de la partícula, (*d*) la aceleración instantánea de la partícula.

9 • Considere la trayectoria de una partícula en su movimiento por el espacio. (*a*) ¿Cómo se relaciona geométricamente el vector velocidad con la trayectoria de la partícula? (*b*) Esquematice una trayectoria y dibuje el vector velocidad de la partícula para distintas posiciones a lo largo de la trayectoria.

10 • La aceleración de un vehículo es nula cuando (*a*) gira hacia la derecha a velocidad constante, (*b*) sube por una carretera pendiente y recta a velocidad constante, (*c*) corona la cima de una colina a velocidad constante, (*d*) llega a la parte más baja de un valle a velocidad constante, (*e*) aumenta su velocidad cuando baja a lo largo de una pendiente recta.

11 • Dar algunos ejemplos de movimiento en los cuales las direcciones de los vectores velocidad y aceleración sean (*a*) opuestas, (*b*) las mismas y (*c*) mutuamente perpendiculares. SSM

12 • ¿Cómo es posible que una partícula que se mueva a velocidad escalar constante tenga una aceleración constante? ¿Puede una partícula con velocidad constante estar, a la vez, acelerando?

13 •• Un dardo se lanza verticalmente hacia arriba. Cuando sale de la mano del lanzador, pierde velocidad uniformemente a medida que gana altura hasta que se clava en el techo de la habitación. (*a*) Dibujar el vector velocidad en los tiempos t_1 y t_2 considerando que $\Delta t = t_2 - t_1$ es un intervalo pequeño. A partir del dibujo, determinar la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y, con ello, la dirección del vector aceleración. (*b*) Poco después de chocar con el techo, el dardo cae y acelera hasta que llega al suelo. Repita el apartado (*a*) para encontrar la dirección del vector aceleración durante la caída. (*c*) Ahora imagine que tira el dardo horizontalmente. ¿Cuál es la dirección del vector aceleración después que haya dejado su mano pero antes que golpee el suelo? SSM

14 • Una saltadora de bungee salta sobre una plataforma elástica y cuando se aproxima al punto más bajo de su caída pierde velocidad. Suponiendo que cae verticalmente, haga un diagrama del movimiento para encontrar la dirección de su vector aceleración, dibujando los vectores velocidad de la saltadora en los tiempos t_1 y t_2, siendo pequeño el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$. Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y, con ello, la dirección del vector aceleración.

15 • La saltadora de bungee del problema 14, después de alcanzar el punto más bajo de su salto en el tiempo t_{bajo}, comienza a moverse hacia arriba aumentando su velocidad durante un corto tiempo hasta que la gravedad domina de nuevo su movimiento. Dibujar los vectores velocidad en los tiempos t_1 y t_2, siendo $\Delta t = t_2 - t_1$ un pequeño intervalo y $t_1 < t_{bajo} < t_2$. Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y con ello, la dirección del vector aceleración en el tiempo t_{bajo}.

16 • Un río de orillas rectas y paralelas tiene una anchura de 0,76 km (véase la figura 3.28). La corriente del río baja a 4,0 km/h y es paralela a los márgenes. El barquero, que conduce una barcaza que puede alcanzar una velocidad máxima de 4,0 km/h en aguas quietas, desea ir de A a B,

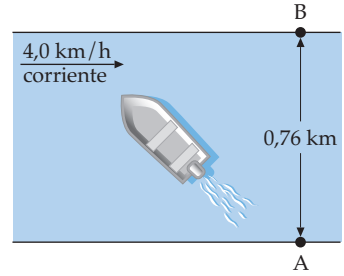


FIGURA 3.28
Problema 16

donde AB es perpendicular a la orilla. El barquero debe (*a*) dirigir la barca directamente a través del río, perpendicular a la orilla siguiendo AB, (*b*) poner un rumbo aguas arriba de 53º respecto a la dirección AB, (*c*) poner un rumbo aguas arriba de 37º respecto a la dirección AB, (*d*) renunciar, ya que es imposible ir de A hasta B con una nave de estas características, (*e*) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

17 • Durante una intensa lluvia, las gotas caen a velocidad constante, y formando un ángulo de 10º oeste respecto al eje vertical. Usted va caminado bajo la lluvia y nota que sólo la parte superior de su ropa se está mojando ¿En qué dirección está andando? Razone la respuesta. SSM

18 • En el problema 17, ¿con qué velocidad está andando si la velocidad de las gotas respecto al suelo es 5,2 m/s?

19 • Verdadero o falso (ignore los efectos de la resistencia del aire):

(*a*) Cuando un proyectil se dispara horizontalmente, invierte el mismo tiempo en caer que un proyectil en reposo que se deja caer desde la misma altura.
(*b*) Cuando se dispara un proyectil desde una cierta altura y con un cierto ángulo vertical, tarda más tiempo en llegar al suelo que lo que tardaría el mismo proyectil si se dejara caer desde la misma altura.
(*c*) Cuando se dispara horizontalmente un proyectil desde una cierta altura, éste impacta sobre el suelo con una velocidad mayor que si se dejara caer desde la misma altura.

20 • Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro de 35° por encima de la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria, su velocidad es de 20 m/s. La velocidad inicial tenía una componente horizontal de (*a*) 0, (*b*) 20 cos (35°) m/s, (*c*) 20 sen (53°) m/s, (*d*) (20 m/s)/cos 35°, (*e*) 20 m/s.

21 • Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro de 35º por encima de la horizontal. No considere los efectos de la resistencia del aire. La velocidad inicial del proyectil del problema anterior tiene una componente vertical (*a*) inferior a 20 m/s, (*b*) mayor que 20 m/s, (*c*) igual a 20 m/s, (*d*) no se puede saber con los datos que se dan. SSM

22 • Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro 35º por encima de la horizontal. No considere los efectos de la resistencia del aire. El proyectil alcanza su objetivo a la misma altura desde la que se lanzó. En consecuencia, la velocidad final del proyectil tiene una componente vertical (*a*) igual que su componente vertical inicial en módulo y signo, (*b*) igual que su componente vertical inicial en módulo, pero con signo opuesto, (*c*) inferior que su componente vertical inicial, pero con el mismo signo, (*d*) inferior que su componente vertical inicial, pero con signo opuesto.

23 • La figura 3.29 representa la trayectoria parabólica de una bola que va de A a E. ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto B? (*a*) Hacia arriba y hacia la derecha. (*b*) Hacia abajo y hacia la izquierda. (*c*) Verticalmente hacia arriba. (*d*) Verticalmente hacia abajo. (*e*) La aceleración de la bola es cero.

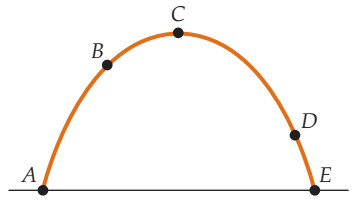


FIGURA 3.29 Problemas 23 y 24

24 • (*a*) ¿En qué punto(s) de la figura 3.29 el módulo de la velocidad es el mayor de todos? (*b*) ¿En qué punto(s) el módulo de la velocidad es el menor de todos? (*c*) ¿En qué dos puntos el módulo de la velocidad es el mismo? ¿Es el vector velocidad el mismo en esos puntos?

25 • Verdadero o falso:

(*a*) Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración debe ser cero.
(*b*) Si la aceleración es cero, el módulo de la velocidad debe ser constante.
(*c*) Si la aceleración es cero, la velocidad debe ser constante.
(*d*) Si el módulo de la velocidad es constante, la velocidad debe ser constante.
(*e*) Si la velocidad es constante, el módulo de la velocidad debe ser constante. SSM

26 • Las velocidades inicial y final de un objeto son las indicadas en la figura 3.30. Indicar la dirección de la velocidad media.

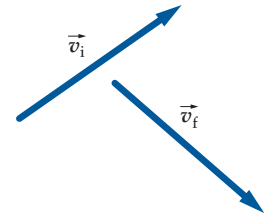


FIGURA 3.30 Problema 26

27 •• La figura 3.31 muestra la trayectoria de un automóvil, formada por segmentos rectilíneos y arcos de circunferencias. El coche parte del reposo en el punto A. Después de alcanzar el punto B marcha con velocidad constante hasta que alcanza el punto E. Acaba en reposo en el punto F. (*a*) En el medio de cada segmento (AB, BC, CD, DE, y EF), ¿cuál es la dirección del vector velocidad? (*b*) ¿En qué puntos el automóvil tiene aceleración? En estos casos, ¿cuál es la dirección de la aceleración? (*c*) ¿Qué relación tienen los módulos de la aceleración en los tramos BC y DE?

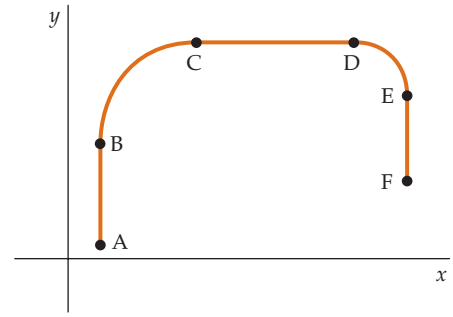


FIGURA 3.31 Problema 27

28 •• Dos cañones están situados uno frente a otro, como muestra la figura 3.32. Cuando disparen, las balas seguirán las trayectorias que se muestran, siendo P el punto donde las trayectorias se cruzan. Si se quiere que las balas choquen, ¿hay que disparar primero el cañón A, el cañón B o bien hay que disparar los dos cañones simultáneamente? Ignórense los efectos de la resistencia del aire.

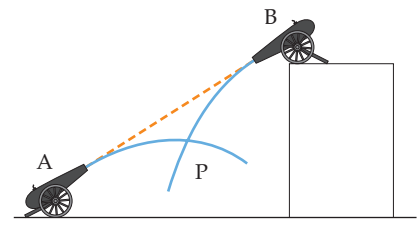


FIGURA 3.32 Problema 28

29 •• Galileo en su obra "*Diálogo respecto los dos sistemas del mundo*" escribió: " Enciérrese … en el camarote principal situado bajo la cubierta de un barco grande y … cuelgue una botella que se vacíe, gota a gota, en un recipiente situado debajo. Después de observar cuidadosamente el fenómeno … y de que el barco haya seguido cualquier velocidad, siempre y cuando el movimiento haya sido uniforme y no fluctuante, las gotas siempre caen como antes sin que, en ningún caso, se dirijan hacia la dirección de la popa del buque, aunque el barco recorra un gran trecho mientras las gotas están en el aire". Explique esta cita.

30 •• Una persona mueve una piedra atada a una cuerda en un círculo horizontal a velocidad constante. La figura 3.33 representa la trayectoria del objeto visto desde arriba. (*a*) ¿Cuál de los vectores representa la velocidad de la piedra? (*b*) ¿Cuál representa la aceleración?

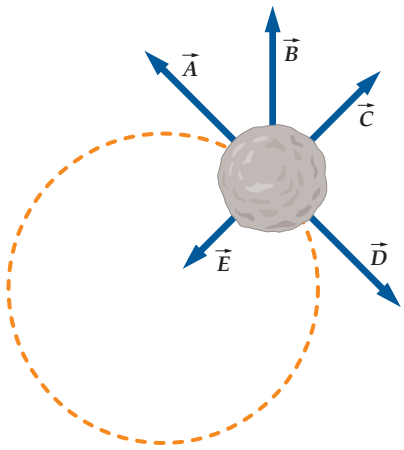


FIGURA 3.33 Problema 30

31 •• Verdadero o falso:

(*a*) Un cuerpo no puede moverse en una trayectoria circular a menos que tenga una aceleración centrípeta.
(*b*) Un cuerpo no puede moverse en una trayectoria circular a menos que tenga una aceleración tangencial.
(*c*) Un cuerpo que se mueva siguiendo una trayectoria circular no puede tener un módulo de la velocidad variable.
(*d*) Un cuerpo que se mueva siguiendo una trayectoria circular no puede tener un vector velocidad constante.

32 •• Usando un diagrama del movimiento, determinar la dirección de la aceleración de la masa de un péndulo cuando la masa está en el punto donde cambia el sentido de su movimiento.

33 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Su amigo le está filmando con una videocámara mientras imita el salto de una patinadora. Analizando fotograma a fotograma, su amigo encuentra que la componente *y* de su velocidad es (registrado cada 1/20 segundos):

t (s)	12,05	12,10	12,15	12,20	12,25	12,30	12,35	12,40	12,45
v_y (m/s)	−0,78	−0,69	−0,55	−0,35	−0,10	0,15	0,35	0,49	0,53

(*a*) Dibujar el diagrama de movimiento. Utilízelo para determinar la dirección y magnitud relativa de su aceleración media durante cada uno de los intervalos temporales de la tabla. (*b*) Analice cómo la componente vertical de su aceleración cambia de signo y de módulo cuando invierte la dirección de su movimiento. SSM

APROXIMACIONES Y ESTIMACIONES

34 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Realice una estimación, en metros por hora, de la velocidad con la que sale el agua por el extremo de una manguera de jardín a partir de observaciones previas y de los conocimientos del movimiento de proyectiles.

35 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Imagínese que ganó un concurso cuyo premio era entrenarse con un equipo de béisbol. Uno de los ejercicios consiste en que debe intentar golpear la pelota que le lanza el *pitcher*. Estime la aceleración de la pelota al golpearla si ésta es lanzada por un *pitcher* de primera división y usted la golpea de lleno en dirección al *pitcher*. Haga estimaciones razonables sobre la velocidad antes y después del golpe y sobre el tiempo de contacto entre la pelota y el bate.

36 •• Estimar qué distancia alcanza una pelota si se lanza (*a*) horizontalmente desde el suelo, (*b*) con un ángulo de 45º desde el suelo, (*c*) horizontalmente desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel de la calle, (*d*) con un ángulo de 45º desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel del suelo. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

37 •• En 1978, el británico Geoff Capes lanzó un ladrillo pesado una distancia horizontal de 44,5 m. Determinar la velocidad aproximada del ladrillo en el punto más alto de su trayectoria, sin considerar los efectos de la resistencia del aire. Supóngase que el ladrillo cae al suelo a la misma altura con que se lanzó.

POSICIÓN, DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y VECTORES ACELERACIÓN

38 • La aguja de los minutos de un reloj de pared tiene 0,5 m de longitud y la de las horas tiene 0,25 m. Considerando el centro del reloj como origen, elija un sistema de coordenadas cartesiano con el eje *x* apuntando a la 3 en punto y el eje *y* apuntando a las 12 en punto. Utilizando los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$, escriba los vectores posición de la aguja de las horas ($\vec{A}$) y la de los minutos ($\vec{B}$) cuando el reloj señala (*a*) 12:00, (*b*) 3:00, (*c*) 6:00, (*d*) 9:00.

39 • Hallar los desplazamientos de cada aguja del problema anterior ($\Delta\vec{A}$ y $\Delta\vec{B}$) cuando el tiempo ha pasado de las 15:00 a las 18:00. SSM

40 • En base al problema 38, escriba el vector del desplazamiento de una mosca que va rápidamente del extremo de la aguja de los minutos al extremo de la aguja de las horas cuando el reloj señala las 15:00 h.

41 • **APROXIMACIÓN, CONCEPTUAL** Un oso se mueve 12 m hacia el nordeste y 12 m hacia el este. Muestre gráficamente cada desplazamiento y determine gráficamente el desplazamiento que deberá realizar de forma directa para volver al punto de partida.

42 • Un muchacho explorador pasea 2,4 km hacia el este del campamento, luego se desvía hacia su izquierda y recorre 2,4 km a lo largo de un arco de círculo centrado en el campamento y, finalmente, recorre 15 km en línea recta hacia el campamento. (*a*) ¿A qué distancia del campamento se encuentra finalmente el muchacho? (*b*) ¿Cuál es la dirección de la posición del muchacho medida desde el campamento? (*c*) ¿Cuál es el cociente entre el desplazamiento final y la distancia total recorrida?

43 • Un cubo de arista 3 m tiene sus caras paralelas a los planos coordenados y un vértice en el origen. Una mosca situada en el origen se mueve a lo largo de tres aristas hasta llegar al vértice opuesto. Escribir el vector desplazamiento de la mosca utilizando los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ y hallar el módulo de su desplazamiento. SSM

44 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un barco en alta mar recibe señales de radio emitidas desde dos transmisores A y B que están separados 100 km, uno al sur del otro. El localizador de direcciones detecta que la transmisión desde A está 30° al sudeste, mientras que la transmisión de B procede del este. Calcular la distancia entre el barco y el transmisor B.

45 • Un operador de radar fijo determina que un barco está a 10 km al sur de su posición. Una hora más tarde el mismo barco está a 20 km al sudeste. Si el barco se movió con velocidad constante siempre en la misma dirección, ¿cuál era su velocidad durante ese tiempo?

46 • Las coordenadas de posición de una partícula (x, y) son (2 m, 3 m) cuando $t = 0$; (6 m, 7 m) cuando $t = 2$ s; y (13 m, 14 m) cuando $t = 5$ s. (*a*) Hallar la velocidad media v_m desde $t = 0$ hasta $t = 2$ s. (*b*) Hallar v_m desde $t = 0$ hasta $t = 5$ s.

47 • Una partícula que se mueve a 4,0 m/s en la dirección x positiva experimenta una aceleración de 3,0 m/s^2 en la dirección y positiva durante 2,0 s. Calcule la velocidad final de la partícula. SSM

48 • Inicialmente, un halcón se mueve hacia el oeste con una velocidad de 40 m/s y 5 s después se mueve hacia el norte a 20 m/s. (*a*) ¿Cuál ha sido el módulo y la dirección de $\Delta\vec{v}_m$ durante este intervalo de 5 s? (*b*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de $\vec{a}_m$ en este intervalo?

49 • Cuando $t = 0$, una partícula situada en el origen tiene una velocidad de 40 m/s con $\theta = 45°$. Para $t = 3$ s, la partícula está en $x = 100$ m, $y = 80$ m con velocidad de 30 m/s y $\theta = 50°$. Calcular (*a*) la velocidad media y (*b*) la aceleración media de la partícula durante este intervalo.

50 •• Una partícula se mueve en un plano xy con aceleración constante. Para $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $x = 4$ m, $y = 3$ m y posee la velocidad $\vec{v} = (2{,}0\ \text{m/s})\hat{i} + (-9{,}0\ \text{m/s})\hat{j}$. La aceleración viene dada por el valor $\vec{a} = (4\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (3\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. (*a*) Determinar el vector velocidad en el instante $t = 2$ s. (*b*) Expresar el vector posición para $t = 4$ s en términos de $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Calcular también su módulo y dirección.

51 •• El vector posición de una partícula viene dado por la expresión $\vec{r} = (30t)\hat{i} + (40t - 5t^2)\hat{j}$, en donde r se expresa en metros y t en segundos. Determinar los vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea en función del tiempo t. SSM

52 •• Una partícula tiene una aceleración constante $\vec{a} = (6{,}0\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (4{,}0\ \text{m/s}^2)\hat{j}$. En el instante $t = 0$, la velocidad es cero y el vector de posición es $\vec{r}_0 = (10\ \text{m})\hat{i}$. (*a*) Hallar los vectores posición y velocidad en un instante cualquiera t. (*b*) Hallar la ecuación de la trayectoria en el plano xy y hacer un esquema de la misma.

53 •• Cuando sale del muelle, una barca fuera borda pone rumbo hacia el norte durante 20 s con una aceleración de 3 m/s^2. Posteriormente, la barca vira hacia el oeste y se mueve durante 10 s con la velocidad adquirida durante los 20 s anteriores. (*a*) ¿Cuál es la velocidad media de la barca durante los 30 segundos de movimiento? (*b*) ¿Cuál es la aceleración media en el mismo intervalo de tiempo? (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento de la barca en el mismo intervalo de tiempo? SSM

54 •• Partiendo del reposo en el punto A, un muchacho conduce una motocicleta en dirección norte hasta un punto B que se halla 75 m más allá, aumentando la velocidad a ritmo constante de 2 m/s^2. Entonces, de forma gradual gira hacia el este describiendo un movimiento circular de 50 m de radio a velocidad constante hasta llegar a un punto C donde el movimiento va en la dirección este. Luego, continúa en dirección este reduciendo la velocidad a ritmo de 1 m/s^2 hasta que se detiene en el punto D. (*a*) ¿Cuánto vale el módulo de la velocidad media y el de la aceleración media desde A hasta D? (*b*) ¿Cuánto vale el desplazamiento desde A hasta C? (*c*) ¿Cuánto vale la distancia total recorrida?

VELOCIDAD RELATIVA

55 •• Un avión vuela a la velocidad de 250 km/h respecto al aire en reposo. Un viento sopla a 80 km/h en dirección noreste (es decir, en dirección 60° al este del norte). (*a*) ¿En qué dirección debe volar el avión para que su rumbo sea norte? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del avión respecto al suelo?

56 •• Una nadadora intenta cruzar perpendicularmente un río nadando con una velocidad de 1,6 m/s respecto al agua en reposo. Sin embargo, llega a la otra orilla en un punto que está 40 m más lejos en la dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene una anchura de 80 m, (*a*) ¿cuál es la velocidad de la corriente del río? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la nadadora respecto a la orilla? (*c*) ¿En qué dirección debería nadar para llegar al punto directamente opuesto al punto de partida?

57 •• Un pequeño avión sale del punto A y se dirige a un aeropuerto en el punto B, a 520 km en dirección norte. La velocidad del avión respecto al aire es de 240 km/h y existe un viento uniforme de 50 km/h que sopla del noroeste al sureste. Determinar el rumbo que debe tomar el avión y el tiempo de vuelo. SSM

58 •• Dos embarcaderos están separados 2,0 km uno del otro sobre la misma orilla de un río, cuyas aguas fluyen a 1,4 km/h. Una lancha a motor hace el recorrido de ida y vuelta entre los dos embarcaderos en 50 min. ¿Cuál es la velocidad de la lancha respecto al agua?

59 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un concurso de aeromodelismo tiene las siguientes normas: cada avión debe volar hasta un punto situado a 1 km de la salida y regresar de nuevo; el vencedor será el avión que realice el circuito completo en el tiempo más corto; los competidores tienen la libertad de escoger el recorrido que desean, siempre que el avión se aleje 1 km de la salida y después regrese. El día del concurso, un viento uniforme sopla del norte a 5 m/s. Uno de los modelos puede mantener una velocidad respecto al aire de 15 m/s y se considera que los tiempos de arranque, parada y giro son despreciables. Se plantea la cuestión siguiente: ¿debe planearse el vuelo a favor del viento y contra el viento en el circuito o con viento cruzado este y oeste? Analícese el plan sobre estas dos alternativas: (1) el avión vuela 1 km al norte y después regresa; (2) el avión recorre 1 km hacia el este al arrancar y después regresa.

60 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El piloto de un pequeño avión mantiene una velocidad con respecto al aire de 150 nudos (un nudo corresponde a la velocidad de una milla náutica por hora) y quiere volar hacia el norte (acimut = 000°) con respecto a la Tierra. (*a*) Si sopla un viento de 30 nudos del este (acimut = 090°), calcular qué rumbo (acimut) debe tomar el piloto. (*b*) En esa dirección, ¿cuál será la velocidad relativa al suelo?

61 •• El coche A se mueve hacia el este a 20 m/s y se dirige a un cruce. Cuando A cruza la intersección, el coche B parte del reposo 40 m al norte del cruce y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de 2 m/s^2. (*a*) ¿Qué posición ocupa B respecto a A transcurridos 6 segundos desde que A ha cruzado la intersección? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de B respecto a A cuando $t = 6$ s? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de B respecto a A para $t = 6$ s? *Ayuda: exprese sus respuestas en términos de los vectores $\hat{i}$ y $\hat{j}$ que van en dirección este y norte, respectivamente.* SSM

62 •• Mientras va caminado entre las puertas de un aeropuerto ve a un niño corriendo por encima de una pasarela mecánica. El niño corre a 2,5 m/s respecto a la pasarela y usted decide determinar la velocidad de la pasarela. Observa que el niño recorre los 21 m de pasarela hasta llegar al final y luego los recorre en dirección opuesta hasta el principio. El niño tarda 22 s en total. Con esta información, ¿cuál es la velocidad de la pasarela respecto a la terminal del aeropuerto?

63 •• Ben y Jack están comprando en unos grandes almacenes. Ben deja a Jack en el acceso a las escaleras mecánicas y se dirige al este andando a una velocidad de 2,4 m/s. Jack sube a las escaleras mecánicas que se mueven a 2 m/s en dirección este y hacia arriba con una inclinación de 37° respecto al suelo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de Ben respecto a Jack? (*b*) ¿A qué velocidad debería andar Jack para que Ben estuviese siempre sobre su misma vertical? SSM

64 ••• Un malabarista viaja en un tren y lanza verticalmente una bola a 4,9 m/s. El tren va rumbo este a una velocidad de 20 m/s. Según el malabarista: (*a*) ¿Cuánto tiempo está la bola en el aire? (*b*) ¿Cuál es el desplazamiento de la bola en su ascenso? Según un observador exterior (fuera del tren, a la misma altura que el malabarista y en reposo sobre el suelo): (*c*) ¿Cuál es la velocidad inicial de la bola? (*d*) ¿Cuál es el ángulo de lanzamiento? (*e*) ¿Cuál es el desplazamiento de la bola en su ascenso?

MOVIMIENTO CIRCULAR Y ACELERACIÓN CENTRÍPETA

65 • ¿Cuál es el módulo de la aceleración del extremo de la aguja que señala los minutos en el reloj del problema 38? Expresarlo como una fracción del módulo de la aceleración de la caída libre g.

66 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted diseña una centrifugadora que ha de girar a 15 000 rev/min. (*a*) Calcular la aceleración centrípeta máxima que debe soportar un tubo de muestra situado a 15 cm del eje de rotación. (*b*) Para conseguir la velocidad máxima de rotación, la centrifugadora acelera durante 1 min y 15 s. Calcular el *módulo* de la aceleración tangencial mientras acelera, suponiendo que ésta sea constante.

67 ••• La Tierra rota una vez respecto a su propio eje cada 24 horas, de forma que los cuerpos que se hallan en su superficie describen un movimiento circular uniforme respecto a su eje cuyo periodo es de 24 horas. Considere únicamente el efecto de esta rotación sobre una persona en la superficie (ignorar el movimiento orbital de la Tierra alrededor del Sol). (*a*) ¿Cuáles son el módulo de la velocidad y el módulo de la aceleración de una persona que está sobre el ecuador? (Expresar el módulo de la aceleración en términos de g.) (*b*) ¿Cuál es la dirección del vector aceleración? (*c*) ¿Y si la persona está a 35° de latitud norte? (*d*) ¿Cuál es el ángulo que forman los vectores aceleración de la persona en los apartados (*b*) y (*c*)? SSM

68 •• Determine la aceleración que experimenta la Luna debida a la Tierra, usando para ello los valores de la distancia media y del periodo orbital que aparecen en la tabla de datos físicos al final del libro. Suponga que la órbita es circular. Exprese esta aceleración como una fracción de g.

69 •• (*a*) ¿Cuánto valen el periodo y el módulo de la velocidad de una persona en un carrusel si el módulo de su aceleración es de 0,8 m/s^2 cuando se encuentra a una distancia de 4 m del eje? (*b*) Si la persona se coloca a 2 m del eje y el carrusel sigue girando con el mismo periodo, ¿cuánto valen los módulos de la velocidad y de la aceleración?

70 ••• Los púlsars son estrellas de neutrones que emiten rayos X y otros tipos de radiación. En la Tierra se reciben pulsos de radiación en intervalos regulares que coinciden con el período de rotación del púlsar. Algunos púlsars rotan con periodos tan cortos como de 1 ms. El púlsar de Cangrejo, situado en el centro de la Nebulosa del Cangrejo en la constelación de Orion, tiene un periodo actual de 33,085 ms. Su radio ecuatorial se estima en unos 15 km, el radio medio de una estrella de neutrones. (*a*) ¿Cuál es el valor de la aceleración centrípeta de un cuerpo situado sobre la superficie del ecuador de un púlsar? (*b*) Se han observado numerosos púlsars con períodos que se alargan con el tiempo, un fenómeno denominado "*spin down*". En el caso del púlsar de Cangrejo el ritmo es de $3{,}5 \times 10^{-13}$ s por segundo, lo que implica que este púlsar dejaría de rotar en $9{,}5 \times 10^{10}$ s (unos 3000 años a contar a partir de hoy). ¿Cuál es la aceleración tangencial de un objeto en el ecuador de este púlsar?

71 ••• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La sangre humana contiene plasma, plaquetas y glóbulos rojos. Para separar el plasma del resto de componentes se utiliza la centrifugación. Para una centrifugación efectiva es necesario aplicar una aceleración de 2000 g o más a la sangre. Supongamos que la sangre se coloca en tubos de ensayo de 15 cm de largo hasta llenarlos. Esos tubos se colocan en una centrifugadora formando un ángulo de 45° con respecto a la vertical (figura 3.34). (*a*) ¿Cuál es la distancia entre una muestra de sangre y el eje de rotación si la centrifugadora gira a 3500 rpm y la sangre tiene una aceleración de 2000 g? (*b*) Si la sangre del centro del tubo gira con el radio anterior, calcular las aceleraciones experimentadas por la sangre que se halla en cada uno de los extremos del tubo. Expresar las aceleraciones en términos de g.

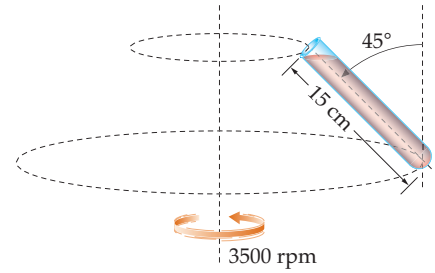


FIGURA 3.34 Problema 71

MOVIMIENTO DE PROYECTILES Y ALCANCE DE PROYECTILES

72 • Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 140 km/h hacia la base, que está a 18,4 m de distancia. Despreciando la resistencia del aire (no sería una buena cosa para el bateador), determinar cuánto ha descendido la pelota por causa de la gravedad en el momento en que alcanza la base.

73 • Se lanza un proyectil con velocidad de módulo v_0 y ángulo θ_0 respecto a la horizontal. Hallar una expresión que dé la altura máxima que alcanza por encima de su punto de partida en función de v_0, θ_0 y g. (Despreciar la resistencia del aire.)

74 •• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial v_0 bajo un ángulo de tiro de 30° sobre la horizontal desde una altura de 40 m por encima del suelo. El proyectil choca contra el suelo a una velocidad de $1{,}2\ v_0$. Determinar v_0. (Despreciar la resistencia del aire.)

75 •• En la figura 3.35, si x es 50 m y $h = 10$ m, ¿cuál es la velocidad mínima inicial del dardo para que choque contra el mono antes de llegar éste al suelo que está a 11,2 m por debajo de la posición inicial del mono? (Despreciar la resistencia del aire.)

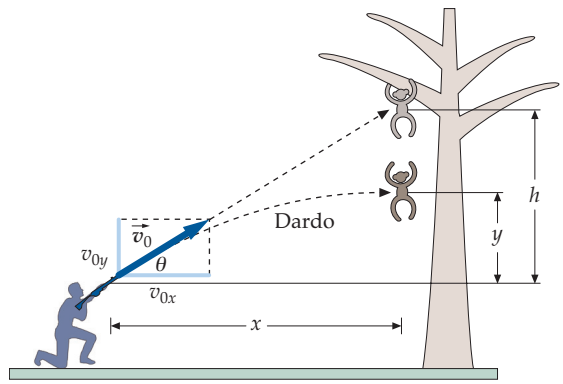


FIGURA 3.35 Problema 75

76 •• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de 53 m/s. Determinar el ángulo de proyección necesario para que la altura máxima del proyectil sea igual a su alcance horizontal. (Despreciar la resistencia del aire.)

77 •• Una bola lanzada al aire llega al suelo a 40 m de distancia al cabo de 2,44 s. Determinar el módulo y la dirección de la velocidad inicial. (Despreciar la resistencia del aire.) SSM

78 •• Demostrar que si un objeto se lanza con velocidad v_0 bajo un ángulo de tiro θ por encima de la horizontal, el módulo de la velocidad a cierta altura h, $v(h)$, es independiente de θ. (Despreciar la resistencia del aire.)

79 ••• A la mitad de su altura máxima, la velocidad de un proyectil es 3/4 de su velocidad inicial. ¿Qué ángulo forma el vector velocidad inicial con la horizontal? (Despreciar la resistencia del aire.)

80 •• Un avión de transporte vuela horizontalmente a una altura de 12 km con una velocidad de 900 km/h cuando un carro de combate se desprende de la rampa trasera de carga. (Despreciar la resistencia del aire.) (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda el tanque en chocar contra el suelo? (*b*) ¿A qué distancia horizontal del punto donde cayó se encuentra el tanque cuando choca contra el suelo? (*c*) ¿A qué distancia está el tanque respecto al avión cuando choca contra el suelo, suponiendo que el avión sigue volando con velocidad constante?

81 •• Dos personajes de dibujos animados responden a su argumento habitual y uno persigue al otro. El coyote Wiley (*Carnivorous hungribilous)* intenta cazar de nuevo al Correcaminos (*Speedibus cantcatchmi*). Ambos, en su frenética carrera llegan al borde de un profundo barranco de 15 m de ancho y 100 m de profundidad. El Correcaminos salta con un ángulo de 15° por encima de la horizontal y aterriza al otro lado del barranco sobrándole 1,5 m. (*a*) ¿Cuál era la velocidad del Correcaminos antes de iniciar el salto? (Ignore la resistencia del aire.) (*b*) El Coyote, con el mismo objetivo de superar el obstáculo, salta también con la misma velocidad inicial, pero con distinto ángulo de salida. Para su desgracia, le faltan 0,5 m para poder alcanzar el otro lado del barranco. ¿Con qué ángulo saltó? (Supóngase que éste fue inferior a 15°.) SSM

82 •• Un cañón se ajusta con un ángulo de tiro de 45°. Dispara una bala con una velocidad de 300 m/s. (*a*) ¿A qué altura llegará la bala? (*b*) ¿Cuánto tiempo estará en el aire? (*c*) ¿Cuál es el alcance horizontal del cañón? (Despreciar la resistencia del aire.)

83 •• Una piedra lanzada horizontalmente desde lo alto de una torre choca contra el suelo a una distancia de 18 m de su base. (*a*) Sabiendo que la altura de la torre es de 24 m, calcular la velocidad con que fue lanzada la piedra. (*b*) Calcular la velocidad de la piedra justo antes de que ésta golpee el suelo. SSM

84 •• Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una montaña situada a 200 m por encima de un valle (figura 3.36). Su velocidad inicial es de 60 m/s a 60° respecto a la horizontal. ¿Dónde caerá el proyectil? (Despreciar la resistencia del aire.)

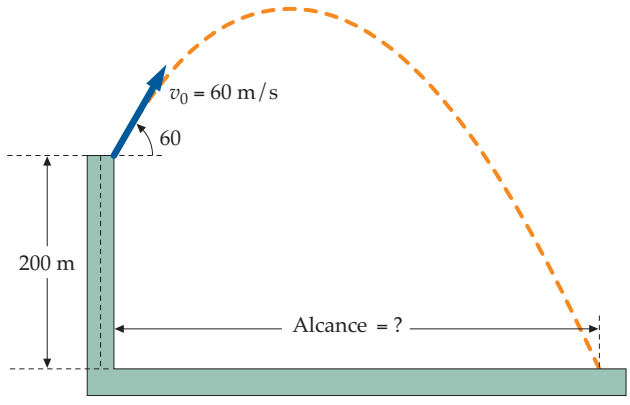


FIGURA 3.36 Problema 84

85 •• El alcance de un proyectil disparado horizontalmente desde lo alto de un monte es igual a su altura. ¿Cuál es la dirección del vector velocidad cuando el proyectil choca contra el suelo? (Despreciar la resistencia del aire.)

86 •• Un pez arquero lanza un chorro de agua desde la superficie de un pequeño lago con un ángulo de 60° respecto a la superficie. El pez está intentando impactar sobre una jugosa araña que se encuentra sobre la hoja de un árbol. La hoja se halla 50 cm al este del pez y 25 cm por encima de la superficie del lago. Si el pez consigue hacer caer a la araña al lago se la podrá comer. (*a*) ¿Cuál debería ser el módulo de la velocidad para que surta efecto? (*b*) En el momento del impacto, ¿el chorro asciende o desciende?

87 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Considere un jugador de fútbol americano que se encarga de chutar el balón cuando está plantado sobre el campo. El balón se planta a 50 m de la portería cuya barra horizontal se encuentra a 3,05 m del suelo. El jugador chuta el balón y éste sale a 25 m/s con un ángulo de 30° sobre el campo. (*a*) ¿Acertará? (*b*) En caso afirmativo, ¿a qué distancia sobre la barra horizontal? En caso negativo, ¿a qué distancia por debajo de la barra horizontal? (*c*) ¿A qué distancia respecto del plano de la portería cae el balón al suelo? SSM

88 •• Un arco lanza flechas con una velocidad del orden de 45 m/s. (*a*) Un arquero tártaro sentado a horcajadas en su caballo dispara una flecha elevando el arco 10° por encima de la horizontal. Si el arco está 2,25 m por encima del suelo, ¿cuál es el alcance de la flecha? Supóngase que el suelo está nivelado y no considere la resistencia del aire. (*b*) Supóngase ahora que el caballo se mueve a galope tendido en la misma dirección en que se dispara la flecha y que el arquero coloca el arco de la misma forma que en el apartado anterior. Si la velocidad del caballo es de 12 m/s, ¿cuál es ahora el alcance de la flecha?

89 El tejado de una casa forma un ángulo de 30° con la horizontal. Una pelota cae rodando sobre el tejado y lo abandona con una velocidad de 5 m/s. La distancia vertical entre el extremo del tejado y el suelo es de 7 m. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo la pelota está en el aire? (*b*) ¿A qué distancia de la base de la casa cae al suelo? (*c*) ¿Cuál es la dirección y el módulo de la velocidad justo en el momento que llega al suelo?

90 •• Calcular $dR/d\theta_0$ a partir de $R = (v_0^2/g)\text{sen}(2\theta_0)$ y mostrar que poniendo $dR/d\theta_0 = 0$ nos da que para el ángulo $\theta_0 = 45°$ se obtiene el máximo alcance.

91 •• En un corto relato de ciencia ficción escrito durante los años 70, Ben Bova describió un conflicto entre dos hipotéticas colonias en la Luna —una fundada por los Estados Unidos y la otra fundada por la Unión Soviética. En la historia, los colonos de cada colonia empiezan a dispararse entre ellos hasta que se dan cuenta, con horror, que sus armas dan suficiente velocidad inicial a las balas para que éstas se sitúen en órbita. (*a*) Si el módulo de la aceleración de la gravedad en la Luna es 1,67 m/s^2, ¿cuál es el alcance máximo de una bala cuya velocidad inicial es de 900 m/s? (Supóngase que la curvatura de la superficie de la Luna es despreciable.) (*b*) ¿Cuál debería ser la velocidad inicial de una bala disparada en la superficie de la Luna para que ésta pudiera situarse en órbita alrededor del satélite? (Hay que considerar el radio de la Luna.)

92 ••• Una pelota es lanzada a nivel del suelo a 22 m/s con un ángulo de salida de 55° sobre la horizontal. La pelota cae al suelo (rígido) y rebota alcanzando una altura máxima del 75% de la altura máxima alcanzada en el primer arco. Despreciar los efectos de la resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada en el pimer arco parabólico? (*b*) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se produce el rebote? (*c*) ¿A qué distancia del punto de lanzamiento cae al suelo de nuevo después del rebote? Supóngase que la componente horizontal de la velocidad se mantiene constante durante la colisión con el suelo. *Ayuda: no se puede suponer que el ángulo con el que se lanza la pelota sea el mismo que el ángulo con el que sale justo después de la colisión.*

93 ••• En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$. Una pelota de golf sale disparada desde un punto elevado a 45 m/s con un ángulo de 35º cayendo sobre el campo 20 m por debajo de la elevación (figura 3.37). Ignórese cualquier efecto de resistencia del aire. (*a*) Calcular el alcance utilizando $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$ aunque la pelota haya salido de un punto elevado. (*b*) Demostrar que el alcance para un problema más general como el que se muestra en la figura 3.37 viene dado por $R = \left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2gy}{v_0^2\,\text{sen}^2\theta_0}}\right)\dfrac{v_0^2}{2g}\,\text{sen}\,2\theta_0$, donde y es la altura del punto de salida, es decir, $y = -h$. (*c*) Calcular el alcance utilizando la fórmula anterior. ¿Cuál es el porcentaje de error al despreciar la altura del punto de salida?

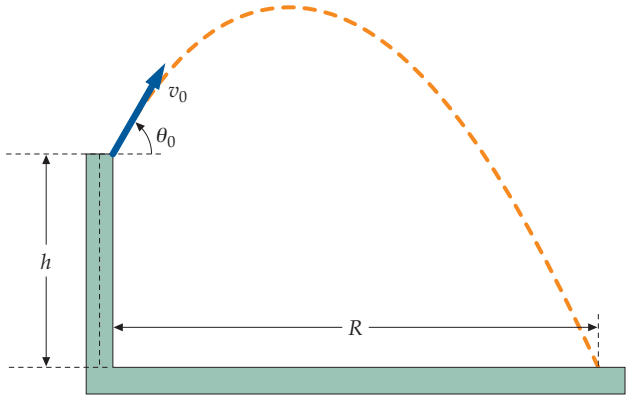


FIGURA 3.37 Problema 93

94 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$ si los efectos de la resistencia del aire son despreciables. (*a*) Demostrar que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la aceleración de la gravedad viene dado por $\Delta R/R = -\Delta g/g$. (*b*) ¿Cuál sería el alcance de un cuadrangular a una altitud en que g fuera un 0,5% menor que a nivel del mar si el cuadrangular a nivel del mar recorre 400 pies?

95 ••• **MÚLTIPLES PASOS, APROXIMACIÓN** En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$ si los efectos de la resistencia del aire son despreciables. (*a*) Demuestre que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la velocidad inicial viene dado por $\Delta R/R = 2\Delta v_0/v_0$. (*b*) Suponga que el alcance de un proyectil fuera de 200 m. Utilice la fórmula del apartado (*a*) para calcular el aumento en el alcance si el módulo de la velocidad aumenta en un 20% (*c*) Compare su respuesta en (*b*) con el aumento calculado directamente de $R = (v_0^2/g)\,\text{sen}\,2\theta_0$. Si los resultados de los apartados (*b*) y (*c*) son distintos, explique esa diferencia. SSM

96 ••• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial desconocida y aterriza, 20 s más tarde, en la ladera de una colina situada a una distancia horizontal de 3000 m y a 450 m por encima del punto desde donde se ha realizado el disparo. Ignórese cualquier efecto de resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la componente vertical de su velocidad inicial? (*b*) ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad inicial? (*c*) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada respecto del punto de lanzamiento? (*d*) Cuando el proyectil alcanza la colina, ¿con qué velocidad impacta y qué ángulo forma ésta con la vertical?

97 ••• Un proyectil se dispara con un ángulo de elevación θ. Un observador situado junto a la rampa de lanzamiento sitúa la posición del proyectil midiendo el ángulo de elevación ϕ que se muestra en la figura 3.38 cuando éste está en su máxima elevación. Demostrar que $\text{tg}\,\phi = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,\theta$. (Despreciar la resistencia del aire.) SSM

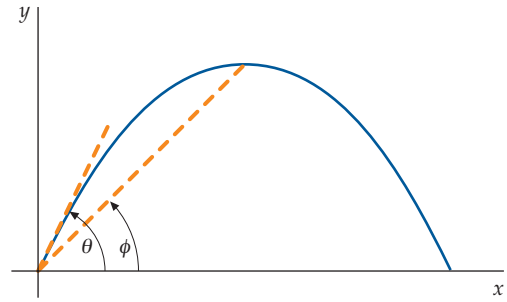


FIGURA 3.38 Problema 97

98 ••• Un cañón de juguete se coloca en una rampa que tiene una pendiente con un ángulo ϕ. (*a*) Si la bala se proyecta hacia arriba por una colina con un ángulo de θ_0 por encima de la horizontal (figura 3.39) y tiene una velocidad inicial v_0, demostrar que el alcance R (medido a lo largo de la rampa) viene dado por

$$R = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\text{tg}\,\theta_0 - \text{tg}\,\phi)}{g\cos\phi}$$

Ignorar la resistencia del aire.

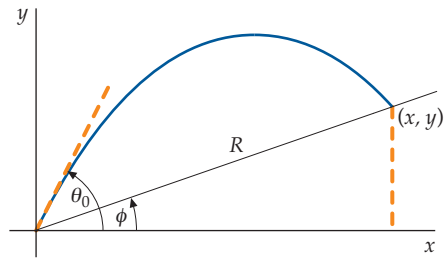


FIGURA 3.39 Problema 98

99 ••• Desde el tejado de un edificio de 20 m de altura se lanza una piedra con un ángulo de tiro de 53° sobre la horizontal. (*a*) Si el alcance horizontal de la piedra es igual a la altura del edificio, ¿con qué velocidad se lanzó la roca? (*b*) ¿Cuánto tiempo estuvo en el aire? (*c*) ¿Cuál es su velocidad justo antes de chocar contra el suelo? (Despreciar la resistencia del aire.)

100 ••• Una muchacha que está a 4 m de una pared vertical lanza contra ella una pelota (figura 3.40). La pelota sale de su mano a 2,0 m por encima del suelo con una velocidad inicial $v_0 = 14$ m/s a 45º. Cuando la pelota choca en la pared, se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que permanece sin variar su componente vertical. (*a*) ¿Dónde caerá la pelota al suelo? (*b*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire antes de golpear contra la pared? (*c*) ¿A qué altura la pelota golpeó la pared? (*d*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire después de golpear contra la pared? Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

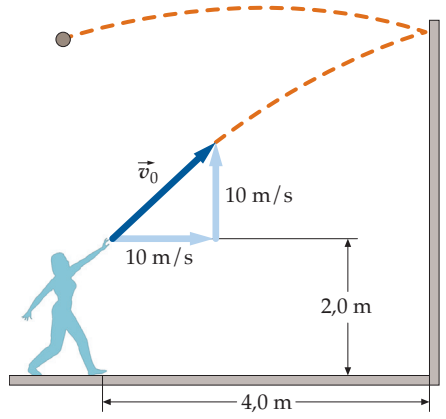


FIGURA 3.40 Problema 100

101 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Las catapultas fueron utilizadas hace miles de años para lanzar cualquier cosa, desde piedras hasta caballos. Durante una batalla en la actual Baviera, los artilleros de las tribus germanas lanzaban fideos gigantes a las fortificaciones romanas cuyas paredes median 8,5 m de altura. Las catapultas lanzaban los fideos desde una altura de 4 m sobre el suelo a una distancia de 38 m desde las paredes de la fortificación con un ángulo 60° por encima del eje horizontal (figura 3.41). Si los proyectiles debían salpicar a los soldados romanos que se hallaban en lo alto de las paredes de la fortificación con pasta pulverizada, (*a*) ¿cuál debía ser el módulo de la velocidad de lanzamiento? (*b*) ¿Cuánto tiempo estaban los fideos en el aire? (*c*) ¿Con qué velocidad impactaban los fideos en los soldados? Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

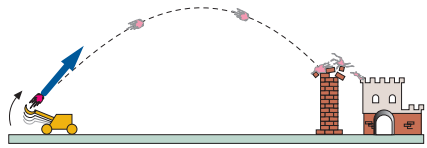


FIGURA 3.41 Problema 101

102 ••• La distancia del puesto del lanzador de béisbol a la base es de 18,4 m. El terraplén donde se sitúa el lanzador está 0,20 m sobre el nivel del campo. Al lanzar una pelota con una velocidad inicial de 37,5 m/s, sale de la mano del lanzador a una altura de 2,3 m sobre el terraplén. (*a*) ¿Qué ángulo debe formar $\vec{v}_0$ y la horizontal para que la pelota cruce la base a 0,7 m por encima del suelo? (Despreciar la interacción con el aire.) (*b*) ¿Con qué velocidad la pelota cruza la meta? SSM

103 ••• Supongamos que un disco de hockey se lanza de tal modo que justamente sobrepasa la pared de plexiglás, situada a 12 m, cuando se encuentra a su altura máxima de 2,80 m. Determinar la componente vertical de la velocidad inicial, (*b*) el tiempo que tarda en llegar a la pared y (*c*) la componente horizontal de la velocidad inicial, su módulo y el ángulo de lanzamiento. Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

104 ••• Un muchacho se aproxima con su motocicleta al lecho de un riachuelo de 7 m de anchura. Se ha construido una rampa con una inclinación de 10° para la gente atrevida que quiera saltar la zanja. El muchacho circula a su máxima velocidad, 40 km/h. (*a*) ¿Debería intentar el salto o pisar los frenos con energía? (*b*) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe llevar la motocicleta para dar este salto? (Suponer la misma elevación en los dos lados del obstáculo.) (Despreciar la resistencia del aire.)

105 ••• Si una bala que sale por la boca del arma a 250 m/s ha de chocar contra un blanco situado a 100 m de distancia a la misma altura que el arma (1,7 m sobre el nivel del mar), ésta debe apuntar a un punto por encima del blanco. (*a*) ¿Qué distancia debe haber entre el blanco y este punto? (*b*) ¿A qué distancia por detrás del blanco caerá la bala al suelo? (Despreciar la resistencia del aire.) SSM

PROBLEMAS GENERALES

106 •• Un albañil situado en el tejado de una casa deja caer involuntariamente su martillo, y éste resbala por el tejado con una velocidad constante de 4 m/s. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y su punto más bajo está a 10 m de altura sobre el suelo. (*a*) ¿Cuánto tarda el martillo desde que deja el tejado hasta que cae al suelo? (*b*) ¿Qué distancia horizontal recorrerá el martillo después de abandonar el tejado de la casa y antes de que choque contra el suelo? (Despreciar la resistencia del aire.)

107 •• Cuando una pelota de squash rebota sobre la pared sale con un módulo de la velocidad que representa el 25% del módulo de la velocidad con que impactó. Supongamos que la pelota se sirve a 45 cm sobre el suelo con un ángulo de 6° sobre la superficie y a una distancia de 12 m de la pared. (*a*) Si impacta sobre la pared justo en el punto más alto de su trayectoria, determinar la altura de impacto. (*b*) ¿A qué distancia de la pared cae la pelota después del rebote? (Ignórense los efectos del rozamiento con el aire).

108 •• El *quarterback* de un equipo de fútbol americano lanza un pase con un ángulo de 36,5°. El pase se realiza hacia atrás desde la línea de inicio de la jugada. Su receptor salió de la línea de inicio de la jugada 2,5 s antes del lanzamiento corriendo campo a través a 7,5 m/s. ¿Con qué velocidad debió lanzar el *quarterback* el balón para que el receptor lo interceptara en condiciones óptimas? Suponer que el balón se intercepta a la misma altura desde la que se lanzó y que el receptor corrió en la misma dirección en que fue lanzado el balón. (Despreciar la resistencia del aire.)

109 •• Supóngase que para las pruebas de piloto es necesario soportar una aceleración de hasta cinco veces la de la gravedad (es decir, se debe estar consciente y alerta como para poder pilotar). Durante el curso de unas maniobras se le pide que pilote el avión describiendo un círculo horizontal a una velocidad de 1900 millas/h. (*a*) ¿Cuál es el radio más pequeño del círculo que puede describir de forma segura? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer la mitad del círculo?

110 •• Una partícula se mueve en el plano xy con aceleración constante. Para $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}_1 = (4{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j}$ con velocidad $\vec{v}_1$. Para $t = 2$ s, la partícula se ha desplazado a la posición $\vec{r}_2 = (10\text{ m})\hat{i} - (2{,}0\text{ m})\hat{j}$ y su velocidad ha cambiado a $\vec{v}_2 = (5{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (6{,}0\text{ m/s})\hat{j}$. (*a*) Determinar $\vec{v}_1$. (*b*) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en función del tiempo? (*d*) ¿Cuál es el vector posición de la partícula en función del tiempo?

111 •• Un avión A vuela hacia el este con una velocidad de 400 millas por hora. Directamente por debajo, a una distancia de 4000 pies, un avión B vuela hacia el norte a 700 millas por hora. Calcular la velocidad relativa del avión B respecto al A. SSM

112 •• Un buceador se tira al mar desde un acantilado en Acapulco, Méjico, situado a 30 m sobre el nivel del mar. El buceador activa su mochila de propulsión que le proporciona una aceleración horizontal constante de 5 m/s^2 sin afectar a su componente vertical. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda en caer al mar? (*b*) Suponiendo que el acantilado es vertical, ¿a qué distancia del acantilado cae al mar? (*c*) Demuestre que la trayectoria es una línea recta. (Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.)

113 •• Una pequeña bola de acero se proyecta horizontalmente desde la parte superior de una escalera de escalones rectangulares. La velocidad inicial de la bola es de 3 m/s. Cada escalón tiene 0,18 m de altura y 0,3 m de ancho. ¿Con qué escalón chocará la bola en primer lugar? SSM

114 •• Una persona lanza una pelota a la distancia x_0 cuando está de pie sobre un terreno nivelado. ¿A qué distancia lanzará la misma pelota desde lo alto de un edificio de altura h si lo hace con ángulos de inclinación (*a*) 0°, (*b*) 30°, (*c*) 45°? (Despreciar la resistencia del aire.)

115 ••• Darlen es una motorista acróbata de un circo ambulante. Para dar más emoción a su actuación, salta desde una rampa que posee una inclinación θ y sobrepasa una zanja con llamas de anchura x y alcanza el otro extremo sobre una plataforma elevada (altura h respecto del lado inicial) (figura 3.42). (*a*) Para una determinada altura h, encuentre la velocidad de despegue mínima v_{min} para realizar el salto con éxito.

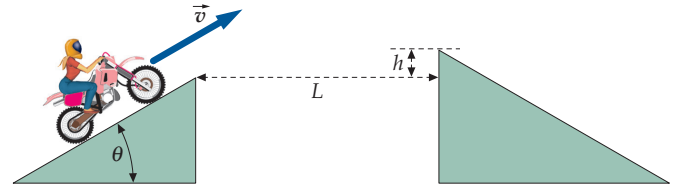


FIGURA 3.42 Problema 115

(*b*) ¿Cuál es v_{min} para un ángulo de lanzamiento $\theta = 30^o$ si la profundidad del pozo es de $L = 8$ m y la altura de la plataforma $h = 4$ m? (*c*) Muestre que, independientemente del módulo de la velocidad de despegue, la altura máxima de la plataforma es $h < L\,\mathrm{tg}\,\theta_0$. Interprete el resultado físicamente. (Desprecie los efectos de la resistencia del aire y trate la motocicleta como una partícula.)

116 ••• Una pequeña lancha pone rumbo hacia un puerto situado a 32 km hacia el noroeste de su posición inicial cuando, súbitamente, se ve envuelta en una densa niebla. El capitán mantiene el rumbo al noroeste y una velocidad de 10 km/h relativa al agua. Tres horas más tarde, la niebla se levanta y el capitán observa que se encuentra exactamente a 4,0 km al sur del puerto. (*a*) ¿Cuál fue la velocidad media de la corriente durante aquellas tres horas? (*b*) ¿En qué dirección debería haber puesto su rumbo la lancha para alcanzar su destino en una trayectoria lineal? (*c*) Si hubiera seguido esta trayectoria lineal, ¿qué tiempo habría necesitado para realizar el viaje?

117 •• Galileo indicó que, si se despreciaba la resistencia del aire, los alcances de los proyectiles lanzados con ángulos de tiro mayores de 45° en una determinada cantidad eran iguales a los alcances de proyectiles lanzados con ángulos de tiro menores de 45° en la misma cantidad. Demostrarlo. SSM

118 •• Desde la parte superior de un acantilado de altura *h* se lanzan dos pelotas con idéntica velocidad. Una de ellas se lanza hacia arriba con un ángulo α respecto a la horizontal. La otra pelota se lanza hacia abajo con un ángulo β respecto a la horizontal. Demostrar que ambas pelotas chocan contra el suelo con la misma velocidad y calcular el valor de esta velocidad en función de *h* y de la velocidad inicial v_0. (Despreciar la resistencia del aire.)

119 •• Desde el interior de su coche, un conductor lanza un huevo verticalmente hacia arriba. El lanzamiento se inicia a la altura del pecho y la altura máxima que alcanza es justamente la altura del techo, es decir, 65 cm por encima de la altura de lanzamiento. El conductor atrapa el huevo a la misma altura que lo lanzó. Usted es un peatón que mide la distancia entre los puntos de captura y lanzamiento obteniendo 19 m. (*a*) ¿A qué velocidad se mueve el coche? (*b*) Con respecto a su sistema de referencia ¿con qué ángulo respecto al eje horizontal fue lanzado el huevo?

120 ••• Se traza una línea recta desde el centro hasta el borde de un plato de 16 cm de radio. Una pulga se desplaza lentamente sobre la línea desde el centro hacia el borde al tiempo que el plato gira en sentido contrario a las agujas del reloj a 45 rpm. La velocidad de la pulga relativa al plato es de 3,5 cm/s. Si la dirección inicial de movimiento es la dirección positiva del eje *x*, calcúlense las componentes de la velocidad de la pulga cuando llega al borde del plato.

121 ••• Un piloto acrobático pilota un antiguo *Sopwith Camel* de la Primera Guerra Mundial desde Dubuque (Iowa) hasta Chicago (Illinois) para una exhibición aérea. No se da cuenta de que la antigua brújula magnética del avión no funciona correctamente y marca como dirección norte lo que en realidad corresponde a 16,5º al este del norte. En un momento del vuelo, el aeropuerto de Chicago le informa de que se encuentra a 150 km al oeste del aeropuerto. Entonces, el piloto pone rumbo al este, de acuerdo con la dirección que marca la brújula del avión y vuela a 150 km/h durante 45 minutos. En ese momento, el piloto espera ver el aeropuerto e iniciar el descenso. ¿A qué distancia real se encuentra en ese momento de Chicago y cuál debería ser el cambio de rumbo para poder ir a Chicago en línea recta?

122 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un avión de transporte pierde un equipaje mientras asciende. La maniobra de ascenso se realiza a 275 millas por hora con un ángulo de 37º sobre la horizontal. Durante el ascenso cae el equipaje deslizándose por la rampa a velocidad despreciable. El equipaje cae sobre un campo situado a 7,5 km del punto de salida. Calcular el tiempo que ha tardado en salir el equipaje del avión. (Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.)

CAPÍTULO 4

ESTE AVIÓN ESTÁ ACELERANDO ANTES DEL DESPEGUE. LAS LEYES DE NEWTON RELACIONAN LA ACELERACIÓN DE UN OBJETO CON SU MASA Y CON LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE ÉL. *(John Neubauer/FPG/Getty.)*

Leyes de Newton

4.1 Primera ley de Newton: ley de la inercia
4.2 Fuerza y masa
4.3 Segunda ley de Newton
4.4 Fuerza debida a la gravedad: el peso
4.5 Fuerza de contacto: sólidos, muelles y cuerdas
4.6 Resolución de problemas: diagramas de fuerzas de sistemas aislados
4.7 Tercera ley de Newton
4.8 Problemas con dos o más objetos

? Si usted fuera un pasajero, ¿cómo usaría las leyes de Newton para determinar la aceleración del avión? (Véase el ejemplo 4.9.)

Ahora que ya hemos estudiado cómo se mueven los cuerpos en una, dos y tres dimensiones, podemos plantearnos estas preguntas: "¿Por qué los objetos se ponen en movimiento?" y "¿Cuáles son las causas que hacen que un cuerpo en movimiento cambie su velocidad o cambie de dirección?"

Esas cuestiones ocuparon la mente de Sir Isaac Newton, que nació en 1642, el año que murió Galileo. Como estudiante en Cambridge, donde fue más tarde profesor de matemáticas, Newton estudió los trabajos de Galileo y Kepler. Quería entender por qué los planetas se movían elípticamente a velocidades que dependían de la distancia al Sol e incluso por qué el sistema solar permanecía siempre unido. Durante su vida desarrolló su ley de la gravitación, que examinaremos en el capítulo 12 y sus tres leyes básicas del movimiento que constituyen la base de la mecánica clásica.

Las leyes de Newton relacionan las fuerzas que se ejercen los cuerpos entre sí, así como los cambios en el movimiento de un objeto con las fuerzas que actúan sobre él. Aunque ya tenemos una idea intuitiva de algunas fuerzas, como las de empuje o de tracción ejercidas por nuestros músculos o por muelles o gomas elásticas, las leyes de Newton nos permiten refinar nuestra comprensión sobre las fuerzas en general.

En este capítulo, describiremos las tres leyes del movimiento de Newton y empezaremos a utilizarlas para resolver problemas que impliquen objetos en movimiento y en reposo.

4.1 PRIMERA LEY DE NEWTON: LEY DE LA INERCIA

Empujemos un trozo de hielo sobre una mesa: se desliza y luego se para. Si la mesa está húmeda, el hielo recorre un espacio mayor antes de pararse. Si se trata de un trozo de hielo seco (dióxido de carbono congelado) sobre un colchón de vapor de dióxido de carbono, el deslizamiento es mucho mayor y el cambio de velocidad es muy pequeño. Antes de Galileo se creía que siempre era necesaria una fuerza, tal como un empuje o un tirón, para mantener un cuerpo en movimiento con velocidad constante. Pero Galileo, y posteriormente Newton, se dio cuenta de que si los cuerpos se detenían en su movimiento en las experiencias diarias era debido al rozamiento (o fricción). Si éste se reduce, el cambio de velocidad se reduce. Una capa de agua o un colchón de gas son especialmente efectivos para reducir el rozamiento, permitiendo que el objeto se deslice a gran distancia con un pequeño cambio en su velocidad. Si se eliminan todas las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo —razonaba Galileo— su velocidad no cambiará, una propiedad de la materia que él describía como **inercia**. Esta conclusión restablecida por Newton como su primera ley, se llama también **ley de la inercia**.

Una versión moderna de las leyes de Newton es la siguiente:

Primera ley. Todo cuerpo en reposo sigue en reposo *a menos que* sobre él actúe una fuerza externa. Un cuerpo en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante *a menos que* sobre él actúe una fuerza externa.

PRIMERA LEY DE NEWTON

SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES

La primera ley de Newton no distingue entre un objeto en reposo y un objeto que se mueve con velocidad constante distinta de cero. El hecho de que un objeto esté en reposo o en movimiento con velocidad constante depende del sistema de referencia en el cual se observa el objeto. Consideremos una pelota situada en la bandeja de su asiento de un avión que vuela en una trayectoria horizontal. En un sistema de coordenadas fijo al avión (es decir, en el sistema de referencia del avión) la pelota está en reposo, y permanecerá en reposo relativo al avión siempre que éste vuele con velocidad constante (figura 4.1*a*).

Supongamos ahora que el piloto aumenta la potencia de los motores y el avión, de forma brusca, acelera (con respecto al suelo). Usted observará que la pelota, de repente, retrocede hacia la parte trasera del avión acelerando con respecto al avión incluso cuando no actúa ninguna fuerza sobre ella (figura 4.1*b*). En el sistema de referencia del avión, la primera ley de Newton no se puede aplicar, pues es un sistema de referencia acelerado. La primera ley de Newton sólo puede aplicarse a sistemas de referencia denominados inerciales. De hecho, la primera ley de Newton nos proporciona un criterio para determinar si un sistema de referencia es inercial o no.

Si sobre un objeto no actúa ninguna fuerza, cualquier sistema de referencia con respecto al cual la aceleración del objeto es cero es un **sistema de referencia inercial**.

DEFINICIÓN DE SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL

Tanto el avión, cuando se mueve a velocidad constante, como el suelo, son una buena aproximación de sistemas de referencia inerciales. Cualquier sistema de referencia que se mueve a velocidad constante con respecto a un sistema de referencia inercial también es un sistema de referencia inercial.

El rozamiento se reduce enormemente gracias a un colchón de aire que soporta el aerodeslizador. *(Jose Dupont/Explorer/Photo Researchers.)*

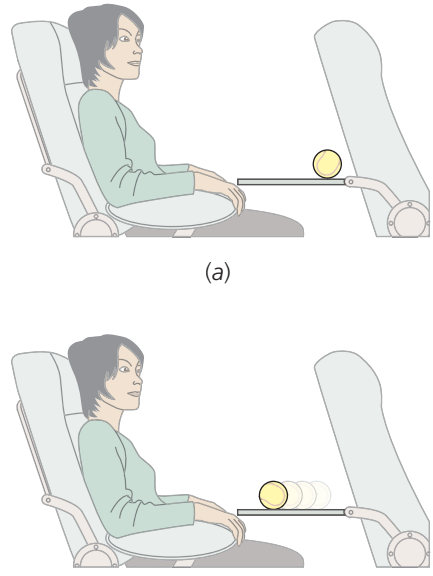


FIGURA 4.1 El avión vuela horizontalmente en línea recta a velocidad constante cuando usted coloca una pelota de tenis encima de la mesa. (*a*) El avión continúa volando a velocidad constante respecto al suelo y la pelota permanece en reposo sobre la mesa. (*b*) El piloto, de repente, presiona el acelerador y el avión aumenta su velocidad respecto al suelo. La pelota no aumenta su velocidad al ritmo que el avión de forma que se acelera hacia la parte trasera.

! La primera ley de Newton es válida *sólo* para sistemas de referencia inerciales.

Un sistema de referencia fijo al suelo no es totalmente un sistema de referencia inercial por la pequeña aceleración del suelo debida a la rotación terrestre y a la pequeña aceleración de la propia Tierra debida a su revolución alrededor del Sol. Sin embargo, como estas aceleraciones son del orden de 0,01 m/s^2 (o menos), podemos considerar que, aproximadamente, un sistema de referencia fijo a la superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial.

4.2 FUERZA Y MASA

Si utilizamos la primera ley de Newton y el concepto de sistema de referencia inercial, podemos definir una **fuerza** como una influencia externa o acción sobre un objeto que produce un cambio en su velocidad, es decir, una aceleración respecto a un sistema de referencia inercial (suponemos que no hay otras fuerzas que actúen sobre el cuerpo). La fuerza es una cantidad vectorial. Tiene un módulo (tamaño o intensidad de la fuerza) y una dirección.

Las fuerzas son ejercidas por unos cuerpos sobre otros y las fuerzas que se generan al estar dos cuerpos en contacto físico se llaman **fuerzas de contacto**. Golpear una pelota con un bate, tirar de un hilo de pescar, empujar el carrito de la compra o la fuerza de rozamiento entre las zapatillas y el suelo, son fuerzas de contacto. Obsérvese que en cada uno de los casos hay un contacto físico entre el cuerpo que aplica la fuerza y el cuerpo sobre el cual se aplica la fuerza. Otras fuerza actúan sin contacto directo entre los cuerpos. Estas fuerzas, conocidas como fuerzas de acción a distancia, incluyen la fuerza gravitacional, la fuerza magnética y la fuerza eléctrica.

LAS FUERZAS FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA

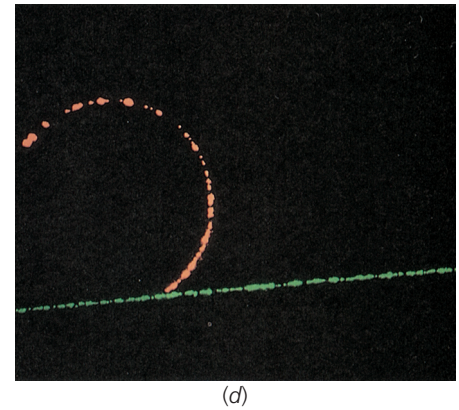
Las fuerzas son interacciones entre partículas. Los físicos tradicionalmente explican todas las interacciones observadas en la naturaleza en términos de cuatro interacciones básicas que ocurren entre partículas fundamentales (ver figura 4.2):

1. La interacción gravitacional. Interacción de largo alcance entre partículas debida a su masa. Se cree que la interacción gravitacional es debida al intercambio de unas partículas llamadas gravitones.
2. La interacción electromagnética. Interacción de largo alcance entre partículas cargadas eléctricamente incluyendo el intercambio de fotones.
3. La fuerza nuclear débil. Interacción a extremadamente corto alcance entre partículas subnucleares incluyendo el intercambio o producción de bosones W y Z. Las interacciones electromagnéticas y las interacciones débiles se han unificado recientemente bajo la denominación de interacción electrodébil.
4. La fuerza nuclear fuerte. Interacción de largo alcance entre hadrones, los cuales a su vez consisten en quarks, que une a los protones y neutrones para formar el núcleo atómico. Esta interacción incluye el intercambio de mesones entre los hadrones y de gluones entre los quarks.

(*a*)

(*b*)

(*c*)



(*d*)

FIGURA 4.2 (*a*) La fuerza gravitatoria ejercida entre la Tierra y un cuerpo próximo a la superficie terrestre es el peso del cuerpo. La interacción gravitacional entre el Sol y los demás planetas es la responsable de que éstos se mantengan en sus órbitas alrededor del Sol. De igual modo, la interacción gravitacional entre la Tierra y la Luna mantiene a ésta en una órbita casi circular alrededor de la Tierra. Las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Luna y el Sol sobre los océanos de la Tierra son responsables de las mareas. El monte Saint-Michel (Francia) mostrado en esta foto se convierte en una isla cuando sube la marea. (*b*) La fuerza electromagnética incluye las fuerzas eléctrica y magnética. Un ejemplo familiar de fuerza eléctrica es la atracción entre pequeños trozos de papel y un peine que se ha electrificado al pasarlo por el cabello. Los relámpagos sobre el Observatorio Nacional Kitt Peak, que se muestran en la foto, son el resultado de la fuerza electromagnética. (*c*) La fuerza nuclear fuerte tiene lugar entre las partículas elementales llamadas hadrones, que incluyen los protones y neutrones, constituyentes de los núcleos atómicos. Esta interacción resulta de la interacción de los quarks, bloques constitutivos de los hadrones y es la responsable de mantener los núcleos estables. La explosión de la bomba de hidrógeno ilustrada en esta fotografía es un ejemplo de la potencia de esta fuerza. (*d*) La fuerza nuclear débil se produce entre los leptones (que incluyen electrones y muones) y entre los hadrones (protones y neutrones). Esta fotografía de la cámara de niebla (en falso color) ilustra la interacción débil entre un muón de la radiación cósmica (verde) y un electrón (rojo) arrancado de un átomo. *((a) Cotton Coulson/ Woodfin Camp and Assoc.; (b) Gary Ladd; (c) Los Alamos National Lab; (d) Science Photo Library/Photo Researchers.)*

Las fuerzas que observamos a diario entre cuerpos macroscópicos son debidas a interacciones gravitacionales o electromagnéticas. Las fuerzas de contacto, por ejemplo, son en esencia fuerzas de origen electromagnético. Son ejercidas por las moléculas de la superficie de los cuerpos en contacto. Las fuerzas de acción a distancia son debidas a interacciones gravitacionales y electromagnéticas. Esas dos fuerzas actúan entre partículas separadas en el espacio. Aunque Newton no fue capaz de explicar cómo las fuerzas pueden actuar a través del vacío, los científicos introdujeron posteriormente el concepto de campo, que actúa como un agente intermedio. Por ejemplo, la atracción de la Tierra por el Sol se considera en dos etapas. El Sol crea una condición en el espacio que llamamos campo gravitatorio. Este campo ejerce entonces una fuerza sobre la Tierra. Del mismo modo, la Tierra produce un campo gravitatorio que ejerce una fuerza sobre el Sol. Nuestro peso es la fuerza ejercida por el campo gravitatorio de la Tierra sobre nosotros mismos. Cuando estudiemos la electricidad y el magnetismo (capítulos 22–31) analizaremos los campos eléctricos, producidos por cargas eléctricas, y magnéticos, producidos por cargas eléctricas en movimiento. Las interacciones fuertes y débiles se discutirán en el capítulo 42.

COMBINACIÓN DE FUERZAS

Si dos o más fuerzas actúan simultáneamente sobre un cuerpo, el resultado es equivalente a que una sola fuerza, igual a la suma vectorial de las fuerzas individuales, actuara en lugar de las fuerzas individuales (que las fuerzas se puedan combinar de esta forma se denomina **principio de superposición**). El vector suma de las fuerzas individuales se llama **fuerza neta** o **fuerza resultante** $\vec{F}_{\text{neta}}$ sobre el cuerpo. Es decir,

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

donde $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, . . . son las fuerzas individuales. La figura 4.3 muestra un objeto del que se tira en dos direcciones mediante dos cuerdas. El efecto es el mismo que si una sola fuerza igual a la fuerza neta tirara del cuerpo.

La unidad del fuerza en el SI es el newton (N). El newton se define en la siguiente sección. Un newton es igual al peso de una manzana de tamaño mediano.

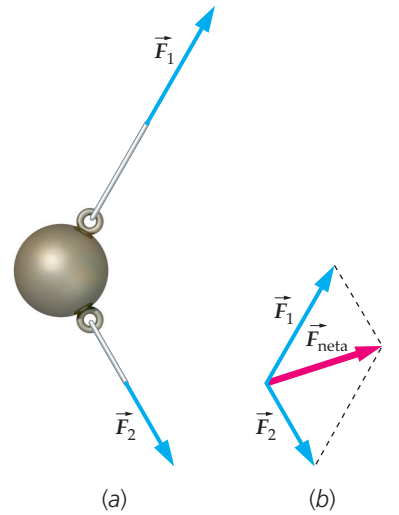


FIGURA 4.3 (*a*) Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tiran de la esfera. (*b*) El efecto de ambas fuerzas es equivalente al de una fuerza $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ que actúa sobre la esfera en lugar de las dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.1

¿La fuerza neta es una fuerza real?

MASA

Los objetos se resisten intrínsecamente a ser acelerados. Imaginemos que damos una patada a una pelota de fútbol o a una bola en la bolera. Ésta última se resiste mucho más a ser acelerada que la pelota de fútbol, lo cual se manifiesta inmediatamente en la diferente sensación que notan los dedos de nuestros pies al dar el golpe sobre ambos objetos. Esta propiedad intrínseca de un cuerpo es la **masa**. Es una medida de la inercia del cuerpo.

Como ya vimos en el capítulo 1, el cuerpo elegido como patrón internacional de masa es un cilindro de una aleación de platino-iridio que se conserva cuidadosamente en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia, al que se le asigna la masa de 1 **kilogramo**, la unidad de masa del SI.

Una unidad patrón conveniente de masa en la física atómica y nuclear es la **unidad de masa unificada** (u) que se define como la doceava parte de la masa del átomo de carbono-12 (^{12}C). La unidad de masa unificada está relacionada con el kilogramo por

$$1\ \text{u} = 1{,}660\,540 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

El concepto de masa se define como una constante de proporcionalidad en la segunda ley de Newton. Para medir la masa de un cuerpo la comparamos con una masa estándar, como el kilogramo patrón guardado en Sèvres. La comparación se cumple utilizando la segunda ley de Newton. En el ejemplo 4.1 se ilustra una forma de hacerlo.

4.3 SEGUNDA LEY DE NEWTON

La primera ley de Newton nos dice lo que sucede cuando sobre un cuerpo no actúan fuerzas. Pero, ¿qué sucede cuando hay fuerzas aplicadas sobre un cuerpo? Consideremos de nuevo un bloque de hielo que desliza con velocidad constante sobre una superficie suave, sin rozamiento. Si se empuja el hielo, se ejerce una fuerza $\vec{F}$ que produce un cambio en su velocidad. Cuanto más fuerte se empuje mayor será la aceleración resultante $\vec{a}$. La aceleración $\vec{a}$ de cualquier objeto es directamente proporcional a la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ ejercida sobre él, siendo el inverso de su masa la constante de proporcionalidad. Además, el vector aceleración y el vector fuerza neta tienen la misma dirección. Newton resumió estas observaciones en su segunda ley del movimiento:

Segunda ley. La aceleración de un cuerpo es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa. Así pues,

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{neta}}}{m}, \quad \text{donde} \quad \vec{F}_{\text{neta}} = \sum \vec{F} \qquad 4.1$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON

Una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo le produce una aceleración. Es una relación de causa y efecto. La fuerza neta es la causa y la aceleración es el efecto*.

Una fuerza neta de un newton le proporciona a un kilogramo de masa una aceleración de 1 m/s², así

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})(1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 \qquad 4.2$$

Entonces, una fuerza de 2 N da a una masa de 2 kg una aceleración de 1 m/s², y así sucesivamente.

En el sistema de unidades americano la unidad de fuerza es la *libra* (lb), donde 1 lb ≈ 4,45 N,† y la unidad de masa es el *slug*. La libra se define como la fuerza necesaria para producir una aceleración de 1 ft/s² a una masa de 1 slug:

$$1\ \text{lb} = 1\ \text{slug}\cdot\text{ft/s}^2$$

y se sigue que 1 slug ≈ 14,6 kg.

La ecuación 4.1 se expresa frecuentemente como:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$$

y será la expresión que utilizaremos más a menudo.

¡ La segunda ley de Newton, al igual que la primera ley, es válida *sólo* para sistemas de referencia inerciales.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.2

¿Es $m\vec{a}$ una fuerza?

Ejemplo 4.1 Un paquete de helado

La fuerza aplicada por una banda elástica produce una aceleración de 5 m/s² sobre un paquete de helado m_1 = 1 kg. Cuando la misma fuerza se aplica a un paquete de helado de masa m_2 a través de la misma goma le produce una aceleración de 11 m/s². (*a*) ¿Cuál es la masa del segundo paquete de helado? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza?

PLANTEAMIENTO Aplicar la fórmula $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, a cada objeto, y despejar la masa del paquete de helado y el módulo de la fuerza. Los módulos de las fuerzas ejercidas por las gomas son iguales.

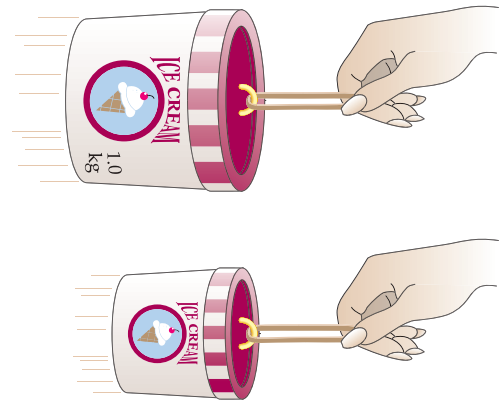


FIGURA 4.4

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a cada objeto. Únicamente hay una fuerza, por lo que necesitamos simplemente considerar el módulo de las variables vectoriales: $F_1 = m_1a_1$ y $F_2 = m_2a_2$

* La segunda ley de Newton relaciona fuerza neta con aceleración. No todo el mundo está de acuerdo en que la fuerza neta es la causa y la aceleración el efecto.

† La libra de la que estamos hablando es la libra de fuerza (una libra de fuerza es exactamente igual a 4,4482216152605 N). También existe la libra de masa que equivale exactamente a 0,45359237 kg.

2. La relación de las masas está en razón inversa con la relación de las aceleraciones producidas por la misma fuerza:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \quad \text{y} \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

3. Despejar m_2 en función de m_1, que es 1 kg:

$$m_2 = \frac{a_1}{a_2} m_1 = \frac{5{,}0 \text{ m/s}^2}{11 \text{ m/s}^2}(1{,}0 \text{ kg}) = \boxed{0{,}45 \text{ kg}}$$

(*b*) El módulo de la fuerza se obtiene multiplicando la masa por la aceleración de cualquiera de los cuerpos:

$$F_1 = m_1 a_1 = (1{,}0 \text{ kg})(5{,}0 \text{ m/s}^2) = \boxed{5{,}0 \text{ N}}$$

COMPROBACIÓN Considérese una masa de 0,45 kg de helado. Un kilogramo de helado pesa unas 2,2 libras, es decir, que el helado pesa una libra aproximadamente, que viene a ser el tamaño de un paquete de helado.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.1 Una fuerza de 3 N produce una aceleración de 2 m/s^2 sobre un objeto de masa desconocida. (*a*) ¿Cuál es la masa del objeto? (b) Si la fuerza se incrementa a 4 N, ¿cuál es la aceleración?

Para describir cuantitativamente las masas podemos aplicar fuerzas idénticas a dos masas distintas y comparar sus aceleraciones. Si una fuerza de magnitud F produce una aceleración de módulo a_1 al aplicarse a una masa m_1 y la misma fuerza produce una aceleración de módulo a_2 cuando se aplica a un objeto de masa m_2, entonces $m_1 a_1 = m_2 a_2$ (o bien $m_2/m_1 = a_1/a_2$). Es decir,

Si $F_1 = F_2$ entonces

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \qquad 4.3$$

COMPARACIÓN DE MASAS

Esta definición está de acuerdo con nuestra idea intuitiva de masa. Si la misma fuerza se aplica a dos objetos, el objeto de más masa es el que acelera menos. Experimentalmente se deduce que la relación a_1/a_2, obtenida cuando fuerzas de idéntica magnitud actúan sobre dos objetos, es independiente del módulo, dirección o tipo de fuerza utilizada. La masa de un cuerpo es una propiedad intrínseca del mismo y, por lo tanto, no depende de la localización del cuerpo. Es decir, la masa de un cuerpo continúa siendo la misma si el cuerpo está sobre la Tierra, sobre la Luna o en el espacio exterior.

Ejemplo 4.2 Un paseo espacial

Póngalo en su contexto

Un astronauta se ha extraviado en el espacio lejos de su cápsula espacial. Afortunadamente, posee una unidad de propulsión que le proporciona una fuerza constante $\vec{F}$ durante 3 s. Al cabo de los 3 s se ha movido 2,25 m. Si su masa es 68 kg, determinar $\vec{F}$.

PLANTEAMIENTO La fuerza que actúa sobre el astronauta es constante, de modo que la aceleración $\vec{a}$ también es constante. Por lo tanto, utilizaremos las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 y 3 para determinar $\vec{a}$, y con ello obtener la fuerza, a partir de $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. Escogeremos $\vec{F}$ en la dirección del eje x, de modo que $\vec{F} = F_x\hat{i}$ (figura 4.5) y $F_x = ma_x$.

SOLUCIÓN

1. Para determinar la aceleración, utilizamos la ecuación 2.14 con $v_0 = 0$:

$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a_x t^2 = 0 + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

$$a_x = \frac{2\Delta x}{t^2} = \frac{2(2{,}25 \text{ m})}{(3{,}0 \text{ s})^2} = 0{,}50 \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} = 0{,}50 \text{ m/s}^2\hat{i}$$

La unidad propulsora (que no se muestra en la fotografía) empuja al astronauta hacia la derecha. *(NASA/Science Source/Photo Researchers.)*

2. Como $\vec{F}$ es la fuerza *neta*, $\Sigma\vec{F}_i = \vec{F}$ sustituimos $\vec{a} = 0{,}50\ \text{m/s}^2\hat{i}$ y $m = 68\,\text{kg}$ en esta ecuación para encontrar la fuerza:

$$\vec{F} = ma_x\hat{i} = (68\ \text{kg})(0{,}50\ \text{m/s}^2)\hat{i} = \boxed{34\ \text{N}\,\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN La aceleración es 0,5 m/s^2, que es un 5% de g. Este valor parece plausible. Si el módulo de la aceleración fuese g, el astronauta se desplazaría más allá de 2,25 m en 3 s.

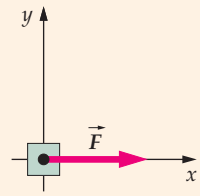


FIGURA 4.5

Ejemplo 4.3 Fuerzas que actúan sobre una partícula

Una partícula de masa 0,4 kg está sometida, simultáneamente, a dos fuerzas $\vec{F}_1 = -2{,}00\,\text{N}\,\hat{i} - 4{,}00\,\text{N}\,\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = -2{,}60\,\text{N}\,\hat{i} + 5{,}00\,\text{N}\,\hat{j}$ (Figura 4.6). Si la partícula está en el origen y parte del reposo para $t = 0$, calcular (*a*) su vector posición $\vec{r}$ y (*b*) su velocidad $\vec{v}$ para $t = 1{,}6$ s.

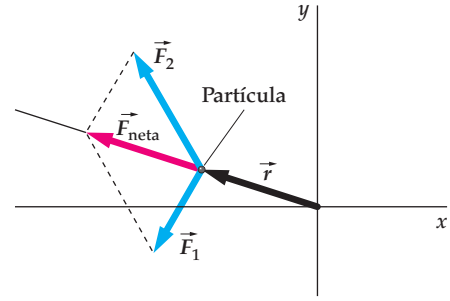


FIGURA 4.6 La aceleración tiene la misma dirección que la fuerza neta. La partícula parte del reposo desde el origen y se mueve en la dirección de la fuerza neta.

PLANTEAMIENTO Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ para encontrar la aceleración. Después podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas de los capítulos 2 y 3 para determinar la posición de la partícula y la velocidad en función del tiempo.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir la ecuación general del vector posición $\vec{r}$ en función del tiempo t para una aceleración constante $\vec{a}$ en función de $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, y $\vec{a}$, sustituyendo $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 = 0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$

2. Utilizar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ para expresar la aceleración $\vec{a}$ en función de la fuerza resultante $\Sigma\vec{F}$ y la masa m:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m}$$

3. Calcular $\Sigma\vec{F}$ a partir de las fuerzas dadas:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-2{,}00\,\text{N}\,\hat{i} - 4{,}00\,\text{N}\,\hat{j}) + (-2{,}60\,\text{N}\,\hat{i} + 5{,}00\,\text{N}\,\hat{j}) = -4{,}60\,\text{N}\,\hat{i} + 1{,}00\,\text{N}\,\hat{j}$$

4. Determinar el vector aceleración $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = -11{,}5\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 2{,}50\ \text{m/s}^2\,\hat{j}$$

5. Determinar el vector posición $\vec{r}$ para un tiempo cualquiera t:

$$\vec{r} = \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 = \tfrac{1}{2}a_x t^2\hat{i} + \tfrac{1}{2}a_y t^2\hat{j} = (-5{,}75\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 1{,}25\ \text{m/s}^2\,\hat{j})t^2$$

6. Determinar $\vec{r}$ para $t = 1{,}60$ s:

$$\vec{r} = \boxed{-14{,}7\ \text{m}\,\hat{i} + 3{,}20\ \text{m}\,\hat{j}}$$

(*b*) Escribir el vector velocidad $\vec{v}$ en función de la aceleración y el tiempo y calcular sus componentes para $t = 1{,}6$ s.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2(-5{,}75\ \text{m/s}^2\,\hat{i} + 1{,}25\ \text{m/s}^2\,\hat{j})t$$

$$\vec{v}(1{,}6\ \text{s}) = \boxed{-18{,}4\ \text{m/s}\,\hat{i} + 4{,}00\ \text{m/s}\,\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Los vectores posición, velocidad y aceleración tienen todos las componentes x negativas y las componentes y positivas. Esto era previsible al tratarse de un movimiento que parte del reposo desde el origen con aceleración constante.

4.4 FUERZA DEBIDA A LA GRAVEDAD: EL PESO

Si dejamos caer un objeto cerca de la superficie terrestre, el objeto acelera hacia la Tierra. Si podemos despreciar la resistencia del aire, todos los objetos poseen la misma aceleración, llamada aceleración de la gravedad $\vec{g}$**.** La fuerza que causa esta aceleración es la **fuerza de la gravedad** ($\vec{F}_g$) ejercida por la Tierra sobre cada objeto. El peso de un objeto es el módulo de la fuerza de la gravedad que actúa sobre él. Si la fuerza de la gravedad es la única fuerza que actúa sobre un objeto, se dice

que éste se encuentra en caída libre. Podemos aplicar la segunda ley de Newton ($\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$) a un cuerpo de masa m que está en caída libre con aceleración $\vec{g}$ para obtener así la siguiente expresión para la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \qquad 4.4$$

PESO

Como $\vec{g}$ es idéntico para todos los cuerpos, llegamos a la conclusión de que el peso de un cuerpo es proporcional a su masa cerca de la Tierra. El vector $\vec{g}$ se denomina **campo gravitatorio** terrestre y es la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto. Es igual a la aceleración en caída libre experimentada por un objeto. Cerca de la superficie terrestre $\vec{g}$ tiene el valor

$$g = 9{,}81\,\text{N/kg} = 9{,}81\,\text{m/s}^2 \qquad 4.5$$

Cuando trabajamos con el sistema de unidades americano, reemplazamos F_g/g por la masa m, donde F_g es el módulo de la fuerza de la gravedad en libras y g el módulo de la aceleración de la gravedad en pies por segundo al cuadrado. Dado que $9{,}81\ m = 32{,}2$ ft

$$g = 32{,}2\,\text{ft/s}^2 \qquad 4.6$$

Medidas cuidadosas muestran que cerca de la Tierra $\vec{g}$ varía con el lugar. En particular, en un punto por encima de la superficie terrestre, $\vec{g}$ apunta hacia el centro de la Tierra y varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a dicho centro. Así pues, un cuerpo pesa ligeramente menos cuando se encuentra en lugares muy elevados respecto al nivel del mar. El campo gravitatorio también varía ligeramente con la latitud debido a que la Tierra no es exactamente esférica, sino que está achatada en los polos. Por lo tanto, el peso, a diferencia de la masa no es una propiedad intrínseca del cuerpo. Aunque el peso de un cuerpo varía de un lugar a otro debido a las variaciones de g, esta variación es demasiado pequeña para ser apreciada en la mayor parte de las aplicaciones prácticas sobre la superficie terrestre o cerca de ella.

! El peso no es una propiedad intrínseca de los cuerpos.

Un ejemplo puede clarificar la diferencia entre masa y peso. Supongamos que en la Luna tenemos una bola pesada, como la de jugar a los bolos. Su peso es la fuerza gravitatoria que ejerce la Luna sobre ella, pero esta fuerza es sólo una sexta parte de la fuerza que se ejerce sobre la bola cuando está en la Tierra. En la Luna la bola pesa sólo una sexta parte de lo que pesa en la Tierra, por lo que para levantar la bola en ella se necesita una sexta parte de la fuerza. Sin embargo, lanzar la bola con cierta velocidad horizontal requiere la misma fuerza en la Luna que en la Tierra.

Aunque el peso de un objeto puede variar de un lugar a otro, en cualquier lugar su peso es proporcional a su masa. Así pues, podemos comparar fácilmente las masas de dos objetos en un lugar determinado comparando sus pesos.

La sensación que tenemos de la fuerza de la gravedad procede de las demás fuerzas que la equilibran. Por ejemplo, al estar sentados en una silla, apreciamos la fuerza ejercida por ella que equilibra nuestro peso y que, por tanto, evita que nos caigamos al suelo. Cuando estamos situados sobre una balanza de muelles, nuestros pies aprecian la fuerza ejercida sobre nosotros por la balanza. Esta balanza está calibrada de modo que registra la fuerza que debe ejercer (por compresión de su muelle) para equilibrar nuestro peso. La fuerza que equilibra nuestro peso se denomina **peso aparente**. Este peso aparente es el que viene dado por una balanza de muelle. Si no existiese ninguna fuerza para equilibrar nuestro peso, como sucede en la caída libre, el peso aparente sería cero. Esta condición, denominada **ingravidez**, es la que experimentan los astronautas en los satélites que giran alrededor de la Tierra. La única fuerza que actúa sobre el satélite es la gravedad (su peso). El astronauta está también en caída libre. La única fuerza que actúa sobre él es su peso, que produce la aceleración $\vec{g}$. Como no existe ninguna fuerza que equilibre la fuerza de la gravedad, el peso aparente del astronauta es cero.

Ejemplo 4.4 Una estudiante acelerada

La fuerza neta que actúa sobre una estudiante de 130 lb es 25 lb fuerza. ¿Cuál es su aceleración?

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton y despejar la aceleración. La masa puede determinarse a partir del peso de la estudiante.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la segunda ley de Newton, su aceleración es la fuerza dividida por su masa:

$$a = \frac{F_{\text{neta}}}{m} = \frac{F_{\text{neta}}}{F_g/g} = \frac{25{,}0 \text{ lb}}{(130 \text{ lb})/(32{,}2 \text{ ft/s}^2)} = \boxed{6{,}19 \text{ ft/s}^2}$$

COMPROBACIÓN La fuerza es ligeramente inferior a una quinta parte de su peso. Así, uno puede esperar que la aceleración fuese inferior a la quinta parte de g. $(32{,}2 \text{ ft/s}^2)/5 = 6{,}44 \text{ ft/s}^2$, y $6{,}19 \text{ ft/s}^2$ es ligeramente inferior a $6{,}44 \text{ ft/s}^2$, por lo que el resultado es plausible.

OBSERVACIÓN La ecuación de la solución puede reescribirse como

$$m = \frac{F_{\text{neta}}}{a} = \frac{F_g}{g}$$

Lo que demuestra que puede encontrarse la aceleración de la estudiante sin necesidad de calcular previamente su masa. Para cualquier cuerpo, el cociente entre F_{neta} y a es igual al cociente entre F_g y g.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.2 ¿Qué fuerza es necesaria para suministrar una aceleración de 3 ft/s^2 a un bloque de 5 lb?

4.5 FUERZAS DE CONTACTO: SÓLIDOS, MUELLES Y CUERDAS

La mayor parte de las fuerzas ordinarias que observamos sobre los objetos se ejercen por contacto directo entre ellos. En esta sección examinaremos algunas de las más comunes.

SÓLIDOS

Si empujamos una superficie, ésta devuelve el empuje. Consideremos una escalera que se apoya contra una pared (figura 4.7). En la región de contacto, la escalera empuja la pared con una fuerza horizontal, comprimiendo la distancia entre las moléculas de la superficie de la pared. Como los muelles de un colchón, las moléculas comprimidas de la pared empujan la escalera con una fuerza horizontal. Tal fuerza, perpendicular a las superficies en contacto, se denomina **fuerza normal** (en este caso, normal significa perpendicular). La superficie soporte se deforma ligeramente en respuesta a la carga, si bien esta deformación se aprecia difícilmente a simple vista.

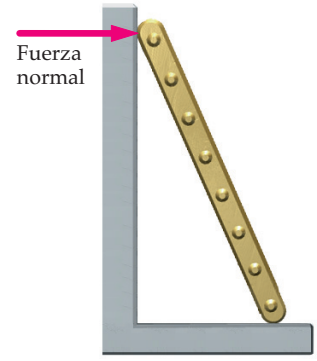


FIGURA 4.7 La pared sostiene la escalera ejerciendo sobre ella una fuerza normal a la pared.

Las fuerzas normales pueden variar dentro de un amplio intervalo de valores. Una mesa horizontal, por ejemplo, ejerce una fuerza normal dirigida hacia arriba sobre cualquier bloque que esté colocado sobre ella. A menos que el bloque sea tan pesado que la mesa se rompa, esta fuerza normal equilibrará la fuerza del peso del bloque. Además, si presionamos el bloque hacia abajo, la mesa ejercerá una fuerza soporte cuyo módulo será mayor que el peso del bloque para evitar que acelere hacia abajo.

En ciertas circunstancias, los cuerpos en contacto ejercerán fuerzas entre sí que son paralelas a las superficies en contacto. Consideremos el bloque de la figura 4.8. Si se le empuja suavemente de lado no resbalará, ya que la fuerza ejercida por el suelo se opone a que el bloque se deslice. Si, en cambio, se empuja fuertemente, el bloque empezará a moverse en la dirección de la fuerza. Para mantener el movimiento, es necesario ejercer continuamente una fuerza. A partir del instante en que se deja de empujar el bloque ralentiza su movimiento hasta que se para. La componente para-

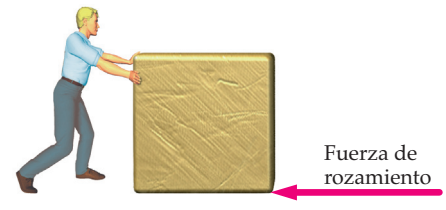


FIGURA 4.8 La fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el bloque se opone a su desplazamiento o a su tendencia a deslizarse.

lela de la fuerza de contacto ejercida por un cuerpo sobre otro se llama **fuerza de rozamiento**. (Las fuerzas de rozamiento se tratan con más detalle en el capítulo 5.)

Un contenedor (figura 4.9*a*) descansa sobre un plano inclinado. La fuerza de la gravedad empuja al contenedor hacia abajo. En consecuencia, el plano ejerce una fuerza $\vec{F}$ de igual módulo sobre el contenedor a fin de impedir su movimiento (figura 4.9*b*). La fuerza $\vec{F}$ es la fuerza de contacto del plano sobre el contenedor. Una fuerza de contacto como ésta puede interpretarse como dos fuerzas distintas, una llamada fuerza normal $\vec{F}_n$, dirigida en dirección perpendicular a la superficie del plano, y otra llamada fuerza de rozamiento $\vec{f}$, que es paralela a la superficie del plano. La fuerza de rozamiento se opone a cualquier tendencia que tenga el contenedor a deslizarse.

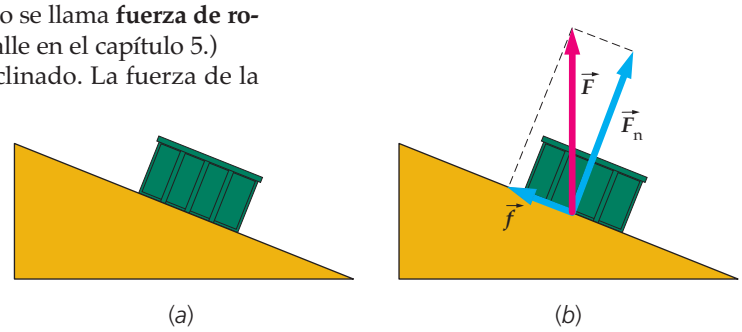


FIGURA 4.9 (*a*) Un contenedor descansa sobre un plano inclinado. (*b*) La fuerza de contacto del plano sobre el contenedor se representa o bien por la fuerza $\vec{F}$, o bien como superposición entre la fuerza normal $\vec{F}_n$ y la de fricción $\vec{f}$.

MUELLES

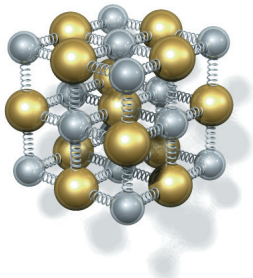
Cuando un muelle se comprime o se alarga una pequeña cantidad x, la fuerza que ejerce, según se demuestra experimentalmente, es

$$F_x = -kx \qquad 4.7$$

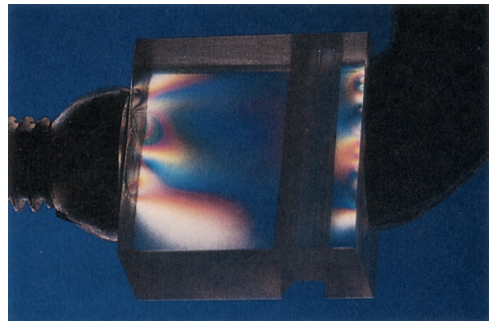
LEY DE HOOKE

donde k es la constante de fuerza, constante elástica o también llamada **constante recuperadora**, una medida de la rigidez del muelle (figura 4.10). Un valor negativo de x significa que el muelle ha sido comprimido una distancia $|x|$ desde su posición de equilibrio. El signo negativo en la ecuación 4.7 significa que la fuerza que ejerce el muelle que se estira o comprime adopta la dirección opuesta. Esta ecuación, conocida como **ley de Hooke**, es de gran interés. Un objeto en reposo bajo la influencia de fuerzas que se equilibran, se dice que está en *equilibrio estático*. Si un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza de restitución neta hacia la posición de equilibrio, se dice que el *equilibrio es estable*. Para pequeños desplazamientos, casi todas las fuerzas de restitución obedecen la ley de Hooke.

La fuerza molecular de atracción entre los átomos de una molécula o un sólido varía de modo muy parecido al de un muelle. Por ello, es frecuente representar el modelo de una molécula diatómica por dos masas conectadas por un muelle y el modelo de un sólido mediante una serie de masas conectadas por muelles como se muestra en la figura 4.11.

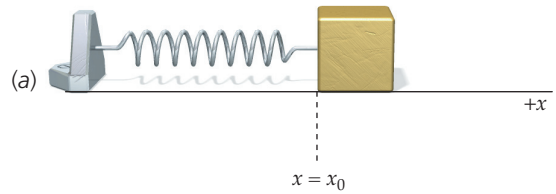


(*a*)

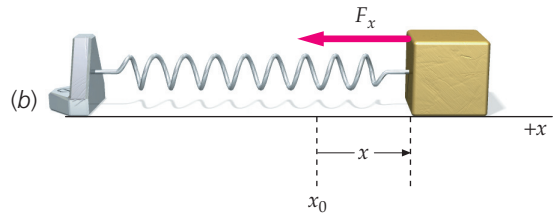


(*b*)

FIGURA 4.11 (*a*) Modelo de un sólido formado por átomos conectados entre sí por muelles elásticos. Los muelles son muy rígidos (constante de fuerza grande), de modo que cuando un peso actúa sobre el sólido, su deformación no es visible. Sin embargo, la compresión producida por la mordaza sobre un bloque de plástico en (*b*), da lugar a procesos elásticos que se hacen visibles mediante luz polarizada. *((b) Fundamental Photographs.)*



$F_x = -kx$ es negativa (porque x es positivo).



$F_x = -kx$ es positiva (porque x es negativo).

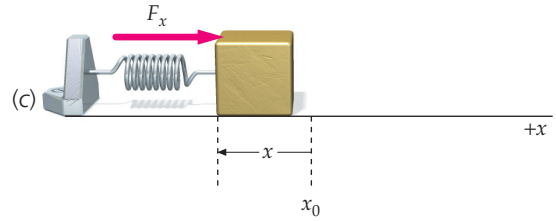


FIGURA 4.10 Muelle horizontal. (*a*) Cuando el muelle no está tenso, no ejerce ninguna fuerza sobre el bloque. (*b*) Cuando el muelle se estira, de modo que x es positivo, ejerce una fuerza de magnitud $k\,x$ en el sentido negativo de x. (*c*) Cuando el muelle se comprime, de modo que x es negativo, el muelle ejerce una fuerza de magnitud $k|x|$ en sentido positivo.

Ejemplo 4.5 El mate

Un jugador de baloncesto de 110 kg se cuelga del aro del cesto después de un mate espectacular (figura 4.12). Antes de dejarse caer, se queda colgando en reposo, con el anillo doblado hacia abajo una distancia de 15 cm. Suponiendo que el aro se comporta como un muelle elástico, calcular su constante de fuerza k.

PLANTEAMIENTO Como la aceleración del jugador es cero, la fuerza neta ejercida sobre él es nula. La fuerza hacia arriba ejercida por el aro equilibra su peso (figura 4.12). Sea $y = 0$ la posición original del aro, considerando y positiva hacia abajo. Por lo tanto, el desplazamiento del aro y_e es positivo, el peso $F_{gy} = mg$ es positivo y la fuerza ejercida por el aro $-ky_e$ es negativa.

SOLUCIÓN

1. Aplicar $\Sigma F_y = m\vec{a}_y$ al jugador. La aceleración del jugador es cero:
$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_{gy} + F_y = 0$$

2. Utilizar la ley de Hooke (ecuación 4.7) para encontrar F_y:
$$F_y = -ky_e$$

3. Sustituir las expresiones y valores para las componentes de las fuerzas del paso 1 y despejar k:
$$F_{gy} + F_y = 0$$
$$mg + (-ky_e) = 0$$
$$k = \frac{mg}{y_e} = \frac{(110\text{ kg})(9{,}8\text{ N/kg})}{0{,}15\text{ m}}$$
$$= \boxed{7{,}2 \times 10^3\text{ N/m}}$$

COMPROBACIÓN El peso de un cuerpo en newtons es casi diez veces mayor que la masa del cuerpo en kilogramos. Así, el peso del jugador es mayor que 1000 N. Una flexión del aro de 0,1 m correspondería a una k de 10 000 N/m, por lo que parece correcto que k tenga un valor de 7200 N/m para una flexión de 0,15 m.

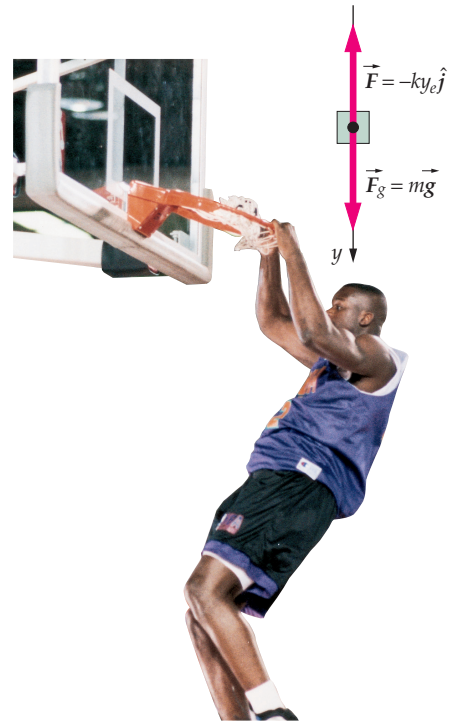


FIGURA 4.12 *(AFP-Getty Images.)*

OBSERVACIÓN Aunque el aro del cesto no se parece mucho a un muelle, el aro está colgado por una bisagra con un muelle que se deforma cuando el aro se inclina. Como resultado, la fuerza hacia arriba que hace el aro sobre las manos del jugador es proporcional a la inclinación del aro y en sentido opuesto. Obsérvese que hemos utilizado para g las unidades N/kg, de modo que kg se cancela, y obtenemos para k las unidades N/m. Para g siempre puede usarse, a nuestra conveniencia, 9,81 N/kg o 9,81 m/s², ya que 1 N/kg = 1 m/s².

PROBLEMA PRÁCTICO 4.3 Un racimo de plátanos de 4 kg está suspendido en reposo de una balanza de muelle, cuya constante de fuerza es $k = 300$ N/m. ¿Cuánto se ha estirado el muelle?

PROBLEMA PRÁCTICO 4.4 Un muelle, de constante de fuerza 400 N/m, está conectado a un bloque de 3 kg que descansa sobre una pista de aire horizontal, de modo que el rozamiento es despreciable. ¿Qué alargamiento debe experimentar el muelle para que al liberar el bloque éste posea una aceleración de 4 m/s²?

PROBLEMA PRÁCTICO 4.5 Un objeto de masa m oscila en el extremo de un muelle de constante de fuerza k. El tiempo correspondiente a una oscilación completa es el periodo T. Suponiendo que T depende de m y k, utilizar el análisis dimensional para determinar la forma de la relación $T = f(m, k)$, prescindiendo de las constantes numéricas. El método más simple es considerar las unidades. Obsérvese que las unidades de k son N/m = (kg · m/s²)/m = kg/s² y las unidades de m son kg.

CUERDAS

Un cuerpo se puede arrastrar y mover mediante una cuerda. Se puede suponer que una cuerda es como un muelle pero con una constante de fuerza muy grande, de forma que la deformación que adquiere al aplicar una fuerza es despreciable. Las cuerdas, sin embargo, no son rígidas, ya que que se flexionan y se tuercen y, por lo tanto, no pueden usarse para empujar objetos como lo hacen los muelles sino que úni-

camente pueden tirar de ellos. La magnitud de la fuerza que un trozo de una cuerda ejerce sobre otro adyacente se denomina **tensión**, T. Por lo tanto, si se tira de un objeto con una cuerda, la magnitud de la fuerza coincide con la tensión. En la sección 4.8 se desarrolla con más detalle el concepto de tensión en una cuerda o en una cadena.

4.6 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

Imaginemos un trineo tirado por un perro que avanza por un terreno helado. El perro tira de una cuerda ligada al trineo (figura 4.13*a*) con una fuerza horizontal que hace que éste gane velocidad. Podemos pensar en el trineo y la cuerda como un único cuerpo. ¿Qué fuerzas actúan sobre el cuerpo trineo-cuerda? Tanto el perro como el hielo tocan el cuerpo, de modo que ambos ejercen fuerzas sobre él. También sabemos que la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre el trineo y la cuerda (el peso del cuerpo). Resumiendo, estas tres fuerzas actúan sobre el cuerpo (suponiendo el rozamiento despreciable):

1. El peso del cuerpo trineo-cuerda $\vec{F}_g$.
2. La fuerza de contacto $\vec{F}_n$ ejercida por el hielo (sin rozamiento, esta fuerza es perpendicular al hielo).
3. La fuerza de contacto $\vec{F}$ ejercida por el perro.

Un diagrama que muestra esquemáticamente todas las fuerzas que actúan sobre un sistema, tal como el de la figura 4.13*b*, se denomina diagrama de fuerzas. Se denomina **diagrama de cuerpo libre** porque el objeto (el cuerpo) se dibuja sin su entorno.

Para dibujar a escala los vectores fuerza en un diagrama de fuerzas de sistema aislado es necesario determinar primero, usando métodos cinemáticos, la dirección del vector aceleración. Sabemos que el objeto se mueve hacia la derecha con velocidad creciente y, por lo tanto, que el vector aceleración va en la dirección de su movimiento, hacia la derecha. Obsérvese que $\vec{F}_n$ y $\vec{F}_g$ en el diagrama tienen magnitudes iguales. Los módulos deben ser iguales, ya que el trineo no acelera verticalmente. Como prueba de la corrección del diagrama del sistema aislado que hemos realizado, dibujamos el diagrama de la adición vectorial (figura 4.14) verificando que la suma de los vectores fuerza coincide con la dirección del vector aceleración.

Ahora podemos aplicar la segunda ley de Newton para determinar las componentes x e y de la fuerza neta sobre la partícula trineo-cuerda. La componente x de la segunda ley de Newton da

$$\Sigma F_x = F_{nx} + F_{gx} + F_x = ma_x$$
$$0 + 0 + F = ma_x$$

o

$$a_x = \frac{F}{m}$$

La componente y de la segunda ley de Newton expresa:

$$\Sigma F_y = F_{ny} + F_{gy} + F_y = ma_y$$
$$F_n - F_g + 0 = 0$$

o sea,

$$F_n = F_g$$

En este simple ejemplo hemos determinado dos magnitudes: la aceleración horizontal F/m, y la fuerza vertical $\vec{F}_n$ ejercida por el hielo $F_n = F_g = mg$.

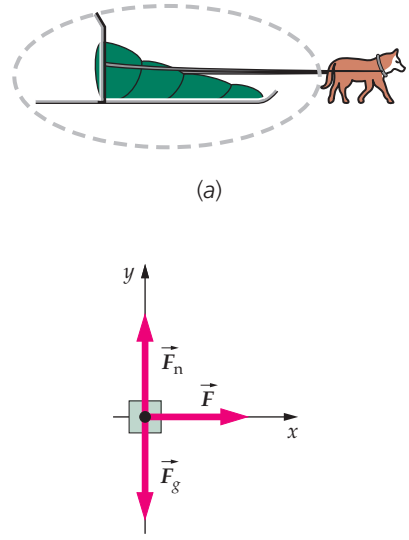


FIGURA 4.13 (*a*) Un perro tira de un trineo. El primer paso para resolver este problema es aislar el sistema que deseamos analizar. En este caso, la curva cerrada de puntos aísla el cuerpo trineo-cuerda de sus alrededores. (*b*) Las fuerzas que actúan sobre el trineo del dibujo (*a*).

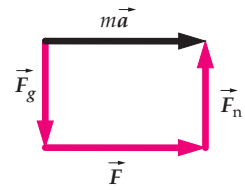


FIGURA 4.14 El vector suma de fuerzas del diagrama de fuerzas de un sistema aislado es igual a la masa por el vector aceleración.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de la segunda ley de Newton

PLANTEAMIENTO Asegurarse de que se identifican todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Luego, determinar la dirección del vector aceleración de la partícula, si es posible. Saber esta dirección será útil para elegir el sistema de referencia más adecuado para resolver el problema.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama claro que incluya las principales características del problema.
2. Aislar el cuerpo (partícula) de interés e identificar cada una de las fuerzas que actúan sobre él.
3. Dibujar el diagrama de fuerzas.
4. Elegir un sistema de coordenadas adecuado. Si se conoce la dirección de la aceleración escoger unos de los ejes que sea paralelo a ella. Para cuerpos que se deslizan sobre superficies, elegir los ejes de forma que uno sea paralelo y el otro perpendicular a la superficie.
5. Aplicar la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, en forma de componentes.
6. Despejar las incógnitas de las ecuaciones resultantes.

COMPROBACIÓN Comprobar si los resultados tienen las unidades correctas y parecen razonables. Sustituir valores extremos en la solución es un buen sistema para comprobar si se han cometido errores.

Ejemplo 4.6 Una carrera de trineos

Durante las vacaciones de invierno, un joven participa en una carrera de trineos donde los estudiantes sustituyen a los perros. El joven comienza la carrera tirando de una cuerda atada al trineo con una fuerza de 150 N que forma un ángulo de 25° con la horizontal. La masa del cuerpo trineo-cuerda-pasajero es de 80 kg y el rozamiento entre el trineo y el hielo es despreciable. Determinar: (*a*) la aceleración del trineo y (*b*) la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el trineo.

PLANTEAMIENTO Tres fuerzas actúan sobre el cuerpo: su peso $\vec{F}_g$, que actúa hacia abajo; la fuerza normal $\vec{F}_n$, que actúa hacia arriba; y la fuerza con que el joven tira de la cuerda $\vec{F}$, en dirección 25° sobre la horizontal. Como las fuerzas no coinciden en la misma línea de dirección, estudiaremos el sistema aplicando la segunda ley de Newton a las direcciones x e y por separado.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujamos un diagrama de fuerzas (figura 4.15*b*) del trineo. Incluye un sistema de coordenadas en el cual uno de los ejes de coordenadas apunta en la dirección de la aceleración del trineo. El objeto se mueve hacia la derecha con velocidad creciente, por lo que sabemos que la aceleración va en esa dirección:

2. *Nota:* se añaden los vectores fuerza en el diagrama (figura 4.16) para verificar que su suma va en la dirección de la aceleración:

3. Se aplica la segunda ley de Newton al objeto. Se escribe la ecuación tanto en forma vectorial como en sus componentes:
$$\vec{F}_n + \vec{F}_g + \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{o}$$
$$F_{nx} + F_{gx} + F_x = ma_x$$
$$F_{ny} + F_{gy} + F_y = ma_y$$

4. Se escriben las componentes x de $\vec{F}_n$, $\vec{F}_g$, y $\vec{F}$:
$$F_{nx} = 0, \quad F_{gx} = 0, \quad \text{y} \quad F_x = F\cos\theta$$

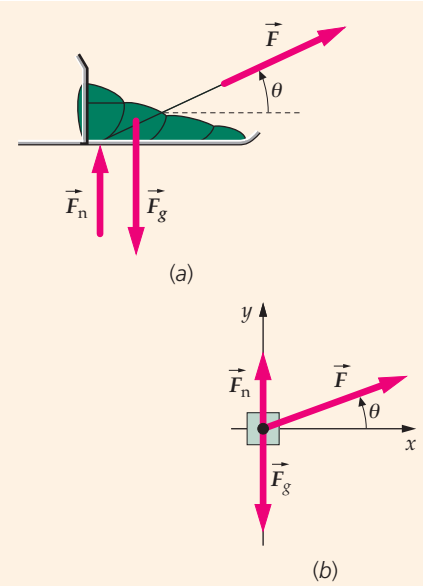


FIGURA 4.15

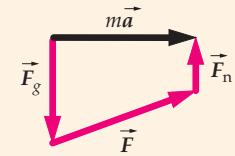


FIGURA 4.16 El vector suma de fuerzas del diagrama de fuerzas de un sistema aislado es igual a la masa por el vector aceleración.

5. Se sustituyen los resultados del paso 4 en la ecuación para la componente x del paso 3. Se despeja la aceleración a_x:

$$\Sigma \vec{F}_x = 0 + 0 + F\cos\theta = ma_x \quad \text{por lo tanto}$$
$$a_x = \frac{F\cos\theta}{m} = \frac{(150\text{ N})\cos 25°}{80\text{ kg}} = \boxed{1{,}7\text{ m/s}^2}$$

(b) 1. Se expresa la componente y de $\vec{a}$:

$$a_y = 0$$

2. Se escriben las componentes y de $\vec{F}_n$, $\vec{F}_g$, y $\vec{F}$:

$$F_{ny} = F_n, \quad F_{gy} = -mg, \quad \text{y} \quad F_y = F\,\text{sen}\,\theta$$

3. Se sustituyen los resultados de los pasos b1 y b2 en la ecuación para la componente y del paso a_3. Se despeja F_n:

$$\Sigma F_y = F_n - mg + F\,\text{sen}\,\theta = 0$$
$$F_n = mg - F\,\text{sen}\,\theta$$
$$= (80\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (150\text{ N})\,\text{sen}\,25° = \boxed{7{,}2 \times 10^2\text{ N}}$$

COMPROBACIÓN Sólo la componente x de $\vec{F}$, $F\cos\theta$, es la causa de la aceleración del cuerpo. Obsérvese también que el hielo soporta un peso inferior al peso total del cuerpo, pues la componente F sen θ es soportada por la cuerda.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.6 Si $\theta = 25°$, ¿cuál es la mayor fuerza F que puede aplicarse a la cuerda sin levantar el trineo de la superficie?

Ejemplo 4.7 Descarga de un camión *Póngalo en su contexto*

Suponga que trabaja para una gran compañía de transporte y que debe descargar de un camión una caja enorme y frágil usando una rampa como la que se muestra en la figura 4.17. Si la velocidad vertical con que llega la caja al final de la rampa es superior a 2,5 m/s (la velocidad que adquiere un objeto si cae desde una altura de 30,5 cm), su carga se daña. ¿Cuál es el mayor ángulo posible al que se puede instalar la rampa para conseguir una descarga segura? La rampa debe superar un metro de altura, está formada por rodillos (se puede suponer que no ejerce rozamiento) y está inclinada con la horizontal un ángulo θ.

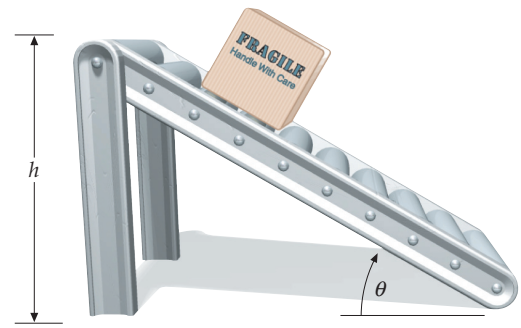


FIGURA 4.17

PLANTEAMIENTO Sobre la caja actúan dos fuerzas, la fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$ y la fuerza normal $\vec{F}_n$. Como estas fuerzas no son paralelas no pueden sumar cero, con lo cual, hay una fuerza resultante sobre el objeto que lo acelera. La rampa hace que la caja se mueva paralela a su superficie, por lo que elegimos la dirección de la pendiente de la rampa como la dirección x. Para determinar la aceleración, aplicamos la segunda ley de Newton a la caja. Cuando sepamos el valor de la aceleración, podremos usar un cálculo cinemático para determinar el mayor ángulo de la pendiente para lograr una descarga segura.

SOLUCIÓN

1. Dibujamos el diagrama de la figura 4.18 donde vemos que actúan dos fuerzas, el peso y la normal. Elegimos la dirección de la aceleración, en la dirección de la rampa hacia abajo, como dirección $+x$: *Nota*: como se ve en el diagrama, el ángulo entre $\vec{F}_g$ y el sentido negativo del eje y es el mismo que el ángulo entre la pendiente de la rampa y la horizontal. También se puede ver que $F_{gx} = F_g$ sen θ.

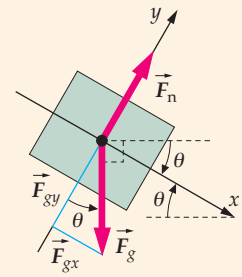


FIGURA 4.18

2. Para determinar a_x aplicamos a la caja la segunda ley de Newton ($\Sigma F_x = ma_x$). (*Nota:* $\vec{F}_n$ es perpendicular al eje x y $F_g = mg$):

$$F_{nx} + F_{gx} = ma_x \quad \text{donde}$$
$$F_{nx} = 0 \quad \text{y} \quad F_{gx} = F_g\,\text{sen}\,\theta = mg\,\text{sen}\,\theta$$

3. Se sustituye y despeja la aceleración, obteniendo:

$$0 + mg\,\text{sen}\,\theta = ma_x \quad \text{por lo que} \quad a_x = g\,\text{sen}\,\theta$$

4. Se establece una relación entre la componente vertical de la velocidad de la caja y la velocidad v_x a lo largo de la rampa:

$$v_v = v_x\,\text{sen}\,\theta$$

5. La velocidad v está relacionada con el desplazamiento Δx a lo largo de la rampa mediante la ecuación cinemática siguiente:

$$v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x\,\Delta x$$

6. Se sustituye a_x en la ecuación cinemática (paso 2), haciendo $v_0 = 0$, con lo cual:

$$v_x^2 = 2g\,\text{sen}\,\theta\,\Delta x$$

7. De la figura 4.17 se ve que cuando Δx es la longitud de la rampa, $\Delta x \operatorname{sen}\theta = h$, donde h es la altura de la rampa: $v_x^2 = 2gh$
8. Mediante el uso de $v_v = v \operatorname{sen}\theta$, se obtiene para v_v: $v_v = \sqrt{2gh}\operatorname{sen}\theta$
9. Se despeja el ángulo máximo y se obtiene: $2{,}50\ \text{m/s} = \sqrt{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(1{,}00\ \text{m})}\operatorname{sen}\theta_{\text{máx}}$
$\therefore\ \theta_{\text{máx}} = \boxed{34{,}4^\circ}$

COMPROBACIÓN Con un ángulo de 34,4° la componente vertical hacia abajo de la velocidad será ligeramente mayor que la mitad de la velocidad que la caja tendría si fuese dejada caer desde una altura de 1 m.

OBSERVACIÓN La aceleración por la rampa hacia abajo es constante e igual a g sen θ. Asimismo, la velocidad v al final de la rampa no depende del ángulo θ.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.7 Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la caja y demostrar que $F_n = mg\cos\theta$.

Ejemplo 4.8 Colgando un cuadro — *Inténtelo usted mismo*

Un cuadro que pesa 8 N se cuelga mediante dos cables que ejercen tensiones T_1 y T_2, tal como indica la figura 4.19. Determinar la tensión de los dos cables.

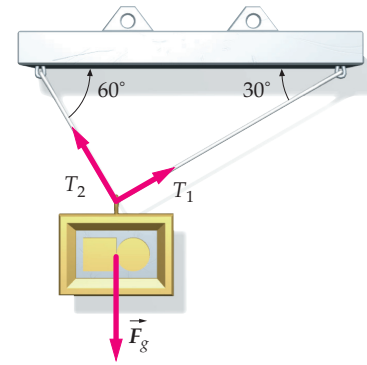


FIGURA 4.19

PLANTEAMIENTO Como el cuadro no posee aceleración, la fuerza neta que actúa sobre él debe ser nula. Las tres fuerzas que actúan sobre el cuadro, su peso $\vec{F}_g$, la tensión $\vec{T}_1$ y la tensión $\vec{T}_2$ deben dar una resultante nula.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos:	**Respuestas**
1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el cuadro (figura 4.20). Mostrar en el diagrama las componentes x e y de las tensiones.	
2. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ en forma vectorial al cuadro.	$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}$
3. Descomponer cada fuerza en sus componentes x e y. Así se obtienen dos ecuaciones para las incógnitas T_1 y T_2.	$T_{1x} + T_{2x} + F_{gx} = 0$ $T_1\cos 30^\circ - T_2\cos 60^\circ + 0 = 0$ y $T_{1y} + T_{2y} + F_{gy} = 0$ $T_1\operatorname{sen}30^\circ + T_2\operatorname{sen}60^\circ - F_g = 0$
4. Resolver la ecuación de la componente x para T_2 en función de T_1.	$T_2 = T_1\dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}$
5. Aplicar el valor de T_2 en la ecuación de la componente y del paso 3 y despejar T_1.	$T_1\operatorname{sen}30^\circ + \left(T_1\dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}\right)\operatorname{sen}60^\circ - F_g = 0$ $T_1 = 0{,}50F_g = \boxed{4{,}0\ \text{N}}$
6. Utilizar el resultado de T_1 para obtener el valor de T_2.	$T_2 = T_1\dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \boxed{6{,}9\ \text{N}}$

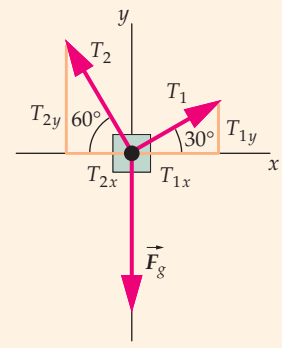


FIGURA 4.20

COMPROBACIÓN El cable más próximo a la vertical es el que soporta la mayor contribución del peso, como era de esperar. También vemos que $T_1 + T_2 > 8\text{N}$. La fuerza "extra" es debida a los cables que tiran a la derecha y a la izquierda.

Ejemplo 4.9 Un avión que acelera

Cuando un avión acelera en la pista del aeropuerto para despegar, un viajero decide determinar su aceleración mediante su yo-yo y comprueba que la cuerda del mismo forma un ángulo de 22° con la vertical (figura 4.21*a*). (*a*) ¿Cuál es la aceleración del avión? (*b*) Si la masa del yo-yo es de 40 g, ¿cuál es la tensión de la cuerda?

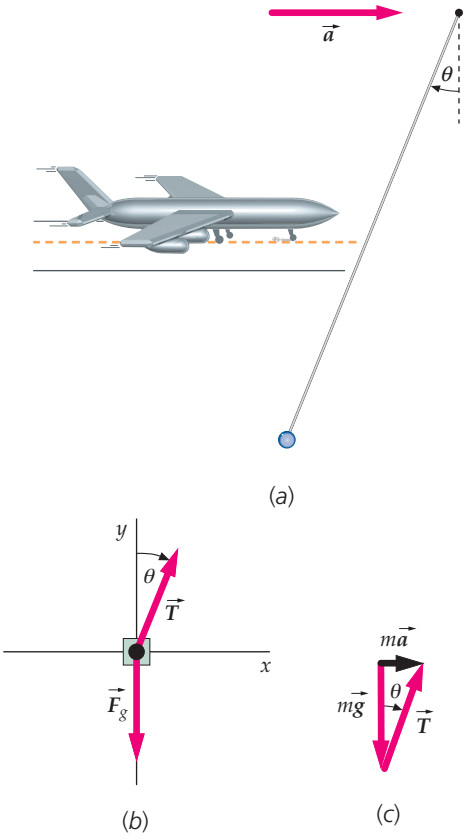


FIGURA 4.21

PLANTEAMIENTO El avión y el yo-yo tienen la misma aceleración hacia la derecha. La fuerza neta del yo-yo va en la misma dirección que su aceleración, hacia la derecha. Esta fuerza viene suministrada por la componente horizontal de la tensión $\vec{T}$. La componente vertical de $\vec{T}$ equilibra el peso del yo-yo. Elegimos un sistema de coordenadas en el cual la dirección x es paralela al vector aceleración $\vec{a}$ y la dirección y es vertical. Expresando la ley de Newton para ambas direcciones x e y, se obtienen dos ecuaciones que nos permiten calcular las dos incógnitas, a y T.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el yo-yo (figura 4.21*b*). Elegir la dirección positiva del eje x en la dirección de la aceleración.

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ según el método de las componentes para el yo-yo:

$$T_x + F_{gx} = ma_x$$
$$T \operatorname{sen}\theta + 0 = ma_x$$
o
$$T \operatorname{sen}\theta = ma_x$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al yo-yo. Mediante la trigonometría y $F_g = mg$, simplificar (figura 4.21). La aceleración apunta en la dirección positiva del eje x; por lo tanto, $a_y = 0$:

$$T_y + F_{gy} = ma_y$$
$$T\cos\theta - mg = 0$$
o
$$T\cos\theta = mg$$

4. Dividir el resultado del paso 2 por el del paso 3 y despejar la aceleración. El vector aceleración señala en la dirección positiva del eje x, con lo que $a = a_x$:

$$\frac{T \operatorname{sen}\theta}{T\cos\theta} = \frac{ma_x}{mg} \quad \text{entonces} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{a_x}{g} \text{ y}$$
$$a_x = g\operatorname{tg}\theta = (9{,}81\ \text{m/s}^2)\operatorname{tg}22{,}0° = \boxed{3{,}96\ \text{m/s}^2}$$

(*b*) Despejar la tensión, usando el resultado del paso 3:

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{(0{,}040\ 0\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}{\cos 22{,}0°} = \boxed{0{,}423\ \text{N}}$$

COMPROBACIÓN Para $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ y $\operatorname{tg}\theta = 0$ resulta $T = mg$, y $a_x = 0$.

OBSERVACIÓN T es mayor que el peso del yo-yo ($mg = 0{,}392$ N), ya que la cuerda no sólo evita que caiga el yo-yo, sino que también lo acelera en dirección horizontal. En este caso, utilizaremos para g las unidades m/s^2, ya que estamos calculando una aceleración.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.8 ¿Para qué aceleración a la tensión de la cuerda sería igual a $3\,mg$? ¿Cuánto valdría θ en este caso?

El ejemplo siguiente aplica las leyes de Newton a objetos que están en reposo relativo respecto a un sistema de referencia acelerado.

Ejemplo 4.10 Su peso en un ascensor

Un hombre de 80 kg está de pie sobre una balanza de muelle sujeta al suelo de un ascensor. La balanza está calibrada en newtons. ¿Qué peso indicará la balanza cuando (*a*) el ascensor se mueve con aceleración *a* hacia arriba, (*b*) el ascensor se mueve con aceleración descendente *a*′, (*c*) el ascensor se mueve hacia arriba a 20 m/s, mientras su velocidad decrece a razón de 8 m/s²?

PLANTEAMIENTO La lectura de la balanza es el módulo de la fuerza normal F_n ejercida por la balanza sobre el hombre (figura 4.22). Como el hombre está en reposo respecto al ascensor, tanto el uno como el otro poseen la misma aceleración. Sobre el hombre actúan dos fuerzas: la fuerza de la gravedad hacia abajo, mg, y la fuerza normal de la balanza, F_n, hacia arriba. La suma de ambas es la causa de la aceleración observada sobre el hombre. Elegiremos como positiva la dirección hacia arriba.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el hombre (figura 4.23):

2. Aplica $\Sigma F_y = ma_y$: $F_{ny} + F_{gy} = ma_y$

$F_n - mg = ma_y$

3. Despejar F_n. Esta es la lectura de la balanza (el peso aparente del hombre): $F_n = mg + ma_y = m(g + a_y)$

4. $a_y = +a$: $F_n = \boxed{m(g + a)}$

(*b*) $a_y = -a'$. Sustituimos a_y en el resultado del apartado 3 del paso a: $F_n = m(g + a_y) = \boxed{m(g - a')}$

(*c*) La velocidad es positiva pero decreciente, de manera que la aceleración será negativa. Entonces $a_y = -8\ \text{m/s}^2$. Sustituir en el apartado 3 del paso *a*:

$$F_n = m(g + a_y) = (80\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2 - 8{,}0\ \text{m/s}^2)$$
$$= 144{,}8\ \text{N} = \boxed{1{,}40 \times 10^2\ \text{N}}$$

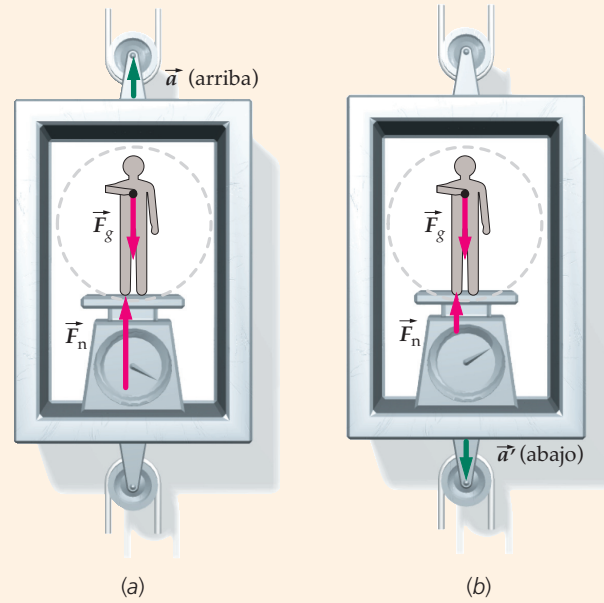


FIGURA 4.22

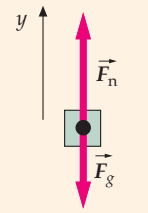


FIGURA 4.23

COMPROBACIÓN Si la aceleración del ascensor es hacia arriba, independientemente de que el ascensor suba o baje, uno esperaría pesar más de forma que el peso aparente fuese mayor que mg. Esto está de acuerdo con el resultado del apartado (*a*). Si la aceleración del ascensor es hacia abajo, uno esperaría pesar menos de forma que ahora el peso aparente fuese menor que mg. Los resultados de los apartados (*b*) y (*c*) están de acuerdo con los razonamientos anteriores.

PROBLEMA PRÁCTICO 4.9 Un ascensor desciende llegando al reposo con una aceleración 4,00 m/s². Si su masa es de 70 kg y se encuentra sobre una balanza sobre el suelo de un ascensor, ¿qué marca la balanza cuando el ascensor se va deteniendo?

4.7 TERCERA LEY DE NEWTON

La tercera ley de Newton pone de manifiesto una propiedad importante de las fuerzas: las fuerzas se dan en pares. Por ejemplo, si una fuerza se aplica sobre un cuerpo A, debe haber un cuerpo B que ejerza la fuerza. La tercera ley de Newton establece que esas fuerzas tienen el mismo módulo y direcciones opuestas. Es decir, si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo A que es igual en módulo y opuesta en dirección.

Tercera ley. Las fuerzas siempre actúan por pares iguales y opuestos. Si el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{AB}$ sobre el cuerpo B, éste ejerce una fuerza igual, pero opuesta $\vec{F}_{BA}$, sobre el cuerpo A. Así pues,

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \qquad 4.8$$

TERCERA LEY DE NEWTON

A cada par de fuerzas se les llama **par** de la tercera ley de Newton (**3LN**). Es común referirse a estas fuerzas como acción y reacción; sin embargo, esta terminología es desafortunada porque parece como si una fuerza reaccionara a la otra, lo cual no es cierto, ya que ambas fuerzas actúan simultáneamente. Cada una de ellas puede denominarse acción o bien reacción. Si cuando una fuerza externa actúa sobre un objeto particular la llamamos fuerza de acción, la correspondiente fuerza de reacción debe actuar sobre un objeto diferente. Así, en ningún caso dos fuerzas externas que actúan sobre un único objeto constituyen un par acción-reacción.

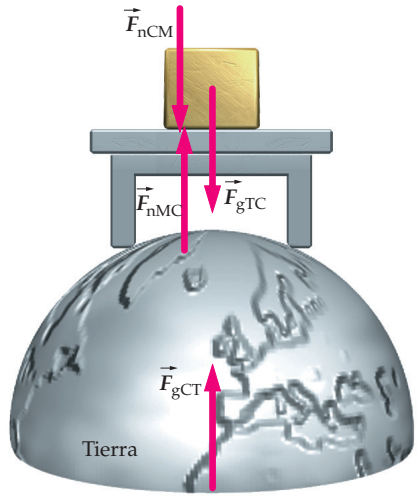


FIGURA 4.24

> **!** Los pares de la tercera ley de Newton son *siempre* iguales y opuestos.

> **!** En ningún caso dos fuerzas externas que actúan sobre *un único objeto* constituyen un par 3LN.

En la figura 4.24 se ve una caja que descansa encima de una mesa. La fuerza hacia abajo que actúa sobre la caja es fuerza de la gravedad $\vec{F}_{gTC}$ de la Tierra sobre el bloque. El bloque ejerce sobre la Tierra una fuerza igual y de signo contrario $\vec{F}_{gCT}$. Estas fuerzas forman pues un par 3LN. Si fueran las únicas fuerzas presentes, el bloque se aceleraría hacia abajo y la Tierra se aceleraría hacia arriba. Sin embargo, la mesa ejerce sobre la caja una fuerza hacia arriba $\vec{F}_{nMC}$ que compensa el peso. La caja también ejerce una fuerza sobre la mesa $\vec{F}_{nCM}$ hacia abajo. Las fuerzas $\vec{F}_{nCM}$ y $\vec{F}_{nMC}$ forman un par 3LN.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.3

¿Las fuerzas $\vec{F}_{gCT}$ y $\vec{F}_{nCM}$ de la figura 4.24 forman un par de la tercera ley de Newton?

Ejemplo 4.11 El caballo y el carro *Conceptual*

El caballo de la figura 4.25*a* rechaza tirar del carro porque razona: "de acuerdo con la tercera ley de Newton, cualquiera que sea la fuerza que ejerza sobre el carro, éste ejercerá una fuerza igual y de sentido contrario sobre mí, por lo que la fuerza neta será cero y no habrá ninguna opción para acelerarlo". ¿Dónde está la incorrección en este argumento?

PLANTEAMIENTO Estamos interesados en el movimiento del carro, y, por lo tanto, dibujamos un diagrama de fuerzas para él (figura 4.25*b*). La fuerza ejercida por el caballo en los arreos se designa por $\vec{F}_{HC}$. (Los arreos están atados al carro, por lo que los consideramos como parte del carro.) Hay otras fuerzas que actúan sobre el carro, como la fuerza de la gravedad sobre el carro $\vec{F}_{gEC}$, la fuerza que ejerce el suelo $\vec{F}_{n\,PC}$ y la fuerza de rozamiento ejercida por el pavimento, $\vec{f}_{PC}$ (fuerza de rozamiento).

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el carro (véase la figura 4.25*c*). El carro no acelera verticalmente, por lo que la suma de fuerzas en la dirección vertical es cero. Las fuerzas horizontales son $\vec{F}_{HC}$, que va hacia la derecha y $\vec{f}_{PC}$, que va hacia la izquierda. El carro acelerará si $|\vec{F}_{HC}| > |\vec{f}_{PC}|$.

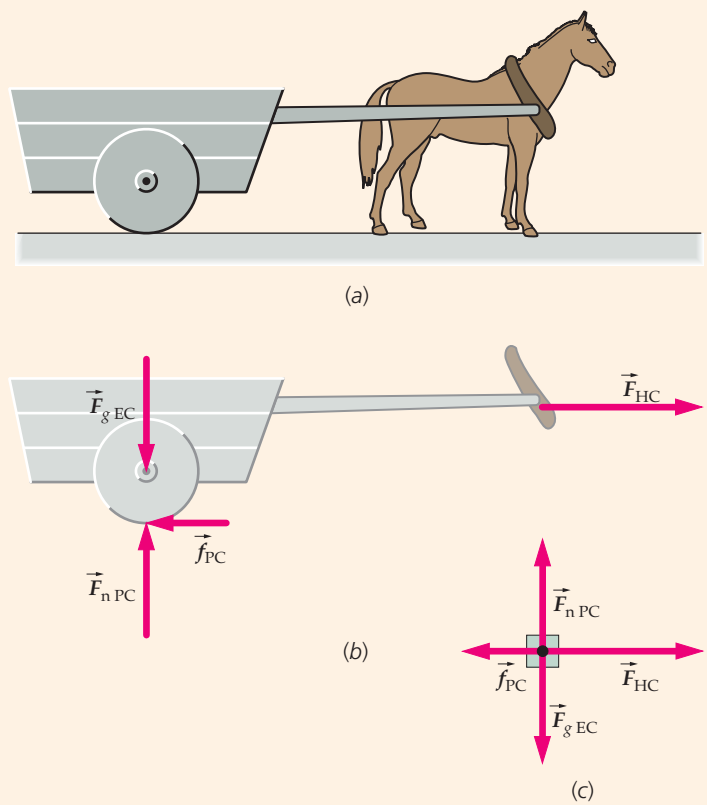


FIGURA 4.25

2. Obsérvese que la fuerza de reacción a $\vec{F}_{HC}$, que denominamos $\vec{F}_{CH}$, se ejerce sobre el caballo, no sobre el carro (figura 4.25*d*), y no tiene ningún efecto sobre el movimiento del carro, sino que afecta al movimiento del caballo. Si el caballo acelera hacia la derecha, debe haber una fuerza $\vec{F}_{PH}$ (hacia la derecha) ejercida por el pavimento sobre las pezuñas del caballo mayor que $\vec{F}_{CH}$.

Como la fuerza de reacción a $\vec{F}_{HC}$ se ejerce sobre el caballo no hay efecto alguno sobre el carro. Este era el error del razonamiento del caballo.

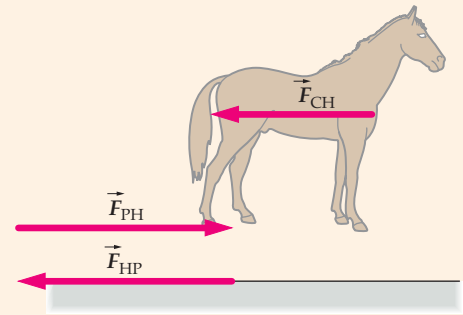


FIGURA 4.25 *(continuación)* (*d*)

COMPROBACIÓN Todas las fuerzas que actúan sobre el carro tienen C como subíndice derecho mientras que todas las fuerzas que actúan sobre el caballo tienen H como subíndice derecho. Por eso, no hemos dibujados las dos fuerzas del par acción y reacción de la tercera ley de Newton a la vez, ni en el carro ni en el caballo.

OBSERVACIÓN Este ejemplo ilustra la importancia de dibujar un diagrama de fuerzas cuando se resuelven problemas de mecánica. Si el caballo lo hubiera hecho, hubiera comprendido que le bastaba con empujar con fuerza sobre el pavimento para que éste le proporcionara la fuerza para moverlo hacia delante.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.4

Cuando esté delante de un amigo coloque las palmas de su mano contra las de su amigo y empuje. ¿Podrá ejercer su amigo una fuerza sobre usted si usted no ejerce fuerza sobre él? Inténtelo.

4.8 PROBLEMAS CON DOS O MÁS OBJETOS

En algunos problemas, los movimientos de dos o más objetos se hallan bajo la influencia de sus interacciones mutuas. Por ejemplo, cuando ambos están en contacto o están conectados mediante una cuerda o un muelle.

La tensión en una cadena o una cuerda es el módulo de la fuerza que un segmento de la cuerda ejerce sobre el inmediatamente contiguo. La tensión puede variar a través de la longitud de la cuerda, como en el caso de una cuerda que cuelga del techo de un gimnasio, donde la tensión en el trozo que está junto al techo es mayor, ya que en esa zona se aguanta también el peso de toda la cuerda. Sin embargo, en los problemas que trataremos en este libro, la masa de las cuerdas se suponen pequeñas, de forma que la variación en la tensión debida al peso de la cuerda es despreciable y, por lo tanto, también se desprecian las variaciones en la tensión debidas a alguna aceleración de la cuerda.

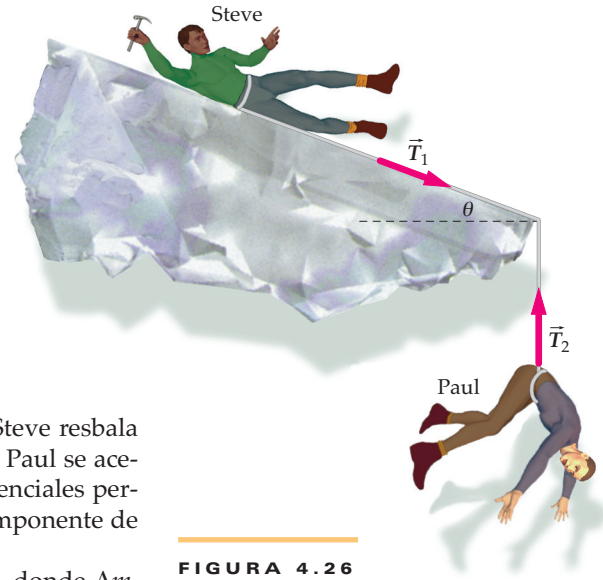


FIGURA 4.26

Consideremos el movimiento de Steve y Paul en la figura 4.26. El ritmo con el cual Paul baja se iguala con la velocidad con la que Steve resbala por el glaciar. De este modo, las velocidades de ambos son iguales. Si Paul se acelera, Steve se acelera al mismo ritmo. Es decir, sus aceleraciones tangenciales permanecen iguales. (La aceleración tangencial de una partícula es la componente de la aceleración que es tangente a la trayectoria de la partícula.)

El diagrama de fuerzas de un segmento de cuerda atada a Steve, donde Δm_s es la masa de ese segmento, se muestra en la figura 4.27. Aplicando la segunda ley de Newton a este segmento, se obtiene $T - T' = \Delta m_s a_x$. Si la masa del segmento de cuerda es despreciable, entonces $T = T'$ y no se necesita una fuerza neta para darle una aceleración. (Es decir, sólo se necesita una diferencia de tensión despreciable para dar a un trozo de cuerda de masa despreciable una aceleración finita.)

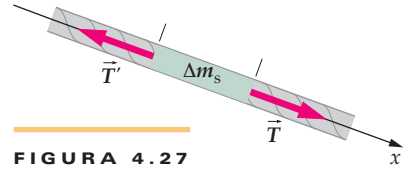


FIGURA 4.27

Ahora consideramos toda la cuerda que une a Steve y Paul. Si despreciamos la gravedad, sobre la cuerda actúan tres fuerzas. Steve y Paul, cada uno, ejercen una fuerza,

como también lo hace el hielo del borde del glaciar. Despreciar cualquier rozamiento entre el hielo y la cuerda significa que la fuerza ejercida por el hielo siempre es una fuerza normal (véase la figura 4.28), y una fuerza normal nunca tiene una componente a lo largo de la cuerda, por lo que no puede producir ningún cambio en la tensión. Así, la tensión es la misma en toda la cuerda. En resumen, si una cuerda de masa despreciable cambia de dirección pasando por una superficie sin rozamiento, la tensión es la misma en toda la cuerda. El siguiente recuadro resume los pasos a seguir para resolver estos problemas.

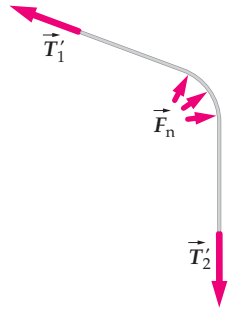


FIGURA 4.28

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de las leyes de Newton a problemas con dos o más cuerpos

PLANTEAMIENTO Recuerde dibujar un diagrama de fuerzas para cada cuerpo. Las incógnitas se obtienen al resolver simultáneamente las ecuaciones.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada cuerpo. Usar un sistema de coordenadas distinto para cada cuerpo. Recordar que si dos cuerpos se tocan las fuerzas que se ejercen entre sí son iguales pero con direcciones opuestas (tercera ley de Newton).
2. Aplicar la segunda ley de Newton a cada objeto.
3. Resolver las ecuaciones obtenidas, juntamente con cualquier ecuación que describa interacciones o ligaduras.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que su respuesta es consistente con los diagramas de fuerzas que haya dibujado.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 4.5

Supongamos que la cuerda del ejemplo anterior, en vez de pasar por el borde de un glaciar, pasa por una polea que tiene unos cojinetes que no ejercen rozamiento, como se muestra en la figura 4.29. ¿La tensión será la misma a lo largo de toda la cuerda?

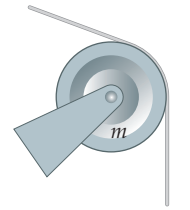


FIGURA 4.29

Ejemplo 4.12 Los escaladores

Paul (masa m_P) se cae por el borde de un glaciar. Afortunadamente, está atado mediante una larga cuerda a Steve (masa m_S), que lleva un pico de alpinista. Antes de que Steve clave su pico para detener el movimiento, se desliza sin rozamiento por la superficie de hielo, atado a Paul por una cuerda (figura 4.26). Se supone que tampoco existe rozamiento entre la cuerda y el glaciar. Determinar la aceleración de cada persona y la tensión de la cuerda.

PLANTEAMIENTO Las tensiones de la cuerda $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ son de igual módulo T porque se supone que la cuerda es de masa despreciable y el acantilado se supone que carece de rozamiento. La cuerda no se alarga ni se encoge, de modo que Paul y Steve tienen siempre el mismo módulo de velocidad. Sus aceleraciones $\vec{a}_S$ y $\vec{a}_P$ son, por lo tanto, iguales en módulo, pero no en dirección. Steve acelera por la superficie del glaciar, mientras que Paul lo hace verticalmente hacia abajo. Podemos aplicar la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, a cada una, y luego despejar la aceleración y la tensión.

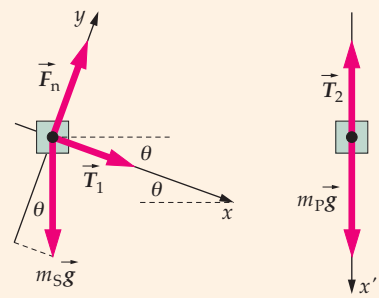


FIGURA 4.30

SOLUCIÓN

1. Dibujar los diagramas de fuerzas que actúan aisladamente sobre Paul y Steve (figura 4.30). Poner los ejes x e y en el diagrama correspondiente a Steve, escogiendo como dirección positiva del eje x la dirección de su aceleración. Elegir la dirección de la aceleración de Paul como dirección positiva del eje x'.
2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ en la dirección horizontal a Steve: $F_{nx} + T_{1x} + m_S g_x = m_S a_{Sx}$
3. Aplicar $\Sigma F_{x'} = ma_{x'}$ a Paul: $T_{2x'} + m_P g_{x'} = m_P a_{Px'}$
4. Ambos están unidos por un segmento de cuerda que no se estira; por lo tanto, las aceleraciones de Paul y de Steve están relacionadas. Expresar esta relación: $a_{Px'} = a_{Sx} = a_t$

   a_t es la componente de la aceleración en la dirección *tangencial* del movimiento.

5. Dado que la cuerda tiene una masa despreciable y resbala sobre el hielo con rozamiento despreciable, las fuerzas $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ están relacionadas. Expresar esta relación: $T_2 = T_1 = T$

6. Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en las ecuaciones del paso 2 y del paso 3: $T + m_S g \operatorname{sen}\theta = m_S a_t$, $-T + m_P g = m_P a_t$

7. Resolver las ecuaciones del paso 6 para la aceleración eliminando T y despejando a_t: $$a_t = \frac{m_S \operatorname{sen}\theta + m_P}{m_S + m_P} g$$

8. Sustituir el resultado del paso 7 en las dos ecuaciones del paso 6 y despejar T: $$T = \frac{m_S m_P}{m_S + m_P}(1 - \operatorname{sen}\theta) g$$

COMPROBACIÓN Si m_P es mucho mayor que m_S, es de esperar que la aceleración sea aproximadamente igual a g y la tensión aproximadamente cero. Sustituyendo $m_S = 0$ realmente nos da $a = g$ y $T = 0$. Si m_P es mucho menor que m_S, esperamos que la aceleración sea aproximadamente g sen θ (véase el ejemplo 4.7) y que la tensión sea cero. Sustituyendo $m_P = 0$ en los pasos 7 y 8, obtenemos $a_x = g \operatorname{sen}\theta$ y $T = 0$. Comprobamos nuestras respuestas en el valor límite de la pendiente ($\theta = 90^\circ$) y obtenemos $a_x = g$ y $T = 0$. Esto parece correcto, ya que si $\theta = 90^\circ$ Steve y Paul experimentan una caída libre.

OBSERVACIÓN En el paso 1 se elige la dirección hacia abajo como positiva para que la solución sea lo más simple posible. Con esta aceleración, cuando Steve se mueve en dirección positiva (hacia la derecha), Paul se mueve también en dirección positiva (hacia abajo).

PROBLEMA PRÁCTICO 4.10 (*a*) Determinar la aceleración si $\theta = 15^\circ$ y las masas son $m_S = 78$ kg y $m_P = 92$ kg. (*b*) Determinar la aceleración si los valores de estas dos masas se intercambian.

Ejemplo 4.13 Construyendo una estación espacial

Un astronauta que construye una estación espacial empuja una caja de masa m_1 con una fuerza $\vec{F}_{A1}$. Esta caja está en contacto directo con una segunda caja de masa m_2 (figura 4.31). (*a*) ¿Cuál es la aceleración de las cajas? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida por una caja sobre la otra?

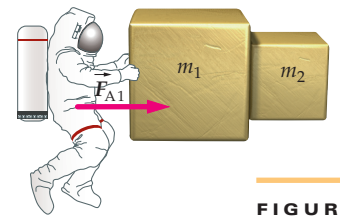


FIGURA 4.31

PLANTEAMIENTO La fuerza $\vec{F}_{A1}$ es una fuerza de contacto y sólo actúa sobre la caja 1. Sea $\vec{F}_{21}$ la fuerza ejercida por la caja 2 sobre la 1 y $\vec{F}_{12}$ la fuerza que ejerce la caja 1 sobre la 2. De acuerdo con la tercera ley de Newton estas fuerzas son iguales y opuestas ($\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$), de manera que $F_{21} = F_{12}$. Aplicar la segunda ley de Newton a cada caja por separado y tener en cuenta que las aceleraciones $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ son iguales.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar los diagramas de fuerzas de cada uno de las dos cajas (figura 4.32).

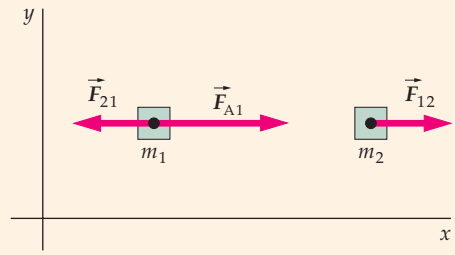


FIGURA 4.32

2. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a la primer caja: $F_{A1} - F_{21} = m_1 a_{1x}$

3. Aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ a la segunda caja: $F_{12} = m_2 a_{2x}$

4. Expresar la relación entre las dos aceleraciones y la relación entre los módulos de las fuerzas que se ejercen las cajas entre sí. Las aceleraciones son iguales porque las velocidades son iguales en todo momento. Las fuerzas son iguales en módulo porque forman un par de fuerzas 3LN: $a_{2x} = a_{1x} = a_x$, $F_{21} = F_{12} = F$

5. Sustituir estas relaciones en los resultados de los pasos 2 y 3 y despejar a_x: $$a_x = \frac{F_{A1}}{m_1 + m_2}$$

(*b*) Sustituir la expresión para a_x en los pasos 2 o 3 y despejar F. $$F = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F_{A1}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 5 es el mismo que obtendríamos si la fuerza $\vec{F}_{A1}$ actuase sobre una sola masa igual a la suma de las masas de las dos cajas. En efecto, como las dos masas tienen igual aceleración, podemos considerarlas como un sistema único de masa $m_1 + m_2$.

Temas de actualidad en Física

Montañas rusas y el gusto por la velocidad

Las montañas rusas han fascinado a la gente desde la inauguración en Paris, en 1917, de las espectaculares *Promenades Aeriennes* (viajes aéreos).[1] Hasta hace muy poco, los diseñadores de la atracción estaban atascados con una de sus principales limitaciones: el viaje debía iniciarse desde una gran altura.

En los años 70, Anton Schwartzkopf, un diseñador alemán de parques temáticos, se inspiró en los aviones que despegaban de los portaaviones. En 1976, se inauguró la montaña rusa *Shuttle Loop*. Un peso de varias toneladas fue elevado hasta la cima de una torre cercana a la montaña rusa. Uno de los extremos de un cable estaba unido al peso mientras que el otro estaba atado al tren de vagonetas. Cuando el peso se dejó caer, en menos de tres segundos, el tren pasó del reposo a moverse a 97 km/h.

Al mismo tiempo, Schwartzkopf volvió con un segundo método de lanzar el tren; esta vez se trataba de un método tipo catapulta. Se hizo girar una enorme rueda de 5 toneladas a gran velocidad. Un tren con 28 pasajeros estaba conectado con un cable a la rueda y en menos de tres segundos nuevamente alcanzó una velocidad de 97 km/h. Ambos métodos fueron pioneros en el lanzamientos de trenes de montañas rusas.[2]

Dos nuevos métodos han hecho posible lanzamientos con mayor velocidad. La empresa Intamin AG ha creado un sistema hidráulico para tirar del cable que se une al tren. El tren de vagonetas de la Top Thrill Dragster pesa 53 400 N y suele llevar además 18 pasajeros. Cada vez que pasa por encima de unos sensores hay un ordenador que mide el peso de la vagoneta con los pasajeros y determina la tensión que hay que aplicar al cable para que el tren pueda subir hasta la cima de la primera montaña que está a 130 m de altura. Entonces, los motores llenos de líquido proporcionan una potencia de 10 000 caballos que hacen girar al cable a 500 rpm y acelerar el tren a 190 km/h en sólo 4 segundos.[3]

Stan Checketts inventó la primera montaña rusa que funciona con aire comprimido. El pneumático Thrust Air 2000 está propulsado por un único chorro de aire. El tren con ocho pasajeros pasa por los sensores y los cuatro compresores entran en acción y bombean aire hacia un depósito situado en la base de la torre. En función del peso del tren se regula la presión del aire comprimido. Finalmente, el aire empuja un pistón que acelera al tren alcanzando 128 km/h en 1,8 segundos. Se necesitan un mínimo de 180 000 N para comunicar esa aceleración.[4] El reactor de un *F-15* produce un empuje de 130 000 N como máximo. Las montañas rusas actualmente comunican mayor potencia que un reactor. Tal vez, debería pensárselo la próxima vez que vaya a un parque de atracciones.

La Hypersonic XLC del parque de atracciones Dominion del Paramount King en Virginia es la primera montaña rusa propulsada con aire comprimido; va de 0 a 128 km/h en 1,8 segundos. *(Gentileza de King's Dominion Amusement Park.)*

[1] Cartmell, Robert, *The Incredible Scream Machine: A History of the Roller Coaster.* Bowling Green State University Popular Press, Bowling Green Ohio. 1987.
[2] "The Tidal Wave" http://www.greatamericaparks.com/tidalwave.html Marriott Great America Parks, 2006; Cartmell, op. cit.
[3] Hitchcox, Alan L. "Want Thrills? Go with Hydraulics." Hydraulics and Pneumatics, July 2005.
[4] Goldman, Lea. "Newtonian Nightmare." *Forbes*, 7/23/2001. Vol. 168, Issue 2; "The F-100 Engine." http://www.pratt-whitney.com/prod_mil_f100.asp Pratt & Whitney, March 2006.

Resumen

1. Las leyes de Newton del movimiento son leyes fundamentales de la naturaleza que constituyen la base de la mecánica.
2. La masa es una propiedad *intrínseca* de todo cuerpo.
3. La fuerza es una importante magnitud dinámica *derivada*.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Leyes de Newton	
Primera ley	Un objeto en reposo permanece en reposo a menos que *sobre él* actúe una fuerza externa neta. Un objeto en movimiento continúa moviéndose con velocidad constante a menos que sobre él actúe una fuerza externa neta. (Los sistemas de referencia en los que esto ocurre se llaman sistemas de referencia inerciales.)
Segunda ley	La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él. El inverso de la masa es la constante de proporcionalidad. Entonces $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}, \quad \text{donde} \quad \vec{F}_{\text{neta}} = \Sigma\vec{F}$ **4.1**
Tercera ley	Cuando dos cuerpos interaccionan, la fuerza $\vec{F}_{\text{BA}}$ ejercida por el cuerpo B sobre el A es igual en módulo y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{F}_{\text{AB}}$ ejercida por el cuerpo A sobre el B: $\vec{F}_{\text{BA}} = -\vec{F}_{\text{AB}}$ **4.8**
2. Sistemas de referencia inerciales	Las leyes de Newton sólo son válidas en un sistema de referencia inercial. Cualquier sistema de referencia que se mueva con velocidad constante relativa a un sistema de referencia inercial es también un sistema de referencia inercial. Un sistema de referencia que se mueve con aceleración relativa a un sistema inercial no es un sistema de referencia inercial. Un sistema de referencia ligado a la Tierra es, aproximadamente, un sistema de referencia inercial.
3. Fuerza, masa y peso	
Fuerza	La fuerza se define en función de la aceleración que produce a un determinado objeto. Una fuerza de 1 newton (N) es la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 sobre una masa de 1 kilogramo (kg).
Masa	La masa es la propiedad intrínseca de un objeto que mide su resistencia a la aceleración. La masa no depende de la localización del objeto. Las masas de dos objetos pueden compararse aplicando la misma fuerza a cada uno de los objetos y midiendo sus aceleraciones. La relación de las masas de los objetos es igual a la relación inversa de las aceleraciones producidas por la misma fuerza: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$
Peso	La fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$ de un objeto cerca de la superficie terrestre es la fuerza de atracción gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el objeto. Es proporcional a la masa m del objeto y al campo gravitatorio $\vec{g}$ o aceleración de la caída libre debida a la gravedad. $\vec{F}_g = m\vec{g}$ **4.4** El peso no es una propiedad intrínseca de un objeto; depende de la localización del objeto.
4. Fuerzas fundamentales	Todas las fuerzas observadas en la naturaleza pueden explicarse en función de cuatro interacciones fundamentales:
	1. La interacción gravitatoria
	2. La interacción electromagnética
	3. La interacción débil*
	4. La interacción nuclear fuerte, también llamada *fuerza hadrónica*
5. Fuerzas de contacto	Las fuerzas de contacto de soporte y rozamiento y las ejercidas por muelles y cuerdas, son debidas a las fuerzas moleculares que surgen de la fuerza electromagnética básica.
Ley de Hooke	Cuando un muelle se comprime o se alarga en una pequeña cantidad Δx, la fuerza que ejerce es proporcional a Δx: $F_x = -k\Delta x$ **4.7**

* Las interacciones electromagnética y débil se pueden agrupar en un sólo tipo de interacción llamada electrodébil.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

4.1 No, la fuerza neta no es una fuerza real sino el vector suma de fuerzas reales.

4.2 No, es la fuerza neta que produce la aceleración de una masa.

4.3 No.

4.4 No. Sería contrario a la tercera ley de Newton.

4.5 No. Una cosa es que no haya rozamiento entre los cojinetes y la polea, pero otra cosa es que la polea tenga masa, es decir, inercia. Para cambiar la velocidad de rotación de la polea se necesita una diferencia de tensión. Las poleas con masa se estudiarán en el capítulo 8.

Respuestas a los problemas prácticos

4.1 1,5 kg

4.2 0,47 lb

4.3 13 cm

4.4 3,0 cm

4.5 $T = C\sqrt{m/k}$ donde C es una constante sin dimensiones. La expresión correcta para el periodo, como veremos en el capítulo 14 es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

4.6 1,9 kN

4.7 Aplicando la segunda ley de Newton para las componentes y vemos del diagrama de fuerzas de la figura 4.18 que $\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - F_g\cos\theta = 0$, donde hemos utilizado que a_y es cero. Entonces, $F_n = F_g\cos\theta$.

4.8 $a = 27{,}8\ \text{m/s}^2$, $\theta = 70{,}5°$

4.9 967 N

4.10 (*a*) $a_t = 0{,}66g$, (*b*) $a_t = 0{,}60g$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Durante un vuelo transcontinental su taza de café permanece sin moverse sobre su mesita. ¿Hay fuerzas que actúen sobre la taza? Si es así, ¿cómo deberían ser de diferentes de aquellas que actuaran sobre la taza si ésta se encuentra sobre la mesa de la cocina de su casa?

2 • Usted está adelantando un coche en la autopista y observa que el otro coche tiene una aceleración $\vec{a}$ hacia el oeste. Sin embargo, el conductor del otro coche está manteniendo constante la velocidad y dirección relativas a la autopista. ¿El sistema de referencia de su coche es inercial? En caso negativo, ¿en qué dirección se acelera su coche respecto al otro?

3 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Suponga que está dando un paseo en una limusina que tiene las ventanas oscuras, de forma que usted no puede ver el exterior. El coche está sobre terreno llano, de forma que puede acelerar aumentando su velocidad, disminuyéndola o girando. Si usted está equipado únicamente con un pequeño objeto que cuelga del extremo de una cuerda, ¿cómo puede saber si la limusina cambia de dirección o de velocidad? ¿Podría determinar la velocidad de la limusina? SSM

4 •• Si sobre un objeto actúa una única fuerza, distinta de cero, ¿el objeto se acelera respecto a todos los sistemas de referencia inerciales? ¿Sería posible que el objeto tuviera velocidad nula en algunos sistemas de referencia inerciales mientras que en otros no? En caso afirmativo, dé algún ejemplo.

5 •• Sobre una pelota de béisbol actúa una única fuerza conocida. Sólo con esta información ¿podría decir en qué dirección se movería respecto a algún sistema de referencia inercial? Razone la respuesta.

6 •• Un camión se aleja a velocidad constante (tal y como se observaría si estuviésemos en medio de la calle). Se deduce que (*a*) no hay fuerzas que actúen sobre el camión, (*b*) actúa una fuerza constante sobre el camión en la dirección de su velocidad, (*c*) la fuerza neta que actúa sobre el camión es cero, (*d*) la fuerza neta que actúa sobre el camión es su propio peso.

7 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Muchas de las sondas espaciales que fueron lanzadas hace tiempo aún siguen en el espacio. El *Pioneer 10*, por ejemplo, fue lanzado en los años 70 y aún sigue moviéndose más allá del Sol y los planetas. ¿Está cambiando la masa del *Pioneer 10*? ¿Cuál de las fuerzas fundamentales conocidas continúa actuando sobre él? ¿Actúa sobre él alguna fuerza neta?

8 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Unos astronautas, en aparente ingravidez durante una misión en la Estación Espacial Internacional, deben monitorizar sus masas porque se sabe que una pérdida significativa de masa corporal puede dar lugar a serios problemas médicos. Dé un ejemplo de cómo se podría diseñar un equipo de medida de la masa de un astronauta que se encuentra en una estación espacial en órbita.

9 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encuentra en un ascensor. Describa dos situaciones en las cuales su peso aparente sea mayor que su peso real. SSM

10 •• Suponga que usted está en un tren que se mueve a velocidad constante con respecto al suelo. Usted tira una pelota a su amigo que está unos cuantos asientos por delante. Utilice la segunda ley de Newton para explicar por qué no puede utilizar sus observaciones sobre la pelota lanzada para determinar la velocidad del tren respecto al suelo.

11 •• Explique por qué, de entre las interacciones fundamentales, la interacción gravitacional es la de mayor importancia en nuestras vidas cotidianas. Hay otra que desempeña un papel creciente en el rápido avance de la tecnología. ¿Cuál es? ¿Por qué las otras no parecen tan importantes?

12 •• Dé un ejemplo de un objeto que tenga tres fuerzas actuando sobre él y (*a*) se acelere, (*b*) se mueva a velocidad constante (no nula) y (c) permanezca en reposo.

13 •• Supongamos que un bloque de masa m_1 descansa sobre otro bloque de masa m_2 y la combinación de ambos se apoya sobre una mesa, como se muestra en la figura 4.33. Indique el nombre de la fuerza y su categoría (contacto o acción a distancia) para cada una de las fuerzas: la fuerza ejercida (*a*) por m_1 sobre m_2, (*b*) por m_2 sobre m_1, (c) por m_2 sobre la mesa, (*d*) por la mesa sobre m_2. (*e*) por la Tierra sobre m_2. ¿Cuáles de esas fuerzas, si hay alguna, constituyen un par de fuerzas de la tercera ley de Newton? SSM

FIGURA 4.33 Problema 13

14 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted tira de un pez que acaba de pescar desde su barca. Dibuje el diagrama de fuerzas que actúan sobre el pez una vez que ha salido del agua y gana velocidad conforme asciende verticalmente hacia la barca. Diga el tipo (tesión, cuerda, gravedad, normal, rozamiento, etc.) y la categoría (contacto o acción a distancia) de cada una de las fuerzas del diagrama. ¿Cuáles de las fuerzas, si hay algunas, forman un par de fuerzas de la tercera ley de Newton? ¿Puede dar los módulos relativos de las fuerzas de su diagrama a partir de la información dada? Razone la respuesta.

15 •• Si usted deja un plato cuidadosamente sobre la mesa, éste no se romperá. Sin embargo, si lo deja caer sobre la mesa desde una cierta altura, lo más probable es que se rompa. Discuta las fuerzas que actúan sobre el plato (cuando entra en contacto con la mesa) en ambas situaciones. Utilice la cinemática y la segunda ley de Newton para determinar la causa de que el plato se rompa en la segunda situación.

16 •• Para cada una de las siguientes fuerzas, indique qué la produce, sobre qué objeto actúa, su dirección y la fuerza de reacción. (*a*) La fuerza que usted ejerce sobre su maletín cuando lo lleva en la mano mientras espera de pie en la parada del autobús. (*b*) La fuerza normal sobre la suela de su pie cuando usted está de pie sobre un suelo horizontal de madera. (*c*) La fuerza de la gravedad sobre usted cuando está de pie sobre un suelo horizontal. (*d*) La fuerza horizontal ejercida sobre una pelota de béisbol por un bate cuando ésta se golpea hacia arriba.

17 •• En cada caso identifique la fuerza (incluyendo su dirección) que causa la aceleración. (*a*) Un velocista al principio de la carrera. (*b*) Un disco de hockey se desliza sobre hielo hasta pararse. (*c*) Una pelota en lo más alto de su trayectoria parabólica. (*d*) Un saltador de *puenting* en la parte más baja de su descenso.

18 • Verdadero o falso:

(*a*) Si dos fuerzas externas que son iguales en módulo y opuestas en dirección actúan sobre un mismo objeto, nunca serán un par de fuerzas de la tercera ley de Newton.

(*b*) Las dos fuerzas del par de la tercera ley de Newton son iguales sólo si los cuerpos no están acelerándose.

19 •• Un hombre de 80 kg patina sobre el hielo empujando a un muchacho de 40 kg, también sobre patines, con una fuerza de 100 N. Ellos se mueven sobre el hielo aumentando su velocidad de forma constante. (*a*) La fuerza ejercida por el muchacho sobre el hombre es de (1) 200 N, (2) 100 N, (3) 50 N, (4) 40 N. (*b*) Compare los módulos de las dos aceleraciones. (*c*) Compare también las direcciones de dichas aceleraciones.

20 •• Una muchacha tiene una piedra sobre la palma de su mano y la puede mover hacia arriba, hacia abajo o mantenerla como está. Verdadero o falso: (*a*) la fuerza ejercida por su mano sobre la piedra tiene el mismo módulo que la fuerza de la gravedad que actúa sobre la piedra, (*b*) la fuerza ejercida por su mano sobre la piedra es la fuerza de reacción a la fuerza de la gravedad sobre la piedra, (*c*) la fuerza ejercida por su mano sobre la piedra tiene el mismo módulo que el de la fuerza que ejerce la piedra sobre su mano pero con dirección opuesta, (*d*) si la muchacha mueve su mano hacia abajo a velocidad constante, entonces la fuerza vertical que ella ejerce sobre la piedra es menor que la fuerza de la gravedad que actúa sobre la piedra, (*e*) si la muchacha mueve la mano hacia abajo pero ralentiza el movimiento hasta pararse, entonces la fuerza que ejerce la piedra sobre la mano de la chica tiene el mismo módulo que la fuerza de la gravedad que actúa sobre la piedra.

21 •• Un cuerpo de 2,5 kg cuelga en reposo de una cuerda sujeta al techo. (*a*) Dibujar un diagrama que muestre las fuerzas que actúan sobre el cuerpo e indicar cada una de las fuerzas de reacción. (*b*) Hacer lo mismo con las fuerzas que actúan sobre la cuerda. No desprecie la masa de la cuerda. SSM

22 •• (*a*) ¿Cuál de los diagramas de fuerzas de la figura 4.34 representa un bloque que se desliza por una superficie inclinada sin rozamiento? (*b*) Para el diagrama correcto, ponga los nombres de las fuerzas e indique cuáles de ellas son de contacto y cuáles son de acción a distancia. (*c*) Para cada objeto del diagrama correcto, identificar la fuerza de reacción, el objeto sobre el que actúa y su dirección.

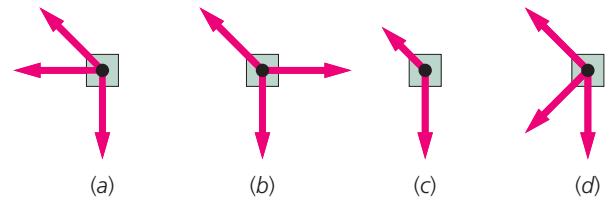


FIGURA 4.34 Problema 22

23 •• Una caja de madera que está sobre el suelo está ligada a un muelle por un lado. Por el lado opuesto se presiona con una determinada fuerza que comprime el muelle. El rozamiento entre la caja y el suelo es despreciable. Dibuje el diagrama de fuerzas sobre la caja en los siguientes casos: (*a*) la fuerza externa deja de actuar sobre la caja pero ésta sigue unida al muelle que sigue comprimido, (*b*) la fuerza externa deja de actuar sobre la caja pero ésta sigue unida al muelle, (*c*) la caja no está unida al muelle.

24 •• Imagínese que se encuentra sentado en una silla con ruedas en su despacho. Considere que el rozamiento de la silla y el suelo es despreciable. Sin embargo, la fuerza de rozamiento entre la mesa y el

suelo no es despreciable. Sentado sobre la silla usted quiere levantarse a por una taza de café y para ello empuja horizontalmente sobre la mesa, de forma que la silla se desplaza hacia atrás, alejándose de la mesa. (*a*) Dibuje el diagrama de fuerzas en el momento que usted empuja sobre la mesa e indique cuál de las fuerzas es la responsable de su aceleración, (*b*) ¿Cuál es la fuerza de reacción a la fuerza que causa su aceleración? (*c*) Dibuje el diagrama de fuerzas de la mesa e indique por qué no se acelera. ¿Viola la tercera ley de Newton? Razone la respuesta.

25 ••• Una misma fuerza horizontal neta F se aplica durante un intervalo Δt a dos objetos de masas m_1 y m_2 que descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento ($m_1 > m_2$). (*a*) Suponiendo que los dos objetos se hallan inicialmente en reposo, ¿cuál es el cociente entre las aceleraciones durante ese intervalo en función de F, m_1 y m_2? (*b*) ¿Cuál es el cociente entre sus velocidades v_1 y v_2 al final de dicho intervalo? (*c*) ¿Cómo de separados se encuentran los objetos (y cuál está delante).

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

26 •• **CONCEPTUAL** La mayoría de los coches tienen cuatro amortiguadores unidos a la carrocería, uno en cada una de las posiciones de las ruedas. Diseñe un método para medir la constante de fuerza de cada uno de los amortiguadores sabiendo su peso y el de sus amigos. Considere que los cuatro amortiguadores son iguales. Utilice el método para estimar la constante de fuerza del amortiguador de su coche.

27 •• Estimar la fuerza ejercida sobre el guante de un portero de hockey que detiene el disco después del lanzamiento de una falta. SSM

28 •• Un jugador de béisbol resbala hasta la segunda base al interceptar la pelota. Suponiendo valores razonables para la longitud del deslizamiento, la velocidad del jugador al inicio del deslizamiento y la velocidad al final del deslizamiento, determine el valor medio de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el jugador.

29 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de carreras patina sin control e intenta reducir la velocidad hasta 90 km/h antes de chocar contra un muro. Afortunadamente, el conductor lleva puesto el cinturón de seguridad. Utilizando valores razonables para la masa del conductor y la distancia de frenado, estime la fuerza media ejercida por el cinturón de seguridad sobre el conductor, y su dirección. Ignore los efectos del rozamiento del conductor con el asiento.

LA PRIMERA Y LA SEGUNDA LEY DE NEWTON: MASA, INERCIA Y FUERZA

30 • Una partícula de masa m se mueve con una velocidad inicial $v_0 = 25{,}0$ m/s. Cuando una fuerza neta de 15,0 N actúa sobre ella, alcanza el reposo después de recorrer 62,5 m. (*a*) ¿Cuál es la dirección de la fuerza? (*b*) Determine el tiempo que tarda la partícula en pararse. (*c*) ¿Cuál es su masa?

31 • (*a*) Un objeto experimenta una aceleración de 3 m/s^2 cuando sobre él actúa una cierta fuerza F_0. ¿Cuál es su aceleración si la fuerza se duplica? (*b*) Un segundo objeto experimenta una aceleración de 9 m/s^2 bajo la influencia de la fuerza F_0. ¿Qué relación existe entre las masas de los dos objetos? (*c*) Si los dos objetos se atan juntos, ¿qué aceleración producirá la fuerza F_0?

32 • Un remolcador arrastra un buque con una fuerza constante F_1. El incremento en la velocidad del buque en un intervalo de 10 s es de 4 km/h. Cuando un segundo remolcador aplica un segunda fuerza constante F_2 en la misma dirección su velocidad crece en 16 km/h cada intervalo de 10 s. ¿Qué relación existe entre los módulos de las dos fuerzas? (Despreciar la resistencia del agua y del aire.)

33 • Una fuerza constante de 12 N actúa sobre una partícula de masa m. La partícula parte del reposo y viaja en línea recta a lo largo de 18 m en 6 s. Hallar m.

34 • Una fuerza neta de $(6{,}0\text{ N})\hat{i} - (3{,}0\text{ N})\hat{j}$ actúa sobre un cuerpo de 1,5 kg. Hallar la aceleración $\vec{a}$.

35 •• Una bala de $1{,}8 \times 10^{-3}$ kg de masa que lleva una velocidad de 500 m/s choca contra un gran bloque de madera y se introduce 6 cm en su interior antes de pararse. (*a*) Suponiendo que la desaceleración de la bala es constante, calcular la fuerza ejercida por la madera sobre la bala. (*b*) Si la misma fuerza actuara sobre la bala y tuviera la misma velocidad de impacto pero la mitad de masa, ¿cuál sería la nueva distancia de penetración? SSM

36 •• Una vagoneta de juguete está en una vía recta y horizontal y lleva un ventilador atado a uno de sus extremos. Se coloca la vagoneta en un extremo de la vía y se conecta el ventilador. La vagoneta, que estaba en reposo, empieza a moverse y en 4,55 s se ha movido 1,5 m. La masa de la vagoneta con el ventilador es de 355 g; suponemos que se mueve con aceleración constante. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta que se ejerce sobre el conjunto vagoneta-ventilador? (*b*) Se va añadiendo masa al conjunto vagoneta-ventilador hasta que tiene una masa de 722 g, y se repite el experimento. ¿Cuánto le costará ahora a la vagoneta moverse los 1,5 m? Ignorar los efectos del rozamiento.

37 •• Una fuerza F_0 produce una aceleración de 3 m/s^2 cuando actúa sobre un objeto de masa m que se desliza sobre una superficie sin rozamiento. Hallar la aceleración del mismo objeto cuando se ve sometido a las fuerzas que se muestran en la figura 4.35*a* y *b*.

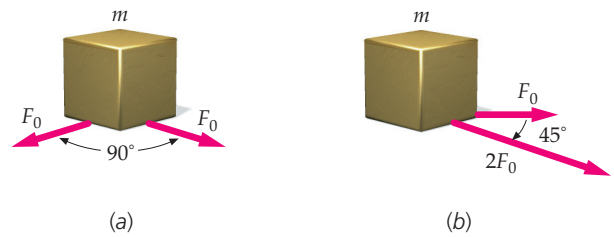


FIGURA 4.35 Problema 37

38 •• Álvaro y Berta están quietos en medio de un gran lago helado. Álvaro empuja a Berta con una fuerza de 20 N durante 1,5 s. La masa de Berta es de 100 kg. (*a*) ¿Cuál es la velocidad a la que se mueve Berta después de ser empujada? (*b*) Si la masa de Álvaro es de 80 kg, ¿qué velocidad alcanza? Considerar que no hay rozamiento.

39 •• Si se empuja un bloque de masa m_1 con una fuerza horizontal F_0, éste adquiere una aceleración de 12 m/s^2. Si se empuja un bloque de masa m_2 con la misma fuerza, su aceleración es de 3 m/s^2. (*a*) ¿Qué aceleración proporcionaría la misma fuerza F_0 a un bloque de masa $m_2 - m_1$? (*b*) ¿Qué aceleración proporcionaría la misma fuerza a un bloque de masa $m_2 + m_1$? Considerar un movimiento sin rozamiento.

40 •• **MÚLTIPLES PASOS** Para arrastrar un tronco de 75 kg por el suelo con velocidad constante, un tractor tira de él con una fuerza de 250 N (horizontalmente). (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas sobre el tronco. (*b*) Utilizar las leyes de Newton para determinar la fuerza de rozamiento sobre el tronco. (*c*) ¿Cuál es la fuerza normal sobre el tronco? (*d*) ¿Qué fuerza deberemos ejercer si se desea dar al tronco una aceleración de 2 m/s^2 suponiendo que la fuerza de rozamiento no cambia. Dibuje de nuevo el diagrama de fuerzas para esta situación.

41 •• Un objeto de 4 kg está sometido a la acción de dos fuerzas $\vec{F}_1 = (2{,}0\text{ N})\hat{i} + (-3{,}0\text{ N})\hat{j}$ y $\vec{F}_2 = (4{,}0\text{ N})\hat{i} - (11\text{ N})\hat{j}$. El objeto está

en reposo en el origen en el instante $t = 0$. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del objeto? (*b*) ¿Cuál es su velocidad en el instante $t = 3$ s? (*c*) ¿Dónde está el objeto en el instante $t = 3$ s?

PESO Y MASA

42 • En la Luna, la aceleración debida a la gravedad es sólo 1/6 de la que existe en la Tierra. Un astronauta, cuyo peso en la Tierra es 600 N, se desplaza a la superficie lunar. Su masa medida en la Luna, será: (*a*) 600 kg. (*b*) 100 kg. (*c*) 61,2 kg. (*d*) 9,81 kg. (*e*) 360 kg.

43 • Expresar el peso de una muchacha de 54 kg en (*a*) newtons y (*b*) libras.

44 • Determinar la masa de un hombre de 165 lb en kilogramos.

45 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para entrenar a los astronautas antes de ir a trabajar a la Luna, donde la aceleración de la gravedad es 1/6 de la terrestre, la NASA los sumerge en un tanque de agua. Si un astronauta tiene una masa de 250 kg, teniendo en cuenta además de su masa corporal, la mochila con oxígeno, aire acondicionado, etc., determine las siguientes cantidades: (*a*) el peso del astronauta en la Tierra, (*b*) el peso en la Luna, (*c*) el empuje necesario que debe recibir en el tanque para simular las mismas condiciones que en la Luna. SSM

46 •• Vivimos en el año 2075 y los viajes espaciales son frecuentes. Un profesor de física lleva consigo su práctica favorita a la Luna. El aparato consiste en una mesa horizontal lisa y un cuerpo que se desliza sobre ella sin rozamiento. En la Tierra, cuando el profesor engancha un muelle (constante de fuerza 50 N/m) al cuerpo y presiona horizontalmente sobre el cuerpo, el muelle se comprime 2 cm, luego suelta el cuerpo y éste se acelera a 1,5 m/s^2. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre el cuerpo y utilícelo para determinar la masa del cuerpo. (*b*) ¿Cuál debería ser la aceleración del cuerpo bajo idénticas condiciones?

DIAGRAMAS DE FUERZAS: EQUILIBRIO ESTÁTICO

47 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** Un semáforo de 35 kg está colgado de un soporte tal como se muestra en la figura 4.36. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas y utilizarlo para responder cualitativamente a la pregunta: ¿la tensión del cable 2 es mayor o menor que la del 1? (*b*) Verificar la respuesta utilizando las leyes de Newton y despejando las dos tensiones.

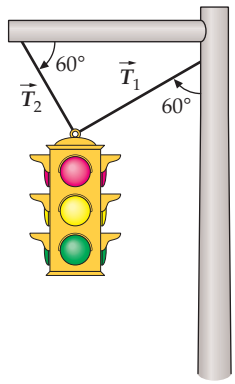


FIGURA 4.36 Problema 47

48 • Una lámpara de masa $m = 42{,}6$ kg cuelga de unos alambres como indica la figura 4.37. El anillo tiene masa despreciable. La tensión T_1 en el alambre vertical es (*a*) 209 N, (*b*) 418 N, (*c*) 570 N, (*d*) 360 N, (*e*) 730 N.

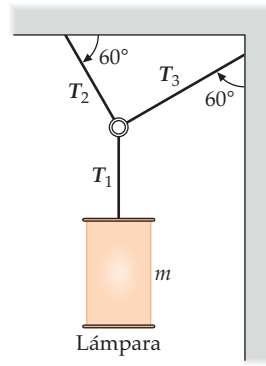


FIGURA 4.37 Problema 48

49 •• En la figura 4.38*a* se muestra un bloque de 0,500 kg que cuelga del punto medio de una cuerda de 1,25 m de longitud. Los extremos de la cuerda están sujetos al techo en unos puntos separados 1,00 m. (*a*) ¿Qué ángulo forma la cuerda con el techo? (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*c*) Se quita el bloque de 0,500 kg y se cuelgan dos bloques de 0,250 kg cada uno de forma que la longitud de los tres tramos de cuerda es la misma, tal como se ve en la figura 4.38*b*. ¿Cuál es la tensión en cada segmento de la cuerda? SSM

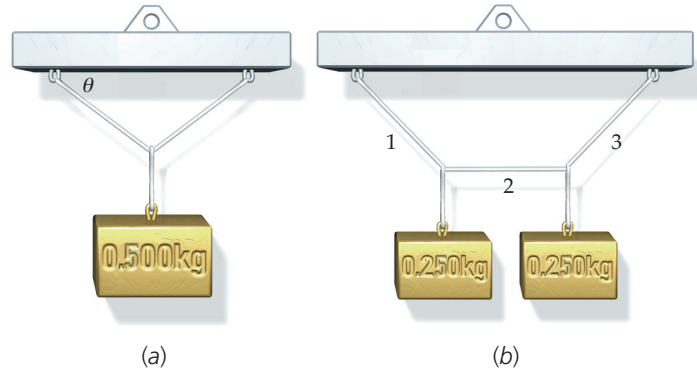


FIGURA 4.38 Problema 49

50 •• Una bola de 100 N se cuelga de unas cuerdas tal como se muestra en la figura 4.39. ¿Cuál es la tensión de la cuerda horizontal?

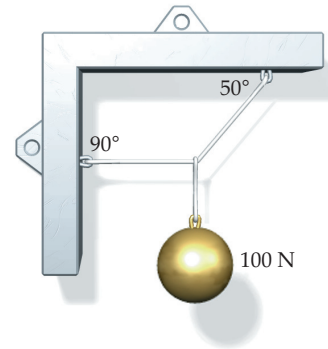


FIGURA 4.39 Problema 50

51 •• Un objeto de 10 kg de masa descansa sobre una mesa con la que no roza y está sujeto a dos fuerzas horizontales, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, con módulos $F_1 = 20$ N y $F_2 = 30$ N, como se muestra en la figura 4.40. Encontrar la fuerza $\vec{F}_3$ que debe aplicarse para que el cuerpo esté en equilibrio estático. SSM

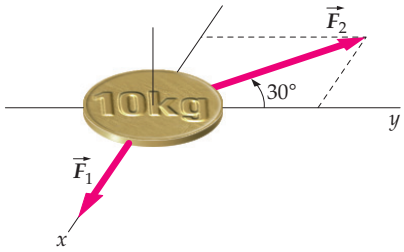


FIGURA 4.40
Problema 51

52 •• Determinar las tensiones y las masas desconocidas de los sistemas en equilibrio que se representan en la figura 4.41.

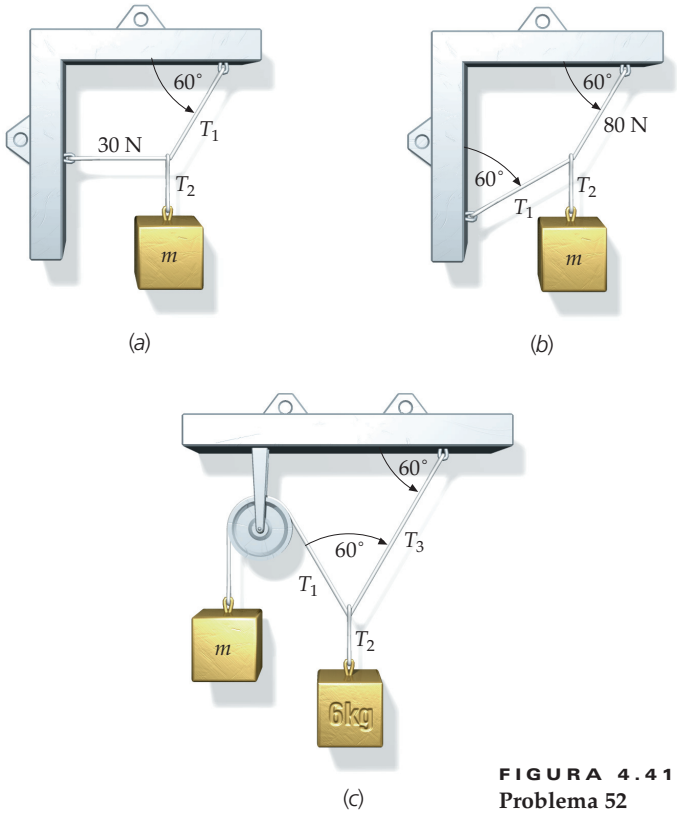


FIGURA 4.41
Problema 52

53 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche está estancado en terreno blando. El conductor está solo pero dispone de una cuerda larga y fuerte. Recordando sus conocimientos de física, ata la cuerda tensa a un poste telefónico y tira de ella lateralmente como indica la figura 4.42.

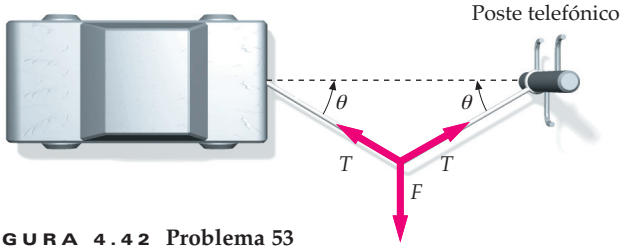
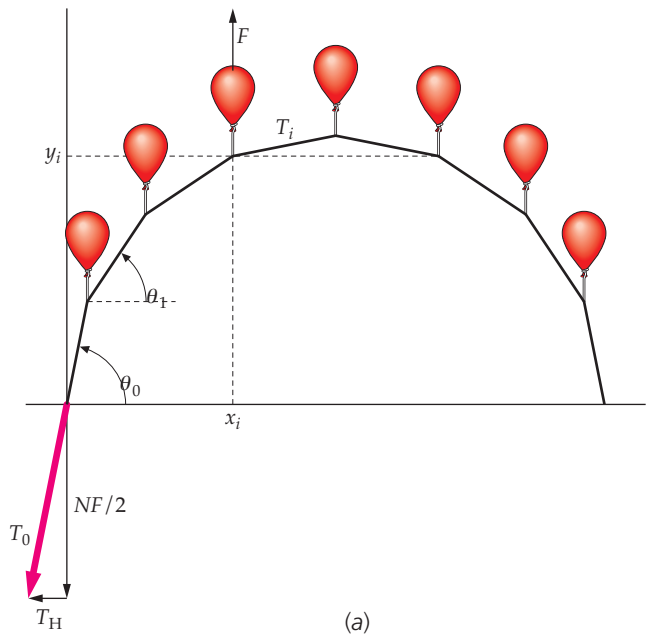


FIGURA 4.42 Problema 53

(*a*) Determinar la fuerza ejercida por la cuerda sobre el coche cuando el ángulo θ es 3° y el conductor tira con una fuerza de 400 N, pero el coche no se mueve. (*b*) ¿Qué resistencia debería tener la cuerda si se necesitara una fuerza de 600 N bajo un ángulo de $\theta = 4°$ para mover el coche?

54 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** En algunos festivales y celebraciones, en una cuerda larga, sujeta por sus dos extremos al suelo, se atan globos llenos de helio cuya fuerza ascensional levanta la cuerda dándole una forma de arco, tal como se ve en la figura 4.43*a*. Supongamos que hay N globos atados a intervalos iguales a una cuerda sin masa de longitud L, sujeta al suelo por sus dos extremos. Cada globo proporciona una fuerza ascensional F. Las coordenadas horizontales y verticales del punto de la cuerda donde se ata el globo i son x_i e y_i, y T_i es la tensión del segmento i de la cuerda (el segmento 0 es el segmento entre el punto de sujeción al suelo y el primer globo y el segmento N corresponde al trozo de cuerda que une el globo N con el otro extremo al que está sujeta la cuerda). (*a*) La figura 4.43*b* muestra el diagrama de fuerzas en el globo i. A partir de este diagrama, demostrar que la componente horizontal de la fuerza T_i (denominada T_H) es la misma para todos los segmentos. (*b*) Considerando la componente vertical de las fuerzas, utilizar las leyes de Newton para deducir la ecuación siguiente que relaciona la tensión de los segmentos i e $(i-1)$: T_{i-1} sen $\theta_{i-1} - T_i$ sen $\theta_i = F$. (*c*) Demostrar que $\text{tg}\,\theta_0 = -\text{tg}\,\theta_{N+1} = NF/2T_H$. (*d*) A partir del diagrama y de las dos expresiones anteriores, demostrar que $\text{tg}\,\theta_i = (N - 2i)F/2T_H$ y que $y_i = \dfrac{L}{N+1}\sum_{j=0}^{i-1}\cos\theta_j$, $y_i = \dfrac{L}{N+1}\sum_{j=0}^{i-1}\text{sen}\,\theta_j$.



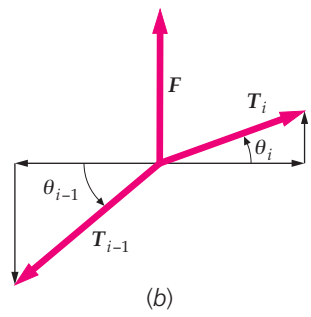


FIGURA 4.43 Problema 54

55 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Considérese una solución numérica del problema 54. Escribir un programa con una **hoja de cálculo** que dibuje la forma del arco teniendo en cuenta los siguientes parámetros: $N = 10$ globos; cada uno de los globos proporciona una fuerza de 1 N; la cuerda tiene 11 m de longitud y la componente horizontal de la tensión es $T_H = 10$ N. ¿A qué distancia están los puntos de sujeción con el suelo? ¿Cuál es la máxima altura del arco? (*b*) Obsérvese que no hemos indicado cuál es la separación entre los puntos de sujeción de la cuerda, ya que esta distancia viene determinada por otros parámetros. Variar T_H manteniendo fijos los otros parámetros hasta que pueda crear un arco cuyas sujeciones estén separadas 8 m. ¿Qué valor tiene T_H? A medida que T_H aumenta, el arco se hace más plano. ¿El modelo con la hoja de cálculo reproduce este comportamiento?

DIAGRAMAS DE FUERZAS: PLANOS INCLINADOS Y FUERZA NORMAL

56 • Una caja grande de 20 kg de masa está en reposo sobre una superficie sin rozamiento. Si se tira de la caja con una fuerza de 250 N con un ángulo de 35° por debajo de la horizontal, ¿cuál es la aceleración de la caja en la dirección de la superficie?

57 • Una caja de 20 kg está situada ahora en una rampa inclinada 15° sobre una superficie sin rozamiento. Se tira de la caja con una fuerza que forma un ángulo de 40° con la horizontal (véase la figura 4.44), ¿cuál es el menor valor de la fuerza que hace que la caja suba por la rampa?

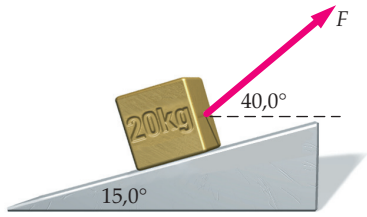


FIGURA 4.44
Problema 57

58 • En la figura 4.45, los objetos están sujetos a dinamómetros calibrados en newtons. Dar las lecturas de los dinamómetros en cada caso, suponiendo que las cuerdas carecen de masa.

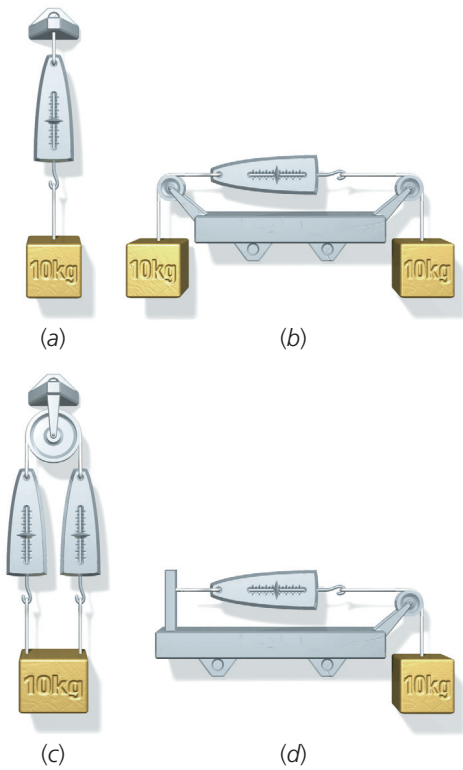


FIGURA 4.45
Problema 58

59 •• Un cuerpo se mantiene en posición mediante un cable a lo largo de un plano inclinado pulido (figura 4.46). (*a*) Si $\theta = 60°$ y $m = 50$ kg, determinar la tensión del cable y la fuerza normal ejercida por el plano inclinado. (*b*) Determinar la tensión en función de θ y m, y comprobar el resultado para $\theta = 0$ y $\theta = 90°$.

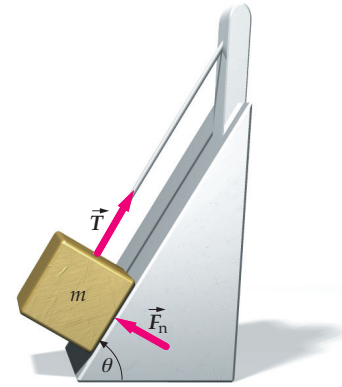


FIGURA 4.46 **Problema 59**

60 •• Una fuerza horizontal de 100 N actúa sobre un bloque de 12 kg haciéndole subir por un plano inclinado sin rozamiento, que forma un ángulo de 25° con la horizontal. (*a*) ¿Cuál es la fuerza normal que el plano inclinado ejerce sobre el bloque? (*b*) ¿Cuál es la aceleración del bloque?

61 •• Un estudiante de 65 kg se pesa subiéndose a una balanza que está dispuesta sobre un monopatín con ruedas, que baja por un plano inclinado (figura 4.47). Suponer que no hay rozamiento y que la fuerza ejercida por el plano inclinado sobre el monopatín es perpendicular al plano inclinado. ¿Cuál es la lectura de la balanza si $\theta = 30°$? SSM

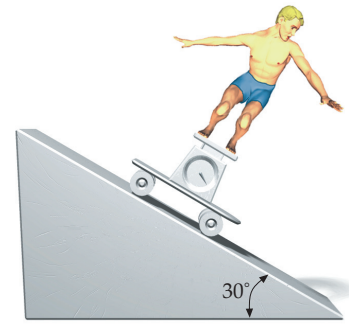


FIGURA 4.47 **Problema 61**

62 •• Un objeto de masa m resbala por una superficie sin rozamiento que acaba con una rampa con una inclinación θ respecto la horizontal (véase la figura 4.48). La velocidad inicial del objeto es v_0. Cuando el objeto alcanza la rampa sube hasta una altura h antes de bajar de nuevo. Demostrar que h es independiente de m y θ. Deducir la expresión para h.

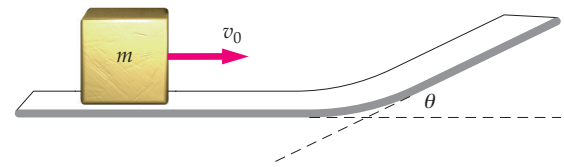


FIGURA 4.48 **Problema 62**

DIAGRAMAS DE FUERZAS: ASCENSORES

63 • **CONCEPTUAL** (*a*) Dibuja el diagrama de fuerzas para un objeto colgado del techo de un ascensor que sube lentamente. (*b*) Repetir el apartado (*a*) pero suponiendo que el ascensor desciende aumentando la velocidad. (*c*) ¿Puede indicar las diferencias entre ambos diagramas? Explicar por qué los diagramas no dicen nada sobre la velocidad del objeto. SSM

64 • Un peso de 10 kg se sostiene del techo de un ascensor mediante una cuerda capaz de resistir 150 N. Poco después de que el ascensor empiece a subir, la cuerda se rompe. ¿Cuál fue la aceleración mínima del ascensor?

65 •• Un cuerpo de 2 kg cuelga de un dinamómetro (calibrado en newtons) sujeto al techo de un ascensor (figura 4.49). Determinar la lectura que indicará el dinamómetro (*a*) cuando el ascensor se mueve hacia arriba con velocidad constante de 30 m/s, (*b*) cuando el ascensor desciende con velocidad constante de 30 m/s, (*c*) cuando el ascensor sube a 20 m/s y acelera hacia arriba a 10 m/s^2. (*d*) De $t = 0$ a $t = 5$ s, el ascensor se mueve hacia arriba a 10 m/s. Su velocidad se reduce entonces uniformemente a cero en los siguientes 4 segundos, de modo que queda en reposo para $t = 9$ s. Describir la lectura del dinamómetro durante el intervalo $0 < t < 9$ s.

FIGURA 4.49 Problema 65

DIAGRAMAS DE FUERZAS: VARIOS CUERPOS Y LA TERCERA LEY DE NEWTON

66 •• **CONCEPTUAL** Dos bloques de masas m_1 y m_2 conectados entre sí por una cuerda de masa despreciable se aceleran uniformemente sobre una superficie sin rozamiento, como se indica en la figura 4.50. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas para los dos bloques y mostrar que la relación de las tensiones T_1/T_2 viene dada por $m_1/(m_1 + m_2)$. (*b*) Razonad si este resultado es lógico o no. Considerad los casos límite $m_2/m_1 >> 1$ y $m_1/m_2 >> 1$.

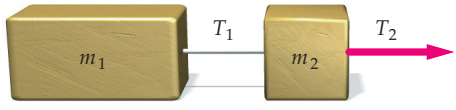


FIGURA 4.50 Problema 66

67 •• Un bloque de masa $m_2 = 3{,}5$ kg descansa sobre un estante horizontal sin rozamiento y está conectado mediante cuerdas a dos bloques de masas $m_1 = 1{,}5$ kg y $m_3 = 2{,}5$ kg, que cuelgan libremente, como se muestra en la figura 4.51. Las poleas carecen de rozamiento y su masa es despreciable. El sistema se mantiene inicialmente en reposo. Cuando se deja en libertad, determinar (*a*) la aceleración de cada uno de los bloques, y (*b*) la tensión de cada cuerda.

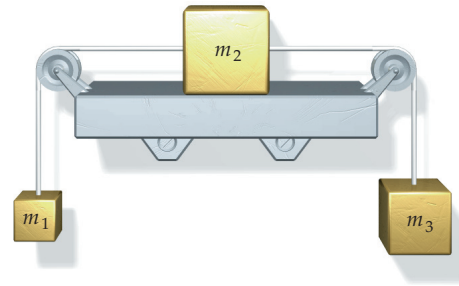


FIGURA 4.51 Problema 67

68 •• Dos bloques están en contacto sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Una fuerza $\vec{F}$ horizontal se aplica a uno de ellos como muestra la figura 4.52 y ambos son acelerados. Determinar la aceleración y la fuerza de contacto del bloque 1 sobre el 2 para (*a*) los valores generales de F, m_1 y m_2 y (*b*) para $F = 3{,}2$ N, $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 6$ kg.

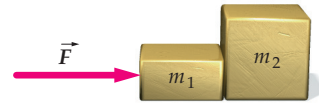


FIGURA 4.52 Problema 68

69 •• Repetir el problema 68, intercambiando la posición de los dos bloques.

70 •• Dos bloques de 100 kg son arrastrados a lo largo de una superficie sin rozamiento con una aceleración constante de 1,0 m/s^2, como se indica en la figura 4.53. Cada cuerda tiene una masa de 1 kg. Determinar la fuerza $\vec{F}$ y la tensión de las cuerdas en los puntos A, B y C.

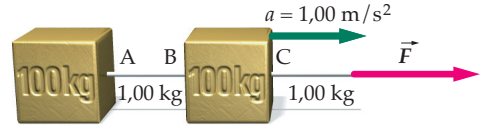


FIGURA 4.53 Problema 70

71 •• Se sube un objeto de masa m con una cuerda de masa M y de longitud L sujeta desde uno de sus extremos. La cuerda y el objeto se aceleran en la dirección vertical con aceleración a. La distribución de la masa en la cuerda es uniforme. Demostrar que la tensión en la cuerda a una distancia x (siendo $x < L$) por encima del bloque es $(a + g)[m + (x/L)M]$. SSM

72 •• Una cadena consta de 5 eslabones, cada uno con una masa de 0,1 kg. Se sube la cadena verticalmente con una aceleración de 2,5 m/s^2. La cadena se sujeta desde el eslabón superior y ningún punto de la cadena toca con el suelo. Determinar (*a*) la fuerza F ejercida en el extremo superior de la cadena, (*b*) la fuerza neta en cada eslabón y (*c*) la fuerza que cada eslabón ejerce sobre el eslabón inmediatamente inferior.

73 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un objeto de 40,0 kg suspendido de una cuerda vertical está inicialmente en reposo. El objeto se acelera entonces hacia arriba hasta alcanzar una velocidad de 3,5 m/s en 0,700 s. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas. (*b*) Utilizar el diagrama y las leyes de Newton para determinar la tensión de la cuerda. SSM

74 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** Un helicóptero de 15 000 kg está descendiendo un camión de 4000 kg al suelo mediante un cable de longitud fija. El helicóptero, el cable y el camión descienden a 15 m/s y deben reducir la velocidad de descenso a 5 m/s en los próximos 50 m para evitar daños sobre el camión. Supóganse que el ritmo de reducción de la velocidad es constante. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas del cable. (*b*) Determinar la tensión del cable. (*c*) Determinar la fuerza ascendente que genera el helicóptero.

75 •• Dos objetos están conectados por una cuerda de masa despreciable, como se indica en la figura 4.54. El plano inclinado y la polea carecen de rozamiento. Determinar la aceleración de los objetos y la tensión de la cuerda para (*a*) valores generales de θ, m_1 y m_2 y (*b*) $\theta = 30°$ y $m_1 = m_2 = 5$ kg.

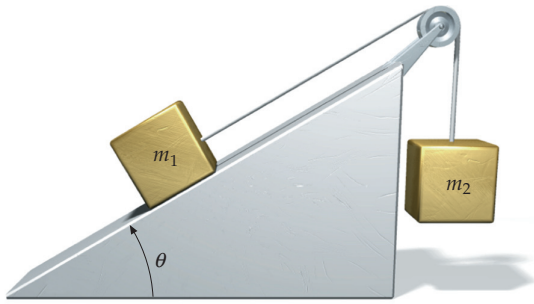


FIGURA 4.54 Problema 75

76 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En una representación escénica del cuento de *Peter Pan*, la actriz que hace el papel de Peter, que pesa 50 kg, ha de "volar" verticalmente (descendiendo) de forma que para coincidir con el fondo musical debe bajar una distancia de 3,2 m en 2,2 s. Entre bastidores, una superficie pulida, inclinada 50°, soporta un contrapeso de masa m, como indica la figura 4.55. Indicar los cálculos que debe realizar el director de escena para determinar (*a*) la masa del contrapeso que debe utilizarse y (*b*) la tensión del cable.

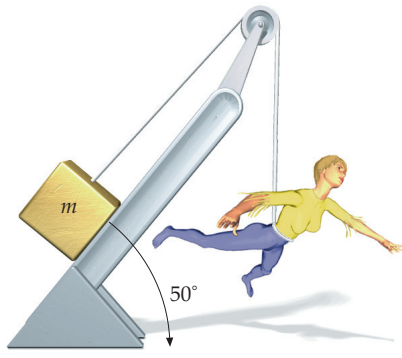


FIGURA 4.55 Problema 76

77 •• Un bloque de 8 kg y otro de 10 kg, conectados por una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento, se deslizan por planos inclinados sin rozamiento como indica la figura 4.56. (*a*) Determinar la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda. (*b*) Los dos bloques se reemplazan por otras de masas m_1 y m_2, de tal modo que no se produce aceleración. Determinar toda la información posible sobre las masas de estos dos nuevos bloques.

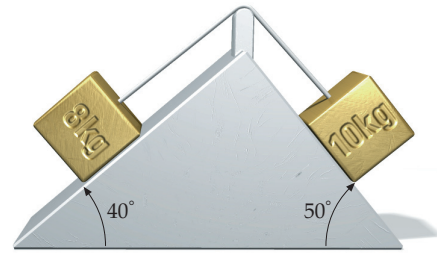


FIGURA 4.56 Problema 77

78 •• Una cuerda pesada de longitud 5 m y masa 4 kg se encuentra sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Un extremo se conecta a un bloque de 6 kg. En el otro extremo de la cuerda se aplica una fuerza horizontal constante de 100 N. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del sistema? (*b*) Expresar la tensión de la cuerda en función de su posición a lo largo de ésta.

79 •• Una pintora de 60 kg está de pie sobre un montacargas de aluminio de 15 kg. El montacargas está sujeto por una cuerda que pasa por una polea situada en lo alto de la casa, lo que le permite elevarse a sí misma y a la plataforma (figura 4.57). (*a*) ¿Con qué fuerza debe tirar de la cuerda para que el conjunto ascienda con una aceleración de 0,8 m/s^2? (*b*) Cuando su velocidad alcanza el valor de 1 m/s, tira de la cuerda de modo que ella y su montacargas ascienda a velocidad constante. ¿Qué fuerza ejerce entonces la cuerda? (Ignorar la masa de la cuerda.) SSM

FIGURA 4.57 Problema 79

80 ••• La figura 4.58 muestra un bloque de 20 kg que se desliza sobre otro de 10 kg. Todas las superficies se consideran sin rozamiento. Determinar la aceleración de cada bloque y la tensión en la cuerda que los conecta.

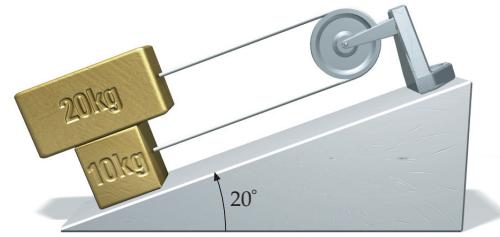


FIGURA 4.58 Problema 80

81 ••• Un bloque de 20 kg dotado de una polea se desliza a lo largo de una superficie sin rozamiento. Está conectado mediante una cuerda a un bloque de 5 kg según el dispositivo que se muestra en la figura 4.59. Determinar (*a*) la aceleración de cada uno de los bloques y (*b*) la tensión de la cuerda.

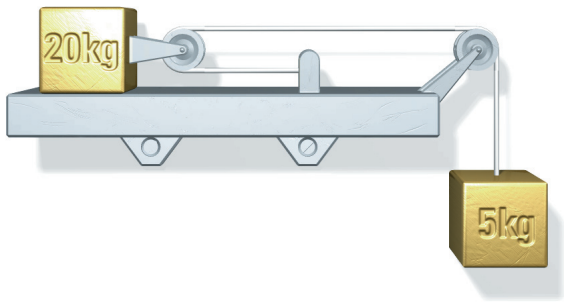


FIGURA 4.59 Problema 81

82 •• **MÚLTIPLES PASOS** El aparato de la figura 4.60 se denomina máquina de Atwood y se utiliza para medir la aceleración debida a la gravedad g a partir de la aceleración de dos bloques conectados con una cuerda que pasa por una polea. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas de cada bloque. (*b*) Utilizar el diagrama de fuerzas y las leyes de Newton para demostrar que el módulo de la aceleración de cualquier bloque y la tensión son: $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$ y $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2)$. (*c*) Estas expresiones, ¿proporcionan resultados correctos si $m_1 = m_2$? ¿Y en el límite $m_1 >> m_2$? ¿Y en el límite $m_1 << m_2$? Razonar las respuestas.

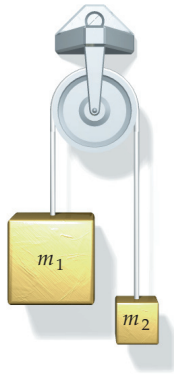


FIGURA 4.60 Problemas 82 y 83

83 •• Si una de las masas de la máquina de Atwood de la figura 4.60 es 1,2 kg, ¿cuál sería la otra masa para que el desplazamiento de cualquiera de ellas durante el primer segundo después de comenzar el movimiento fuese 0,3 m? Supóngase que la polea no tiene masa ni produce rozamiento y que las cuerdas tampoco tienen masa.

84 ••• La aceleración de la gravedad g puede determinarse midiendo el tiempo t que tarda una masa m_2 de la máquina de Atwood en caer una distancia L a partir del reposo. (*a*) Determinar una expresión para g en función de m_1, m_2, L y t. (*b*) Demostrar que si se comete un pequeño error en la medida del tiempo dt, ello conducirá a un error en la determinación de g, dado por la expresión $dg/g = -2\,dt/t$. (*c*) Si $L = 3$ m y $m_1 = 1$ kg, determinar el valor de m_2, de modo que g pueda medirse con una exactitud de ± 5% y una medida del tiempo con un error inferior a 0,1 s.

PROBLEMAS GENERALES

85 •• Una pequeña piedra de masa m descansa sobre el bloque de masa m_2 de la máquina de Atwood de la figura 4.60. Determinar la fuerza ejercida por la piedra sobre el bloque de masa m_2.

86 •• Puede construirse un acelerómetro sencillo colgando un cuerpo pequeño de una cuerda sujeta a un punto fijo en un objeto que se acelera, por ejemplo, en el punto P del techo de un automóvil que se mueve por una superficie plana con aceleración constante. Debido a la aceleración, la cuerda formará un ángulo θ con la vertical. (*a*) Demostrar que la aceleración a está relacionada con el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical por $a = g$ tg θ. (*b*) Supóngase que el automóvil frena hasta llegar al reposo desde la velocidad de 50 km/h en una distancia de 60 m. ¿Qué ángulo formará la cuerda con la vertical? ¿La masa se situará por delante o por detrás del punto P?

87 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El mástil de un balandro está sujeto a proa y a popa por dos cables de acero inoxidable con sus anclajes separados una distancia de 10 m (figura 4.61). El mástil, de 12 m de altura, pesa 800 N y se apoya verticalmente sobre la cubierta del balandro. El mástil dista 3,5 m del anclaje del cable delantero (el más próximo a la proa). La tensión de este cable es de 500 N. Determinar la tensión en el cable trasero y la fuerza que el mástil ejerce sobre la cubierta del balandro. SSM

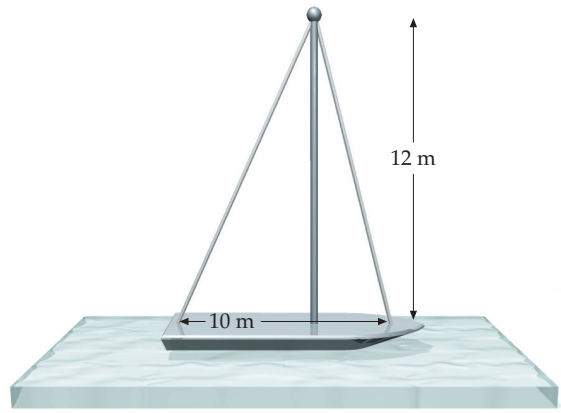


FIGURA 4.61 Problema 87

88 •• Una cadena larga y uniforme cuelga del techo aguantando un objeto de 50 kg de masa. La masa de la cadena es de 20 kg, y su longitud es 1,5 m. Determinar la tensión en la cadena (*a*) en el punto donde la cadena está sujeta al objeto, (*b*) en la mitad de la cadena, y (*c*) en el punto donde la cadena está sujeta al techo.

89 •• La velocidad de la cabeza de un pájaro carpintero antes de impactar contra un árbol es de 5,5 m/s. Si la masa de la cabeza es de 0,06 kg y la fuerza media sobre la cabeza es de 6 N, determinar (*a*) la aceleración, supuesta constante, de la cabeza, (*b*) la profundidad de penetración del pico dentro del árbol, (*c*) el tiempo que tarda la cabeza en detenerse.

90 •• **MÚLTIPLES PASOS** Supongamos que una superficie sin rozamiento está inclinada un ángulo de 30° con la horizontal. Un bloque de 270 g está atado a un peso de 75 g que cuelga de una polea, como se muestra en la figura 4.62. (*a*) Dibujar los dos diagramas de fuerza, uno para el bloque y el otro para el peso que cuelga. (*b*) Determinar la tensión en la cuerda y la aceleración del bloque. (*c*) El bloque parte del re-

FIGURA 4.62 Problema 90

poso. ¿Cuánto tiempo le cuesta deslizarse una distancia de 1 m por la superficie? ¿Se deslizará hacia arriba o hacia abajo?

91 •• Un bloque de masa m_1 es impulsado por una fuerza $\vec{F}$ aplicada en el extremo de una cuerda que tiene una masa m_2 mucho menor, como se indica en la figura 4.63. El bloque se desliza a lo largo de una superficie horizontal pulida. (*a*) Determinar la aceleración de la cuerda y el bloque conjuntamente. (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre la cuerda? (*c*) Determinar la tensión de la cuerda en el punto donde está atada al bloque.

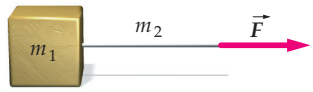


FIGURA 4.63 Problema 91

92 •• Un cuerpo de 2 kg descansa sobre un plano inclinado 60° sin rozamiento que se desliza con una aceleración $\vec{a}$ hacia la derecha de tal modo que la masa permanece estacionaria con relación al plano (figura 4.64). (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas y utilizarlo para determinar el módulo de la aceleración. (*b*) ¿Qué ocurriría si el plano adquiriese una aceleración superior?

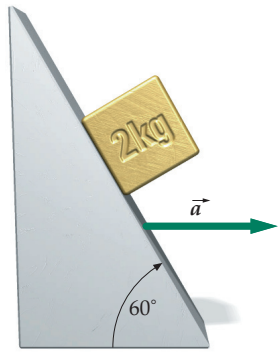


FIGURA 4.64 Problema 92

93 ••• Las masas colocadas a cada lado de una máquina de Atwood son una pila de cinco arandelas, cada una de masa m, como se muestra en la figura 4.65. La tensión de la cuerda es T_0. Si se quita una arandela del lado izquierdo, las restantes arandelas aceleran y la tensión disminuye en 0,3 N. (*a*) Determinar m. (*b*) Calcular la nueva tensión y la aceleración de cada masa cuando se quita una segunda arandela del lazo izquierdo. SSM

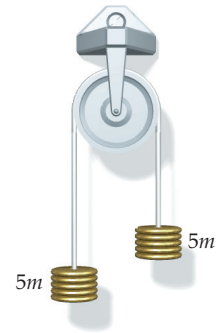


FIGURA 4.65 Problemas 93 y 94

94 •• Consideremos la máquina de Atwood de la figura 4.65. Cuando se transfieren N arandelas del lado izquierdo al lado derecho, este último desciende 47,1 cm en 0,40 s. Determinar N.

95 •• Dos bloques de masas m y $2m$ están sujetos por una cuerda (figura 4.66) y se encuentran sobre una superficie horizontal perfectamente pulida. Sobre los bloques se aplican las fuerzas F_1 y F_2. (*a*) Si las fuerzas son constantes, determinar la tensión de la cuerda. (*b*) Si las fuerzas varían con el tiempo según $F_1 = Ct$ y $F_2 = 2Ct$, donde C es 5 N/s y t el tiempo, determinar el tiempo t_0 en el cual la tensión de la cuerda es 10 N.

FIGURA 4.66 Problema 95

96 •• Desde que murió el 16 de agosto de 1977, Elvis Presley ha sido visto supuestamente numerosas veces. La tabla adjunta ilustra el peso que tendría Elvis si fuese visto sobre la superficie de otros cuerpos de nuestro sistema solar. Utilice la tabla para determinar (*a*) la masa de Elvis en la Tierra, (*b*) la masa de Elvis en Plutón y (*c*) la aceleración de la gravedad de Marte. (*d*) Compare la aceleración de la gravedad de Plutón con la de la Luna.

Planeta	Peso de Elvis (N)
Mercurio	431
Venus	1031
Tierra	1133
Marte	431
Júpiter	2880
Saturno	1222
Plutón	58
Luna	191

97 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Sus amigos le han hecho una broma y le han secuestrado mientras dormía dejándole sobre el hielo que cubre parcialmente un lago. Cuando se despierta se encuentra a 30 m de la orilla más cercana. El hielo se desliza sobre el agua sin rozamiento. Se da cuenta de que puede utilizar la tercera ley de Newton para llegar a la orilla y decide lanzar lo más pesado que tenga, como por ejemplo una bota de 1,2 kg. Suponga que su peso es de 595 N. (*a*) ¿En qué dirección deberá lanzar la bota para moverse en la dirección adecuada? (*b*) Si lanza la bota con una fuerza media de 420 N y el lanza-

miento dura 0,6 s (el intervalo de tiempo durante el cual aplica la fuerza), ¿cuál es el módulo de la fuerza que la bota ejerce sobre usted? (suponga la aceleración constante) (*c*) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la orilla, incluyendo el tiempo que dura el lanzamiento?

98 ••• La polea de una máquina de Atwood experimenta una aceleración hacia arriba $\vec{a}$, como se muestra en la figura 4.67. Determinar la aceleración de cada masa y la tensión en la cuerda de la máquina. En este caso, las velocidades de los dos bloques no son iguales.

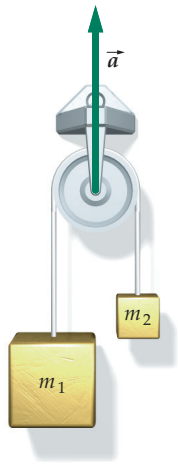


FIGURA 4.67 Problema 98

99 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO, HOJA DE CÁLCULO** Usted trabaja para una revista de automóviles y se encarga de realizar las pruebas a un coche de 650 kg. Mientras acelera desde el reposo, el ordenador de abordo registra la velocidad en función del tiempo proporcionando los siguientes resultados:

v_x **(m/s):**	0	10	20	30	40	50
t **(s):**	0	1,8	2,8	3,6	4,9	6,5

(*a*) Utilizando un **hoja de cálculo** encuentre la aceleración media de los cinco intervalos y trace el gráfico de la velocidad frente al tiempo y la aceleración frente al tiempo. (*b*) Indique, en el gráfico de la velocidad frente al tiempo, dónde la fuerza neta es más alta y dónde más baja. (*c*) ¿Cuál es la fuerza media sobre el coche a lo largo de todo el recorrido? (*d*) A partir del gráfico de la velocidad frente al tiempo, estime la distancia total recorrida por el coche.

CAPÍTULO 5

El centro mundial de carreras de automóviles, el Daytona International Speedway, tiene un circuito tri-oval de cuatro kilómetros de curvas peraltadas con 31° de inclinación. En la carrera Daytona 500 los automóviles toman las curvas a unos 320 km/h. Sorprendentemente, los espectaculares accidentes, por los que Daytona 500 es tan famosa, no se deben a derrapes en las curvas. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

Aplicaciones adicionales de las leyes de Newton

5.1 Rozamiento
5.2 Fuerzas de arrastre
5.3 Movimiento a lo largo de una trayectoria curva
*5.4 Integración numérica: el método de Euler
5.5 El centro de masas

? ¿Qué factores determinan la velocidad con la que un coche puede girar por una curva sin patinar? (Véase el ejemplo 5.12.)

En el capítulo 4, se han introducido las leyes de Newton y se las ha aplicado a situaciones donde la acción se restringía a movimientos rectilíneos y donde no se consideraba el rozamiento. Ahora, estudiaremos aplicaciones más generales y veremos cómo las leyes de Newton se pueden utilizar para explicar innumerables propiedades de fenómenos que ocurren en el mundo en que vivimos.

En este capítulo, extenderemos las leyes de Newton al estudio del movimiento en trayectorias curvas y analizaremos los efectos de las fuerzas de resistencia como la fricción y el arrastre. También introduciremos el concepto de centro de masas de un sistema de partículas y mostraremos cómo, el describir el sistema como una sola partícula localizada en el centro de masas, permite describir el movimiento del sistema como un todo.

5.1 ROZAMIENTO

Si se empuja un libro que está en reposo sobre una mesa, el libro probablemente se deslizará sobre la mesa. Si la mesa es suficientemente larga, el libro se deslizará hasta pararse. Esto sucede porque la fuerza de rozamiento es ejercida por la mesa sobre el libro en dirección contraria a la velocidad del libro. Esta fuerza, que actúa sobre la superficie del libro que está en contacto con la mesa, se conoce como *fuerza de rozamiento* o *fuerza de fricción*. Las fuerzas de rozamiento forman parte de nuestra vida. Ni caminar ni moverse en automóvil sería posible sin el rozamiento. Para echar a andar por una superficie horizontal hace falta el rozamiento y, una vez en marcha, para cambiar la dirección o la velocidad del movimiento también hace falta rozamiento. El rozamiento permite iniciar el movimiento de un coche, maniobrar con él y pararlo. Se necesita rozamiento para mantener una tuerca en un tornillo o un clavo en la madera. Sin embargo, aunque el rozamiento sea muy importante, muchas veces se intenta evitar. El rozamiento produce el desgaste de las piezas móviles de cualquier maquinaria cuando están en contacto; por ello, se emplean importantes sumas de dinero y tiempo para reducir sus efectos.

El rozamiento es un fenómeno complejo, insuficientemente conocido, que surge como consecuencia de la fuerza de atracción entre las moléculas que forman dos superficies en contacto. La naturaleza de esta atracción es electromagnética —la misma naturaleza de enlace molecular que mantiene la materia unida. Esta fuerza de atracción es de corto alcance y resulta prácticamente inapreciable a distancias de pocos diámetros atómicos.

Como se muestra en la figura 5.1, los objetos ordinarios, aunque tengan superficies muy pulidas, de aspecto liso y suave, a escala atómica son ásperos y rugosos. Cuando entran en contacto dos superficies sólo se tocan por aquellos puntos más prominentes, denominados asperezas, que se muestran en la figura 5.1. La fuerza normal ejercida por la superficie se produce precisamente en estas asperezas, donde la fuerza por unidad de área es muy grande, suficiente para allanar las protuberancias. A medida que la fuerza normal aumenta, también lo hace este aplanado, lo cual conduce a que el área de contacto microscópica aumente. En condiciones muy diversas, el área de contacto microscópica es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de rozamiento es proporcional al área microscópica de contacto, por lo que también es proporcional a la fuerza normal.

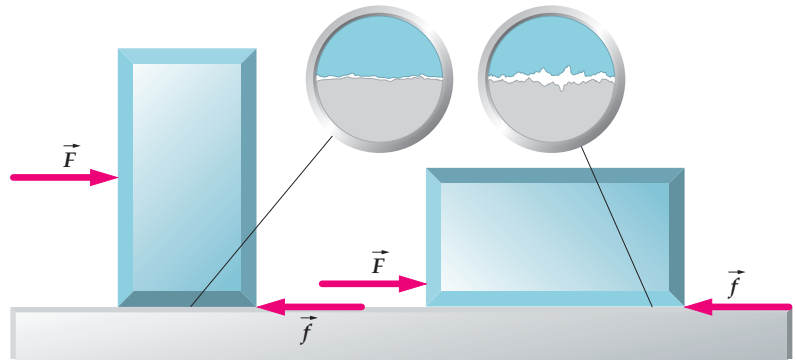
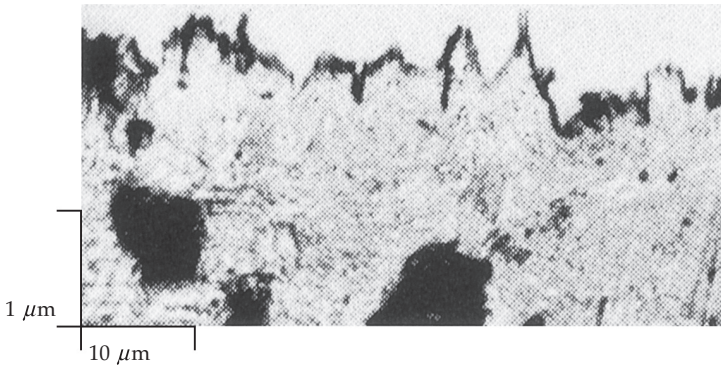
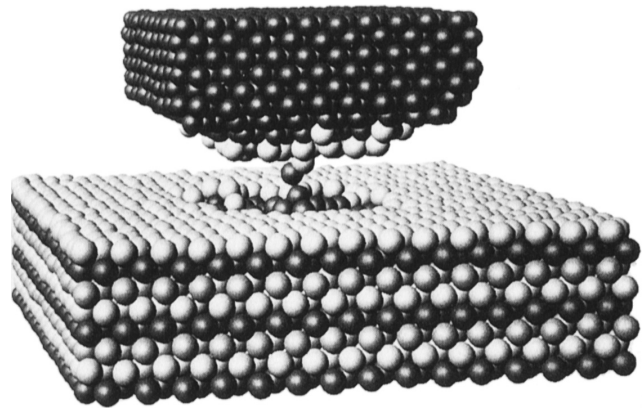


FIGURA 5.1 El área microscópica de contacto entre el bloque y el suelo es sólo una pequeña fracción del área macroscópica del bloque. Esta fracción es proporcional a la fuerza normal ejercida entre las superficies. Si el bloque descansa sobre una base mayor, el área macroscópica de contacto se incrementa, pero la fuerza por unidad de área disminuye en el mismo factor, de tal modo que el área microscópica de contacto no se modifica. Tanto si el bloque descansa sobre una base o sobre otra, hay que aplicar la misma fuerza horizontal F para mantenerlo en movimiento a velocidad constante.



Sección aumentada de una superficie de acero pulida que muestra las irregularidades superficiales. La altura media de estas irregularidades es del orden de 5×10^{-5} cm, correspondiente a varios miles de diámetros atómicos. *(From F. P. Bowden and D. Tabor,* Lubrication of Solids, *Oxford University Press, 2000.)*



Dibujo de ordenador que muestra cómo unos cuantos átomos de oro (abajo) se adhieren a la punta fina (arriba) de una sonda de níquel que ha estado en contacto con la superficie de oro. *(Uzi Landman and David W. Leudtke/Georgia Institute of Technology.)*

ROZAMIENTO ESTÁTICO

Cuando aplicamos una pequeña fuerza horizontal $\vec{F}$ a un gran bloque que descansa sobre el suelo, el bloque no se mueve, debido a la fuerza de rozamiento estático $\vec{f}_e$, ejercida por el suelo sobre el bloque, que equilibra la fuerza que estamos aplicando. El **rozamiento estático** es la fuerza de rozamiento que actúa cuando aún no hay deslizamiento entre las dos superficies en contacto; es la fuerza que evita que el bloque se deslice. La fuerza de rozamiento estático, que se opone a la fuerza aplicada sobre el bloque, puede variar desde cero hasta cierto valor máximo $f_{e\,máx}$, dependiendo de la fuerza ejercida. Es decir, conforme se empuja al bloque, la fuerza de rozamiento estático aumenta a fin de igualar al módulo de la fuerza externa aplicada hasta que ésta supera el valor $f_{e\,máx}$. Los experimentos muestran que $f_{e\,máx}$ es proporcional a la fuerza normal ejercida por una superficie sobre la otra:

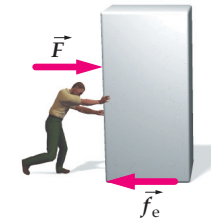


FIGURA 5.2

$$f_{e\,máx} = \mu_e F_n \qquad 5.1$$

EXPRESIÓN PARA EL ROZAMIENTO ESTÁTICO

donde la constante de proporcionalidad μ_e, es el llamado **coeficiente de rozamiento estático**. Este coeficiente depende de la naturaleza de las superficies en contacto y de sus temperaturas. Si ejercemos una fuerza horizontal menor que $f_{e\,máx}$ sobre el bloque, la fuerza de rozamiento equilibrará esta fuerza horizontal y el bloque se mantendrá en reposo. Si ejercemos una fuerza ligeramente superior a $f_{e\,máx}$, el bloque empezará a deslizarse. Entonces podremos escribir la ecuación 5.1 como

$$f_e \leq \mu_e F_n \qquad 5.2$$

La dirección de la fuerza de rozamiento estático es tal que se opone a que el bloque tienda a deslizarse.

> **!** La ecuación 5.2 es una desigualdad porque el módulo de la fuerza de rozamiento va de cero a $f_{e\,máx}$.

> **!** Si la fuerza horizontal ejercida sobre el bloque va hacia la izquierda, entonces la fuerza de rozamiento estático va hacia la derecha. La fuerza de rozamiento estático siempre se opone a cualquier tendencia al movimiento.

ROZAMIENTO CINÉTICO

Si se empuja el bloque de la figura 5.2 con fuerza suficiente, éste se deslizará sobre el suelo. Al deslizarse, el suelo ejerce una fuerza de **rozamiento cinético**, $\vec{f}_c$ (también llamada de rozamiento por deslizamiento) que se opone al sentido del movimiento. Para que el bloque se deslice con velocidad constante, debe ejercerse una fuerza sobre el bloque igual en módulo y de sentido opuesto a la fuerza de rozamiento cinético ejercida por el suelo.

El módulo de la fuerza de rozamiento cinético f_c es proporcional al área microscópica de contacto y a la intensidad de las fuerzas que provienen de las superficies. Es decir, f_c es proporcional a la fuerza normal que una de las superficies ejerce sobre la otra:

$$f_c = \mu_c F_n \qquad 5.3$$

EXPRESIÓN PARA EL ROZAMIENTO CINÉTICO

donde μ_c es el **coeficiente de rozamiento cinético**. Este coeficiente depende de los materiales con que se fabrican las superficies en contacto así como de las temperaturas de las mismas. A diferencia del rozamiento estático, la fuerza de rozamiento cinético es independiente de la fuerza exterior aplicada. Los experimentos muestran que μ_c es prácticamente constante para un amplio rango de velocidades.

La figura 5.3 muestra un gráfico de la fuerza de rozamiento ejercida sobre el bloque por el suelo en función de la fuerza aplicada. La fuerza de rozamiento equilibra a la fuerza aplicada hasta que ésta alcanza el valor $\mu_e F_n$, que es cuando la caja empieza a moverse. A partir de entonces, la fuerza de rozamiento es $\mu_c F_n$. Para cualquiera que sea la superficie de contacto, $\mu_c < \mu_e$. Esto quiere decir que debemos aplicar siempre mayor fuerza para iniciar el movimiento del bloque que para mantenerlo en movimiento a velocidad constante. La tabla 5.1 da una relación de algunos valores aproximados de μ_e y de μ_c para varias parejas de superficies.

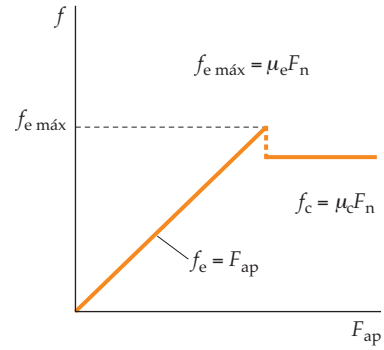


FIGURA 5.3

Tabla 5.1 Valores aproximados de los coeficientes de rozamiento

Materiales	μ_e	μ_c
Acero sobre acero	0,7	0,6
Latón sobre acero	0,5	0,4
Cobre sobre hierro fundido	1,1	0,3
Vidrio sobre vidrio	0,9	0,4
Teflón sobre teflón	0,04	0,04
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Caucho sobre hormigón (seco)	1,0	0,80
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0,30	0,25
Esquí encerado sobre nieve (0 °C)	0,10	0,05

EL ROZAMIENTO POR RODADURA

Cuando una rueda ideal rígida rueda sin deslizarse a velocidad constante por una carretera ideal, rígida y horizontal, no hay ninguna fuerza de rozamiento que frene su movimiento. Sin embargo, los neumáticos reales y las carreteras se deforman continuamente, y la banda de rodadura del neumático y la carretera se gastan, lo cual significa que la carretera ejerce un **rozamiento de rodadura** $\vec{f}_r$ que se opone al movimiento. Para mantener la rueda rodando con velocidad constante, hay que ejercer una fuerza sobre la rueda que iguale en magnitud y que se oponga en dirección a la fuerza de rozamiento de rodadura ejercida por el asfalto.

El **coeficiente de rozamiento de rodadura** μ_r es el coeficiente de proporcionalidad entre el módulo de la fuerza de rozamiento de rodadura F_r y el módulo de la fuerza normal F_n.

$$f_r = \mu_r F_n \qquad 5.4$$

EXPRESIÓN PARA EL ROZAMIENTO DE RODADURA

donde μ_r depende de la naturaleza de las superficies de contacto y de la composición de la rueda y de la carretera. Los valores típicos de μ_r están entre 0,01 y 0,02 para los neumáticos de caucho en hormigón, y entre 0,001 y 0,002 para ruedas de acero sobre raíles de acero. Los coeficientes de rozamiento por rodadura son inferiores a los coeficientes de rozamiento cinéticos en un par de órdenes de magnitud. El rozamiento por rodadura será despreciado en los problemas salvo que se indique lo contrario.

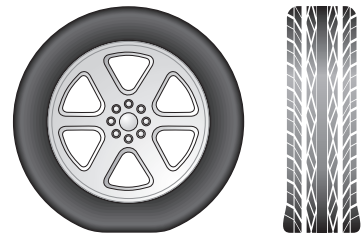


FIGURA 5.4 Conforme el coche corre por la autopista, el neumático flexiona radialmente hacia dentro en los lugares donde el dibujo del neumático entra en contacto con el pavimento, mientras que flexiona radialmente hacia fuera allí donde el neumático pierde el contacto con el pavimento. El neumático no es perfectamente elástico, de forma que las fuerzas que actúan sobre el dibujo flexionándolo hacia dentro son mayores que las fuerzas que ejerce el pavimento sobre el neumático en el momento que este se despega. Esta diferencia de fuerzas produce una fuerza opuesta a la rodadura del neumático llamada fuerza de rozamiento por rodadura. Cuanto más flexiona el neumático mayor será la fuerza de rozamiento por rodadura.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ROZAMIENTO ESTÁTICO Y CINÉTICO

Los siguientes ejemplos ilustran cómo se resuelven problemas donde interviene rozamiento estático y cinético. Las pautas a seguir para resolver este tipo de problemas son:

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de rozamiento

PLANTEAMIENTO Determinar los tipos de rozamiento que aparecen en el problema. Los objetos experimentan rozamiento estático cuando no hay deslizamiento entre ellos y las superficies con las que están en contacto. La fuerza de rozamiento estático se opone a la tendencia de que las superficies se deslicen unas sobre otras. La fuerza de rozamiento estático máxima $f_{e\,máx}$ es igual al producto entre la fuerza normal y el coeficiente de rozamiento estático. Si dos superficies se deslizan una sobre la otra, experimentan una fuerza de rozamiento cinético (a menos que el problema indique lo contrario). El rozamiento por rodadura aparece cuando el objeto rodante y la superficie sobre la que rueda se deforman continuamente.

SOLUCIÓN

1. Construir un diagrama de fuerzas con el eje y perpendicular a las superficies de contacto y el eje x paralelo a ellas. La dirección de la fuerza de rozamiento se opone al deslizamiento o a la tendencia al deslizamiento.
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ y despejar la fuerza normal F_n.
   Si el rozamiento es cinético o de rodadura, se han de relacionar las fuerzas de rozamiento y la normal mediante $f_c = \mu_c F_n$ o $f_r = \mu_r F_n$, respectivamente.
   Si el rozamiento es estático, relacionar las fuerzas de rozamiento y la fuerza normal mediante $f_e \leq \mu_e F_n$ (o $f_{e\,máx} = \mu_e F_n$).
3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a cada objeto y despejar la cantidad deseada.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que su respuesta tiene sentido, recuerde que los coeficientes de rozamiento son magnitudes adimensionales y deber tener en cuenta todas las fuerzas (por ejemplo, las tensiones en las cuerdas).

Ejemplo 5.1 El juego del *Shuffleboard*

Un pasajero de un crucero usa un taco de *shuffleboard* para impulsar horizontalmente un disco de 0,40 kg a una velocidad de 8,5 m/s por la pista de juego situada en la cubierta del barco. El disco recorre ocho metros antes de pararse. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el disco y la cubierta.

PLANTEAMIENTO La fuerza de rozamiento cinético es la única fuerza horizontal que actúa sobre el disco (figura 5.5). Como la fuerza de rozamiento es constante, la aceleración es también constante. Podemos determinar la aceleración a partir de las ecuaciones de aceleración constante del capítulo 2 y relacionarla con μ_c usando $\Sigma F_x = ma_x$.

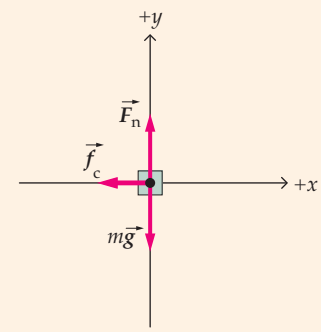


FIGURA 5.5

SOLUCIÓN

1. En la figura 5.5 se muestra el diagrama de fuerzas para el disco cuando el taco ya lo ha soltado. Las flechas en los ejes indican las direcciones positivas de los ejes x e y:

2. El coeficiente de rozamiento está relacionado con la fuerza de rozamiento y la normal: $f_c = \mu_c F_n$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al disco. Despejar la fuerza normal. Usando el resultado del paso 2, obtener la fuerza de rozamiento:
   $\Sigma F_y = ma_y$
   $F_n - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg$
   por lo tanto, $f_c = \mu_c mg$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al disco. Despejar la aceleración usando el resultado del paso 3:
   $\Sigma F_x = ma_x$
   $-f_c = ma_x$
   por lo tanto, $-\mu_c mg = ma_x$ y $a_x = -\mu_c g$

5. Relacionar la aceleración constante con la distancia total recorrida y la velocidad inicial mediante la ecuación 2.15. Utilizando el resultado del paso 4, calcular μ_c:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x \;\Rightarrow\; 0 = v_{0x}^2 - 2\mu_c g\,\Delta x$$

$$\text{por lo tanto,}\quad \mu_c = \frac{v_{0x}^2}{2g\,\Delta x} = \frac{(8{,}5\ \text{m/s})^2}{2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(8{,}0\ \text{m})} = \boxed{0{,}46}$$

COMPROBACIÓN El valor obtenido para μ_c es adimensional y su valor se halla dentro del rango de valores de los materiales de la tabla 5.1.

OBSERVACIÓN Obsérvese que la aceleración y el coeficiente de rozamiento son independientes de la masa m. Cuanto mayor es la masa más cuesta detener el disco, pero a mayor masa mayor fuerza normal y, por tanto, mayor fuerza de rozamiento. El resultado final es que la masa no tiene efecto alguno sobre la aceleración (ni sobre la distancia de frenado).

Ejemplo 5.2 Una moneda que resbala

Sobre la cubierta superior de un libro de tapas duras (figura 5.6) que está sobre una mesa hay una moneda. Poco a poco se levanta la tapa del libro hasta que la moneda empieza a deslizarse. El ángulo $\theta_{máx}$ (conocido como ángulo de reposo) es el ángulo que forma la tapa con la horizontal en el momento en que la moneda empieza a moverse. Calcular el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre la tapa del libro y la moneda en función de $\theta_{máx}$.

FIGURA 5.6 *(Ramón Rivera-Moret.)*

PLANTEAMIENTO Las fuerzas que actúan sobre la moneda son su peso mg, la fuerza normal F_n ejercida por el plano y la fuerza de rozamiento f. Como la moneda está a punto de deslizarse (aunque aún no se desplaza), la fuerza de rozamiento es estática. La moneda está en reposo y, por tanto, su aceleración es cero. Utilizamos la segunda ley de Newton para relacionar la aceleración de la moneda con las fuerzas que actúan sobre ella y encontrar la fuerza de rozamiento.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la moneda cuando la tapa del libro está inclinada un ángulo θ, donde $\theta \leq \theta_{máx}$ (figura 5.7). Dibujar el eje y perpendicular a la tapa del libro:

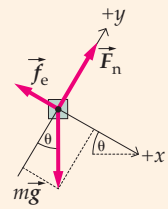


FIGURA 5.7

2. El coeficiente de rozamiento estático relaciona la fuerza de rozamiento con la normal: $f_e \leq \mu_e F_n$

3. Aplicando $\sum F_y = ma_y$ a la moneda se obtiene la fuerza normal:
$$\sum F_y = ma_y$$
$$F_n - mg\cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; F_n = mg\cos\theta$$

4. Introducimos F_n en $f_e \leq \mu_e F_n$ (ecuación 5.1): $f_e \leq \mu_e F_n \;\Rightarrow\; f_e \leq \mu_e mg\cos\theta$

5. Aplicando $\sum F_x = ma_x$ a la moneda se obtiene la fuerza de rozamiento:
$$\sum F_x = ma_x$$
$$-f_e + mg\,\text{sen}\,\theta = 0 \;\Rightarrow\; f_e = mg\,\text{sen}\,\theta$$

6. Introducimos $mg\,\text{sen}\,\theta$ en lugar de f_e en el paso 4: $mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_e mg\cos\theta \;\Rightarrow\; \text{tg}\,\theta \leq \mu_e$

7. $\theta_{máx}$ es el ángulo más grande que cumple $\text{tg}\,\theta \leq \mu_e$ y, por tanto, el ángulo máximo con que la moneda no se desliza: $\boxed{\mu_e = \text{tg}\,\theta_{máx}}$

COMPROBACIÓN El coeficiente de rozamiento es adimensional; y también lo es la función tangente. Para $0 < \theta_{máx} < 45°$, $\text{tg}\,\theta_{máx}$ está entre 0 y 1. Uno podría esperar que la moneda se deslizase antes de alcanzar los 45° así como que el coeficiente de rozamiento estuviese comprendido entre 0 y 1. Por tanto, el resultado del paso 7 parece lógico.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.1 Determinado día, el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera es 0,7. ¿Cuál es el ángulo máximo de inclinación de la carretera para que el coche pueda estar parado con sus ruedas bloqueadas y no se deslice hacia abajo?

Erosión debida a la corriente de agua que llega a la orilla. El ángulo de la pendiente, que permanece constante, es el ángulo de reposo para el material granular. *(David R. Bailey.)*

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 5.1

El coche del problema práctico 5.1 está aparcado con el ángulo máximo de inclinación y las cuatro ruedas bloqueadas por el freno de mano. Si sólo se bloquean dos ruedas, ¿se deslizará hacia abajo?

Ejemplo 5.3 Tirando de un trineo

Dos niños son arrastrados en un trineo sobre un terreno cubierto de nieve. Se tira del trineo con una cuerda que forma un ángulo de 40° con la horizontal, como se indica en la figura 5.8. La masa conjunta de los dos niños es de 45 kg y el trineo tiene una masa de 5 kg. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son $\mu_e = 0{,}2$ y $\mu_c = 0{,}15$ y el trineo está inicialmente en reposo. Determinar la fuerza de rozamiento ejercida por el suelo sobre el trineo y la aceleración de los niños y el trineo, si la tensión de la cuerda es (*a*) 100 N y (*b*) 140 N.

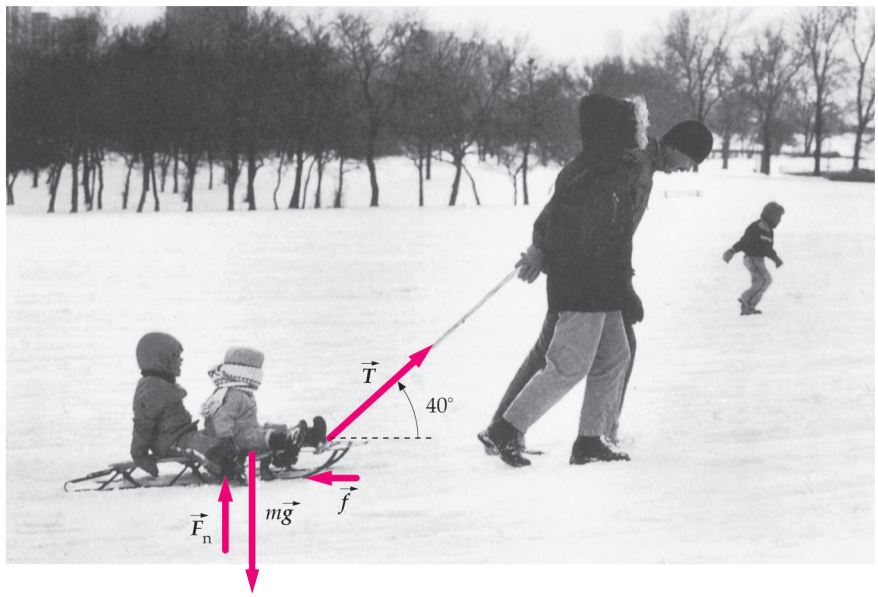


FIGURA 5.8 *(Jean-Claude LeJeune/Stock Boston.)*

PLANTEAMIENTO Determinar en primer lugar si la fuerza de rozamiento es estática o cinética. Para ello, tenemos que ver si la tensión satisface la relación $f_e \leq \mu_e F_n$. Después, ya podemos seleccionar la expresión para la fuerza de rozamiento y encontrar f.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el trineo (figura 5.9):

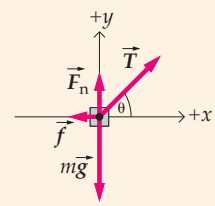


FIGURA 5.9

2. Escribir la expresión para la fuerza de rozamiento estático. Si se cumple, el trineo no se deslizará:

$$f_e \leq \mu_e F_n$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al trineo y se obtiene la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático máxima:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_n + T\,\text{sen}\,\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg - T\,\text{sen}\,\theta$$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al trineo y se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

$$\Sigma f_x = ma_x$$
$$-f_e + T\cos\theta = 0 \Rightarrow f_e = T\cos\theta$$

5. Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en el resultado del paso 2:

$$T\cos\theta \le \mu_e(mg - T\,\text{sen}\,\theta)$$

6. Comprobamos si la tensión de 100 N cumple la condición del paso 3:

$$(100\text{ N})\cos 40° \le 0{,}20[(50\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (100\text{ N})\,\text{sen}\,40°]$$
$$77\text{ N} \le 85\text{ N}$$

La desigualdad se cumple, entonces el trineo *no* se desliza.

7. El trineo no se desliza. Para encontrar la fuerza de rozamiento, se usa la expresión obtenida en el paso 3 para f_e:

$$a_x = 0$$
$$f_e = T\cos\theta = (100\text{ N})\cos 40° = \boxed{77\text{ N}}$$

(*b*) 1. Comprobar el resultado del paso 4 del apartado (*a*) con $T = 140$ N. Si la relación se cumple, el trineo no se deslizará:

$$(140\text{ N})\cos 40° \le 0{,}20[(50\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (140\text{ N})\,\text{sen}\,40°]$$
$$107\text{ N} \le 80\text{ N}$$

La desigualdad *no* se cumple y el trineo se deslizará.

2. Como el trineo se desliza, la fuerza de rozamiento es cinética con $f_c = \mu_c F_n$. En el paso (*a*) 2 se aplicó $\Sigma F_y = ma_y$ al trineo y se encontró $F_n = mg - T\,\text{sin}\,\theta$. Usar este resultado junto con el paso (*b*) 1 para obtener la fuerza de rozamiento cinética:

$$f_c = \mu_c F_n$$
$$f_c = \mu_c(mg - T\,\text{sen}\,\theta)$$
$$= 0{,}15[(50\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - (140\text{ N})\,\text{sen}\,40°]$$
$$= \boxed{60\text{ N}}$$

3. Aplicando $\Sigma F_x = ma_x$ al trineo, se obtiene la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2 para f_c y se obtiene la aceleración:

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$-f_c + T\cos\theta = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{-f_c + T\cos\theta}{m}$$

por lo tanto, $$a_x = \frac{(-60\text{ N}) + (140\text{ N})\cos 40°}{50\text{ kg}} = \boxed{0{,}94\text{ m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Lo esperado es que a_x sea mayor o igual que cero, de forma que el módulo de la fuerza de rozamiento sea menor o igual que la componente x de la tensión. En el apartado (*a*) el módulo de la fuerza de rozamiento y la componente x de la tensión son ambas iguales a 77 N, y en el apartado (*b*) el módulo de la fuerza de rozamiento es 66 N mientras la componente x de la tensión es 140 N cos 40° = 107 N.

OBSERVACIÓN Hay que resaltar dos puntos importantes en este ejemplo: (1) La fuerza normal no es igual a la suma del peso de los niños más el trineo, pues la componente vertical de la tensión tiende a levantar el trineo del suelo. (2) En el apartado (*a*), la fuerza de rozamiento estático es menor que $\mu_e F_n$.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.2 ¿Cuál es la fuerza máxima con la que se puede tirar de la cuerda con el ángulo especificado sin que el trineo empiece a deslizarse?

Ejemplo 5.4 El bloque que resbala

La masa m_2 de la figura 5.10 se ha ajustado de modo que el bloque de masa m_1 está en el umbral de deslizamiento. (*a*) Si $m_1 = 7$ kg y $m_2 = 5$ kg, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el soporte? (*b*) Con un ligero toque, los bloques se mueven con aceleración a. Determinar a si el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el soporte es $\mu_c = 0{,}54$.

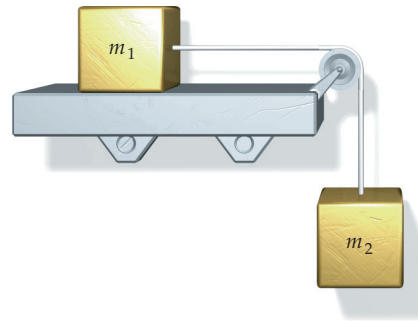


FIGURA 5.10

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton a cada uno de los bloques, teniendo en cuenta que T tiene el mismo valor a lo largo de toda la cuerda, si se desprecia la masa de la cuerda, de la polea y se desprecia el rozamiento del eje de la polea de modo que $T_1 = T_2$, y que las aceleraciones tienen igual magnitud, pues la cuerda permanece tensa, pero no se alarga, de modo que $a_1 = a_2 = a$.

Para determinar el coeficiente de rozamiento estático, μ_e, requerido en el apartado (a), expresar que la fuerza de rozamiento estático sobre m_1 es igual a su valor máximo $f_{e\,máx} = \mu_e F_n$ y que la aceleración es igual a cero.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada bloque aislado (véase la figura 5.11). Se eligen las direcciones de los ejes x y x', de modo que coincidan con las direcciones de las aceleraciones una vez que los bloques se mueven:

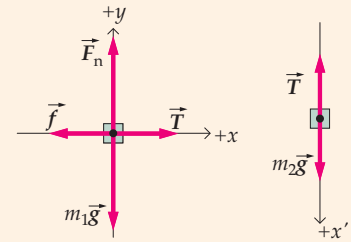


FIGURA 5.11

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al bloque 1 y obtener la fuerza normal. Entonces se obtiene la fuerza de rozamiento estático:

$$\Sigma F_y = m_1 a_{1y}$$
$$F_n - m_1 g = 0 \Rightarrow F_n = m_1 g$$
por lo tanto
$$f_{emáx} = \mu_e F_n \text{ por lo tanto, } f_{emáx} = \mu_e m_1 g$$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 1 y obtener la fuerza de rozamiento. Entonces se sustituye en el resultado del paso 2:

$$\Sigma F_x = m_1 a_{1x}$$
$$T - f_{emáx} = 0 \Rightarrow T = f_{emáx}$$
por lo tanto
$$T = \mu_e m_1 g$$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 2 y obtener la tensión. Entonces se sustituye en el resultado del paso 3:

$$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = 0$$
por lo tanto
$$T = m_2 g \text{ y } m_2 g = \mu_e m_1 g$$

5. Se resuelve el resultado del paso 4 para μ_e:

$$\mu_e = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5{,}0\text{ kg}}{7{,}0\text{ kg}} = \boxed{0{,}71}$$

(*b*) 1. Cuando resbala, la fuerza de rozamiento es la cinética y las aceleraciones tienen el mismo módulo a. Relacionar la fuerza de rozamiento cinética fc con la fuerza normal. La fuerza normal se ha obtenido del paso 2 del apartado (*a*):

$$f_c = \mu_c F_n$$
por lo tanto
$$f_c = \mu_c m_1 g$$
$$|\vec{a}_1| = a_{1x} = a \quad \text{y} \quad |\vec{a}_2| = a_{2x'} = a$$

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al bloque 1. Obtener la fuerza de rozamiento usando el resultado del paso (*b*) 1:

$$\Sigma F_x = m_1 a_{1x} \Rightarrow T - f_c = m_1 a$$
por lo tanto
$$T - \mu_c m_1 g = m_1 a$$

3. Aplicar $\Sigma F_{x'} = ma_{x'}$ al bloque 2:

$$\Sigma F_{x'} = m_2 a_{2x'} \Rightarrow m_2 g - T = m_2 a$$

4. Sumar las ecuaciones obtenidas en los pasos (*b*) 2 y (*b*) 3 y obtener a:

$$a = \frac{m_2 - \mu_c m_1}{m_1 + m_2} g = \boxed{1{,}0\text{ m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Observar que si $m_1 = 0$ la expresión para la aceleración se reduce a $a = g$, como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.3 ¿Cuál es la tensión de la cuerda cuando los bloques se están deslizando?

Ejemplo 5.5 El cochecillo incontrolado *Póngalo en su contexto*

Un cochecillo de niños incontrolado se desliza sin rozamiento por una charca helada hacia un agujero en el hielo (figura 5.12). Una persona sobre patines intenta alcanzar el cochecillo. Cuando lo consigue, esta persona y el cochecillo siguen deslizándose hacia el agujero con velocidad v_0. El coeficiente de rozamiento entre los patines (en la posición de frenado) y el suelo es μ_c. La distancia al agujero en el momento de agarrar al cochecillo es D, la masa de la persona es m_Y y la del cochecillo m_B. (*a*) ¿Cuál es el valor mínimo de D para evitar la caída en el agujero? (*b*) ¿Qué fuerza debe ejercer la persona sobre el cochecillo?

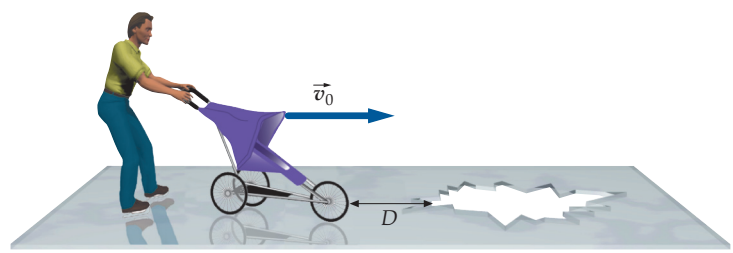


FIGURA 5.12

PLANTEAMIENTO Inicialmente, la persona y el cochecillo se mueven hacia el agujero con velocidad v_0 en la dirección x que tomamos como positiva. Si la persona hace una fuerza $\vec{F}_{YB}$ sobre el cochecillo, según la tercera ley de Newton el cochecillo hará una fuerza $\vec{F}_{BY}$ sobre la persona. Aplicar la segunda ley de Newton para determinar la aceleración. Después de hallar la aceleración, determinar la distancia D que recorre el cochecillo hasta que se detiene. El valor mínimo de D es aquél para el cual la velocidad de la persona se hace cero justo al llegar al agujero.

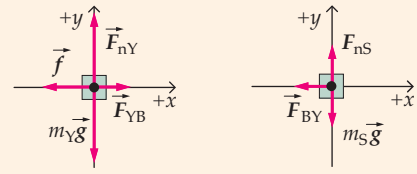


FIGURA 5.13

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para la persona y el cochecillo aisladamente (figura 5.13):

2. Para encontrar la fuerza de rozamiento hay que encontrar la fuerza normal:
$$f_{IYk} = \mu_c F_{IYn}$$

3. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a la persona y obtener primero la fuerza normal y después la fuerza de rozamiento:
$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_{IYn} - m_Y g = 0 \quad (a_y = 0)$$
y $f_{IYk} = \mu_c F_{IYn}$ por tanto, $f_{IYk} = \mu_c m_Y g$

4. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la persona. Sustituir en el resultado del paso 3:
$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_{BY} - f_{IYk} = m_Y a_x$$
por lo tanto, $F_{BY} - \mu_c m_Y g = m_Y a_x$

5. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al cochecillo:
$$\Sigma F_x = m_B a_x \Rightarrow F_{YB} = m_B a_x$$

6. $\vec{F}_{BY}$ y $\vec{F}_{YB}$ forman un par de fuerzas 3LN, de forma que tienen el mismo módulo:
$$F_{BY} = F_{YB}$$

7. Sumar las ecuaciones de los pasos 4 y 5 y simplificar $F_{BY} - F_{YB} = 0$:
$$-F_{YB} + (F_{BY} - \mu_e m_Y g) = m_B a_x + m_Y a_x$$
$$0 - \mu_e m_Y g = m_B a_x + m_Y a_x$$

8. Obtener a_x con el resultado del paso 4:
$$a_x = -\frac{\mu_c m_Y}{m_Y + m_B} g$$ (como era de esperar, la aceleración es negativa.)

9. Sustituir el resultado del paso 5 en la ecuación cinemática y obtener D:
$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow 0 = v_0^2 + 2a_x D$$
por lo tanto
$$D = \frac{-v_0^2}{2a_x} = \boxed{\left(1 + \frac{m_B}{m_Y}\right)\frac{v_0^2}{2\mu_c g}}$$

(*b*) F_{YB} resulta de combinar los resultados de los pasos 5 y 8:
$$F_{YB} = m_B|a_x| = \boxed{\frac{\mu_c m_B g}{1 + (m_Y/m_B)}}$$

COMPROBACIÓN Para valores grandes de m_B/m_Y, D es grande, como cabía esperar.

OBSERVACIÓN El valor mínimo de D es proporcional a v_0^2 e inversamente proporcional a μ_c. La figura 5.14 muestra la distancia de frenado D en función de la velocidad inicial al cuadrado para valores de m_B/m_Y iguales a 0,1, 0,3 y 1,0 con $\mu_c = 0{,}5$. Obsérvese que cuando la masa del cochecillo aumenta, se requiere una mayor distancia de frenado para una determinada velocidad inicial. Esto es análogo a lo que ocurre cuando se quiere detener un vehículo que arrastra un remolque cuando éste no tiene frenos propios. La masa del remolque aumenta la distancia de parada para una determinada velocidad.

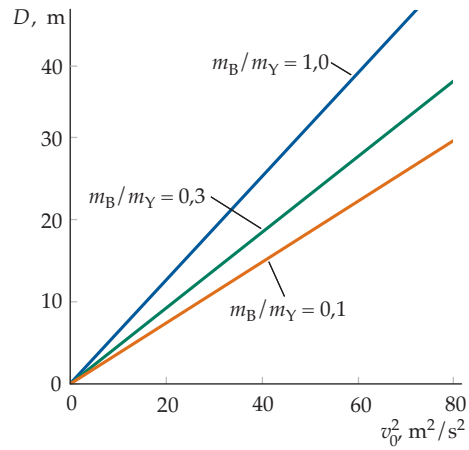


FIGURA 5.14

Ejemplo 5.6 Tirando de una niña en un tobogán *Inténtelo usted mismo*

Una niña de masa m_C está sentada en un tobogán de masa m_T, situado sobre un estanque helado. El tobogán se empuja con una fuerza horizontal $\vec{F}_{ap}$ (figura 5.15). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la niña y el tobogán son μ_e y μ_c, respectivamente. (*a*) Determinar el valor máximo de F_{ap} para el cual la niña no se desliza respecto al tobogán. (*b*) Determinar la aceleración del tobogán y la niña cuando F_{ap} es superior a este valor máximo.

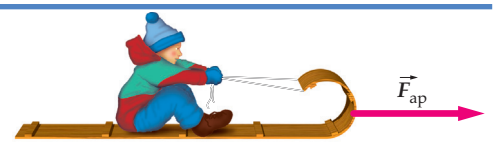


FIGURA 5.15

PLANTEAMIENTO La única fuerza que acelera a la niña es la fuerza de rozamiento que ejerce el tobogán sobre ella. El apartado (*a*) consiste en determinar F_{ap} cuando esta fuerza es estática y máxima. Para hacerlo, aplicar $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ a la muchacha y despejar la aceleración cuando la fuerza de rozamiento estática es máxima. Luego, aplicar $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ al tobogán y despejar F_{ap}. En el apartado (*b*) se procede de forma similar. Sin embargo, en este apartado, F_{ap} viene dada y despejamos la aceleración del tobogán.

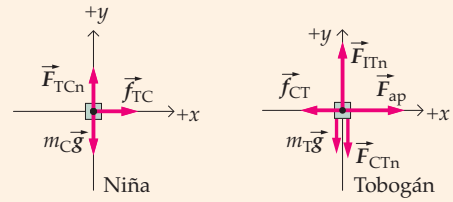


FIGURA 5.16 La fuerza $\vec{F}_{ITn}$ es la fuerza normal ejercida por el hielo sobre el tobogán.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada elemento del problema (figura 5.16).	
2. Aplicar $\sum F_x = ma_x$ al tobogán.	$\sum F_{Tx} = m_T a_{Tx} \Rightarrow F_{ap} - f_{CTs\,máx} = m_T a_{Tx}$
3. Aplicar $\sum F_y = ma_y$ a la niña y obtener la fuerza de rozamiento. Aplicar luego $f_{x\,máx} = \mu_c F_n$ y despejar la fuerza de rozamiento.	$\sum F_{Cy} = m_C a_y \Rightarrow F_{TCn} - m_C g = 0$ por tanto, $F_{TCn} = m_C g$ $f_{c\,máx} = \mu F_n \Rightarrow f_{TCs\,máx} = \mu_c F_{TCn}$ por tanto, $f_{TCs\,máx} = \mu_c m_C g$
4. Aplicar $\sum F_x = ma_x$ a la niña y obtener la aceleración.	$\sum F_{Cx} = m_C a_{Cx} \Rightarrow f_{TCe\,máx} = m_C a_{Cx}$ por tanto, $\mu_e m_C g = m_C a_{Cx} \Rightarrow a_{Cx} = \mu_e g$
5. Igualar los módulos de cada par de fuerzas 3LN y expresar las relaciones entre las aceleraciones.	$F_{TCn} = F_{CTn}$ y $f_{TCe\,máx} = f_{CTe\,máx}$ y $a_{Cx} = a_{Tx} = a_x$
6. Sustituir los resultados de los pasos 4 y 5 en el 2 y despejar F_{ap}.	$F_{ap} - \mu_e m_C g = m_T \mu_e g$ luego, $F_{ap} = \boxed{(m_C + m_T)\mu_e g}$
(*b*) 1. Igualar las magnitudes de cada par de fuerzas 3LN y expresar el cambio en la relación entre las aceleraciones debido a que ahora no se da la restricción de ausencia de deslizamiento mutuo.	$F_{TCn} = F_{CTn} = F_n$ y $f_{TCc} = f_{CTc} = f_c$ y $a_{Cx} < a_{Tx}$
2. Obtener la fuerza de rozamiento cinética usando el resultado del paso (*a*) 3 de la fuerza normal.	$f_c = \mu_c F_n$ es decir, $f_c = \mu_c m_C g$
3. Aplicar $\sum F_x = ma_x$ al tobogán. Usando el resultado del apartado (*b*) 2, obtener su *aceleración*.	$\sum F_{Cx} = m_C a_{Cx} \Rightarrow f_c = m_C a_{Cx}$ por tanto, $\mu_c m_C g = m_C a_{Cx} \Rightarrow a_{Cx} = \boxed{\mu_c g}$
4. Aplicar $\sum F_x = ma_x$ al tobogán. Utilizando el resultado del paso 2 del apartado (*b*), despejar la *aceleración* del tobogán.	$\sum F_{Tx} = m_T a_{Tx} \Rightarrow F_{ap} - f_c = m_T a_{Tx}$ por tanto, $F_{ap} - \mu_c m_C g = m_T a_{Tx} \Rightarrow a_{Tx} = \boxed{\dfrac{F_{ap} - \mu_c m_C g}{m_T}}$

COMPROBACIÓN El resultado del apartado (*a*) es lo que uno se espera si la niña no se desliza sobre el tobogán. Si consideramos a la niña y al tobogán como una sola partícula y aplicamos la segunda ley de Newton, obtenemos $F_{ap} = (m_c + m_t)a_x$. Si sustituimos $\mu_e(m_c + m_t)g$ (el resultado del paso 6 del apartado (*a*)) en F_{ap}, se obtiene simplificando que $a_x = \mu_e g$, o sea, el resultado del paso 3 del apartado (*a*). Por tanto, nuestro resultado es consistente con considerar el tobogán y la niña como una sola partícula.

OBSERVACIÓN El rozamiento es una fuerza entre dos superficies en contacto, y no es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento o a la tendencia al movimiento. En este ejemplo, el rozamiento no se opone al movimiento de la niña, sino que lo produce. Es correcto decir que el rozamiento siempre se opone al movimiento, o a la tendencia al movimiento, de una *superficie respecto de otra*. Por ejemplo, aunque la chica se mueve hacia delante en *relación al hielo*, se mueve o tiende a moverse hacia atrás (hacia la izquierda) en *relación al tobogán*. El rozamiento se opone al movimiento relativo o a la tendencia al movimiento.

! Obsérvese que no siempre la fuerza de rozamiento se opone al movimiento. Sin embargo, las fuerzas de rozamiento por contacto entre dos superficies siempre se oponen al movimiento relativo entre ambas, o a la tendencia al movimiento relativo.

ROZAMIENTO, COCHES Y FRENOS ANTIBLOQUEO

La figura 5.17 muestra las fuerzas que actúan sobre un coche en el momento justo que parte del reposo. El peso del coche es equilibrado por la fuerza normal F_n ejercida sobre los neumáticos. Para que el coche comience a moverse, el motor suministra potencia al eje de tracción haciendo que las ruedas giren (trataremos el concepto de potencia en el capítulo 6). Si el movimiento sobre la carretera fuese sin rozamiento, las ruedas simplemente girarían sobre sí mismas. Cuando existe rozamiento, la carretera ejerce sobre los neumáticos una fuerza de rozamiento dirigida hacia adelante que proporciona la fuerza necesaria para acelerar el coche. Si la potencia suministrada por el motor es lo suficientemente pequeña para que la fuerza ejercida por la superficie de los neumáticos sobre la carretera no sea grande, las dos superficies no se deslizan. Las ruedas giran sin deslizarse y la superficie de los neumáticos en contacto con el suelo está en reposo relativo respecto a él. El rozamiento entre la carretera y los neumáticos es estático. La máxima fuerza de rozamiento que los neumáticos pueden ejercer sobre la carretera (y que la carretera puede ejercer sobre los neumáticos) es $\mu_e F_n$.

El centro de las ruedas de un coche que se desplaza en línea recta con velocidad v relativa a la carretera, también se mueve con velocidad v, como se ve en la figura 5.18. Si una rueda no se desliza, la mitad superior de la rueda se mueve más rápido que v y la mitad inferior de la rueda se mueve más lento que v. Sin embargo, cada punto del perímetro de la rueda se mueve, relativo al coche, en un círculo con velocidad de igual módulo v. Además, la velocidad instantánea del punto del neumático que está en contacto con el suelo es cero *relativa al suelo*. (De otro modo, el neumático patinaría.)

Si la potencia del motor es suficientemente grande, el neumático patinará y las ruedas girarán sobre sí mismas. Por lo tanto, la fuerza que acelera el coche es la fuerza de rozamiento cinética, que es inferior a la fuerza de rozamiento estática. Si nos encontramos con el coche atascado en hielo o nieve, para poder salir es mejor acelerar con mucha suavidad. De la misma forma, si tenemos que detener completamente un coche, la fuerza que ejerce el asfalto sobre las ruedas es estática o cinética, dependiendo de la forma como frenamos. Si frenamos tan bruscamente que las ruedas se bloquean, los neumáticos resbalaran sobre el asfalto y la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento cinética. Si, en cambio, no frenamos tan bruscamente y no se produce deslizamiento entre los neumáticos y la carretera, la fuerza que parará el coche será la fuerza de rozamiento estática.

Cuando las ruedas se bloquean y los neumáticos resbalan, se dan dos cosas no deseadas. La distancia mínima necesaria para detener el vehículo aumenta y la capacidad que el conductor tiene para controlar el coche disminuye enormemente. Obviamente, la disminución de la capacidad de control puede tener consecuencias graves. Los sistemas de frenado antibloqueo (ABS) de los coches utilizan sensores para medir la velocidad de la rueda. Si el dispositivo de control detecta que la rueda está próxima a bloquearse, el sistema modula una señal que hace que la presión del freno disminuya, para instantes después restaurar la presión sobre la rueda y así sucesivamente unas 15 veces por segundo. Esta presión variable es similar a la que se ejerce cuando se pisa repetidamente el pedal del freno pero, con el sistema ABS, únicamente se produce la sucesión de presión fuerte presión débil en aquella rueda que está a punto de bloquearse. Con este método se consigue el máximo frenado, ya que se consigue el rozamiento máximo para detener el coche.

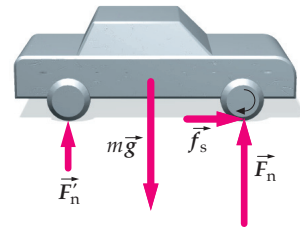


FIGURA 5.17 Fuerzas que actúan sobre un coche con tracción delantera. que se acelera desde el reposo. La fuerza normal $\vec{F}_n$ sobre las ruedas delanteras es normalmente mayor que la fuerza normal sobre las ruedas traseras $\vec{F}_n'$ porque el motor suele estar colocado en la parte delantera. No hay fuerza de arrastre producida por el aire porque el coche empieza su movimiento. Hemos ignorado la fuerza de rodadura sobre las ruedas.

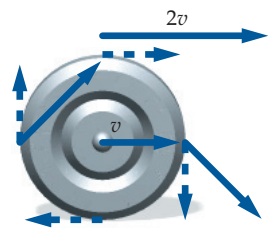


FIGURA 5.18 En esta figura las líneas de puntos representan velocidades respecto al centro de la rueda y las líneas continuas representan velocidades respecto al suelo.

Ejemplo 5.7 El efecto de los frenos antibloqueo

Un coche viaja a 30 m/s por una carretera horizontal. Los coeficientes de rozamiento entre la carretera y los neumáticos son $\mu_e = 0{,}5$ y $\mu_c = 0{,}4$. ¿Qué distancia recorrerá el coche antes de detenerse si (*a*) el coche frena con un sistema antibloqueo, de modo que las ruedas no se deslizan y (*b*) el coche frena con dureza sin antibloqueo, y las ruedas se bloquean?

PLANTEAMIENTO La fuerza que detiene un automóvil cuando frena es la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos (figura 5.19). Entonces, aplicando la segunda ley de Newton se determina la aceleración. Utilizamos la cinemática para determinar la distancia recorrida antes de parar.

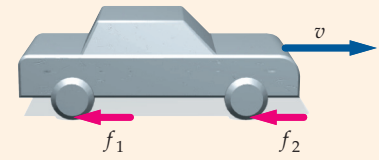


FIGURA 5.19

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.20). Considerar las cuatro ruedas como si tuvieran un solo punto de contacto con el suelo. Suponer también que los frenos se aplican a las cuatro ruedas. La fuerza $\vec{f}$ en el diagrama es la fuerza de rozamiento total en cada rueda:

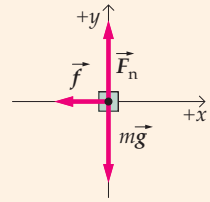


FIGURA 5.20

2. Para relacionar la distancia necesaria para parar, Δx, con la velocidad inicial v_0, usamos la ecuación 2.15, suponiendo que la aceleración es constante:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x$$

Cuando $v_x = 0$, $\Delta x = -\dfrac{v_{0x}^2}{2a_x}$

3. Aplicamos $\Sigma F_y = ma_y$ al coche y obtenemos la fuerza normal. Después aplicamos $f_{x\,máx} = \mu_e F_n$ y despejamos $f_{x\,máx}$:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_n - mg = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad F_n = mg$$
$$f_{emáx} = \mu_e F_n \quad \text{con lo cual,} \quad f_{emáx} = \mu_e mg$$

4. Aplicamos $\Sigma F_x = ma_x$ al coche y obtenemos la aceleración:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow -f_{emáx} = ma_x$$
Sustituyendo $\mu_e mg$ por $f_{emáx}$ da $-\mu_e mg = ma_x \Rightarrow a_x = -\mu_e g$

5. Sustituimos a_x en la ecuación de Δx en el paso 2, y así obtenemos la distancia de frenado:

$$\Delta x = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{v_{0x}^2}{2\mu_e g} = \frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(0{,}50)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{0{,}92 \times 10^2\ \text{m}}$$

(*b*) 1. Cuando las ruedas se bloquean, la fuerza ejercida por la carretera sobre el coche es el rozamiento cinético. Mediante un razonamiento semejante al del apartado (*a*), obtenemos para la aceleración:

$$a_x = -\mu_c g$$

2. La distancia de frenado es, por lo tanto:

$$\Delta x = -\frac{v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{v_{0x}^2}{2\mu_c g} = \frac{(30\ \text{m/s})^2}{2(0{,}40)(9{,}81\ \text{m/s}^2)} = \boxed{1{,}1 \times 10^2\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN Los desplazamientos son positivos. Además, el sistema ABS reduce la distancia de frenado del coche, como era de esperar.

OBSERVACIÓN La distancia de frenado es superior en un 20% cuando las ruedas están bloqueadas. Obsérvese también que esta distancia es independiente de la masa del coche: la distancia de frenado es igual para un pequeño coche utilitario que para un camión, siempre que los coeficientes de rozamiento sean iguales. Los neumáticos se calientan mucho cuando el coche derrapa. Esto produce un cambio en μ_c que no hemos considerado aquí.

5.2 FUERZAS DE ARRASTRE

Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, tal como el aire o el agua, el fluido ejerce una fuerza de resistencia o **fuerza de arrastre** que se opone al movimiento del objeto. Esta fuerza depende de la forma del objeto, de las propiedades del fluido y de la velocidad del objeto respecto al fluido. A diferencia de la fuerza de rozamiento, la fuerza de arrastre crece con la velocidad del objeto. Para pequeñas velocidades es, aproximadamente, proporcional a la velocidad del objeto; para velocidades superiores es casi proporcional al cuadrado de la velocidad.

Consideremos un objeto que cae desde el reposo bajo la influencia de la fuerza de la gravedad, supuesta constante. El módulo de la fuerza de arrastre es:

$$F_d = bv^n \qquad 5.5$$
FUERZA DE ARRASTRE

donde b es una constante.

La fuerza de arrastre sobre el paracaídas frena el *dragster*. *(IHRA/Live Nation.)*

Como se muestra en la figura 5.21, las fuerzas que actúan sobre el objeto son mg hacia abajo y bv^n hacia arriba. Si tomamos positiva la dirección hacia abajo, según la segunda ley de Newton, resulta

$$mg - bv^n = ma_y \qquad 5.6$$

Despejando la aceleración:

$$a_y = g - \frac{b}{m}v^n \qquad 5.7$$

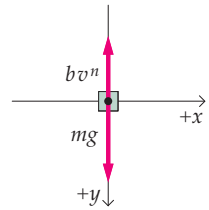


FIGURA 5.21 Diagrama de fuerzas de un objeto que cae en el aire.

Para $t = 0$, cuando se deja caer el objeto, la velocidad es nula, de modo que la fuerza de arrastre es cero y la aceleración es g hacia abajo. Cuando la velocidad del objeto crece, la fuerza de arrastre se incrementa y la aceleración es menor que g. Finalmente, la velocidad se hace lo suficientemente grande para que la fuerza de arrastre bv^n sea igual a la fuerza de gravedad mg, de modo que la aceleración se hace cero. El objeto continúa entonces moviéndose a la velocidad constante v_T, llamada **velocidad límite** o velocidad terminal. Haciendo $a_y = 0$ resulta, de la ecuación 5.6

$$bv_T^n = mg$$

Y por lo tanto, para la velocidad límite

$$v_T = \left(\frac{mg}{b}\right)^{1/n} \qquad 5.8$$

Cuanto mayor sea la constante b, menor es la velocidad límite. Los paracaídas se diseñan de modo que b sea grande para que la velocidad límite sea pequeña. En cambio, los coches se diseñan de modo que b sea pequeño para reducir el efecto de la resistencia del viento. Para un paracaidista de apertura manual (con el paracaídas cerrado), la velocidad límite es, aproximadamente, 60 m/s ≈ 200 km/h. Cuando el paracaídas se abre, la fuerza de arrastre es mayor que la fuerza de la gravedad y el paracaidista experimenta una aceleración hacia arriba mientras cae, es decir, su velocidad hacia abajo disminuye. Entonces, la fuerza de arrastre disminuye hasta que se alcanza una nueva velocidad límite, del orden de 20 km/h.

(Stuart Williams/Dembinsky Photo Associates.)

(Joe McBride/Stone.)

Ejemplo 5.8 Velocidad límite

Un paracaidista de masa 64 kg alcanza una velocidad límite de 180 km/h con sus brazos y piernas extendidas. (*a*) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de arrastre F_a sobre el paracaidista? (*b*) Si la fuerza de arrastre es igual a bv^2, ¿cuál es el valor de b?

PLANTEAMIENTO Utilizamos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza de arrastre del apartado (*a*) y luego sustituimos para hallar b en el apartado (*b*).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas (figura 5.22):

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$. Como el paracaidista se mueve con velocidad constante, la aceleración es cero:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow F_a - mg = 0$$

por lo tanto, $F_a = mg = (64{,}0\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) = \boxed{628\text{ N}}$

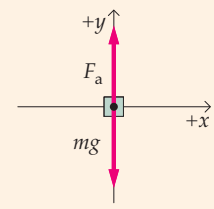


FIGURA 5.22

(*b*) 1. Para determinar b, basta considerar que $F_a = bv^2$: $F_a = mg = bv^2$

por lo tanto, $b = \dfrac{mg}{v^2}$

2. Determinar la velocidad en m/s y después calcular b:

$$180\ \text{km/h} = \frac{180\ \text{km}}{1\ \text{h}} \times \frac{1\ \text{h}}{3{,}6\ \text{ks}} = 50{,}0\ \text{m/s}$$

$$b = \frac{(64{,}0\ \text{kg})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}{(50{,}0\ \text{m/s})^2} = \boxed{0{,}251\ \text{kg/m}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades que hemos obtenido para b son kg/m. Para comprobar que las unidades son correctas, las multiplicamos por $(\text{m/s})^2$ y tenemos kg m/s^2. Estas unidades corresponden a una fuerza, como es lógico, pues la fuerza de arrastre es bv^2.

OBSERVACIÓN El factor de conversión 1 h/3,6 ks aparece en el último paso de la solución. Este factor proviene de que 1 h equivale a 3600 s. En consecuencia, al convertir la velocidad de km/h a m/s, se mantienen las tres cifras significativas. Esto es así incluso si no hubiéramos escrito el factor de conversión como 1,00 h/3,60 ks.

5.3 MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA CURVA

Los cuerpos, a menudo, no se mueven en línea recta: un coche que toma una curva es un ejemplo, como también lo es un satélite que gira alrededor de la Tierra.

Considérese un satélite moviéndose en órbita circular alrededor de la Tierra como muestra la figura 5.23. A una altura de 200 km, la fuerza gravitacional es ligeramente inferior que sobre la superficie terrestre. ¿Por qué el satélite no cae sobre la Tierra? En realidad, el satélite "cae" pero como la superficie terrestre es curva, el satélite no consigue acercarse a la superficie de la Tierra. Si el satélite no estuviera acelerado se movería desde un punto P_1 a otro P_2 durante un tiempo t. En cambio, se mueve al punto P'_2 sobre la órbita circular. En cierto sentido, el satélite "cae" una distancia h como se muestra en la figura 5.23. Si t es pequeño, P_2 y P'_2 están casi sobre la línea radial. En ese caso, podemos calcular h a partir del triángulo de lados vt, $r + h$ y r. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(r + h)^2 = (vt)^2 + r^2$$
$$r^2 + 2hr + h^2 = v^2t^2 + r^2$$

o bien

$$h(2r + h) = v^2t^2$$

Para tiempos cortos, h será mucho menor que r de manera que podemos despreciar h frente a $2r$. Entonces

$$2rh \approx v^2t^2$$

o bien

$$h \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{r}\right)t^2$$

Comparando esto con la expresión para aceleración constante $h = \frac{1}{2}at^2$, vemos que el módulo de la aceleración del satélite es

$$a = \frac{v^2}{r}$$

que es justamente la expresión para la aceleración centrípeta del capítulo 3. A partir de la figura 3.24, vemos que esta aceleración se dirige al centro de la órbita circular. Aplicando la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección del vector aceleración, se puede hallar el módulo de la fuerza responsable de la aceleración:

$$F_{\text{neta}} = m\frac{v^2}{r}$$

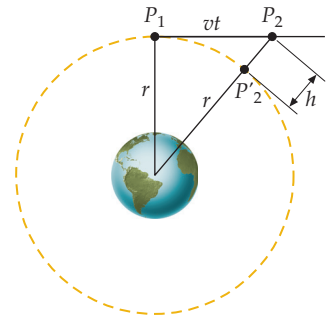


FIGURA 5.23 El satélite se mueve con velocidad v en órbita circular de radio r en torno a la Tierra. Si el satélite no se acelerara, se movería desde el punto P_1 al P_2 a lo largo de una trayectoria recta. Debido a su aceleración, en lugar de eso cae una distancia h. Durante un tiempo t suficientemente corto, la aceleración es prácticamente constante, y por tanto, $h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(v^2/r)t^2$.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Trigonometría

La figura 5.24*a* muestra una pelota en el extremo de una cuerda cuyo otro extremo está sujeto a un soporte fijo. La pelota se mueve en círculo horizontal de radio r a módulo de la velocidad constante constante v. En consecuencia, la aceleración de la pelota tiene módulo v^2/r.

En el capítulo 3, se estableció que si una partícula se mueve con una velocidad v a lo largo de una trayectoria curva con un radio de curvatura r (figura 5.24*b*), la partícula tiene una componente de la aceleración $a_c = v^2/r$ en la dirección centrípeta (hacia el centro de curvatura). Además, la fuerza neta va en la dirección de la aceleración. La componente de la fuerza neta en la dirección centrípeta se denomina **fuerza centrípeta**. Esta fuerza no es una clase de fuerza distinta de las que ya hemos estudiado, sino que meramente designa a la componente de la fuerza neta perpendicular a la dirección del movimiento que puede ejercerse mediante una cadena, un muelle o cualquier otra fuerza de contacto como la fuerza normal o la fuerza de rozamiento; también puede producir una fuerza centrípeta una fuerza de acción a distancia como la fuerza de gravitación, o puede darse como resultado de una combinación de todas. En cualquier caso, siempre apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

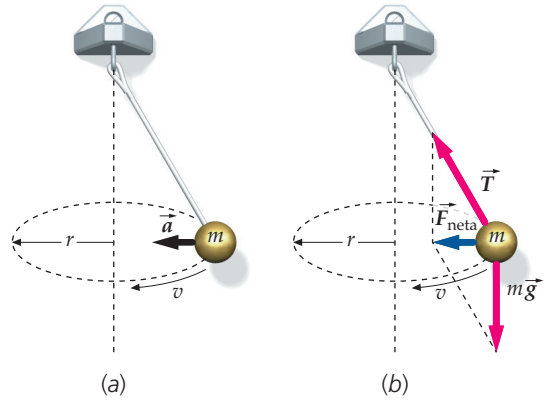


FIGURA 5.24 Una pelota suspendida de una cuerda se mueve en un círculo horizontal a módulo de la velocidad constante. (*a*) El vector aceleración está en la dirección centrípeta (en dirección al centro del círculo). La aceleración en la dirección centrípeta se denomina aceleración centrípeta. (*b*) Dos fuerzas actúan sobre la pelota, la tensión ejercida por la cuerda y la fuerza gravitacional. La suma de esas dos fuerzas da lugar a la fuerza neta en la dirección centrípeta. Se suele llamar fuerza centrípeta a la fuerza neta en la dirección centrípeta.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de movimiento a lo largo de trayectorias curvas

PLANTEAMIENTO Recordar que no se debe nunca incluir una fuerza centrípeta en el diagrama de fuerzas. Sólo se deben incluir fuerzas como la tensión, la normal, la gravitacional, etcétera.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas del cuerpo. Incluir los ejes de coordenadas con el origen en el punto de interés de la trayectoria. Dibujar uno de los ejes en la dirección tangente a la curva y el otro en la dirección centrípeta.
2. Aplicar $\Sigma F_c = ma_c$ y $\Sigma F_t = ma_t$ (segunda ley en forma de componentes).
3. Sustituir $a_c = v^2/r$ y $a_t = dv/dt$, donde v es la velocidad.
4. Si el cuerpo se mueve describiendo un círculo con radio r con el módulo de la velocidad constante v, utilizaremos $v = 2\pi r/T$, donde T es el tiempo que dura una revolución.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que sus respuestas están de acuerdo con el hecho de que la dirección de la aceleración centrípeta es siempre hacia el centro de la curvatura y perpendicular a la dirección del vector velocidad.

> **¡** La fuerza centrípeta no es una fuerza real. Es simplemente el nombre que se le da a la componente de la fuerza neta en la dirección centrípeta. De la misma manera que la fuerza neta, la fuerza centrípeta no aparece en el diagrama de fuerzas. Sólo pueden aparecer la fuerza reales.

Ejemplo 5.9 Dando vueltas a un cubo

Se hace girar un cubo con un volumen de agua de masa m siguiendo una circunferencia vertical de radio r (figura 5.25). Si la velocidad del cubo en su parte más alta es v_t, calcular (*a*) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en este punto; (*b*) el valor mínimo de v_t para que el agua no se salga del cubo; (*c*) la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua en la parte más baja del círculo, en donde la velocidad del cubo es v_b.

PLANTEAMIENTO Cuando el cubo está en la parte superior de la trayectoria, la fuerza de la gravedad sobre el agua y la fuerza de contacto del cubo sobre el agua van ambas en la dirección centrípeta (hacia abajo). En la parte inferior de la trayectoria, la fuerza de contacto del cubo sobre el agua debe ser mayor que la fuerza de la gravedad sobre el agua para que haya una fuerza neta en la dirección centrípeta (hacia arriba). Apliquemos la segunda ley de Newton para calcular la fuerza ejercida por el cubo sobre el agua. Como el agua se mueve según una trayectoria circular, existirá una aceleración centrípeta v^2/r hacia el centro del círculo.

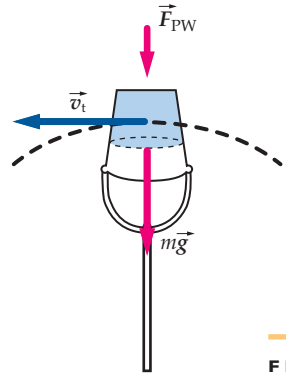


FIGURA 5.25

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar los diagramas de fuerza para el agua en la parte superior y en la parte inferior del círculo (figura 5.26). En cada caso, elegir como dirección positiva del eje x la dirección hacia el centro del círculo.

2. Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al agua cuando pasa por la parte más alta del círculo a velocidad v_t. Despejar la fuerza F_c que hace el cubo sobre el agua:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$F_c + mg = m\frac{v_t^2}{r} \Rightarrow F_c = \boxed{m\left(\frac{v_t^2}{r} - g\right)}$$

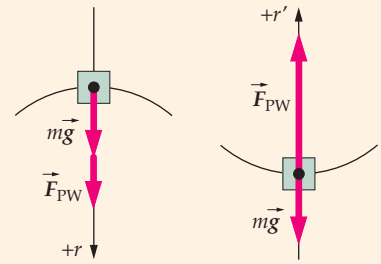


FIGURA 5.26

(*b*) El cubo puede empujar el agua, pero no puede tirar de ella. La fuerza mínima que puede ejercer es cero. Haciendo $F_c = 0$ y despejando $v_{t,\,min}$:

$$0 = m\left(\frac{v_{t,\,min}^2}{r} - g\right) \Rightarrow v_{t,\,min} = \boxed{\sqrt{rg}}$$

(*c*) Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al agua cuando pasa por la parte más baja del cubo a velocidad v_b. Despejar F_c:

$$\Sigma F_r = ma_r$$

$$F_c - mg = \frac{mv_b^2}{r} \Rightarrow F_c = \boxed{m\left(\frac{v_b^2}{r} + g\right)}$$

COMPROBACIÓN Cuando $v_b = 0$, en la parte más baja del círculo, $F_c = mg$.

OBSERVACIÓN Obsérvese que no hay ninguna fuerza llamada fuerza centrípeta en el diagrama de fuerzas. La fuerza centrípeta no es una fuerza ejercida por otro cuerpo sino que sólo se trata de la fuerza neta en la dirección centrípeta.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.4 Estimar (*a*) la velocidad mínima en la parte alta del círculo y (*b*) el período máximo de revolución que evita que el líquido se derrame al hacer girar un cubo de agua en un círculo vertical con velocidad de módulo constante.

Ejemplo 5.10 Haciendo el mono

Un muchacho se baja de la rama de un árbol agarrándose a una cuerda de 30 m de longitud atada a otra rama situada 30 m por encima. Suponiendo despreciable la resistencia del aire, determinar el ritmo de aumento de la velocidad del muchacho cuando la cuerda forma un ángulo de 25° con la vertical durante el descenso.

PLANTEAMIENTO Describir esta situación como una cuerda sin masa de la que cuelga un cuerpo de masa m. Aplicar la segunda ley de Newton a la masa. La aceleración tangencial es el ritmo de cambio de la velocidad.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas del cuerpo (figura 5.27). Sea la dirección $+r$ la dirección hacia el centro de curvatura y $+t$ la dirección de la velocidad:

2. Aplicar $\Sigma F_t = ma_t$ y utilizar el diagrama de fuerzas para determinar las expresiones para las componentes de las fuerzas:

$$\Sigma F_t = ma_t$$
$$T_t + F_{gt} = ma_t$$
$$0 + mg\,\text{sen}\,\theta = ma_t$$

3. Despejar a_t:

$$a_t = g\,\text{sen}\,\theta = (9{,}81\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,25° = \boxed{4{,}1\ \text{m/s}^2}$$

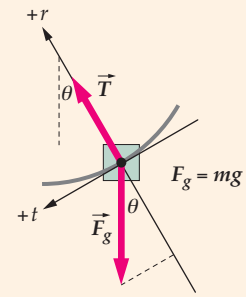


FIGURA 5.27 La dirección $+t$ va en la dirección del vector velocidad.

COMPROBACIÓN Cabe esperar que el ritmo de cambio del módulo de la velocidad sea positivo pues el muchacho va aumentando su velocidad conforme desciende. Además, ese ritmo no debería ser nunca igual o superior a $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. El resultado del paso 3 está de acuerdo con estos razonamientos.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.5 ¿Cuál sería el ritmo de cambio del módulo de la velocidad cuando el muchacho pasa por el punto más bajo de la trayectoria?

Ejemplo 5.11 Un péndulo

Inténtelo usted mismo

Una bola de masa m está suspendida de una cuerda de longitud L y se mueve con velocidad de módulo constante v en un círculo horizontal de radio r. La cuerda forma un ángulo θ. Determinar (*a*) la dirección de la aceleración, (*b*) la tensión de la cuerda y (*c*) la velocidad de la bola.

PLANTEAMIENTO Dos fuerzas actúan sobre la bola: su peso, mg, y la tensión, T, de la cuerda (véase la figura 5.28). La suma vectorial de estas fuerzas va en la dirección de la aceleración.

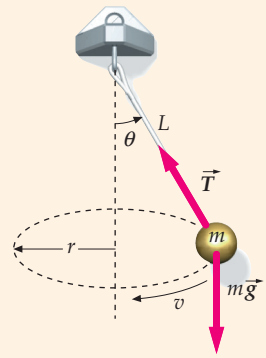


FIGURA 5.28

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. La bola se mueve en un círculo horizontal dando vueltas a velocidad de módulo constante. La aceleración va en la dirección centrípeta.	La aceleración es horizontal y dirigida desde la bola hacia el centro del círculo por donde se mueve.
(*b*) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la bola (figura 5.29). Elegir la dirección positiva del eje x en la dirección de la aceleración de la pelota.	
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ para la bola y obtener la tensión T.	$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$ por lo tanto, $\boxed{T = \dfrac{mg}{\cos\theta}}$
(*c*) 1. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ a la bola.	$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow T\,\text{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{r}$
2. Sustituir $mg/\cos\theta$ en lugar de T y obtener v.	$\dfrac{mg}{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{r} \Rightarrow g\,\text{tg}\,\theta = \dfrac{v^2}{r}$ por lo tanto, $v = \boxed{\sqrt{rg\,\text{tg}\,\theta}}$

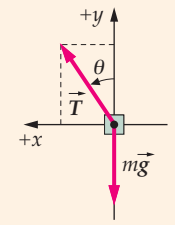


FIGURA 5.29

COMPROBACIÓN Cuando $\theta \to 90^\circ$, $\cos\theta \to 0$ y $\text{tg}\,\theta \to$ infinito. En los resultados de los apartados (*b*) y (*c*), las expresiones para T y v tienden a infinito cuando $\theta \to 90^\circ$.

OBSERVACIÓN Un objeto atado a una cuerda y moviéndose en un círculo horizontal, de modo que la cuerda forme un ángulo θ con la vertical, se denomina *péndulo cónico*.

CURVAS PERALTADAS Y NO PERALTADAS

Cuando el coche circula por una curva de una carretera horizontal, la fuerza centrípeta se origina por la fuerza de rozamiento ejercida por la carretera sobre los neumáticos del coche. Si el coche no se desliza radialmente, el rozamiento es estático. Si el coche se mueve a velocidad de módulo constante, la componente hacia delante de la fuerza de rozamiento se equilibra con las fuerzas que se oponen al movimiento del vehículo, como la fuerza de arrastre del aire y la fuerza de rozamiento a la rodadura. Si la resistencia del aire y la rodadura son despreciables y la velocidad del coche es de módulo constante, la componente en la dirección del movimiento de la fuerza de rozamiento es nula.

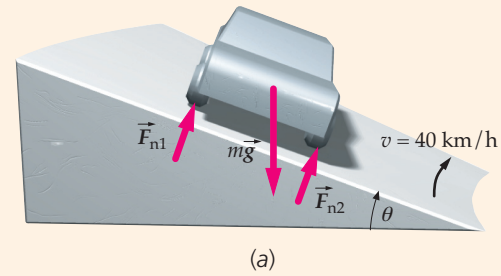
Si la curva está peraltada, la fuerza normal de la carretera tendrá una componente en la dirección centrípeta. El ángulo de peralte se elige de forma que no sea necesario ningún rozamiento para que el coche complete la curva a la velocidad correspondiente.

Conforme el coche toma la curva, el neumático se deforma debido a la fuerza de rozamiento producida por el asfalto. *(David Allio/Icon SMI/Corbis.)*

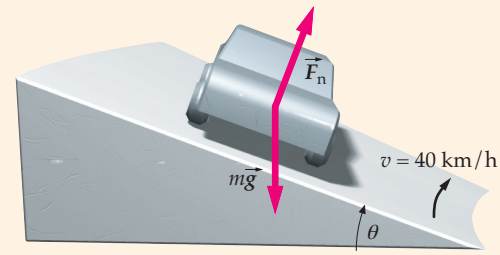
En 1993, los laboratorios Sandia simularon una prueba de descenso a Júpiter con una gran centrífuga que proporcionaba aceleraciones de hasta $200g$. *(Sandia National Laboratory.)*

Ejemplo 5.12 Una curva con peralte

Una curva de radio 30 m tiene un ángulo de peralte θ. Es decir, la fuerza normal debido a la superficie de la carretera forma un ángulo de 30° con la vertical. Determinar el valor de θ para el cual un coche puede tomar la curva a 40 km/h aunque esté cubierta de hielo, considerando que la carretera no produzca prácticamente rozamiento.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 5.30

PLANTEAMIENTO En este caso, existen sólo dos fuerzas sobre el coche: la gravedad y la fuerza normal $\vec{F}_n$ (figura 5.30). Dado que la curva tiene peralte, la fuerza normal tiene una componente horizontal que produce una aceleración centrípeta sobre el coche. El vector suma de las dos fuerzas va en la dirección de la aceleración.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.31):

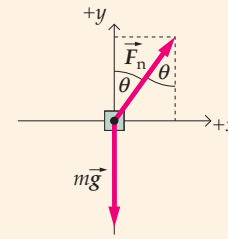


FIGURA 5.31

2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ al coche:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_n \cos\theta - mg = 0 \Rightarrow F_n \cos\theta = mg$$

3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F_n \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

4. Sustituir F_n usando el resultado del paso 2 y se obtiene θ:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{mv^2}{rmg} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg}$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{[(40{,}0\text{ km/h})(1\text{ h}/3{,}6\text{ ks})]^2}{(30{,}0\text{ m})(9{,}81\text{ m/s}^2)}$$
$$= \boxed{22{,}8°}$$

COMPROBACIÓN El ángulo de peralte es de 22,8°. Este valor es razonable pues un radio de 30 m es muy pequeño para una curva de autopista. Si comparamos con las curvas del Daytona International Speedway, éstas tienen un radio de 300 m y un ángulo de peralte de 31°.

OBSERVACIÓN El ángulo de peralte θ depende de v y r, pero no de la masa m; θ aumenta con v creciente y disminuye al aumentar r. Cuando el ángulo de peralte, la velocidad y el radio satisfacen la ecuación $\operatorname{tg}\theta = v^2/rg$, el coche toma la curva con suavidad sin tendencia a patinar hacia dentro o hacia afuera. Si la velocidad del coche es mayor que $\sqrt{rg\operatorname{tg}\theta}$, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento según la pendiente hacia abajo. Esta fuerza tiene una componente horizontal hacia el centro de la curvatura que proporciona la fuerza centrípeta adicional necesaria para evitar que el coche se mueva hacia fuera (patinar hacia arriba según la pendiente). Si la velocidad del coche es inferior a esta magnitud, la carretera ejercerá una fuerza de rozamiento hacia arriba según la pendiente para que el coche permanezca en la carretera.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA En la resolución del problema se ha usado el criterio de escoger como dirección de un eje de coordenadas la dirección del vector aceleración, la dirección centrípeta. Sin embargo, la solución no es más difícil si elegimos como dirección de un eje la dirección de la pendiente. Esta es la opción que hemos tomado en la solución siguiente.

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.32). La dirección del eje x se toma en la dirección de la pendiente y el eje y se toma en la dirección perpendicular:

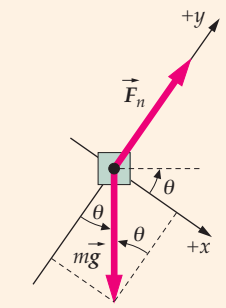


FIGURA 5.32

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ al coche:

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow mg\operatorname{sen}\theta = ma_x$$

3. Dibujar un esquema y usar la trigonometría para obtener una expresión para a_x en función de a y de θ (figura 5.33):

$$a_x = a\cos\theta$$

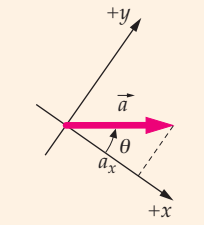


FIGURA 5.33

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2. Sustituir v^2/r por a y se obtiene θ.

$$mg\operatorname{sen}\theta = ma\cos\theta$$
$$g\operatorname{sen}\theta = \frac{v^2}{r}\cos\theta$$
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \theta = \boxed{\operatorname{arctg}\frac{v^2}{rg}}$$

PROBLEMA PRÁCTICO 5.6 Determinar la componente de la aceleración normal a la superficie de la carretera.

Ejemplo 5.13 Una prueba de carretera — *Póngalo en su contexto*

Durante un trabajo de verano, un equipo de estudiantes diseña neumáticos de automóviles. Se prueba un nuevo prototipo de neumáticos para ver si el coeficiente de rozamiento estático entre el pavimento y el neumático es de 0,9 como indica el fabricante. En una prueba de deslizamiento, el automóvil fue capaz de recorrer a velocidad de módulo constante un círculo de 45,7 m de radio en 15,2 s sin patinar. Suponiendo que el arrastre con el aire y el rozamiento de rodadura son despreciables, además que la superficie es horizontal. (*a*) ¿Cuál fue el módulo de su velocidad *v*? (*b*) ¿Cuál fue la aceleración centrípeta? (*c*) Suponiendo que la fuerza del aire y el rozamiento son despreciables, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático?

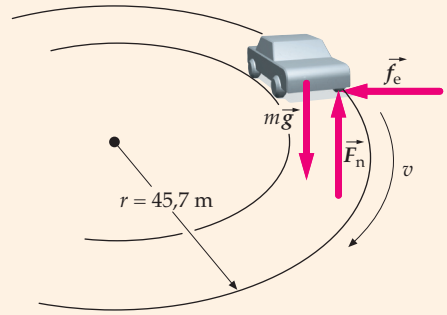


FIGURA 5.34

PLANTEAMIENTO La figura 5.34 muestra las fuerzas que actúan sobre el coche. La fuerza normal $\vec{F}_n$ equilibra el peso $m\vec{g}$. La fuerza horizontal es la fuerza de rozamiento estático, que suministra la fuerza centrípeta. Cuanto más rápido circula el coche, mayor es la fuerza centrípeta requerida. El módulo de la velocidad se determina a partir de la longitud de la circunferencia y del período *T*. Esta velocidad impone un límite inferior al valor máximo del coeficiente de rozamiento estático.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el coche (figura 5.35). La dirección positiva en la dirección *r* señala en la dirección opuesta al centro de curvatura:

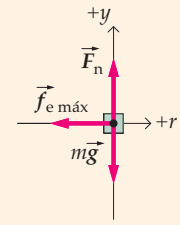


FIGURA 5.35

2. Usar la expresión "el módulo de la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo" para determinar la velocidad *v*:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(45{,}7\text{ m})}{15{,}2\text{ s}} = \boxed{18{,}9\text{ m/s}}$$

(*b*) Utilizar *v* para calcular la aceleración centrípeta y tangencial:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(18{,}9\text{ m/s})^2}{(45{,}7\text{ m})} = \boxed{7{,}81\text{ m/s}^2}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \boxed{0}$$

La aceleración es 7,81 m/s² en la dirección centrípeta.

(*c*) 1. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$ a los movimientos vertical y radial del coche. Escoger como dirección positiva la radial hacia fuera:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_n - mg = 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad F_n = mg$$
$$\text{y} \quad f_{e\,máx} = \mu_e F_n = \mu_e mg$$

2. Aplicar $\Sigma F_r = ma_r$ al coche:

$$\Sigma F_r = ma_r$$
$$-f_{e\,máx} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right) \Rightarrow f_{e\,máx} = m\frac{v^2}{r}$$

3. Sustituir el resultado del paso 1 (*a*) y despejar μ_e:

$$\mu_e mg = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_e g = \frac{v^2}{r}$$
$$\mu_e = \frac{v^2}{rg} = \frac{(18{,}9\text{ m/s})^2}{(45{,}7\text{ m})(9{,}81\text{ m/s}^2)} = \boxed{0{,}796}$$

COMPROBACIÓN Si μ_e fuera igual a 1, la fuerza hacia dentro del círculo sería *mg* y la aceleración centrípeta igual a *g*. En el ejemplo $\mu_e \approx 0{,}8$ y $a_c \approx 0{,}8g$.

OBSERVACIÓN ¿Está de acuerdo el resultado del test con el valor de 0,9 que proporciona el fabricante para el coeficiente de rozamiento estático? En realidad sí. Al calcular el módulo de la fuerza de rozamiento no tuvimos en cuenta el rozamiento con el aire y el rozamiento por rodadura. A una velocidad de 18,9 m/s, unos 68 km/h, el rozamiento con el aire es importante.

* 5.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA: EL MÉTODO DE EULER

Si una partícula se mueve bajo la influencia de una fuerza *constante*, su aceleración es constante, por lo que para determinar su velocidad y su posición podemos usar las fórmulas cinemáticas descritas en el capítulo 2 para el caso de aceleración constante. Consideremos ahora una partícula que se mueve en el espacio bajo la acción de una fuerza, y por consiguiente, de una aceleración, que depende de la posición y de la velocidad de la partícula. La posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en un instante de tiempo determinan la posición y la velocidad en el siguiente instante que, a su vez, determinan la aceleración. La posición, la velocidad y la aceleración real de un objeto cambian continuamente con el tiempo. Se suele aproximar esta situación mediante el **método de Euler**, que consiste en reemplazar esta variación continua con el tiempo por pequeños intervalos de tiempo Δt, de tal forma que la aceleración en cada intervalo sea constante. Si el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño, el cambio de la aceleración es pequeño y puede despreciarse.

Sean x_0, v_0 y a_0 la posición, la velocidad y la aceleración iniciales de la partícula en un instante de tiempo t_0. Si suponemos que durante Δt la aceleración es constante, la velocidad en el tiempo $t_1 = t_0 + \Delta t$ viene dada por

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\,\Delta t$$

De forma análoga, si despreciamos cualquier cambio de la velocidad durante el intervalo de tiempo, la nueva posición viene dada por la ecuación

$$v_1 = v_{0x} + a_{0x}\,\Delta t$$

A partir de los valores de v_1 y x_1, calculamos la nueva aceleración a_1 usando la segunda ley de Newton y, posteriormente, usamos x_1, v_1 y a_1 para calcular x_2 y v_2:

$$x_2 = x_1 + v_{1x}\,\Delta t$$
$$v_2 = v_1 + a_{1x}\,\Delta t$$

La conexión entre la posición y la velocidad en el tiempo t_n y el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ viene dada por

$$x_{n+1} = x_n + v_{nx}\,\Delta t \qquad 5.9$$

y

$$v_{n+1} = v_{nx} + a_{nx}\,\Delta t \qquad 5.10$$

Por lo tanto, para determinar la velocidad y la posición en un tiempo t, dividimos el intervalo de tiempo $t - t_0$ en un gran número de pequeños intervalos Δt y aplicamos las ecuaciones 5.9 y 5.10 empezando en el instante inicial t_0. Esto comporta una gran cantidad de cálculos simples y repetitivos que mediante un ordenador son fáciles de hacer. La técnica de dividir el intervalo de tiempo en pequeños intervalos de tiempo y calcular la aceleración, la velocidad y la posición en cada intervalo usando los valores del intervalo anterior se denomina integración numérica.

Para ilustrar el uso de la integración numérica, consideremos el problema de un paracaidista que salta en el aire, partiendo del reposo, desde una altura determinada, de modo que su movimiento depende únicamente de la fuerza de la gravedad y de la fuerza de resistencia del aire, que es proporcional al cuadrado de la velocidad. Tenemos que calcular la velocidad v y la distancia recorrida x en función del tiempo.

La ecuación que describe el movimiento de un objeto de masa m que parte del reposo es la ecuación 5.6 con $n = 2$:

$$mg - bv^2 = ma_x$$

donde la dirección positiva es la dirección hacia abajo. La aceleración, en estas condiciones, vale

$$a_x = g - \frac{b}{m}v^2 \qquad 5.11$$

	A	B	C	D
1	Δt =	0,5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9,81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	**t**	**x**	**v**	**a**
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0,00	0,0	0,00	9,81
10	0,50	0,0	4,91	9,74
11	1,00	2,5	9,78	9,55
12	1,50	7,3	14,55	9,23
13	2,00	14,6	19,17	8,81
14	2,50	24,2	23,57	8,30
15	3,00	36,0	27,72	7,72
41	16,00	701,0	59,55	0,15
42	16,50	730,7	59,62	0,16
43	17,00	760,6	59,68	0,10
44	17,50	790,4	59,74	0,09
45	18,00	820,3	59,78	0,07
46	18,50	850,2	59,82	0,06
47	19,00	880,1	59,85	0,05
48	19,50	910,0	59,87	0,04
49	20,00	939,9	59,89	0,04
50				

(a)

	A	B	C	D
1	Δt =	0,5	s	
2	x0 =	0	m	
3	v0 =	0	m/s	
4	a0 =	9,81	m/s^2	
5	vt =	60	m/s	
6				
7	**t**	**x**	**v**	**a**
8	(s)	(m)	(m/s)	(m/s^2)
9	0	=B2	=B3	=$B$4*(1-C9^2/$B$5^2)
10	=A9+$B$1	=B9+C9*$B$1	=C9+D9*$B$1	=$B$4*(1-C10^2/$B$5^2)
11	=A10+$B$1	=B10+C10*$B$1	=C10+D10*$B$1	=$B$4*(1-C11^2/$B$5^2)
12	=A11+$B$1	=B11+C11*$B$1	=C11+D11*$B$1	=$B$4*(1-C12^2/$B$5^2)
13	=A12+$B$1	=B12+C12*$B$1	=C12+D12*$B$1	=$B$4*(1-C13^2/$B$5^2)
14	=A13+$B$1	=B13+C13*$B$1	=C13+D13*$B$1	=$B$4*(1-C14^2/$B$5^2)
15	=A14+$B$1	=B14+C14*$B$1	=C14+D14*$B$1	=$B$4*(1-C15^2/$B$5^2)
41	=A40+$B$1	=B40+C40*$B$1	=C40+D40*$B$1	=$B$4*(1-C41^2/$B$5^2)
42	=A41+$B$1	=B41+C41*$B$1	=C41+D41*$B$1	=$B$4*(1-C42^2/$B$5^2)
43	=A42+$B$1	=B42+C42*$B$1	=C42+D42*$B$1	=$B$4*(1-C43^2/$B$5^2)
44	=A43+$B$1	=B43+C43*$B$1	=C43+D43*$B$1	=$B$4*(1-C44^2/$B$5^2)
45	=A44+$B$1	=B44+C44*$B$1	=C44+D44*$B$1	=$B$4*(1-C45^2/$B$5^2)
46	=A45+$B$1	=B45+C45*$B$1	=C45+D45*$B$1	=$B$4*(1-C46^2/$B$5^2)
47	=A46+$B$1	=B46+C46*$B$1	=C46+D46*$B$1	=$B$4*(1-C47^2/$B$5^2)
48	=A47+$B$1	=B47+C47*$B$1	=C47+D47*$B$1	=$B$4*(1-C48^2/$B$5^2)
49	=A48+$B$1	=B48+C48*$B$1	=C48+D48*$B$1	=$B$4*(1+C49^2/$B$5^2)
50				

(b)

FIGURA 5.36 (*a*) Hoja de cálculo que se usa para calcular la posición y la velocidad de un paracaidista con una resistencia del aire proporcional a v^2. (*b*) Se muestra la misma hoja de cálculo Excel, con las fórmulas.

Conviene escribir la constante b/m en función de la velocidad límite v_l. Si $a = 0$ en la ecuación 5.11, se obtiene

$$0 = g - \frac{b}{m}v_T^2$$

$$\frac{b}{m} = \frac{g}{v_T^2}$$

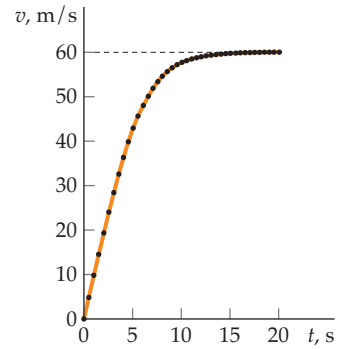
Sustituyendo g/v_T^2 por b/m en la ecuación 5.11, se llega a

$$a_x = g\left(1 - \frac{v^2}{v_T^2}\right) \qquad 5.12$$

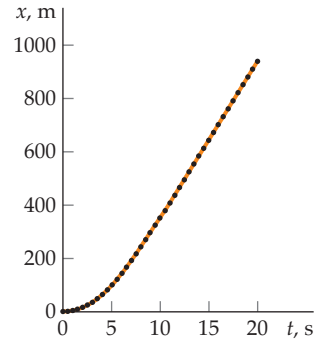
La aceleración en el tiempo t_n se calcula usando los valores de x_n y de v_n.

Para resolver la ecuación 5.12 numéricamente, tenemos que usar los valores numéricos de g y de v_l. Una velocidad límite razonable es 60 m/s. Si tomamos $x_0 = 0$, los valores iniciales son $x_0 = 0$, $v_0 = 0$, y $a_0 = g = 9{,}81$ m/s^2. Para determinar la velocidad v y la posición x transcurrido un tiempo $\Delta t = 20$ s, dividimos el intervalo de tiempo $0 < t < 20$ s en muchos intervalos pequeños Δt y aplicamos las ecuaciones 5.9, 5.10 y 5.12. Lo hacemos escribiendo un programa o usando una hoja de cálculo, como la que se muestra en la figura 5.36. Esta hoja de cálculo considera $\Delta t = 0{,}5$ s y para $t = 20$ s, obtiene $v = 59{,}89$/s y $x = 939{,}9$ m. La figura 5.37 muestra la representación gráfica de v respecto a t, y de x respecto a t para estos datos.

¿Cuál es la precisión de estos cálculos? Podemos estimarla volviendo a usar el mismo programa con otro intervalo de tiempo más pequeño. Si usamos $\Delta t = 0{,}25$ s, la mitad del valor utilizado en el primer cálculo, cuando $t = 20$ s obtenemos $v = 59{,}86$ m/s y $x = 943{,}1$ m. La diferencia en la velocidad es de un 0,05% mientras que la de la posición es un 0,3%. Estas son pues las estimaciones de la exactitud de los cálculos iniciales.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 5.37 (*a*) Gráfico $v - t$ para un paracaidista, calculado mediante una integración numérica con $\Delta t = 0{,}5$ s. La línea horizontal discontinua muestra la velocidad límite $v_l = 60$ m/s. (*b*) Gráfico $x - t$ si $\Delta t = 0{,}5$ s.

Si la diferencia entre el valor a_{mx} para un intervalo de tiempo y el valor de a_x al comienzo del intervalo se hace más pequeña a medida que el intervalo de tiempo disminuye, podríamos pensar en la conveniencia de usar intervalos de tiempo muy pequeños, como por ejemplo $\Delta t = 0{,}000000001$ s. Hay dos razones que muestran que este procedimiento no conviene. Primera, cuanto más pequeño es el intervalo, mayor es el número de cálculos que hay que realizar, con lo cual el tiempo que necesita el programa aumenta. Segunda, el ordenador en cada paso del cálculo guarda un número determinado de dígitos significativos, por lo que en cada paso se produce un redondeo. Este es un proceso aditivo, con lo que cuantos más cálculos realicemos más significativo será el error del redondeo. Cuando hemos disminuido por primera vez el intervalo de tiempo, la precisión del resultado mejora porque a_i se aproxima a a_m para ese intervalo. Sin embargo, a medida que el intervalo disminuye, los errores de redondeo crecen y la exactitud del cálculo disminuye. Una buena regla en este tipo de cálculos es no usar más de 10^5 intervalos para una integración numérica típica.

5.5 CENTRO DE MASAS

Si lanzamos una pelota al aire, seguirá un movimiento parabólico. Pero si lanzamos un bastón al aire (figura 5.38), el movimiento es más complicado. Cada extremo del bastón se mueve de manera distinta y ambos extremos lo hacen de forma distinta a como se mueve el punto medio. Sin embargo, si nos fijamos bien veremos que hay un punto del bastón que se mueve siguiendo una curva parabólica aunque el resto de puntos no lo haga. Este punto, llamado **centro de masas**, se mueve como si toda la masa del bastón estuviera concentrada en ese punto y todas las fuerzas externas estuvieran aplicadas sobre él. Para determinar el centro de masas de un cuerpo, es útil visualizar el cuerpo como un sistema de partículas.

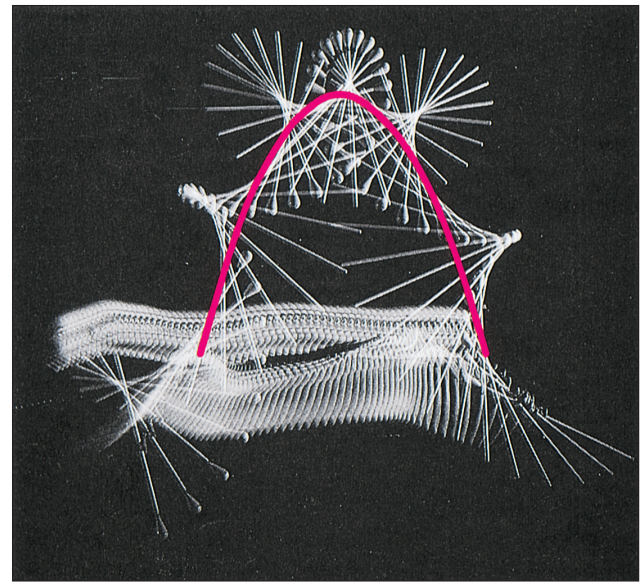


FIGURA 5.38 Fotografía estroboscópica de un bastón lanzado al aire. *(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press.)*

Consideremos en primer lugar un sistema simple formado por dos partículas en una dimensión (figura 5.39). Sean x_1 y x_2 las coordenadas de las partículas puntuales de masas m_1 y m_2 respecto a un origen elegido arbitrariamente. La coordenada x_{cm} del centro de masas viene definida por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \qquad 5.13$$

donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Si se elige el origen y la dirección del eje x de tal forma que la posición de m_1 es el origen y m_2 está en la dirección positiva del eje x, entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = d$, donde d es la distancia entre las partículas y el centro de masas viene dado por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(0) + m_2d$$

$$x_{cm} = \frac{m_2}{M}d = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d \qquad 5.14$$

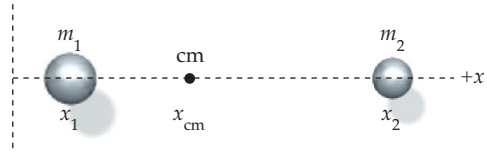


FIGURA 5.39

En el caso de sólo dos partículas, el centro de masas cae en un punto de la línea que une las dos partículas; si las partículas tienen la misma masa, entonces el centro de masas se halla justo en el punto medio entre ellas (figura 5.40*a*). Si las dos partículas tienen masas distintas, el centro de masas estará más cerca de la partícula con mayor masa (figura 5.40*b*).

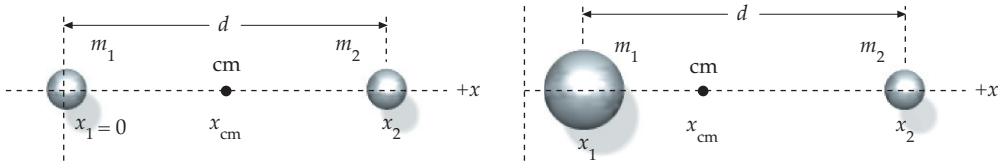


FIGURA 5.40

PROBLEMA PRÁCTICO 5.7
Una masa de 4 kg está en el origen y una masa de 2 kg está en $x = 6$ cm. Determinar x_{cm}.

Podemos generalizar de dos partículas en una dimensión a un sistema de muchas partículas en tres dimensiones. Para N partículas

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_Nx_N$$

Utilizando una notación más concisa podemos escribir:

$$Mx_{cm} = \sum_i m_i x_i \qquad 5.15$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema. Igualmente,

$$My_{cm} = \sum_i m_i y_i \qquad 5.16$$

y

$$Mz_{cm} = \sum_i m_i z_i \qquad 5.17$$

El vector posición de la partícula i es $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$. El **vector de posición del centro de masas**, $\vec{r}_{cm}$, viene definido por

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad 5.18$$

DEFINICIÓN: CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

donde $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} + z_{cm}\hat{k}$.

Consideremos cuerpos extendidos como pelotas, bates de béisbol incluso coches. Esos cuerpos contienen un gran número de partículas con una distribución continua de masa. Para cuerpos con simetría elevada, el centro de masas coincide con el *centro de simetría*. Por ejemplo, el centro de masas de una esfera uniforme o de un cilindro uniforme está localizado en su *centro geométrico*. Para un objeto que tenga una línea o plano de simetría, el centro de masas está localizado en alguno de los puntos de esa línea o plano. Para determinar el centro de masas de un objeto continuo, basta reemplazar el sumatorio de la ecuación 5.18 por una integral:

$$M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\,dm \qquad 5.19$$

DEFINICIÓN: CENTRO DE MASAS DE UN OBJETO CONTINUO

donde dm es un elemento de masa localizado en la posición $\vec{r}$, como se muestra en la figura 5.41. (Examinaremos en detalle cómo se resuelve esta integral después del ejemplo 5.15.)

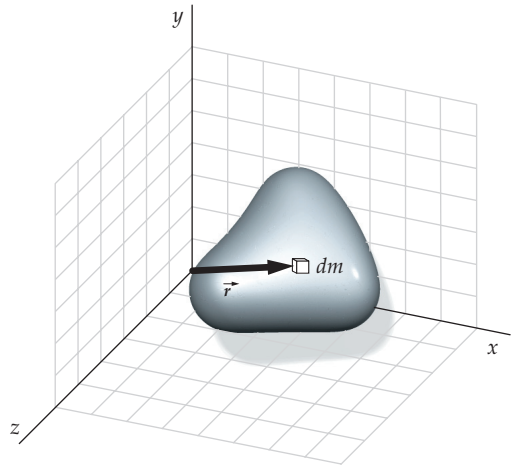


FIGURA 5.41 Elemento de masa dm localizado en $\vec{r}$ para determinar el centro de masas por integración.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de centros de masas

PLANTEAMIENTO El análisis del movimiento de uno o más objetos se simplifica si se determina el centro de masas. Resulta útil dibujar el objeto u objetos para determinar el centro de masas.

SOLUCIÓN

1. Compruebe la distribución de masas mediante ejes de simetría. Si hay ejes de simetría, el centro de masas estará localizado sobre ellos. Utilice los ejes de simetría como ejes de coordenadas.

2. Compruebe si la masa está distribuida mediante subsistemas altamente simétricos. Si es así, determine primero el centro de masas de los subsistemas individualmente y luego calcule el centro de masas del sistema tratando cada subsistema como una partícula puntual en su centro de masas.
3. Si el sistema contiene una o más partículas puntuales, coloque el origen de coordenadas sobre la localización de una de las partículas. (Si la partícula i-ésima está en el origen, entonces $\vec{r}_i = 0$.)

COMPROBACIÓN Asegúrese de que los resultados tienen sentido. En muchos casos, el centro de masas se halla cerca de la parte más grande y con más masa del objeto. El centro de masas de un sistema de varios objetos o de un objeto como un aro puede no estar colocado dentro o sobre objeto alguno.

Ejemplo 5.14 Centro de masas de la molécula de agua

Una molécula de agua está formada por un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno. El átomo de oxígeno tiene una masa de 16 unidades de masa atómica (u) y cada átomo de hidrógeno tiene una masa 1 u. Cada uno de los átomos de hidrógeno están separados una distancia media de 96 pm (96×10^{-12} m) del átomo de oxígeno y separados entre sí por un ángulo de 104,5°. Determinar el centro de masas de la molécula.

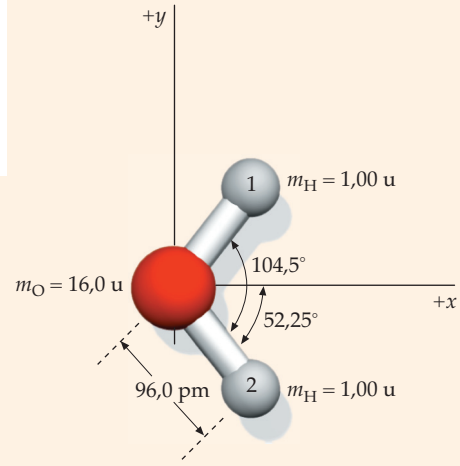


FIGURA 5.42

PLANTEAMIENTO El cálculo se simplifica si elegimos como origen la posición del átomo de oxígeno y el eje x como la bisectriz del ángulo entre los átomos de hidrógeno (figura 5.42). Por lo tanto, dada la simetría de la molécula, el centro de masas estará sobre el eje x y la línea que une el átomo de oxígeno con cada átomo de hidrógeno formará con el eje x un ángulo de 52,25°.

SOLUCIÓN

1. La posición del centro de masas viene dada por sus coordenadas, x_{cm} e y_{cm} (ecuaciones 5.15 y 5.16):

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

2. Si estas expresiones se escriben explícitamente, obtenemos:

$$x_{cm} = \frac{m_{H1}x_{H1} + m_{H2}x_{H2} + m_O x_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$
$$y_{cm} = \frac{m_{H1}y_{H1} + m_{H2}y_{H2} + m_O y_O}{m_{H1} + m_{H2} + m_O}$$

3. Hemos elegido como origen la localización del oxígeno, de modo que las dos coordenadas x e y del origen son cero. Las coordenadas x e y de los átomos de hidrógeno se calculan a partir del ángulo de 52,25° que cada átomo de hidrógeno forma con el eje x:

$$x_O = y_O = 0$$
$$x_{H1} = 96{,}0 \text{ pm} \cos 52{,}25° = 58{,}8 \text{ pm}$$
$$x_{H2} = 96{,}0 \text{ pm} \cos(-52{,}25°) = 58{,}8 \text{ pm}$$
$$y_{H1} = 96{,}0 \text{ pm} \operatorname{sen} 52{,}25° = 75{,}9 \text{ pm}$$
$$y_{H2} = 96{,}0 \text{ pm} \operatorname{sen}(-52{,}25°) = -75{,}9 \text{ pm}$$

4. Sustituyendo las coordenadas x y los valores de las masas en el paso 2, se obtiene x_{cm}:

$$x_{cm} = \frac{(1{,}00 \text{ u})(58{,}8 \text{ pm}) + (1{,}00 \text{ u})(58{,}8 \text{ pm}) + (16{,}0 \text{ u})(0)}{1{,}00 \text{ u} + 1{,}00 \text{ u} + 16{,}0 \text{ u}} = 6{,}53 \text{ pm}$$
$$x_{cm} = \frac{(1{,}00 \text{ u})(75{,}9 \text{ pm}) + (1{,}00 \text{ u})(-75{,}9 \text{ pm}) + (16{,}0 \text{ u})(0)}{1{,}00 \text{ u} + 1{,}00 \text{ u} + 16{,}0 \text{ u}} = 0{,}00 \text{ pm}$$

5. El centro de masas está en el eje x:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\hat{i} + y_{cm}\hat{j} = \boxed{6{,}53 \text{ pm } \hat{i} + 0{,}00\hat{j}}$$

COMPROBACIÓN Se puede ver que $y_{cm} = 0$ a partir de la simetría de la distribución de masa. Asimismo, el centro de masas está muy próximo al átomo de oxígeno, el de mayor masa, como era de esperar.

OBSERVACIÓN La distancia 96 pm se lee "noventa y seis picometros", donde el prefijo pico se refiera al factor 10^{-12}.

El ejemplo 5.14 también puede resolverse determinando en primer lugar el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno aisladamente. Para un sistema de tres partículas, la ecuación 5.18 es

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de esta ecuación están relacionados con el centro de masas de las dos primeras partículas $\vec{r}'_{cm}$:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}'_{cm}$$

El centro de masas del sistema de tres partículas será, por lo tanto,

$$M\vec{r}_{cm} = (m_1 + m_2)\vec{r}'_{cm} + m_3\vec{r}_3$$

Así, podemos determinar primero el centro de masas de dos de las partículas, por ejemplo, los átomos de hidrógeno, y después reemplazarlos por una sola partícula de masa total $m_1 + m_2$ en aquel centro de masas (figura 5.43).

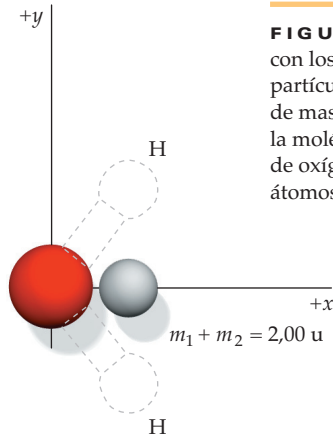


FIGURA 5.43 El ejemplo 5.14 puede considerarse con los dos átomos de H reemplazados por una sola partícula de masa $m_1 + m_2 = 2$ u sobre el eje x en el centro de masas de los átomos originales. El centro de masas de la molécula de agua se encuentra entonces entre el átomo de oxígeno en el origen y el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno calculado previamente.

La misma técnica nos permite calcular los centros de masas de sistemas más complejos, como, por ejemplo, dos barras uniformes (figura 5.44). El centro de masas de cada barra por separado se encuentra en el centro de la barra. El centro de masas del sistema se determina tratando cada barra como una partícula puntual en su propio centro de masas.

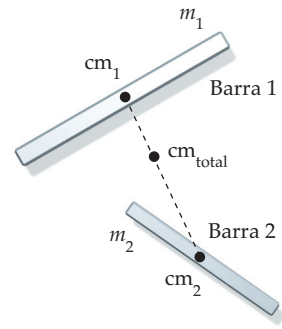


FIGURA 5.44

Ejemplo 5.15 Centro de masas de una lámina de madera

Determinar el centro de masas de la lámina de madera de la figura 5.45*a*.

PLANTEAMIENTO La lámina puede dividirse en dos partes simétricas (figura 5.45*b*). El centro de masas de cada parte es su centro geométrico. Sea m_1 la masa de la parte 1 y m_2 la masa de la parte 2. La masa total es $M = m_1 + m_2$. Las masas son proporcionales a las áreas, siendo A, A_1 y A_2 el área total y las áreas de las partes de masa m_1 y m_2, respectivamente.

SOLUCIÓN

Pasos

1. Expresar las coordenadas x e y del centro de masas en función de m_1 y m_2:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_{cm1} + m_2x_{cm2})$$
$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_{cm1} + m_2y_{cm2})$$

2. Sustituir los cocientes de las áreas por las relaciones entre las masas:

$$x_{cm} = \frac{A_1}{A}x_{cm1} + \frac{A_2}{A}x_{cm2}$$
$$y_{cm} = \frac{A_1}{A}y_{cm1} + \frac{A_2}{A}y_{cm2}$$

3. Calcular las áreas y los cocientes entre las áreas usando los datos de la figura 5.45*b*:

$$A_1 = 0{,}32\ m^2; \quad A_2 = 0{,}040\ m^2$$
$$\frac{A_1}{A} = \frac{8{,}0}{9{,}0} \quad \frac{A_2}{A} = \frac{1{,}0}{9{,}0}$$

4. Expresar las coordenadas x e y del centro de masas de cada una de las partes de la lámina por inspección simple de la figura:

$$x_{cm1} = 0{,}40\ m, \quad y_{cm1} = 0{,}20\ m$$
$$x_{cm2} = 0{,}70\ m, \quad y_{cm2} = 0{,}50\ m$$

5. Sustituir estos resultados en el resulado del paso 2 para calcular x_{cm} e y_{cm}:

$$x_{cm} = \boxed{0{,}43\ m}, \quad y_{cm} = \boxed{0{,}23\ m}$$

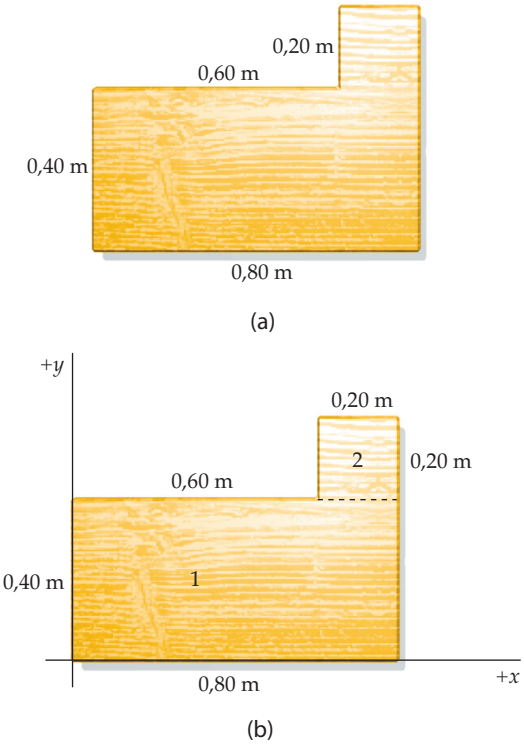


FIGURA 5.45

COMPROBACIÓN Como era de esperar, el centro de masas está muy próximo al centro de masas de la parte 1, ya que $m_1 = 8m_2$.

OBSERVACIÓN El cálculo del centro de masas es más sencillo si se coloca el origen en el centro geométrico de la parte 1 de la lámina y se dibuja el eje x señalando el centro de la parte 2.

* DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASAS POR INTEGRACIÓN

En esta sección se determina el centro de masas por integración (ecuación 5.19):

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Para ilustrar la técnica de cómo establecer la integración, trataremos el problema simple de determinar el centro de masas de una barra uniforme y delgada.

Barra uniforme Primero, elegimos el sistema de coordenadas. Una buena elección es un sistema de coordenadas con el eje x a lo largo de la barra, con el origen en un extremo (figura 5.46). En la figura se muestra un elemento de masa dm de longitud dx situado a una distancia x del origen. La ecuación 5.19 nos lleva entonces a

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm = \frac{1}{M}\int x\hat{i}\, dm$$

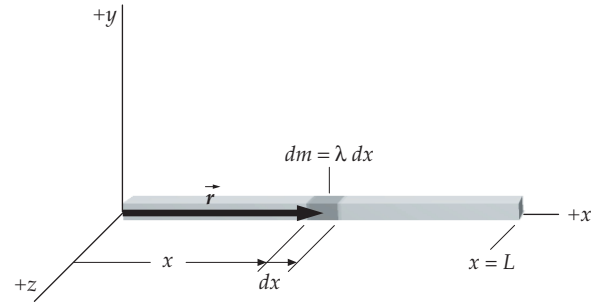


FIGURA 5.46

La masa está distribuida a lo largo del eje x dentro del intervalo $0 \le x \le L$. El barrido de dm a lo largo de toda la barra (y en la dirección positiva del eje x) se determina mediante los límites de la integral 0 y L. El cociente dm/dx es la masa por unidad de longitud λ; por lo tanto, $dm = \lambda dx$:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\hat{i}\int x\, dm = \frac{1}{M}\hat{i}\int_0^L x\lambda\, dx \qquad 5.20$$

donde

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda\, dx \qquad 5.21$$

Si la barra es uniforme, λ es constante y puede sacarse como factor en cada una de las integrales de 5.20 y 5.21, obteniéndose

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\lambda\hat{i}\int_0^L x\, dx = \frac{1}{M}\lambda\hat{i}\,\frac{L^2}{2} \qquad 5.22$$

y

$$M = \lambda\int_0^L dx = \lambda L \qquad 5.23$$

Despejando λ de la ecuación 5.23, se obtiene $\lambda = M/L$. Entonces, para una barra uniforme la masa por unidad de longitud es igual a la masa total dividida por la longitud total. Sustituyendo λL en lugar de M en la ecuación 5.22, completamos el cálculo y llegamos al resultado esperado

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{\lambda L}\lambda\hat{i}\,\frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}L\hat{i}$$

Aro semicircular El cálculo para determinar el centro de masas de un aro semicircular de radio R es más fácil si elegimos el origen sobre la línea de simetría del alambre (el eje y) en el centro de curvatura como indica la figura 5.47. Para determinar el centro de masas usamos la ecuación 5.19, $M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\, dm$, donde $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. La distribución de masa semicircular sugiere la conveniencia de usar coordenadas polares, para las cuales $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Con estas sustituciones tenemos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int (x\hat{i} + y\hat{j})\, dm = \frac{1}{M}\int R(\cos\theta\hat{i} + \text{sen}\,\theta\hat{j})\, dm$$

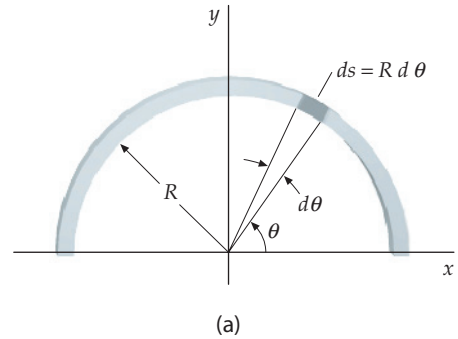


FIGURA 5.47 Geometría para el cálculo del centro de masas de un aro semicircular por integración.

* En coordenadas polares, las coordenadas de un punto son r y θ, donde r es el módulo del vector posición y θ el ángulo que forma el vector posición con el eje $+x$.

Ahora expresamos dm en función de $d\theta$. Primero, el elemento de masa dm tiene longitud $ds = R\,d\theta$, por lo tanto,

$$dm = \lambda\, ds = \lambda R\, d\theta$$

donde $\lambda = dm/ds$ es la masa por unidad de longitud. De esta forma tenemos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int R(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j})\lambda R\,d\theta$$

La evaluación de esta integral supone que dm recorra la distribución de masa semicircular. Esto significa que los límites de θ son $0 \leq \theta \leq \pi$. Se integra en la dirección de θ creciente, por lo que los límites van de 0 a π. Se obtiene entonces

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} R(\cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j})\lambda R\,d\theta = \frac{\lambda R^2}{M}\left(\hat{i}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \hat{j}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)$$

El aro es uniforme y sabemos que $\lambda = M/\pi r$, donde πr es la longitud de la semicircunferencia. Sustituyendo λ y reordenando términos

$$\vec{r}_{cm} = \frac{R}{\pi}\left(\hat{i}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta + \hat{j}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right) = \frac{R}{\pi}\left(\hat{i}\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi} - \hat{j}\cos\theta\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}R\hat{j}$$

El centro de masas está en el eje y a una distancia de $2R/\pi$ del origen. Curiosamente, está fuera del objeto.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Integrales

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

El movimiento de un objeto o de un sistema de partículas se puede describir en función del movimiento del centro de masas, que puede considerarse como el movimiento global del sistema más el movimiento de las partículas individuales en el sistema relativo al centro de masas. La figura 5.48 es una fotografía obtenida con destellos múltiples de un martillo lanzado al aire. Mientras el martillo está en el aire, el centro de masas sigue una trayectoria parabólica, la misma que seguiría una partícula puntual. Las otras partes del martillo rotan en torno a este punto cuando el martillo se mantiene en el aire.

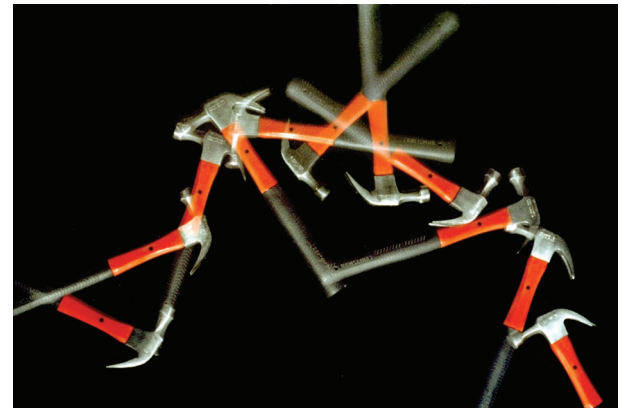


FIGURA 5.48 El centro de masas (punto negro) del martillo se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica. *(LorenWinters/Visual Unlimited.)*

El movimiento del centro de masas para un sistema de partículas está relacionado con la fuerza neta que actúa sobre el sistema como un todo. Podemos demostrar esto examinando el movimiento de un sistema de n partículas de masa total M. Para determinar la aceleración del centro de masas, calcularemos primero su velocidad, derivando la ecuación 5.18 ($M\vec{r}_{cm} = \sum m_i\vec{r}_i$) respecto al tiempo:

$$M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots = \sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

La derivada temporal de la posición es la velocidad y se obtiene

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{v}_i \qquad 5.24$$

Una nueva diferenciación nos da las aceleraciones:

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{a}_i \qquad 5.25$$

donde $\vec{a}_i$ es la aceleración de la partícula i-ésima y $\vec{a}_{cm}$ es la aceleración del centro de masas. Sin embargo, de acuerdo con la segunda ley de Newton, $m_i\vec{a}_i$ es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula i, por lo que

$$\sum_i m_i\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

donde el término de la derecha es la suma de todas las fuerzas que actúan en cada partícula del sistema. Algunas de estas fuerzas son fuerzas internas (ejercidas sobre una partícula del sistema por otra partícula del sistema) y otras son fuerzas

Si la bola se mueve en un círculo horizontal a velocidad constante, su vector aceleración apunta en la dirección centrípeta (hacia el centro del círculo). La fuerza neta sobre la bola se encuentra en la dirección del vector aceleración. La componente centrípeta de la fuerza neta la produce el lanzador tirando de la cuerda hacia adentro. *(Pete Saloutos/Corbis.)*

externas (ejercidas sobre una partícula del sistema por una partícula que no está en el sistema). Así,

$$M\vec{a}_{cm} = \sum_i \vec{F}_{i\,int} + \sum_i \vec{F}_{i\,ext} \qquad 5.26$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas se presentan emparejadas acción-reacción. Así, para cada fuerza interna que actúa sobre una partícula existe una fuerza igual pero opuesta que actúa sobre otra partícula. Cuando se suman todas las fuerzas internas, cada pareja acción-reacción suma cero, de forma que $\sum \vec{F}_{i\,int} = 0$. La ecuación 5.26 se convierte en

$$\vec{F}_{neta\,ext} = \sum_i \vec{F}_{i\,ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad 5.27$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA UN SISTEMA

Esta ecuación nos dice que la masa total M multiplicada por la aceleración del centro de masas $\vec{a}_{cm}$ es igual a la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema. Así, tenemos:

El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

Este teorema es importante porque nos muestra cómo describir el movimiento del centro de masas de cualquier sistema de partículas. El centro de masas se comporta exactamente igual que una sola partícula puntual sometida únicamente a las fuerzas externas. Los movimientos individuales de los elementos del sistema generalmente son mucho más complejos y no vienen descritos por la ecuación 5.27. El martillo lanzado al aire de la figura 5.48 es un ejemplo. La única fuerza que actúa es la gravedad y, por lo tanto, el centro de masas del martillo se mueve según una trayectoria parabólica, como si se tratara de una partícula puntual (la rotación del martillo alrededor de su centro de masas no viene descrita por la ecuación 5.27).

Un caso especial del movimiento del centro de masas es aquel en que sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa neta. Por lo tanto, $\vec{a}_{cm} = 0$ y el centro de masas está en reposo o se mueve con velocidad constante. Las fuerzas internas y el movimiento pueden ser complejos, pero el comportamiento del centro de masas es simple. Además, si la fuerza externa neta no es cero, pero una componente de ella en una dirección dada, por ejemplo, la dirección x, es cero, entonces $a_{cmx} = 0$ y v_{cmx} permanece constante. Un ejemplo de esto es un proyectil en ausencia de resistencia del aire. La fuerza externa neta sobre el proyectil es la fuerza gravitatoria. Esta fuerza actúa hacia abajo, por lo que la componente de la fuerza en la dirección horizontal es cero. Se sigue entonces, que la componente horizontal de la velocidad del centro de masas es constante.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 5.2

Un cilindro descansa sobre un papel encima de una mesa (figura 5.49). Cuando se tira del papel hacia la derecha, el cilindro rueda hacia la izquierda en *relación al papel*. ¿Cómo se mueve el centro de masas del cilindro en *relación a la mesa*?

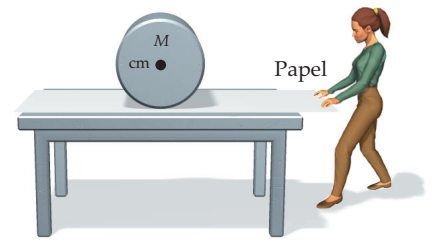


FIGURA 5.49

Ejemplo 5.16 Un proyectil que explota

Un proyectil se lanza al aire desde el nivel del suelo y debería aterrizar a 55 m. Sin embargo en el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa. Justo después de la explosión, uno de los fragmentos tiene velocidad instantánea cero y cae directamente al suelo. ¿Dónde cae el otro fragmento? Despreciar la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Sea el proyectil el sistema. Entonces, las fuerzas de explosión son todas fuerzas internas. Como la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la de la gravedad, el centro de masas, que está en todo momento a mitad de camino entre los fragmentos, continúa con su trayectoria parabólica como si no hubiera explosión (figura 5.50).

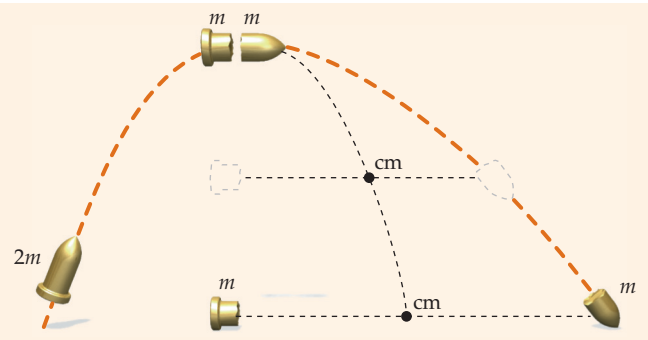


FIGURA 5.50

SOLUCIÓN

1. Sea $x = 0$ la posición inicial del proyectil. Las posiciones de aterrizaje x_1 y x_2 de los fragmentos están relacionadas con la posición final del centro de masas por:

$$(2m)x_{cm} = mx_1 + mx_2$$
$$\text{o} \quad 2x_{cm} = x_1 + x_2$$

2. En el impacto, $x_{cm} = R$ y $x_1 = 0{,}5R$, donde $R = 55$ m es el alcance del proyectil si no explota. Se obtiene entonces para x_2:

$$x_2 = 2x_{cm} - x_1 = 2R - 0{,}5R = 1{,}5R$$
$$= 1{,}5(55\text{ m}) = \boxed{83\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Las fuerzas de la explosión empujaron al fragmento 1 hacia atrás de forma que el fragmento 2 fue empujado hacia adelante con la misma fuerza pero con dirección contraria. Como cabía esperar, el fragmento 2 cae al suelo más allá del punto donde hubiera caído el proyectil si no hubiera explotado.

OBSERVACIÓN La figura 5.51 representa la altura en función de la distancia para los proyectiles que explotan cuando el primer fragmento posee una velocidad horizontal igual a la mitad de la velocidad horizontal inicial. Como en el ejemplo original, en el cual el primer fragmento cae verticalmente hacia abajo, el centro de masas sigue una trayectoria normal parabólica. Si ambos fragmentos tienen la misma componente vertical de la velocidad después de la explosión, ambos aterrizarán al mismo tiempo. Si justo después de la explosión, la componente vertical de la velocidad vectorial de uno de los fragmentos es menor que la del otro, el fragmento con componente vertical menor chocará primero contra el suelo. Tan pronto como lo haga, el suelo ejercerá una fuerza sobre él y la fuerza neta sobre el sistema dejará de ser sólo la gravedad. Desde este momento, nuestro análisis no es válido.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.8 Si la masa del fragmento que cae directamente hacia abajo es el doble que la masa del otro fragmento, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará el más ligero?

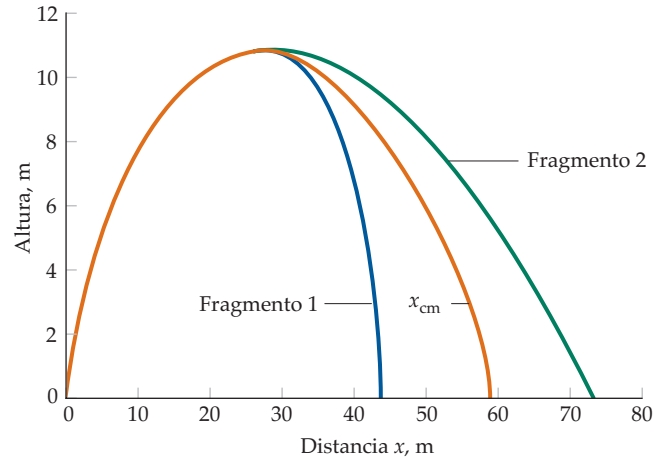


FIGURA 5.51

Ejemplo 5.17 Cambio de plazas en un bote

Pete (masa 80 kg) y Dave (masa 120 kg) se encuentran en un bote de remos (masa 60 kg). Dave está en el centro del bote, remando, y Pete en un extremo a 2 m del centro. Dave se cansa de remar y, una vez que el bote se ha detenido, intercambia su puesto con Pete. ¿Qué distancia se ha movido el bote al intercambiarse las dos personas? (Despreciar cualquier fuerza horizontal ejercida por el agua.)

PLANTEAMIENTO Sea el sistema Pete-Dave-bote. Como no hay fuerzas externas en dirección horizontal, el centro de masas no se mueve horizontalmente respecto a un sistema de referencia inercial como el agua. Aplicar la ecuación 5.15 ($Mx_{cm} = \Sigma m_i x_i$) a Dave y Pete antes y después del cambio de plazas.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 5.52). Hágase $L = 2$ m y $d = \Delta x_{bote}$, la distancia que el bote se desplaza hacia la derecha cuando se permutan las posiciones:

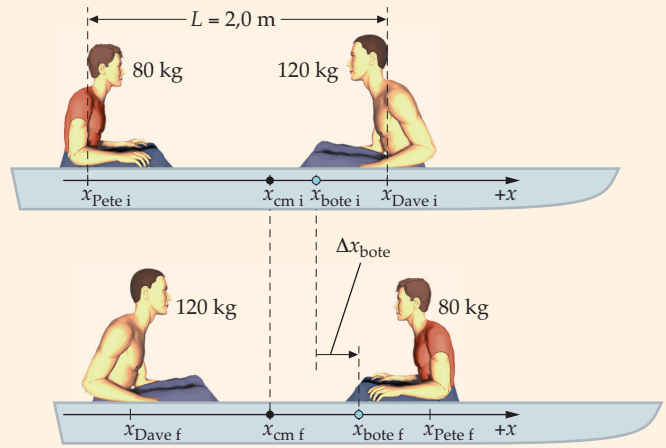


FIGURA 5.52 Pete y Dave cambian sus plazas, visto desde el sistema de referencia sujeto al agua. El punto azul indica el centro de masas del bote mientras que el negro es el centro de masas del sistema Pete-Dave-bote.

2. Aplicar la ecuación 5.15 a Dave y Pete antes y después del cambio de plazas. Los ejes de coordenadas miden las posiciones desde el sistema de referencia del agua:

$$Mx_{\text{cm i}} = m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete i}} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave i}} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote i}}$$

y

$$Mx_{\text{cm f}} = m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete f}} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave f}} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote f}}$$

3. Restar las dos ecuaciones anteriores. Sustituir Δx_{cm} por 0, $d + L$ por Δx_{Pete}, $d - L$ por Δx_{Dave} y d por Δx_{bote}:

$$M\Delta x_{\text{cm}} = m_{\text{Pete}}\Delta x_{\text{Pete}} + m_{\text{Dave}}\Delta x_{\text{Dave}} + m_{\text{bote}}\Delta x_{\text{bote}}$$

$$0 = m_{\text{Pete}}(d + L) + m_{\text{Dave}}(d + L) + m_{\text{bote}}d$$

4. Despejar d:

$$d = \frac{(m_{\text{Dave}} - m_{\text{Pete}})}{m_{\text{Dave}} + m_{\text{Pete}} + m_{\text{bote}}}L = \frac{(120\text{ kg} - 80\text{ kg})}{120\text{ kg} + 80\text{ kg} + 60\text{ kg}}(2{,}0\text{ m}) = \boxed{0{,}31\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La masa de Dave es mayor que la de Pete; por tanto, cuando permutan sus posiciones el centro de masas se desplaza hacia la popa. El centro de masas del bote tenía que moverse en dirección opuesta a fin de que el centro de masas del sistema Dave-Pete-bote permaneciera estático. El resultado del paso 4 es el desplazamiento del bote. Es positivo, como cabía esperar.

Ejemplo 5.18 Deslizamiento de un bloque

Una cuña de masa m_2 se encuentra en reposo sobre una balanza como indica la figura 5.53. Un bloque pequeño de masa m_1 se desliza por el plano inclinado sin rozamiento de la cuña. Determinar la lectura de la balanza mientras el bloque se desliza.

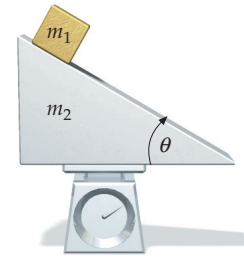


FIGURA 5.53

PLANTEAMIENTO La cuña y el bloque constituyen nuestro sistema. Como el bloque acelera hacia abajo por la cuña, el centro de masas posee componentes de aceleración hacia la derecha y hacia abajo. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son los pesos del bloque y la cuña, la fuerza de rozamiento estático f_e de la balanza sobre la cuña y la fuerza normal F_n ejercida hacia arriba por la balanza. La lectura de la balanza es igual al módulo de F_n.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el sistema balanza-bloques (figura 5.54):

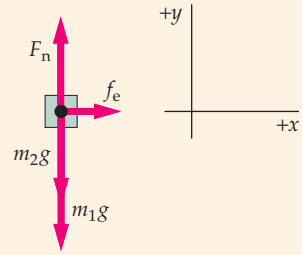


FIGURA 5.54

2. Expresar la componente vertical de la segunda ley de Newton para el sistema y despejar F_n:

$$F_n - m_1g - m_2g = Ma_{\text{cm}y} = (m_1 + m_2)a_{\text{cm}y}$$

$$F_n = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)a_{\text{cm}y}$$

3. Usando la ecuación 5.21, expresar $a_{\text{cm},y}$ en función de la aceleración del bloque a_{1y}:

$$Ma_{\text{cm}y} = m_1a_{1y} + m_2a_{2y}$$

$$(m_1 + m_2)a_{\text{cm}y} = m_1a_{1y} + 0$$

$$a_{\text{cm}y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}a_{1y}$$

4. En el ejemplo 4.7, vimos que un bloque que se desliza hacia abajo por un plano inclinado estacionario posee la aceleración g sen θ. Determinar la componente y de esta aceleración usando trigonometría y utilizarla para determinar $a_{\text{cm},y}$:

por lo tanto, $a_{1y} = -a_1 \operatorname{sen}\theta$, donde $a_1 = g \operatorname{sen}\theta$

$$a_{1y} = -(g \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = -g \operatorname{sen}^2\theta$$

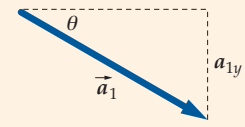


FIGURA 5.55

5. Sustituir $a_{1,y}$ por el valor obtenido en el paso 3:

$$a_{\text{cm}y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}a_{1y} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}g \operatorname{sen}^2\theta$$

6. Sustituir $a_{\text{cm},y}$ por el valor obtenido en el paso 2 y calcular F_n:

$$F_n = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)a_{\text{cm}y}$$

$$= (m_1 + m_2)g - m_1g \operatorname{sen}^2\theta = [m_1(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + m_2]g$$

$$= \boxed{(m_1 \cos^2\theta + m_2)g}$$

COMPROBACIÓN Para $\theta = 0$, cos $\theta = 1$, el resultado del paso 5 es, como era de esperar, igual a la suma de los pesos. Para $\theta = 90°$, cos $\theta = 0$, el resultado del paso 5 es, efectivamente, igual al peso de la cuña sola.

PROBLEMA PRÁCTICO 5.9 Determinar la fuerza F_x ejercida sobre la cuña por la balanza.

Temas de actualidad en Física

Reconstrucción de accidentes - Medidas y Fuerzas

Cuatro adolescentes conducían hacia una casa situada a las afueras de la ciudad, donde se celebraba Halloween. Cuando el coche empezaba a tomar una de las curvas, la conductora vio un ciervo en medio de la carretera y giró el volante bruscamente al tiempo que frenaba, lo que provocó que el coche derrapara. Deslizándose sobre la carretera llegó hasta la cuneta, salió de la carretera y cayó sobre un campo sembrado por el que continuó deslizándose hasta que se detuvo.

Un coche es remolcado tras un accidente. *(Mikael Karlsson.)*

Gracias a los airbags y a los cinturones de seguridad nadie murió, aunque todos pasaron por el hospital. El coche fue remolcado por la grúa. Sin embargo, la investigación del accidente no finalizó hasta saber si el coche iba con exceso de velocidad.

Los especialistas en reconstrucción de accidentes investigaron el escenario y utilizaron información sobre la física de los accidentes para determinar lo que sucedió antes, durante y después del accidente[1]. Después del accidente, un oficial de policía, un perito de la compañía aseguradora y otro perito contratado por el departamento de carreteras estuvieron observando el escenario del siniestro.

Lo primero que hicieron los especialistas fue fotografiar y tomar medidas de todo lo que estuviera relacionado con el accidente. Midieron la carretera, con el objeto de calcular el radio de la curva y el ángulo de peralte y compararlo con los datos del departamento de carreteras. Midieron las marcas que los neumáticos dejaron sobre la carretera y sobre el campo.[2] Utilizaron un trineo de arrastre para medir el coeficiente de rozamiento sobre el campo. Midieron las distancias verticales y horizontales desde el borde de la carretera hasta el comienzo de las marcas sobre el campo. Midieron el ángulo del pavimento con respecto a la horizontal y a lo largo de la dirección de las marcas de los neumáticos.

Utilizando toda esta información pudieron calcular una trayectoria simplificada del coche desde el momento en que salió de la carretera hasta caer sobre el campo. Conociendo esta trayectoria se pudo determinar la velocidad con que el coche salió de la carretera. Los cálculos obtenidos a partir de las marcas de derrape sobre el campo confirmaron ese resultado. Finalmente, calcularon la velocidad al inicio del derrape sobre la carretera. Para ello utilizaron el coeficiente de rozamiento cinético, pues estaba claro que las ruedas se bloquearon y no rodaron durante el derrape.

Concluyeron que el coche circulaba por debajo del límite de velocidad pero, como la mayoría de los coches, iba a una velocidad superior a la recomendada para ese trayecto.[3] El conductor fue multado por no mantener el control del vehículo.

No todos los accidentes son tan fáciles de reconstruir. En muchos de ellos, se ven involucrados otros vehículos o algún otro obstáculo. Algunos se producen por llevar neumáticos que no corresponden al tamaño del vehículo. En algunos accidentes hay que aplicar la física al interior del vehículo para averiguar si los cinturones de seguridad fueron utilizados o para comprobar quién conducía. Sin embargo, en la reconstrucción de todos ellos se empieza midiendo las fuerzas implicadas.

[1] Asociación internacional de especialistas en reconstrucción de accidentes. http://www.iaars.org/ March 2006.
[2] Marks, Christopher C. O'N., *Pavement Skid Resistance Measurement and Analysis in the Forensic Context*. International Conference on Surface Friction. 2005, Christchurch. http://www.surfacefriction.org.nz.
[3] Chowdhury, Mashrur A., Warren, Davey L., "Analysis of Advisory Speed Setting Criteria." *Public Roads*, 00333735, Dec. 91. Vol. 55, Issue 3.

Resumen

Las fuerzas de rozamiento y de arrastre son fenómenos complejos que se aproximan empíricamente mediante ecuaciones simples. La fuerza neta sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva se dirige hacia el centro de curvatura. El centro de masas de un sistema se mueve como si el sistema fuese una sola partícula puntual sobre la que actuara la fuerza neta.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Rozamiento	Dos objetos en contacto ejercen fuerzas de rozamiento entre sí. Estas fuerzas son paralelas a las superficies de los objetos en los puntos de contacto y su dirección es opuesta a la dirección del deslizamiento o tendencia a deslizar.
Rozamiento estático	$f_e \leq \mu_e F_n$ (5.2) donde F_n es la fuerza normal de contacto y μ_e el coeficiente de rozamiento estático.
Rozamiento cinético	$f_c = \mu_c F_n$ (5.3) donde μ_c es el coeficiente de rozamiento cinético. Este coeficiente es ligeramente menor que el de rozamiento estático.
Rozamiento por rodadura	$f_r = \mu_r F_n$ (5.4) donde μ_r es el coeficiente de rozamiento por rodadura.
2. Fuerzas de arrastre	Cuando un objeto se mueve a través de un fluido, experimenta una fuerza de arrastre que se opone al movimiento. Esta fuerza crece al aumentar la velocidad del objeto. Si el cuerpo se deja caer libremente desde el reposo, su velocidad crece hasta que la fuerza de arrastre iguala a la fuerza de gravedad, después de lo cual se mueve con una velocidad constante llamada velocidad límite. Esta velocidad límite depende de la forma del cuerpo y del medio a través del cual cae.
3. Movimiento a lo largo de una curva	Una partícula que se mueve a lo largo de una curva arbitraria puede considerarse que se mueve en un arco circular durante un pequeño intervalo de tiempo. Su vector aceleración instantánea tiene una componente $a_r = v^2/r$ hacia el centro de curvatura del arco y una componente $a_t = dv/dt$ que es tangencial a la curva. Si la partícula se mueve por una trayectoria circular de radio r a velocidad de módulo constante v y $a_t = 0$, entonces el módulo de la velocidad, el radio r y el periodo T están relacionados mediante la ecuación $2\pi r = vT$.
4. *Integración numérica: método de Euler	Para estimar la posición x y la velocidad v en un instante de tiempo t, se divide primero t en muchos intervalos de tiempo pequeños Δt. La aceleración inicial a_0 se calcula a partir de los valores de la posición inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0. La posición x_1 y la velocidad v_1 en un tiempo Δt posterior se estiman usando las relaciones $x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t$ (5.9) y $v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t$ (5.10) con $n = 0$. La aceleración a_{n+1} se calcula usando los valores de x_{n+1} y v_{n+1}, y así sucesivamente. Este proceso continúa hasta que se obtienen la posición y la velocidad para el tiempo t.
5. Centro de masas	
Centro de masas de un sistema de partículas	El centro de masas de un sistema de partículas se define como un punto cuyas coordenadas vienen dadas por: $Mx_{cm} = \sum_i m_i x_i$ (5.15) $My_{cm} = \sum_i m_i y_i$ (5.16) $Mz_{cm} = \sum_i m_i z_i$ (5.17)

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Centro de masas de cuerpos continuos	Si la masa está distribuida uniformemente, el centro de masas viene dado por: $M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\, dm$	5.19
Posición, velocidad y aceleración del centro de masas de un sistema de partículas	$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots$	5.18
	$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots$	5.20
	$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots$	5.21
Segunda ley de Newton para un sistema de partículas	$\vec{F}_{\text{neta ext}} = \sum_i \vec{F}_{i\,\text{ext}} = M\vec{a}_{cm}$	5.23

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

5.1 Sí. El coche se deslizaría hacia abajo.

5.2 Acelera hacia la derecha, ya que la fuerza externa resultante que actúa sobre el cilindro es la de rozamiento hacia la derecha que ejerce el papel. Inténtelo hacer. Aparentemente, el cilindro acelera hacia la izquierda, ya que le vemos rodar hacia atrás sobre el papel. Sin embargo, en relación a la mesa, que sirve de sistema de referencia inercial, se mueve hacia la derecha. Si se hace una marca en la mesa que señale la posición original del cilindro, se observa que el centro de masas se mueve hacia la derecha *mientras el cilindro siga en contacto con el papel*.

Respuestas a los problemas prácticos

5.1 35°

5.2 $1{,}1 \times 10^2$ N

5.3 $T = m_2(g - a) = 44$ N

5.4 (*a*) Suponiendo $r \approx 1$ m, encontramos $v_{t,\,\text{min}} \approx 3$ m/s (*b*) $T = 2\pi r/v \approx 2$ s

5.5 Cero. En ese momento el ritmo de ganancia o pérdida del módulo de la velocidad es cero. El cambio del módulo de la velocidad es instantáneamente cero.

5.6 $1{,}60\ \text{m/s}^2$

5.7 $x_{cm} = 2{,}0$ cm

5.8 $2R = 1{,}1 \times 10^2$ m

5.9 $F_x = m_1 g \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • En el suelo de un camión que se mueve a lo largo de una carretera horizontal hay varios objetos. Si el camión acelera, ¿qué fuerza actúa sobre los objetos para que éstos se aceleren? Explique por qué algunos objetos pueden mantenerse quietos sobre el suelo mientras que otros se deslizan sobre él. SSM

2 • Considere bloques hechos del mismo material, pero de diferentes tamaños, que descansan sobre el suelo de un camión que se mueve a lo largo de una carretera horizontal. Todo objeto situado sobre el suelo de un camión se desliza si la aceleración de éste es grande. ¿Qué relación hay entre la aceleración crítica del camión para que un objeto ligero comience a deslizarse y la que corresponde a un objeto mucho más pesado?

3 • Un bloque de masa m descansa sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es (*a*) $\mu_e \geq g$, (*b*) $\mu_e = \operatorname{tg}\theta$, (*c*) $\mu_e \leq \operatorname{tg}\theta$, (*d*) $\mu_e \geq \operatorname{tg}\theta$.

4 • Un bloque de masa m se encuentra en reposo sobre un plano inclinado 30° con la horizontal, tal como indica la figura 5.56. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a la fuerza de rozamiento estático es necesariamente cierta? (*a*) $f_e > mg$, (*b*) $f_e > mg\cos 30°$, (*c*) $f_e = mg\cos 30°$, (*d*) $f_e = mg\operatorname{sen}30°$, (*e*) ninguna es cierta.

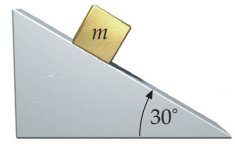


FIGURA 5.56
Problema 4

5 •• En un día helado de invierno, el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos de un coche y la superficie de una carretera puede reducirse a una cuarta parte de su valor en un día seco. Como resultado, la velocidad máxima a la cual puede tomarse una curva de radio R es (*a*) la misma que en un día seco, (*b*) reducida a un 71% de su valor en un día seco, (*c*) reducida al 50% de su valor en un día seco, (*d*) reducida al 25% de su valor en un día seco, (*e*) reducida a un valor desconocido que depende de la masa del coche.

6 •• Un bloque es capaz de mantenerse en un movimiento circular uniforme sobre el interior de un cono cuya superficie está perfectamente pulida (figura 5.57). Dibujar el diagrama de fuerzas sobre el bloque e identificar claramente qué fuerzas (o componentes de fuerzas) son las responsables de la aceleración centrípeta del bloque.

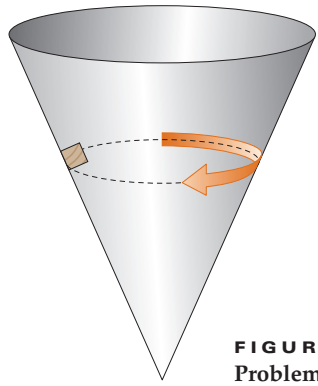


FIGURA 5.57
Problema 6

7 •• Este es un experimento muy interesante que se puede realizar en casa: se coge un bloque de madera y se pone en el suelo o sobre alguna superficie plana. Se ata el bloque a un muelle y se tira de él con un movimiento suave y constante en la dirección horizontal, de modo que, a partir de un momento, el bloque empieza a moverse, pero no de forma continua, sino que se mueve, se para, se mueve, se para, etc. Explicar por qué el bloque se mueve de esta forma.

8 • Desde un sistema de referencia inercial se observa un cuerpo que se mueve en círculo. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones, si hay alguna, son ciertas? (*a*) Una fuerza neta actúa sobre el cuerpo. (*b*) El cuerpo no puede tener una fuerza radial neta hacia afuera que actúe sobre él. (*c*) Al menos una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe apuntar hacia el centro del círculo.

9 •• Una partícula se mueve en un círculo vertical con una velocidad cuyo módulo es constante. ¿Cuál de las siguientes magnitudes permanece constante? (*a*) La velocidad. (*b*) La aceleración. (*c*) La fuerza neta. (*d*) El peso aparente.

10 •• Coloque un pequeño trozo de hierro en una mesa y mantenga por encima suyo a una distancia de 1 cm un imán de cocina. El imán no atrae suficientemente a la pieza y ésta no se mueve. Repita el experimento, pero manteniendo el imán y la pieza separados 1 cm en la mano y déjelos caer al suelo. Antes de llegar al suelo, el imán y la pieza de hierro se unen debido a la fuerza magnética que ejerce el imán sobre la pieza de hierro. (*a*) Dibuje los diagramas de fuerzas que ilustren toda las fuerzas que actúan sobre el imán y sobre la pieza de hierro en cada caso. (*b*) Explique por qué el imán y la pieza de hierro se unen durante la caída por el aire, mientras que no se unen cuando están encima de la mesa.

11 ••• Boris Korsunsky, en su artículo "Brainwisters for Physics Students" (*The Physics Teacher*, 33, 550 (1995)) plantea una cuestión que supone un interesante rompecabezas: Dos bloques idénticos se atan a una cuerda sin masa que pasa por una polea tal como se muestra en la figura 5.58. Inicialmente, la cuerda está colocada de tal forma que su punto medio está en la polea y además el plano no ejerce rozamiento. Los dos bloques en reposo se colocan inicialmente, tal como muestra la figura, con la cuerda tensa y horizontal. Si se suelta el bloque 2, ¿chocará antes el bloque 1 con la polea que el bloque 2 con la pared? (Suponga que la distancia inicial del bloque 1 a la polea es la misma que la distancia del bloque 2 a la pared.) Hay una solución que es muy sencilla. SSM

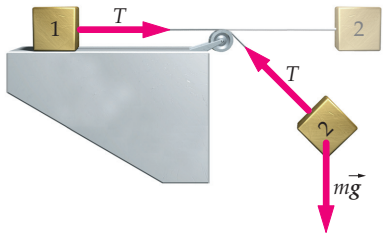


FIGURA 5.58 **Problema 11**

12 •• En clase, la mayoría de los profesores hacen el siguiente experimento de caída libre cuando explican las condiciones bajo las cuales el arrastre del aire se puede despreciar. Primero, se deja caer un trozo de papel y una bolita de plomo y se observa que la aceleración del papel es claramente inferior a la del plomo. Luego, se arruga el papel hasta darle forma de bola y se repite el experimento. En una distancia de un metro o dos, se observa como la aceleración del papel es ahora mayor que antes y más parecida a la de la bolita de plomo. Dar una explicación de este hecho.

13 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Jim está decidido a establecer un nuevo récord de la velocidad terminal en paracaidismo. Utilizando sus conocimientos de física planea lo siguiente. Se dejará caer de la altura más alta posible (equipándose con oxígeno) en un día cálido y adoptará la posición de cuchillo, es decir, pondrá el cuerpo estirado, vertical y con los brazos estirados hacia delante. Se equipará con un casco y ropa protectora. Explique cómo estos factores pueden ayudar a Jim a conseguir el récord. SSM

14 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Si está sentado en el asiento de un coche que circula a gran velocidad por una curva de un circuito, siente una fuerza que tiende a echarle del asiento hacia fuera. ¿Cuál es la dirección real de la fuerza que actúa sobre usted y de dónde proviene esa fuerza? (Suponga que usted está bien atado al asiento y que, por lo tanto, no resbala por él.) Explique la *sensación* de una fuerza hacia afuera sobre usted bajo la perspectiva newtoniana.

15 • La masa de la Luna es, aproximadamente, el 1% de la masa de la Tierra. La fuerza que mantiene a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra (*a*) es muy inferior a la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (*b*) es mucho mayor que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (*c*) es la misma que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre la Luna, (*d*) no puedo responder; no hemos estudiado todavía la ley de Newton de la gravitación. SSM

16 •• Un bloque se desliza sobre una superficie sin rozamiento a lo largo de un rizo como indica la figura 5.59*a*. El bloque se mueve con la velocidad necesaria para que en ningún momento pierda el contacto con la pista. Asignar los puntos A, B, C y D a sus correspondientes diagramas de fuerza (figura 5.59*b*).

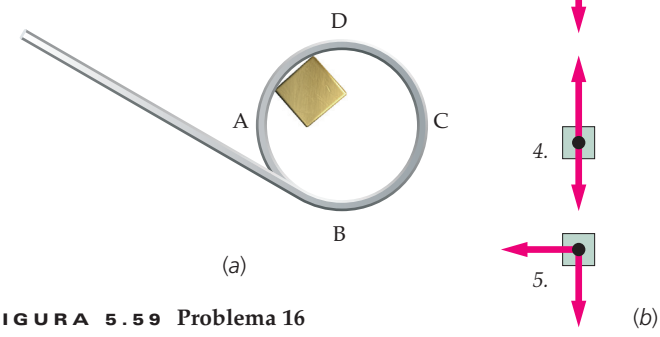


FIGURA 5.59 **Problema 16**

17 •• (*a*) Una piedra y una pluma están a la misma altura sobre el suelo y, al unísono, se las deja caer. Durante los primeros milisegundos, la fuerza de rozamiento sobre la piedra es inferior a la fuerza de rozamiento sobre la pluma, pero luego, durante la caída sucede lo contrario. Explíquelo. (*b*) A la luz de este resultado, explique cómo la aceleración de la piedra puede ser apreciablemente más grande que la de la pluma. Ayuda: dibujar el diagrama de fuerzas sobre cada objeto. SSM

18 •• Dos discos de masas m_1 y m_2 descansan sobre una mesa perfectamente pulida y están conectados por un muelle sin masa cuya constante de fuerza es k. Se aplica una fuerza horizontal F_1 sobre m_1 dirigida en dirección opuesta a m_2. ¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas del sistema de dos discos? (*a*) F_1/m_1, (*b*) $F_1/(m_1+m_2)$, (*c*) $(F_1+kx)/(m_1+m_2)$, donde x es la longitud que se estira el muelle, (*d*) $(m_1+m_2)F_1/m_1m_2$.

19 •• Los dos discos del problema 18 descansan sobre la mesa perfectamente pulida pero ahora sin el muelle. Se aplica una fuerza horizontal F_1 sobre m_1 dirigida en dirección opuesta a m_2 ¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas del sistema de los dos discos comparado con el de la aceleración de la masa m_1? Razónese la respuesta.

20 •• Si sólo las fuerzas externas son capaces de que un sistema de partículas se acelere, ¿cómo puede un coche acelerarse horizontalmente? Normalmente pensamos que el motor es quien suministra la fuerza que acelera el coche, pero ¿es eso cierto? ¿De dónde proceden las fuerzas que aceleran el coche?

21 •• Cuando se pisa el pedal del freno para parar un coche, las pastillas del freno presionan sobre el disco del freno de forma que el rozamiento de las pastillas reduce la velocidad de rotación de las ruedas. Sin embargo, el rozamiento de las pastillas sobre el disco *no puede ser* la fuerza que detenga el coche, pues ambas son partes internas del coche de forma que las fuerzas que existan entre ellas son internas y no afectan a su movimiento como un todo. ¿Cuál es la fuerza que detiene el coche? Dé una explicación detallada.

22 •• Dar un ejemplo de (*a*) un cuerpo tridimensional que no tiene materia en su centro de masas, (*b*) un cuerpo sólido cuyo centro de masas esté fuera de él, (*c*) una esfera sólida cuyo centro de masas no coincida con su centro geométrico, (*d*) un palo de madera cuyo centro de masas no esté en el punto medio.

23 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Cuando una persona está de pie su centro de masas se localiza en el interior de su propio volumen. Sin embargo, cuando alguien se agacha para recoger algo del suelo la localización del centro de masas cambia. ¿Dónde se localiza aproximadamente cuando la persona se inclina formando un ángulo recto? SSM

24 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La expedición del *Apolo* (a finales de los 60 principios de los 70), en su tercer día de viaje a la Luna, separó el vehículo lunar del tercer módulo del cohete mediante una explosión provocada cuando el cohete todavía estaba cerca de la Tierra. Durante la explosión ¿cómo cambió la velocidad de cada una de las piezas? ¿Cómo cambió la velocidad del centro de masas?

25 •• Se lanza un *boomerang* y durante un momento vuela horizontalmente en línea recta a velocidad constante mientras rota rápidamente. Dibuje una serie de imágenes, vistas desde arriba, de diferente posiciones rotacionales del *boomerang* conforme se mueve paralelamente a la superficie terrestre. Sobre cada imagen indique el centro de masas del *boomerang* y una los puntos para trazar la trayectoria del centro de masas. ¿Cuál es la aceleración del centro de masas?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

26 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Hay un método muy simple que se utiliza habitualmente para determinar la resistencia aerodinámica de los coches. Cuando un coche, en una pista larga y plana, alcanza una determinada velocidad (por ejemplo de unos 96 km/h), se pone el cambio en punto muerto y se espera que el coche se pare. Se mide el tiempo que tarda el coche en disminuir la velocidad a intervalos de 8 km/h y se usa para determinar la fuerza neta que frena el coche. (*a*) Haciendo pruebas con un Toyota Tercel de 1020 kg de masa se observa que pasa de 96 km/h a 88 km/h en 3,92 s. ¿Cuál es la fuerza media que frena al coche? (*b*) Si el coeficiente de rozamiento de rodadura del coche es 0,02, ¿cuál es la fuerza de rozamiento de rodadura que actúa frenando al coche? Si suponemos que las únicas dos fuerzas que actúan sobre el coche son el rozamiento por rodadura y la resistencia aerodinámica, ¿cuál es la fuerza de resistencia aerodinámica promedio sobre el vehículo? (*c*) La fuerza de resistencia tiene la forma $(1/2)CA\rho v^2$, donde A es el área transversal del coche frente al viento, ρ es la densidad del aire y C es una constante adimensional de orden 1. Si el área transversal del coche es 1,91 m^2, determinar C a partir de los datos disponibles. (La densidad del aire es 1,21 kg/m^3; úsese en el cálculo que la velocidad del coche es 88 km/h.)

27 •• Usando el análisis dimensional, determinar las unidades y las dimensiones de la constante b en la fuerza de resistencia bv^n (*a*) si $n = 1$ y (*b*) si $n = 2$. (*c*) Newton mostró que la resistencia del aire de un objeto de área circular que cae es $\frac{1}{2}\rho\pi r^2v^2$, aproximadamente, donde la densidad del aire es $\rho = 1{,}2$ kg/m^3. Demostrar que este resultado es consistente con el análisis dimensional del apartado (*b*). (*d*) Hallar la velocidad límite de un paracaidista de 56 kg en caída libre suponiendo que su área transversal es un disco circular de 0,30 m de radio y que la densidad del aire cerca de la superficie terrestre es 1,2 kg/m^3. (*e*) La densidad de la atmósfera disminuye con la altura: a 8 km de altura la densidad es de sólo 0,514 kg/m^3. ¿Cuál sería la velocidad límite del paracaidista en caída libre a esta altura? SSM

28 •• Estimar la velocidad límite de una gota de lluvia y de una bola de granizo del tamaño de una pelota de golf. *Ayuda: ver problemas 26 y 27.*

29 •• Estimar el coeficiente de rozamiento estático mínimo necesario entre los neumáticos y el pavimento para completar un giro hacia la izquierda en una intersección de calles de una ciudad, sabiendo que el límite de velocidad es de 40 km/h.

30 •• Estimar la distancia de la máxima zancada que se puede dar cuando se camina sobre hielo. Es decir, estudiar las condiciones bajo las cuales el pie, cuando se da un paso largo, se desliza sobre el suelo. El coeficiente de rozamiento estático sobre el hielo es de 0,25.

ROZAMIENTO

31 • Un bloque de masa m se desliza a velocidad constante hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Se verifica que (*a*) $\mu_c = mg \operatorname{sen}\theta$, (*b*) $\mu_c = \operatorname{tg}\theta$, (*c*) $\mu_c = 1 - \cos\theta$, (*d*) $\mu_c = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$. SSM

32 • Un bloque de madera se arrastra mediante una cuerda horizontal sobre una superficie horizontal a velocidad constante con una fuerza de 20 N. El coeficiente de rozamiento cinético entre las superficies es 0,3. La fuerza de rozamiento es (*a*) imposible de determinar sin conocer la masa del bloque, (*b*) imposible de determinar sin conocer la velocidad del bloque, (*c*) 0,3 N, (*d*) 6 N, (*e*) 20 N.

33 • Un bloque de 20 N de peso descansa sobre una superficie horizontal. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre la super-

ficie y el bloque son, respectivamente, $\mu_e = 0{,}8$ y $\mu_c = 0{,}6$. Una cuerda horizontal está atada al bloque con una tensión constante T. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque si (*a*) $T = 15$ N, o (*b*) $T = 20$ N? SSM

34 • Un bloque de masa m se arrastra a velocidad constante sobre una superficie horizontal mediante una cuerda como se indica en la figura 5.60. La magnitud de la fuerza de rozamiento es (*a*) $\mu_e\, mg$, (*b*) $T \cos\theta$, (*c*) $\mu_e\,(T - mg)$, (*d*) $\mu_e\, T \operatorname{sen}\theta$, (*e*) $\mu_e\,(mg - T \operatorname{sen}\theta)$.

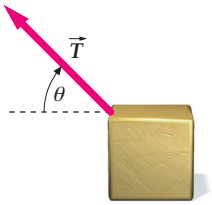


FIGURA 5.60
Problema 34

35 • Un obrero empuja con una fuerza horizontal de 500 N un cajón de 100 kg situado sobre una alfombra gruesa. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético son, respectivamente, 0,6 y 0,4. Determinar la fuerza de rozamiento que ejerce la alfombra sobre el cajón. SSM

36 • Una caja que pesa 600 N es empujada a lo largo de un suelo horizontal con velocidad constante mediante una fuerza de 250 N paralela al suelo. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el suelo?

37 • El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos de un coche y la carretera es $\mu_e = 0{,}6$. Despreciar la resistencia con el aire y el rozamiento por rodadura. Si la fuerza resultante que actúa sobre el coche es la fuerza de rozamiento estático ejercida por la carretera, (*a*) ¿cuál es la aceleración máxima que puede adquirir el coche cuando se frena? (*b*) ¿Cuál es la mínima distancia a la que se detendrá el coche si inicialmente llevaba una velocidad de 30 m/s? SSM

38 • La fuerza que acelera un coche a lo largo de una carretera horizontal es la fuerza de rozamiento entre la carretera y los neumáticos. (*a*) Explicar por qué la aceleración es mayor cuando las ruedas no giran. (*b*) Si un coche acelera de 0 a 90 km/h en 12 s con aceleración constante, ¿cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento entre las ruedas y la carretera? Suponer que la mitad del peso del coche lo soportan las ruedas tractoras.

39 •• Un bloque de 5 kg se mantiene en reposo contra una pared vertical mediante una fuerza horizontal de 100 N. (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por la pared sobre el bloque? (*b*) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima necesaria para evitar que el bloque caiga si el coeficiente de rozamiento entre la pared y el bloque es $\mu_e = 0{,}40$?

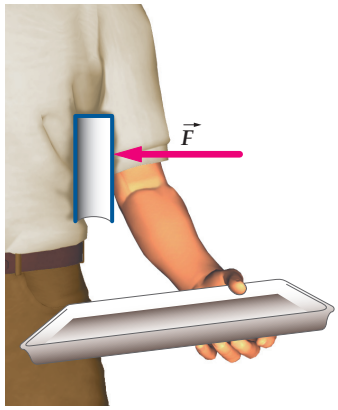


FIGURA 5.61
Problema 40

40 •• Un estudiante cansado y sobrecargado intenta mantener su libro de física bajo el brazo tal como muestra la figura 5.61. El libro tiene una masa de 3,2 kg, el coeficiente de rozamiento estático entre el libro y el brazo del muchacho es 0,320 y el coeficiente de rozamiento entre el libro y el jersey del estudiante es 0,160. (*a*) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima que ha de ejercer el brazo del muchacho para que el libro no caiga? (*b*) Si realiza sólo una fuerza de 61 N, ¿cuál es la aceleración del libro mientras se desliza bajo el brazo del estudiante? El coeficiente de rozamiento cinético del brazo con el libro es 0,200, mientras que el del jersey con el libro es 0,090.

41 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un día de nieve y con la temperatura próxima al punto de congelación, el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y una carretera con hielo es de 0,08. (*a*) ¿Cuál es la máxima inclinación que un vehículo con tracción a las cuatro ruedas puede vencer ascendiendo a velocidad constante? (*b*) ¿Cuál es el ángulo de inclinación máximo que puede tener la carretera para que el vehículo pueda descender a velocidad constante?

42 •• Una caja de 50 kg debe arrastrarse sobre un suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el suelo es 0,6. Un método de arrastre sería empujar la caja con una fuerza que formase un ángulo θ hacia abajo con la horizontal. Otro método sería tirar de la caja con una fuerza que formase un ángulo θ hacia arriba con la horizontal. (*a*) Explicar por qué un método requiere menos fuerza que otro. (*b*) Calcular la fuerza necesaria para mover la caja en cada uno de los métodos si $\theta = 30°$ y comparar la respuesta con los resultados que se obtendrían si el ángulo fuera $\theta = 0°$.

43 •• Un bloque de masa $m_1 = 250$ g se encuentra en reposo sobre un plano que forma un ángulo $\theta = 30°$ sobre la horizontal (figura 5.62). El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es $\mu_c = 0{,}100$. Este bloque está unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 200$ g que cuelga libremente de una cuerda que pasa por una polea sin rozamiento y con masa despreciable. Cuando el segundo bloque ha caído 30 cm, su velocidad es (*a*) 84 cm/s, (*b*) 48 cm/s, (*c*) 160 cm/s, (*d*) 59 cm/s, (*e*) 72 cm/s. SSM

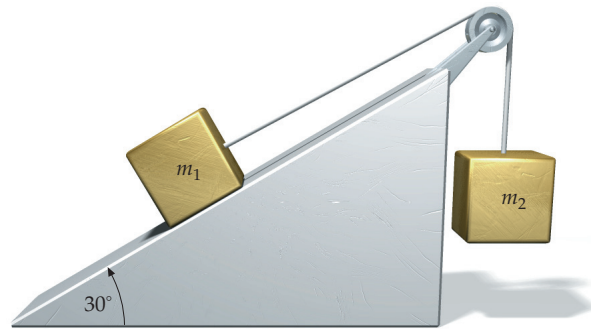


FIGURA 5.62 **Problemas 43, 44, 45**

44 •• Supongamos ahora que en la figura 5.62, $m_1 = 4$ kg. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano inclinado es 0,4. (*a*) Determinar el intervalo de valores posibles para m_2 de modo que el sistema se encuentre en equilibrio estático. (*b*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento sobre el bloque de 4 kg si $m_2 = 1$ kg?

45 •• Volviendo a la figura 5.62, supongamos que $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 5$ kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano inclinado y el bloque de 4 kg es $\mu_c = 0{,}24$. Determinar la aceleración de las masas y la tensión de la cuerda.

46 •• Una tortuga de 12 kg está sobre el suelo de un camión del parque zoológico que circula a 80 km/h. El conductor frena durante 12 segundos hasta que detiene el camión. Suponiendo que la aceleración es

constante, ¿cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático entre la tortuga y el suelo para que ésta no resbale?

47 •• Un bloque de 150 g asciende sobre una rampa con una velocidad inicial de 7 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético entre la rampa y el bloque es 0,23. (*a*) Si la rampa está inclinada 25° sobre la horizontal, ¿qué distancia habrá recorrido sobre la rampa hasta pararse? (*b*) Después, el bloque vuelve a bajar. ¿Cuál debería ser el coeficiente de rozamiento mínimo para que no se deslizara hacia abajo? SSM

48 •• Un automóvil asciende por una carretera de pendiente 15° a una velocidad de 30 m/s. El coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y la carretera es 0,7. (*a*) ¿Qué distancia mínima recorrerá el coche antes de pararse? (*b*) ¿Qué distancia mínima recorrería si descendiera por la misma pendiente?

49 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de tracción trasera soporta un 40% de su peso sobre sus dos ruedas de tracción y posee un coeficiente de rozamiento estático de 0,7 con una carretera horizontal. (*a*) ¿Cuál es la aceleración máxima del vehículo? (*b*) ¿Cuál es el tiempo más corto posible para que este coche alcance una velocidad de 100 km/h? (Suponer que la potencia del motor es ilimitada.)

50 •• Un estudiante, A, afirma que él puede colocar un bloque de 2 kg sobre el lado exterior de una vagoneta, como indica la figura 5.63, y que el bloque no caerá al suelo, comprometiéndose a no utilizar ningún tipo de ganchos, cuerdas, grapas, imanes, pegamentos, adhesivos, etc. Cuando otro estudiante, B, acepta la apuesta, el primero empuja la vagoneta en la dirección indicada. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la vagoneta es 0,6. (*a*) Determinar la aceleración mínima para que A gane la apuesta. (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento en este caso? (*c*) Determinar la fuerza de rozamiento sobre el bloque si a es dos veces la aceleración mínima necesaria para que el bloque no caiga. (*d*) Demostrar que un bloque de cualquier masa no caerá si la aceleración es $a \geq g/\mu_e$, siendo μ_e el coeficiente de rozamiento estático.

FIGURA 5.63 Problema 50

51 •• Dos bloques atados por una cuerda se deslizan hacia abajo por una pendiente de 10° (figura 5.64). El bloque 2 tiene una masa de $m_2 = 0{,}25$ kg y un coeficiente de rozamiento cinético $\mu_c = 0{,}2$. Para el bloque superior, $m_1 = 0{,}8$ kg y $\mu_c = 0{,}3$. Determinar (*a*) el módulo y dirección de la aceleración de los bloques y (*b*) la tensión de la cuerda.

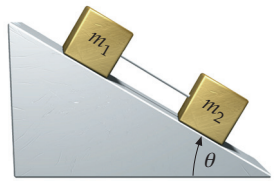


FIGURA 5.64 Problemas 51 y 52

52 •• Dos bloques de masas m_1 y m_2 se deslizan juntos hacia abajo, como se muestra en la figura 5.64. Los bloques están unidos por una cuerda de masa despreciable. Los coeficientes de rozamiento entre los bloques y la superficie son μ_1 y μ_2 para los bloques 1 y 2, respectivamente. (*a*) Determinar la aceleración de ambos bloques. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda sobre cada bloque. Mostrar que esas fuerzas valen 0 cuando $\mu_1 = \mu_2$ y dar una explicación no matemática a este hecho.

53 •• Un bloque de masa m descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático es 0,6. El bloque está sometido a la fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo θ con la horizontal mediante una cuerda de masa despreciable, como indica la figura 5.65. El valor mínimo de la fuerza necesaria para mover el bloque depende del ángulo θ. (*a*) Analizar cualitativamente en qué forma esta fuerza depende de θ. (*b*) Calcular la fuerza para los ángulos $\theta = 0°$, 10°, 20°, 30°, 40°, 50° y 60°, y hacer un gráfico de F en función de θ para $mg = 400$ N. Según este gráfico, ¿cuál es el ángulo más eficaz que debe formar la dirección de la fuerza para mover el bloque? SSM

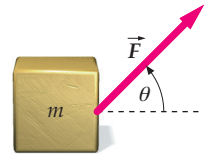


FIGURA 5.65 Problemas 53 y 54

54 •• Un bloque de masa m está sobre una superficie horizontal con un coeficiente estático de rozamiento con esa superficie μ_e (figura 5.65). Demostrar que, en general, (*a*) la fuerza mínima para mover el bloque hay que aplicarla tirando con un ángulo $\theta_{mín} = \text{arctg}\,\mu_e$, y (*b*) la fuerza mínima necesaria para que el bloque empiece a moverse es $F_{min} = (\mu_e/\sqrt{1+\mu_e^2})mg$. (*c*) Si el bloque ya se mueve, ¿qué hay que hacer para aplicar la mínima fuerza posible y que sea suficiente para mantener el movimiento?, ¿aumentar, disminuir o mantener el ángulo que forma la fuerza con la horizontal?

55 •• Responder a las mismas cuestiones que plantea el problema 54, pero suponer que la fuerza $\vec{F}$ está dirigida hacia abajo formando un ángulo θ con la horizontal.

56 •• Un cuerpo de 100 kg es empujada a lo largo de una superficie sin rozamiento por una fuerza $\vec{F}$ de tal modo que su aceleración es $a_1 = 6$ m/s² (véase figura 5.66). Un cuerpo de 20 kg se desliza por la parte superior del cuerpo de 100 kg con una aceleración $a_2 = 4$ m/s². (Por lo tanto, se desliza hacia atrás respecto al cuerpo de 100 kg.) (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por el cuerpo de 100 kg sobre el cuerpo de 20 kg? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de 100 kg? ¿Cuánto vale la fuerza F? (*c*) Una vez que el cuerpo de 20 kg se ha caído del cuerpo de 100 kg, ¿cuál es la aceleración que adquiere este último? (Suponer que la fuerza F no cambia.)

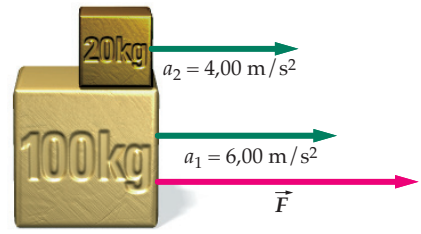


FIGURA 5.66 Problema 56

57 •• Un bloque de 60 kg se desliza por la parte superior de otro bloque de 100 kg con una aceleración de 3 m/s² por la acción de una fuerza horizontal F de 320 N, como indica la figura 5.67. El bloque de 100 kg se apoya sobre una superficie horizontal sin rozamiento, pero hay rozamiento entre los dos bloques. (*a*) Determinar el coeficiente de

FIGURA 5.67 Problema 57

rozamiento cinético entre los bloques. (*b*) Calcular la aceleración del bloque de 100 kg durante el tiempo en que el bloque de 60 kg mantiene el contacto.

58 •• El coeficiente de rozamiento estático entre un neumático de caucho y la superficie de la carretera es 0,85. ¿Cuál es la máxima aceleración de un camión de 1000 kg con tracción en las cuatro ruedas, si la carretera forma un ángulo de 12° con la horizontal y el camión está (*a*) subiendo y (*b*) descendiendo?

59 •• Un bloque de 2 kg está situado sobre otro de 4 kg, que a su vez se apoya sobre una mesa sin rozamiento (figura 5.68). Los coeficientes de rozamiento entre los dos bloques son $\mu_e = 0{,}3$ y $\mu_c = 0{,}2$. (*a*) ¿Cuál es la fuerza máxima F que puede aplicarse al bloque de 4 kg de tal modo que el bloque de 2 kg no se deslice? (*b*) Si F es la mitad de este valor máximo, determinar la aceleración de cada bloque y la fuerza de rozamiento que actúa sobre cada uno de ellos. (*c*) Si F es el doble de este valor determinado en (*a*), calcular la aceleración de cada bloque.

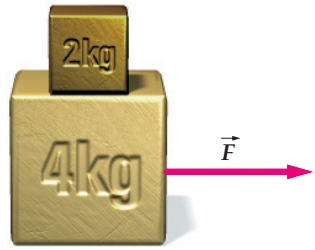


FIGURA 5.68 Problema 59

60 ••• Un bloque de 10 kg descansa sobre un soporte de 5 kg como se muestra en la figura 5.69. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque y el soporte son $\mu_e = 0{,}40$ y $\mu_c = 0{,}30$. El soporte se apoya sobre una superficie sin rozamiento. (*a*) ¿Cuál es la fuerza máxima F que puede aplicarse sin que el bloque de 10 kg se deslice sobre el soporte? (*b*) ¿Cuál es la aceleración correspondiente del soporte?

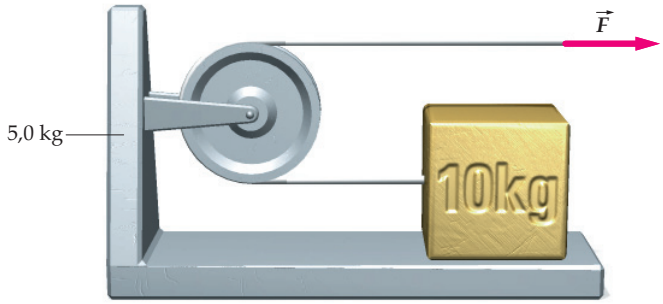


FIGURA 5.69 Problema 60

61 ••• En la feria del condado, usted y sus amigos empujan hacia arriba un cerdo de 75 kg sobre una plataforma inclinada, desde la parte más baja. El coeficiente de rozamiento entre el cerdo y la plataforma es 0,07. (*a*) Todos ustedes empujan a la vez, paralelamente a la plataforma y pretenden acelerar al cerdo desde el reposo hasta 5 m/s^2 a lo largo de una distancia de 1,5 m, el punto en que se suelta al cerdo. El cerdo continúa hasta que llega subiendo hasta que llega a la parte más alta de la plataforma, 45 cm más allá desde donde lo dejaron. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de la plataforma? (*b*) Desde la parte más alta, el cerdo da media vuelta y empieza a bajar resbalando. ¿Con qué velocidad llega a la parte más baja de la plataforma?

62 ••• Un bloque de 100 kg en un plano inclinado 18° está atado a otro de masa m con una cuerda, tal como se muestra en la figura 5.70. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético del bloque y del plano son respectivamente 0,4 y 0,2. (*a*) Determinar el intervalo de valores de m para el cual el bloque del plano inclinado no se moverá a menos que sea perturbado por un golpe, en cuyo caso *bajará* por la pendiente. (*b*) Determinar el intervalo de valores de m para el cual el bloque no se moverá a menos que sea golpeado, en cuyo caso subirá por la pendiente.

FIGURA 5.70 Problema 62

63 ••• Un bloque de 0,5 kg de masa descansa sobre la superficie inclinada de una cuña de 2 kg como la que se muestra en la figura 5.71. Se ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre la cuña de modo que ésta resbala sobre una superficie sin rozamiento. (*a*) Si el coeficiente de rozamiento estático entre la cuña y el bloque es $\mu_e = 0{,}8$ y el ángulo de la superficie inclinada es 35°, determinar los valores máximo y mínimo de F para los cuales el bloque no resbala. (*b*) Repetir el apartado (*a*) con $\mu_e = 0{,}4$.

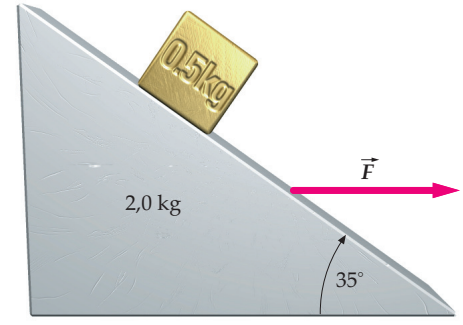


FIGURA 5.71 Problema 63

64 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Se empuja por un suelo de madera con una fuerza horizontal constante de 70 N un bloque también de madera de 10 kg de masa, inicialmente parado. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento cinético varía con la velocidad según $\mu_c = 0{,}11/(1 + 2{,}3 \times 10^{-4} v^2)^2$. Diseñe un programa de hoja de cálculo usando el método de Euler que calcule y represente gráficamente la velocidad del bloque y su desplazamiento en función del tiempo para t comprendido entre 0 y 10 s. Compare el resultado con el que hubiera obtenido para un coeficiente de rozamiento cinético independiente de v igual a 0,11.

65 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Para determinar el coeficiente de rozamiento cinético de un bloque de madera sobre la superficie de una mesa horizontal, se reciben las instrucciones siguientes: tomar el bloque y empujarlo por la superficie; mediante un reloj, medir el tiempo que le cuesta pararse (Δt) y la distancia que recorre antes de pararse (Δx). (*a*) Utilizando las leyes de Newton y el diagrama de fuerzas del bloque, demostrar que $\mu_c = 2\Delta x/[(\Delta t)^2 g]$. (*b*) Si el bloque resbala 1,37 m durante 0,97 s antes de pararse, calcular μ_c. (*b*) ¿Cuál es la velocidad inicial del bloque?

66 •• **HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Un bloque se desliza sobre un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es μ_c. Mostrar que un gráfico de $a_x/\cos\theta$ frente tg θ (donde a_x es la aceleración de descenso sobre el plano y θ el ángulo de inclinación del plano) sería una línea recta con pendiente g y ordenada en el origen $-\mu_c g$. (*b*) Los datos siguientes corresponden a la aceleración de un bloque que baja por un plano inclinado en función del ángulo de inclinación:*

θ (grados)	Aceleración (m/s^2)
25,0	1,69
27,0	2,10
29,0	2,41
31,0	2,89
33,0	3,18
35,0	3,49
37,0	3,78
39,0	4,15
41,0	4,33
43,0	4,72
45,0	5,11

Usando un programa de una **hoja de cálculo**, representar gráficamente estos datos y ajustar una línea recta de modo que se pueda determinar μ_c y g. ¿Cuál es el porcentaje de error en g si se compara con el valor comúnmente aceptado de 9,81 m/s^2?

FUERZAS DE ARRASTRE

67 • Una pelota de ping-pong posee una masa de 2,3 g y una velocidad límite de 9 m/s. La fuerza de arrastre es del tipo bv^2. ¿Cuál es el valor de b? SSM

68 • Una pequeña partícula contaminante cae hacia la Tierra a través del aire en reposo con una velocidad límite de 0,3 mm/s. La partícula posee una masa de $10^{-10}g$ y la fuerza de arrastre es de la forma bv. ¿Cuál es el valor de b?

69 •• Una demostración típica de aula consiste en dejar caer un filtro de café con forma de cesta y medir el tiempo necesario para que recorra una cierta distancia. Un profesor deja caer uno de ellos desde una altura h sobre el suelo y mide el tiempo Δt que tarda en caer. ¿Cuánto recorrerán un paquete de n filtros idénticos durante el mismo intervalo? Considerar que los filtros son tan ligeros que alcanzan instantáneamente la velocidad terminal. Suponer que la fuerza de arrastre varía con el cuadrado de la velocidad y suponer que los filtros se dejan caer con el asa hacia arriba. SSM

70 •• Una paracaidista de 60 kg de masa puede frenarse a sí misma hasta 90 km/h orientando su cuerpo horizontalmente, mirando hacia abajo con los brazos y las piernas extendidas. En esta posición, ella presenta la máxima área de la sección transversal, maximizando así la fuerza de arrastre que actúa sobre ella. (*a*) ¿Cuánto vale el módulo de la fuerza de arrastre que actúa sobre ella? (*b*) Si la fuerza de arrastre es bv^2, ¿cuánto vale b? (*c*) En un momento dado adopta la forma de "cuchillo", orientando su cuerpo verticalmente con sus brazos hacia abajo. Suponga que esto reduce en un 55% el valor de b de los apartados (*a*) y (*b*). ¿Cuál es el valor de la aceleración cuando adopta la forma de "cuchillo"?

71 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un automóvil de 800 kg desciende por una larga pendiente del 6% (esto significa que el cambio de la altura es el 6 % de la distancia horizontal recorrida). La fuerza de arrastre que se opone al movimiento del coche tiene la forma $F_a = 100\text{ N} + (1{,}2\text{ N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^2)v^2$. Despreciar el rozamiento de rodadura. ¿Cuál es la velocidad límite del automóvil al descender por esta pendiente?

72 ••• **APROXIMACIÓN** Las partículas pequeñas esféricas experimentan una fuerza de resistencia viscosa dada por la ley de Stokes, $F_d = 6\pi\eta r v$, donde r es el radio de la partícula, v su velocidad y η es el coeficiente de viscosidad del medio fluido donde caen las esferitas. (*a*) Estimar la velocidad límite de una partícula contaminante esférica de radio 10^{-5} m y densidad 2000 kg/m^3. (*b*) Suponiendo que el aire está en reposo y que $\eta = 1{,}8\times10^{-5}\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$, estimar el tiempo que esta partícula tarda en caer por una chimenea de 100 m de altura.

73 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una muestra de aire que contiene partículas contaminantes, del tamaño y densidad especificados en el problema 72, se toma en un tubo de ensayo de 8,0 cm de longitud. Este tubo se coloca en una centrifugadora, de modo que el punto medio del tubo de ensayo se encuentra a 12 cm del centro de la centrifugadora, la cual gira a razón de 800 revoluciones por minuto. (*a*) Estimar el tiempo necesario para que prácticamente todas las partículas contaminantes se sedimenten en el fondo del tubo de ensayo. (*b*) Comparar este tiempo con el necesario para que una partícula contaminante caiga 8,0 cm bajo la acción de la gravedad, sometida a la fuerza de arrastre viscosa del aire. SSM

MOVIMIENTO A LO LARGO DE UNA TRAYECTORIA CURVA

74 • Una barra rígida con una pelota de 0,05 kg en uno de sus extremos rota alrededor del otro extremo de tal forma que la pelota viaja con una velocidad cuyo módulo es constante describiendo un círculo vertical de 0,2 m de radio. ¿Cuál es el módulo de la velocidad máxima que puede tener la pelota de forma que la fuerza de la barra sobre la pelota no supere los 10 N?

75 • Una piedra de masa 95 g se hace girar en un círculo horizontal en el extremo de una cuerda de 85 cm de longitud. El tiempo necesario para que la piedra dé una revolución completa es 1,22 s. Determinar el ángulo que forma la cuerda con la horizontal. SSM

76 •• Una piedra de 0,20 kg atada a una cuerda de 0,8 m de longitud gira en el plano horizontal. La cuerda forma un ángulo de 20° con la horizontal. Determinar el módulo de la velocidad de la piedra.

77 •• Una piedra de 0,75 kg atada a una cuerda gira en un círculo horizontal de 35 cm como en el péndulo cónico del ejemplo 5.11. La cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical. (*a*) Determinar el módulo de la velocidad de la piedra. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda.

78 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Un piloto de masa 50 kg sale de un rizo vertical según un arco circular tal que su aceleración hacia arriba es de 3,5g. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el piloto en la parte más

* Datos tomados de Dennis W. Phillips, "Science Friction Adventure–Part II," *The Physics Teacher,* 553 (1990).

baja del círculo? (*b*) Utilizar las leyes de Newton para explicar por qué el piloto sufriría un desmayo. Hay que tener en cuenta que en esta situación un gran volumen de sangre se concentraría en la parte inferior de su cuerpo. ¿Cómo describiría este fenómeno un observador que estuviese en un sistema de referencia inercial?

79 •• Un piloto de avión de masa 80 kg se lanza hacia abajo para describir un rizo siguiendo un arco de circunferencia cuyo radio es 300 m. En la parte inferior de la trayectoria, donde el módulo de su velocidad es de 180 km/h, (*a*) ¿cuáles son la dirección y el módulo de su aceleración? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre el piloto en la parte más baja del círculo? (*c*) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el asiento sobre el piloto?

80 •• Un pequeño objeto de masa m_1 se mueve con una velocidad cuyo módulo es v en una trayectoria circular de radio r sobre una masa horizontal sin rozamiento (figura 5.72). Está sujeta a una cuerda que pasa a través de un orificio (sin rozamiento) situado en el centro de la mesa. Una segunda masa m_2 está sujeta en el otro extremo de la cuerda. Deducir una expresión para r en función de m_1 y m_2 y el tiempo T de una revolución.

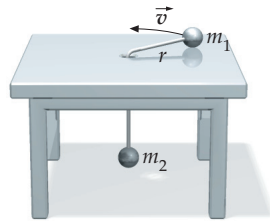


FIGURA 5.72 **Problema 80**

81 •• Un bloque de masa m_1 está sujeto a una cuerda de longitud L_1 fija por un extremo. El bloque se mueve en un círculo horizontal sobre una mesa sin rozamiento. Un segundo bloque de masa m_2 se une al primero mediante una cuerda de longitud L_2 y se mueve también en círculo, como indica la figura 5.73. Determinar la tensión en cada una de las cuerdas si el período del movimiento es T. SSM

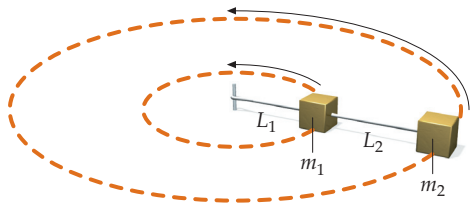


FIGURA 5.73 **Problema 81**

82 •• **MÚLTIPLES PASOS** Una partícula se mueve sobre una circunferencia de 4 cm de radio. Tarda 8 s en dar una vuelta completa. (*a*) Dibujar la trayectoria de la partícula a escala e indicar las posiciones a intervalos de 1 s. (*b*) Dibujar los vectores de desplazamiento correspondientes a estos intervalos de 1 s. Estos vectores también indican las direcciones de los vectores velocidad media durante los mismos intervalos. (*c*) Hallar gráficamente el módulo de la variación de la velocidad media $|\Delta\vec{v}|$ correspondiente a dos intervalos de 1 s consecutivos. Comparar $|\Delta\vec{v}|/\Delta t$, medida así, con la aceleración instantánea calculada a partir de $a_c = v^2/r$.

83 •• Un hombre hace oscilar circularmente a su hijo como indica la figura 5.74. Si la masa del niño es de 25 kg, el radio del círculo 0,75 m y el período de revolución de 1,5 s, (*a*) ¿cuál es el módulo y dirección de la fuerza que debe ejercer el hombre sobre el niño? (Suponer en los cálculos que el niño es una partícula puntual.) (*b*) ¿Cuál es el módulo y dirección de la fuerza que ejerce el niño sobre el hombre?

FIGURA 5.74 **Problema 83** *(David de Lossy/The Image Bank.)*

84 •• La cuerda de un péndulo cónico tiene 50 cm de longitud y la masa del cuerpo pendular es 0,25 kg. (*a*) Determinar el ángulo que forman la cuerda y la horizontal cuando la tensión de la cuerda es seis veces mayor que el peso del cuerpo pendular. (*b*) En estas condiciones, ¿cuál es el período del péndulo?

85 •• Una moneda de 100 g se coloca sobre una plataforma giratoria horizontal que gira a razón de una revolución por segundo. La moneda está situada a 10 cm del eje de rotación de la plataforma. (*a*) ¿Qué fuerza de rozamiento actúa sobre la moneda? (*b*) La moneda se desliza y sale despedida de la plataforma cuando se coloca a una distancia radial superior a 16 cm del eje de rotación. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

86 •• Una bola de masa 0,25 kg está sujeta a una barra vertical por una cuerda de 1,2 m de longitud. Suponer que la cuerda está sujeta al centro de la bola. Si la bola se mueve en círculo horizontal con la cuerda formando un ángulo de 20° con la vertical, calcular (*a*) la tensión de la cuerda, (*b*) el módulo de la velocidad de la bola.

87 ••• Una pequeña cuenta de collar con una masa de 100 g se desliza a lo largo de un alambre semicircular de radio 10 cm que gira alrededor de un eje vertical a razón de 2 vueltas por segundo, como se indica en la figura 5.75. Determinar los valores de θ para los cuales la cuenta permanece estacionaria respecto al alambre giratorio.

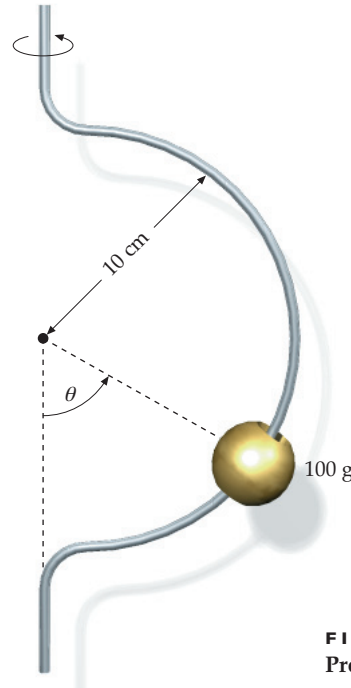


FIGURA 5.75
Problema 87

FUERZA CENTRÍPETA

88 • Un coche acelera a lo largo de la curva de la vía de salida de una autopista. El radio de la curva es de 80 m. Un pasajero de 70 kg se sujeta al reposabrazos de la puerta del coche con una fuerza de 220 N para no deslizarse en su asiento. (Se supone que la vía de salida no tiene peralte y se desprecia el rozamiento sobre el asiento.) ¿Cuál es el módulo de la velocidad del coche?

89 • El radio de curvatura del rizo vertical de una montaña rusa es de 12,0 m. En lo alto del rizo, la fuerza que el asiento ejerce sobre un pasajero de masa m es $0{,}4mg$. Determinar el módulo de la velocidad de la vagoneta en ese punto. SSM

90 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un aeropuerto fuera de servicio un coche de 2000 kg huye a una velocidad cuyo módulo es constante de 100 km/h. A esa velocidad la fuerza de arrastre del aire es de 500 N. Suponer que el rozamiento por rodadura es despreciable. (*a*) ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento estático que ejerce la pista sobre el coche y cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático necesario para mantener esa velocidad? (*b*) El coche se mueve ahora con una trayectoria curva de radio r con el mismo módulo de velocidad. ¿Para qué valor de r el ángulo entre la fuerza de rozamiento estático y el vector velocidad será igual a 45º?, ¿y para qué valor será de 88º? ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático necesario para que el coche no derrape?

91 •• Un estudiante montado en una bicicleta sobre una superficie horizontal, recorre un círculo de radio 20 m. La fuerza resultante ejercida por la carretera sobre la bicicleta (fuerza normal más fuerza de rozamiento) forma un ángulo de 15° con la vertical. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del estudiante? (*b*) Si la fuerza de rozamiento es la mitad de su valor máximo, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento estático?

92 •• Un avión vuela en un círculo horizontal con una velocidad cuyo módulo es de 480 km/h. Para seguir esta trayectoria inclina las alas un ángulo de 40º (véase la figura 5.76). Sobre las alas se produce una fuerza ascensional que mantiene el aparato en el aire. ¿Cuál es el radio de la trayectoria del avión?

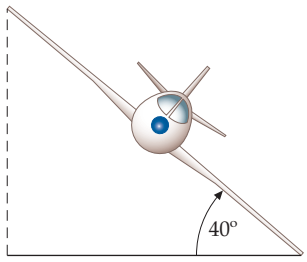


FIGURA 5.76 Problema 92

93 •• Un coche de 750 kg toma una curva de radio 160 m a 90 km/h. ¿Cuál debe ser el ángulo de peralte de la curva para que la única fuerza entre el pavimento y los neumáticos esté en la dirección normal? *Ayuda: ¿qué información nos proporciona este requisito sobre la fuerza de rozamiento?*

94 •• Una curva de radio 150 m tiene un peralte con un ángulo de 10°. Un coche de 800 kg toma la curva a 85 km/h sin patinar. Determinar (*a*) la fuerza normal que actúa sobre los neumáticos ejercida por el pavimento, (*b*) la fuerza de rozamiento ejercida por el pavimento sobre los neumáticos del coche, y (*c*) el coeficiente de rozamiento estático mínimo entre el pavimento y los neumáticos.

95 •• En otra ocasión, el coche del problema 94 toma la curva a 38 km/h. Determinar (*a*) la fuerza normal ejercida por el pavimento sobre los neumáticos y (*b*) la fuerza de rozamiento ejercida entre el pavimento y los neumáticos.

96 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un ingeniero de caminos recibe la siguiente consulta. Hay que diseñar una sección curva de carretera que cumpla las siguientes condiciones: con hielo sobre la carretera, cuando el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y el caucho es 0,08, un coche en reposo no debe deslizarse hacia la cuneta, y un coche que circule a menos de 60 km/h no debe deslizarse hacia el exterior de la curva. ¿Cuál debe ser el radio mínimo de curvatura de la curva y el ángulo de peralte de la carretera?

97 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una carretera está peraltada de modo que un coche de 950 kg que se desplace a 40 km/h pueda tomar una curva de 30 m de radio incluso cuando la carretera esté tan helada que el coeficiente de rozamiento sea aproximadamente cero. Determinar en qué intervalo de velocidades puede un coche tomar esta curva sin patinar, si el coeficiente de rozamiento estático entre la carretera y las ruedas es de 0,3.

*INTEGRACIÓN NUMÉRICA: MÉTODO DE EULER

* **98** •• **HOJA DE CÁLCULO, APROXIMACIÓN** Desde un globo aerostático se tira una pelota de béisbol verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 35 km/h. La pelota alcanza la velocidad terminal de 150 km/h. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, use el método de Euler para estimar la velocidad de la bola transcurridos 10 s de su lanzamiento. ¿Cuál es la incertidumbre del resultado? Si se deja caer una segunda bola, esta vez con velocidad inicial nula, ¿cuánto tiempo le cuesta alcanzar el 99% de su velocidad límite? ¿Qué distancia recorre durante este tiempo?

* **99** •• **HOJA DE CÁLCULO, APROXIMACIÓN** Se lanza verticalmente hacia arriba una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 150 km/h. Al caer, su velocidad límite también es 150 km/h. (*a*) Use el método de Euler para estimar la altura de la bola 3,5 s después del lanzamiento. (*b*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza? (*c*) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima? (*d*) ¿Cuánto tarda en volver al suelo? (*e*) ¿El tiempo que tarda la pelota en subir es menor, igual o mayor que el que tarda en bajar? SSM

* **100** ••• **HOJA DE CÁLCULO, APROXIMACIÓN** Un bloque de 0,80 kg colocado sobre una superficie horizontal sin rozamiento mantiene comprimido 30 cm un muelle de 50 N/m de constante elástica, que se considera sin masa. El bloque se suelta y el muelle lo empuja 30 cm. Use el método de Euler con $\Delta t = 0{,}005$ s para estimar el tiempo que tarda el muelle en empujar el bloque esos 30 cm. ¿A qué velocidad se mueve el bloque pasado este tiempo? ¿Qué certeza se tiene sobre el valor de esta velocidad?

CÁLCULO DEL CENTRO DE MASAS

101 • Tres masas puntuales de 2 kg cada una están localizadas sobre el eje x. Una está en el origen, otra en $x = 0{,}20$ m y la otra en $x = 0{,}50$ m. Hallar el centro de masas del sistema.

102 • El hacha de piedra de la figura 5.77, en donde se muestran sus dimensiones, está formada por una piedra simétrica de 8 kg atada al extremo de un palo homogéneo de 2,5 kg. ¿A qué distancia del mango del hacha se encuentra su centro de masas?

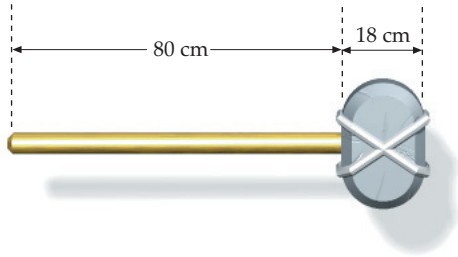


FIGURA 5.77 Problema 102

103 • Tres bolas A, B y C de masas 3 kg, 1 kg y 1 kg, respectivamente, están conectadas por barras de masa despreciable. Las bolas están localizadas en la forma indicada en la figura 5.78. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas?

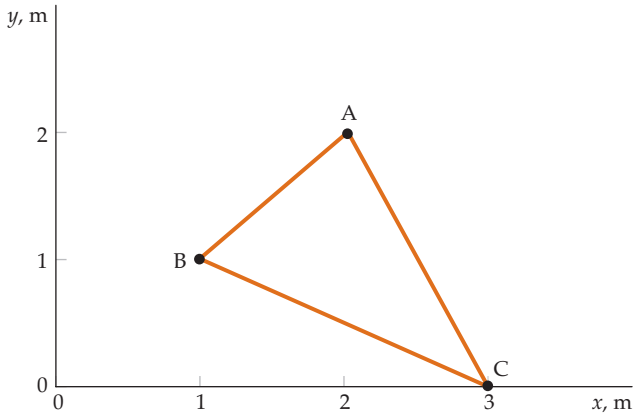


FIGURA 5.78 Problemas 103 y 115

104 • Por simetría, localizar el centro de masas de un triángulo equilátero de lado a, que tiene un vértice sobre el eje y y los otros dos en $(-a/2, 0)$ y $(+a/2, 0)$.

105 •• Determinar el centro de masas de una pieza de madera contrachapada que tiene la forma de la figura 5.79. Podemos considerar que la pieza está formada por dos piezas, un cuadrado de 3 m de lado y de masa m_1 y un rectángulo de 1 m × 2 m con una masa $-m_2$. Considere que el eje de coordenadas está situado en el extremo inferior izquierdo de la pieza. SSM

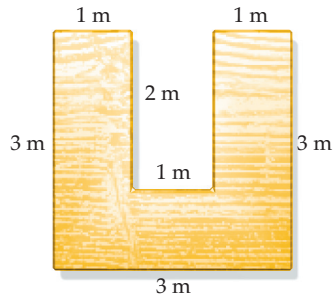


FIGURA 5.79 Problema 105

106 •• Una lata de masa M y altura H tiene forma cilíndrica y está llena de agua. La masa inicial de agua es M, la misma de la lata. Se perfora un agujero en la base de la lata por el que se va el agua. (*a*) Si la altura del agua en la lata es x, ¿cuál es el centro de masas del sistema lata + agua? (*b*) ¿Cuál es la mínima altura del centro de masas mientras se escapa el agua?

107 •• Dos barras idénticas y uniformes, cada una con longitud L, están unidas por sus extremos formando un ángulo de 90º. Determinar la posición del centro de masas del conjunto (en función de L) tomando de origen el punto de unión entre las barras. *Ayuda: no es necesario saber la masa de las barras pero es conveniente suponer que cada una de las barras tiene una masa m. Luego, las masas se cancelan.* SSM

108 ••• Repetir el análisis del problema 107, pero ahora suponiendo que las barras forman un ángulo θ. ¿Concuerda el resultado obtenido cuando ponemos 90º como valor de θ con el del problema 107? ¿Se obtienen resultados razonables cuando el ángulo es de 0º o de 180º?

* **109** •• **ENCONTRAR EL CENTRO DE MASAS POR INTEGRACIÓN** Demostrar que el centro de masas de un disco semicircular uniforme de radio R está en un punto que dista $4R/(3\pi)$ del centro del círculo.

* **110** •• Hallar la localización del centro de masas de una barra no uniforme de 0,4 m de longitud si su densidad varía linealmente de 1 g/cm en un extremo a 5 g/cm en el otro extremo. Especifica la localización tomando el origen en el extremo con menos masa.

* **111** ••• Se tiene una varilla fina y uniforme curvada en forma de arco circular de radio R y ángulo θ_m (ver figura 5.80). Demostrar que el centro de masas está situado sobre el eje x a una distancia $x_{cm} = R \text{ sen } \theta_m/\theta_m$ donde θ_m se expresa en radianes. Compruebe su respuesta verificando que se obtiene el valor conocido cuando el ángulo es de 180º. Verifique su respuesta con la que se da en el texto (apartado Cálculo del centro de masas por integración) para el caso en que $\theta_m = 90º$.

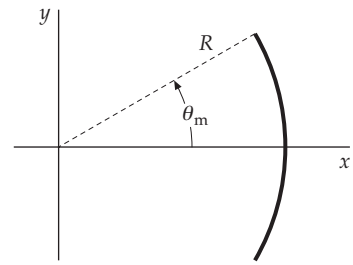


FIGURA 5.80 Problema 111

* **112** ••• Un alambre largo, fino, de longitud L tiene una densidad lineal de masa dada por $A - Bx$, donde A y B son constantes positivas y x es la distancia desde el extremo con más masa. (*a*) Una condición para que este problema sea realista es que $A > BL$. Explique por qué. (*b*) Determine x_{cm} en función de L, A y B. ¿Si $B = 0$ su respuesta tiene sentido? Razone la respuesta.

MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASAS

113 • Dos masas de 3 kg cada una tienen las velocidades $\vec{v}_1 = (2{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (3{,}0\text{ m/s})\hat{j}$ y $\vec{v}_2 = (4{,}0\text{ m/s})\hat{i} - (6{,}0\text{ m/s})\hat{j}$. Determinar la velocidad del centro de masas del sistema. SSM

114 • Un automóvil de 1500 kg se mueve hacia el oeste con una velocidad de 20 m/s y un camión de 3000 kg se mueve hacia el este con una velocidad de 16 m/s. Calcular la velocidad del centro de masas del sistema.

115 • Una fuerza $\vec{F} = 12\ \text{N}\ \hat{i}$ se aplica a la bola de 3 kg de la figura 5.78 del problema 103. ¿Cuál es la aceleración del centro de masas?

116 •• Un bloque de masa m está sujeto a una cuerda y suspendido dentro de una caja hueca de masa M. La caja descansa sobre una balanza que mide el peso del sistema. (*a*) Si la cuerda se rompe, ¿cambia la lectura de la balanza? Razonar la respuesta. (*b*) Suponer que la cuerda se rompe y la masa m cae con aceleración constante g. Determinar la aceleración del centro de masas, tanto en dirección como en módulo. (*c*) Utilizando el resultado de (*b*), determinar la lectura de la balanza, mientras m se encuentra en caída libre.

117 •• Un muelle vertical de constante de fuerza k está sujeto a la parte inferior de una plataforma y sobre su parte superior descansa una cápsula sin masa, como indica la figura 5.81. La plataforma reposa sobre una balanza. Una bola de masa m_b se deja caer en la cápsula desde una altura despreciable. ¿Cuál es la lectura de la balanza cuando (*a*) el muelle se comprime la longitud $d = m_b g/k$, (*b*) la bola alcanza momentáneamente el reposo con el muelle comprimido, (*c*) la bola alcanza de nuevo el reposo en su posición original? SSM

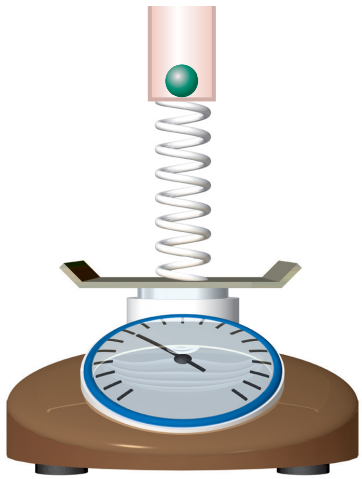


FIGURA 5.81 Problema 117

118 ••• En la máquina de Atwood de la figura 5.82, la cuerda pasa por un cilindro fijo, sin rozamiento, de masa m_c. (*a*) Determinar la aceleración del centro de masas del sistema formado por los dos bloques y el cilindro. (*b*) Utilizar la segunda ley de Newton (para sistemas) para determinar la fuerza F ejercida por el soporte. (*c*) Determinar la tensión de la cuerda que conecta los bloques y demostrar que $F = m_c g + 2\,T$.

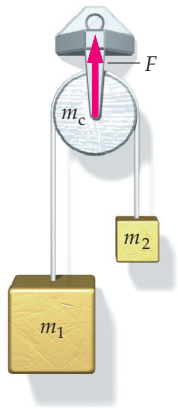


FIGURA 5.82 Problema 118

119 ••• Se parte de la situación de equilibrio del problema 117. El sistema conjunto (balanza, muelle, bandeja y bola) está sometido ahora a una aceleración constante ascendente a (por ejemplo, en un ascensor). Repetir el diagrama de fuerzas y los cálculos del problema 117.

PROBLEMAS GENERALES

120 • Al diseñar su nueva casa en California, usted tiene en cuenta que debe soportar aceleraciones horizontales de hasta $0{,}5g$. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento estático mínimo que debe existir entre el suelo de la casa y su valioso jarrón Tuscan para que éste no se deslice sobre el suelo en esas condiciones?

121 • Un bloque de 4,5 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo de 28° con la horizontal. Partiendo del reposo, el bloque se mueve una distancia de 2,4 m en 5,2 segundos. Determinar el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano.

122 •• Una maqueta de avión de masa 0,4 kg está sujeta a una cuerda horizontal y vuela en un círculo horizontal de radio 5,7 m. (El peso del avión está equilibrado por la fuerza ascensional del aire sobre las alas del modelo.) El avión da 1,2 revoluciones cada 4 s. (*a*) Calcular la velocidad v del avión. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda.

123 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un cajón de libros ha de subirse a un camión con la ayuda de unas planchas inclinadas 30°. La masa del cajón es 100 kg y el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre el cajón y las planchas es 0,5. Para esta operación varias personas empujan *horizontalmente* con una fuerza total $\vec{F}$. Una vez que el cajón comienza a moverse, ¿qué valor debe tomar F para que el cajón siga subiendo con velocidad constante?

124 •• Sobre un objeto actúan tres fuerzas tal como se muestra en la figura 5.83. (*a*) Si F_1, F_2 y F_3 representan los módulos de las fuerzas que actúan sobre el objeto, demostrar que $F_1/\text{sen}\,\theta_{23} = F_2/\text{sen}\,\theta_{31} = F_3/\text{sen}\,\theta_{12}$. (*b*) Demostrar que $F_1^2 = F_2^2 + F_3^2 + 2F_2F_3\cos\theta_{23}$.

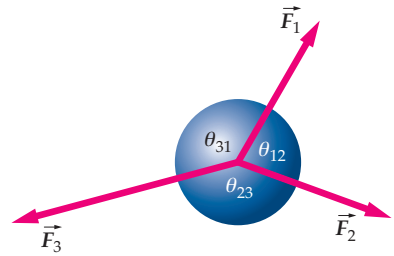


FIGURA 5.83 Problema 124

125 •• En un carrusel de feria, un pasajero se sienta en un compartimiento que gira con una velocidad cuyo módulo es constante en un círculo vertical de radio $r = 5$ m. Las cabezas de los pasajeros sentados apuntan siempre hacia el centro del círculo. (*a*) Si el carrusel completa un círculo en 2 s, determinar la aceleración del pasajero. (*b*) Calcular el ritmo de rotación más lento (es decir, el tiempo más largo T_m para completar un círculo) del carrusel para el cual el cinturón de seguridad del asiento no ejerce fuerza alguna sobre el pasajero en la parte más alta del recorrido.

126 •• Una carretilla de juguete se mueve sobre ruedas sin rozamiento, arrastrada por una cuerda bajo una tensión T. La masa de la carretilla es m_1. Una carga de masa m_2 reposa sobre el suelo plano de la carretilla con un coeficiente de rozamiento estático μ_e. La carretilla es arrastrada hacia arriba por una rampa que está inclinada un ángulo θ por encima de la horizontal. La cuerda está situada paralelamente a la rampa. ¿Cuál es la máxima tensión T que puede aplicarse sin que la carga se deslice?

127 ••• Un trineo que pesa 200 N descansa sobre un plano inclinado 15°. El coeficiente de rozamiento estático es 0,5 (figura 5.84). (*a*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza normal sobre el trineo? (*b*) ¿Cuál es el módulo del rozamiento estático sobre el trineo? (*c*) El trineo es ahora arrastrado hacia arriba a velocidad constante por un niño. Éste pesa 500 N y tira de la cuerda con una fuerza constante de 100 N. La cuerda forma un ángulo de 30° con el plano inclinado y es de masa despreciable. ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento cinético sobre el trineo? (*d*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y el plano inclinado? (*e*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza ejercida sobre el niño por el plano inclinado?

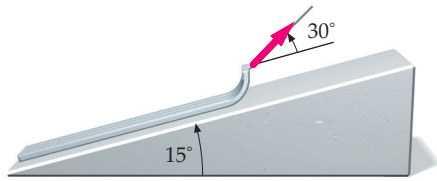


FIGURA 5.84 Problema 127

128 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En 1976, Gerard O'Neill propuso la construcción de grandes estaciones espaciales habitables situadas en órbita alrededor de la Tierra y de la Luna. Dado que permanecer en condiciones de ingravidez tiene efectos médicos adversos, propuso que las estaciones tuvieran la forma de largos cilindros que girasen alrededor de su eje, de modo que proporcionaran a sus habitantes una sensación de gravedad. Esta idea hizo mella entre los escritores y guionistas de historias de ciencia ficción; así por ejemplo, la serie de TV *Babylon 5* contempla una estación como la propuesta por O'Neill que tiene una longitud de 8 km y un diámetro de 1 km. A causa de la rotación, alguien que esté dentro de la colonia tendrá sensación de gravidez por el hecho de estar en un sistema de referencia acelerado. (*a*) Demostrar que la "aceleración de la gravedad" experimentada por un habitante hipotético de la colonia de O'Neill es igual a su aceleración centrípeta. (*Ayuda: considere que alguien "está mirando" la colonia desde fuera*) (*b*) Si suponemos que la estación orbital tiene varias cubiertas que están situadas a distancias distintas del eje de rotación, mostrar cómo la "aceleración de la gravedad" se hace más débil cuanto más cerca se está del eje de rotación. (*c*) ¿Cuántas vueltas por minuto debería dar la estación *Babylon 5* para producir una aceleración parecida a la de la gravedad (9,8 m/s^2) en el punto más alejado del eje del cilindro de la estación?

129 •• Una niña se desliza por un tobogán inclinado 30° en un tiempo t_1. El coeficiente de rozamiento cinético entre ella y el tobogán es μ_c. Un día descubre que si se sienta en un pequeño trineo sin rozamiento, se desliza en el mismo tobogán en un tiempo $\frac{1}{2}t_1$. Determinar μ_c.

130 ••• La posición de una partícula de masa $m = 0{,}8$ kg en función del tiempo es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (R \operatorname{sen} \omega t)\,\hat{i} + (R \cos \omega t)\,\hat{j}$, en donde $R = 4{,}0$ m y $\omega = 2\pi\ s^{-1}$. (*a*) Demostrar que la trayectoria seguida por esta partícula es un círculo de radio R con su centro en el origen. (*b*) Calcular el vector velocidad y demostrar que $v_x/v_y = -y/x$. (*c*) Determinar el vector aceleración y demostrar que su dirección es radial y su módulo v^2/R. (*d*) Determinar el módulo y dirección de la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

131 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En un parque de atracciones, la gente se sostiene contra las paredes de un cilindro giratorio. Cuando el suelo se hunde, la fuerza de rozamiento mantiene a los participantes en contacto con la pared. Considere que la masa de una persona es de 75 kg. (*a*) Dibuje el diagrama de fuerzas de la persona. (*b*) Utilice dicho diagrama para determinar, junto con las leyes de Newton, la fuerza de rozamiento sobre la persona. (*c*) Si el radio del cilindro es de 4 m y el coeficiente de rozamiento estático entre la persona y la pared es de 0,55, determinar el número mínimo de revoluciones por minuto necesario para evitar el deslizamiento sobre la pared. ¿Valdrá esta respuesta para cualquier otra persona? Razónese la respuesta.

132 ••• Un bloque de masa m_1 situada sobre una plataforma horizontal está conectada por una cuerda delgada que pasa por una polea sin rozamiento ni masa a un bloque de masa m_2 de 2,5 kg que cuelga lateralmente a una distancia de 1,5 m sobre el suelo (figura 5.85). El sistema se deja libre desde el reposo en el tiempo $t = 0$ y el bloque de masa de 2,5 kg choca contra el suelo en el instante $t = 0{,}82$ s. El sistema se sitúa de nuevo en su posición inicial, pero ahora se coloca un bloque de masa de 1,2 kg en la parte superior del bloque de masa m_1. Se libera el sistema desde el reposo y el bloque de masa de 2,5 kg choca contra el suelo 1,3 s más tarde. Determinar la masa m_1 y el coeficiente de rozamiento cinético entre m_1 y la plataforma.

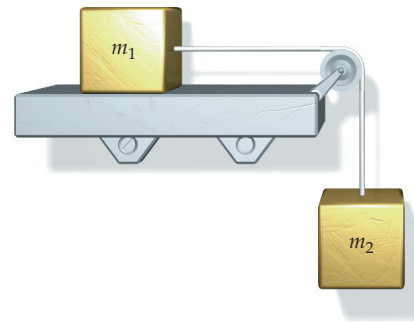


FIGURA 5.85 Problema 132

133 ••• Sally afirma que la ardillas realmente no vuelan sino que saltan y utilizan los pliegues de la piel que conectan las patas delanteras con las traseras como una especie de paracaídas que les permite planear de árbol en árbol. Liz decide comprobar la afirmación de Sally calculando la velocidad terminal de caída de las ardillas. Si la constante b de la fuerza de arrastre es proporcional al área frontal que el objeto opone al flujo de aire, utilizar los resultados del ejemplo 5.12 y algunas hipótesis sobre el tamaño de la ardilla para estimar la velocidad terminal (hacia abajo) de la ardilla. ¿Concuerda el cálculo de Liz con la afirmación de Sally?

134 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Después de saltar del avión, pero antes de que tire de la cuerda para abrir el paracaídas, un paracaidista alcanza una velocidad de 180 km/h. Cuando se abre el paracaídas, la fuerza de arrastre aumenta en un factor 10 y esto produce una fuerte sacudida sobre el paracaidista. (*a*) Si la masa del paracaidista es de 60 kg, determinar la aceleración cuando se abre el paracaídas. (*b*) Si aceleraciones bruscas de $5g$ son peligrosas para la estructura del cuerpo humano, ¿es esta una práctica segura?

135 • Determinar la localización del centro de masas del sistema Tierra-Luna relativo a la Tierra. ¿Se encuentra dentro o fuera de la superficie terrestre?

136 •• Una placa circular de radio r tiene un orificio circular cortado en ella de radio $R/2$ (figura 5.86). Hallar el centro de masas de la placa. Sugerencia: *el orificio puede representarse por dos discos superpuestos; uno de masa m y el otro de masa* $-m$.

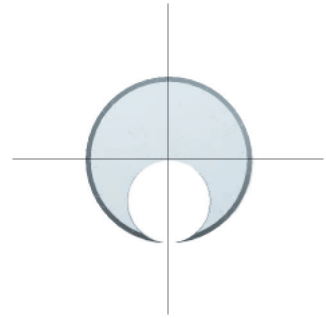


FIGURA 5.86 Problema 136

137 •• Un determinado tipo de bastón consiste en una barra uniforme de 50 cm de longitud y 200 g de masa. En uno de sus extremos hay una esfera sólida de 10 cm de diámetro y 500 g de masa y en el otro extremo otra esfera de 8 cm de diámetro y 750 g (de centro a centro de las esferas hay 59 cm de distancia). (*a*) ¿Dónde está localizado el centro de masas en relación a la esfera más ligera? (*b*) Si se tira hacia arriba rotando de forma que el centro de masas tiene una velocidad de 10 m/s, ¿cuál será la velocidad del centro de masas 1,5 segundos más tarde? (*c*) ¿Cuál será la fuerza externa sobre el bastón cuando esté en el aire? (*d*) ¿Cuál es la aceleración 1,5 s después del lanzamiento?

138 •• Una mujer de 60 kg se encuentra de pie en la parte trasera de una balsa de 6 m de longitud y 120 kg que flota en reposo en aguas tranquilas y sin rozamiento. La balsa se encuentra a 0,5 m de un embarcadero fijo, como en la figura 5.87. (*a*) ¿A qué distancia del embarcadero se encuentra el centro de masas del sistema mujer-balsa? (*b*) La mujer camina hasta la proa de la balsa y se detiene. ¿A qué distancia se encuentra ahora el centro de masas del sistema mujer-balsa del embarcadero? (*c*) Cuando la mujer llega a la proa, ¿a qué distancia se encuentra del embarcadero?

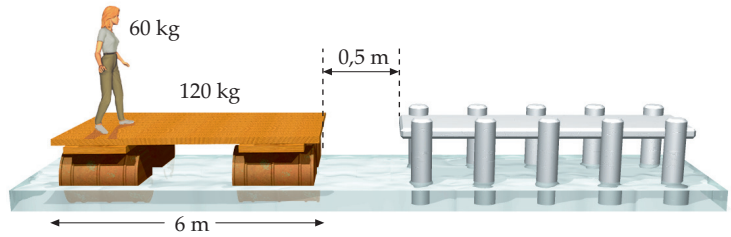


FIGURA 5.87 **Problema 138**

139 •• Una máquina de Atwood tiene una polea de masa y rozamiento despreciables. Sus cuerdas, de masa despreciable, sostienen en sus extremos dos cuerpos de 2 kg y 4 kg de masa, respectivamente. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de cada objeto 1,5 segundos después de que partan del reposo? (*b*) En ese instante, ¿cuál es la velocidad del centro de masas de los dos cuerpos? (*c*) En ese momento ¿cuál es la aceleración del centro de masas de los dos cuerpos?

CAPÍTULO 6

Trabajo y energía cinética

6.1 Trabajo realizado por una fuerza constante
6.2 Trabajo realizado por una fuerza variable
Movimiento rectilíneo
6.3 El producto escalar
*6.4 Teorema del trabajo-energía cinética
Trayectorias curvilíneas
6.5 Trabajo del centro de masas

Hasta ahora hemos analizado el movimiento utilizando conceptos como posición, velocidad, aceleración y fuerza. Sin embargo, algunos tipos de movimientos son difíciles de describir directamente mediante las leyes de Newton. (Un ejemplo de este tipo de movimiento es la velocidad con la que un esquiador desciende sobre una colina con pendiente curva.) En este capítulo y en el siguiente, estudiaremos diversos métodos alternativos para analizar el movimiento mediante dos conceptos científicos fundamentales: energía y trabajo. A diferencia de la fuerza, que es una magnitud vectorial, energía y trabajo son magnitudes físicas escalares asociadas a las partículas y a los sistemas de partículas. Como veremos en breve, estos nuevos conceptos nos proporcionan potentes métodos para resolver un amplio espectro de problemas.

En este capítulo, analizaremos el concepto de trabajo y cómo están relacionados el trabajo y la energía cinética, que es la energía asociada al movimiento de los cuerpos. También discutiremos los conceptos de potencia y trabajo sobre el centro de masas.

La nieve se funde bajos los esquís debido al rozamiento cinético entre la nieve y los esquís. El esquiador se desliza, montaña abajo, sobre una fina capa de agua líquida. *(Gentileza de Rossignol Ski Company.)*

? ¿Cómo afecta la forma de la pendiente o la distancia que debe recorrer el esquiador a la velocidad de llegada a la meta? (Véase el ejemplo 6.12.)

6.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Normalmente, se piensa que el trabajo es algo que requiere un esfuerzo físico o mental, como estudiar para un examen, llevar una mochila o ir en bicicleta. Pero en física, el trabajo es la transferencia de energía mediante una fuerza. Así, si usted estira un muelle tirando de él con la mano (figura 6.1), la energía transferida por usted al muelle es igual al trabajo realizado por la fuerza de su mano sobre el muelle. La energía transferida al muelle se pone de manifiesto cuando usted deja ir el muelle y éste se contrae rápidamente y oscila.

El trabajo es una magnitud física escalar, que puede ser positiva, negativa o con valor cero. El trabajo realizado por el cuerpo A sobre el B es positivo si la energía se transfiere de A a B y negativo cuando la energía se transfiere de B a A. Si no se transfiere energía, el trabajo realizado es cero. En el caso del muelle, el trabajo realizado por usted sobre el muelle es positivo porque la energía se transfiere de usted al muelle. Sin embargo, suponga que usted mueve la mano de forma que el muelle se contrae lentamente hasta su posición de equilibrio. Durante la contracción, el muelle pierde energía —la energía se transfiere del muelle a usted— y el trabajo que usted realiza sobre el muelle es negativo.

Normalmente, se dice que trabajo es fuerza por desplazamiento. Desafortunadamente, la afirmación "trabajo es fuerza por distancia" es demasiado simple y engañosa. Se realiza trabajo sobre un cuerpo cuando el punto de aplicación de la fuerza se mueve a lo largo de un desplazamiento. Por ejemplo, imagine que usted empuja una caja sobre el suelo con una fuerza constante horizontal $\vec{F}$ en la dirección del desplazamiento $\Delta x\hat{i}$ (figura 6.2*a*). Puesto que la fuerza actúa sobre la caja en la misma dirección que se produce el desplazamiento, el trabajo W realizado por la fuerza sobre la caja es

$$W = F|\Delta x|$$

Ahora imagínese que usted tira de un muelle que está sujeto a la caja, de forma que la fuerza actúa sobre la caja formando un ángulo con la dirección del desplazamiento como se ilustra en la figura 6.2*b*. En este caso, el trabajo realizado sobre la caja por la fuerza viene dado por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento tantas veces como indica el módulo del desplazamiento:

$$W = F_x\Delta x = F\cos\theta|\Delta x| \qquad 6.1$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

donde F es el módulo de la fuerza constante, $|\Delta x|$ es el módulo del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y θ es el ángulo que forman las direcciones de la fuerza y la dirección del desplazamiento. El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es idéntico al desplazamiento de cualquier otro punto de la caja pues la caja es rígida y se mueve sin rotar. Si usted levanta o baja una caja ejerciendo una fuerza $\vec{F}$ sobre ella, estará haciendo trabajo sobre la caja. Consideremos la dirección positiva del eje y, y sea $\Delta y\hat{j}$ el desplazamiento de la caja. El trabajo realizado por usted sobre la caja es positivo si Δy y F_y tienen el mismo signo y será negativo si tienen signos contrarios. Pero si usted está simplemente sosteniendo la caja en una posición fija, entonces, de acuerdo con la definición de trabajo, usted no está haciendo trabajo sobre la caja porque Δy es cero (figura 6.3). En este caso, aunque usted esté aplicando una fuerza sobre la caja, el trabajo que realiza sobre la caja es cero.

La unidad de trabajo y energía del SI es el **joule** (J), igual al producto de un newton por un metro:

$$1\,\text{J} = 1\,\text{N}\cdot\text{m} \qquad 6.2$$

(En el sistema habitual utilizado en los Estados Unidos la unidad de trabajo es el pie-libra: $1\text{ft}\cdot\text{lb} = 1{,}356$ J.) Otra unidad útil de trabajo y energía en física atómica y nuclear es el **electronvolt** (eV):

$$1\,\text{eV} = 1{,}602\times10^{-19}\,\text{J} \qquad 6.3$$

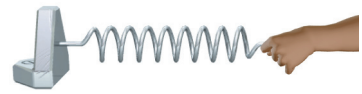


FIGURA 6.1 La energía se transfiere de la persona al muelle cuando el muelle se estira. La energía transferida es igual al trabajo realizado por la persona sobre el muelle.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 6.1

Para la contracción del muelle, ¿cómo es el trabajo realizado por la persona, positivo o negativo?

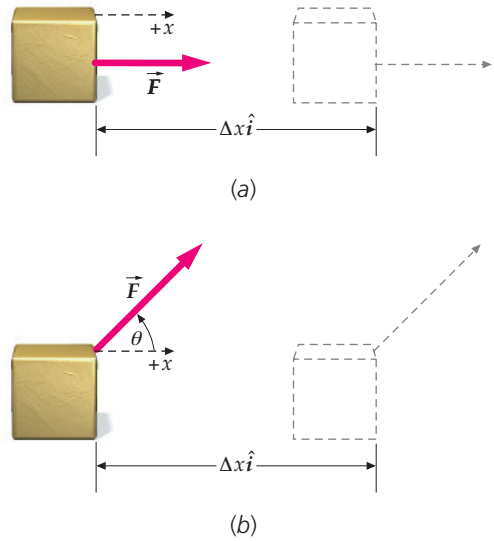


FIGURA 6.2

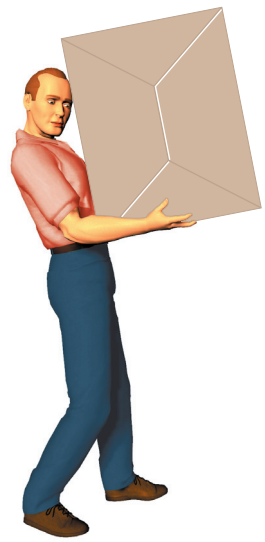


FIGURA 6.3

Los múltiplos comúnmente utilizados son el keV (10^3 eV) y el MeV (10^6 eV). El trabajo necesario para extraer un electrón de un átomo es del orden de varios eV, mientras que el trabajo necesario para extraer un protón o un neutrón de un núcleo atómico es del orden de varios MeV.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.1
Se ejerce una fuerza de 12 N sobre un bloque bajo un ángulo $\theta = 20°$, como indica la figura 6.2*b*. ¿Qué trabajo realiza la fuerza sobre el bloque, si éste se desplaza 3 m a lo largo de la mesa?

Cuando hay varias fuerzas que realizan trabajo sobre un sistema, el trabajo total se calcula sumando el trabajo realizado por cada una de las fuerzas:

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\,\Delta x_1 + F_{2x}\,\Delta x_2 + F_{3x}\,\Delta x_3 + \cdots \qquad 6.4$$

Podemos describir el sistema como una sola partícula si el sistema se mueve de tal manera que todas las partes del sistema realizan desplazamientos idénticos. Cuando varias fuerzas hacen trabajo sobre esa partícula, los desplazamientos de los puntos de aplicación son idénticos. Sea Δx el desplazamiento de un punto de aplicación de una de las fuerzas. Entonces

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\,\Delta x + F_{2x}\,\Delta x + \cdots = (F_{1x} + F_{2x} + \cdots)\Delta x = F_{\text{neta}\,x}\,\Delta x \qquad 6.5$$

Si una partícula está obligada a moverse en el eje x, la fuerza neta que experimenta únicamente tiene una componente x. Es decir, $\vec{F}_{\text{neta}} = F_{\text{neta}\,x}\hat{\boldsymbol{\imath}}$. Por consiguiente, la componente x de la fuerza neta multiplicada por el desplazamiento de cualquier parte del objeto es igual al trabajo total realizado sobre el objeto.

Ejemplo 6.1 La grúa que carga

Un camión de masa 3000 kg se carga en un buque mediante una grúa que ejerce una fuerza ascendente de 31 kN sobre el camión. Esta fuerza, que es suficientemente grande para vencer la fuerza de la gravedad y empezar a levantar el camión, se aplica a lo largo de una distancia de 2 m. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la grúa, (*b*) el trabajo realizado por la gravedad, y (*c*) el trabajo neto realizado sobre el camión.

PLANTEAMIENTO En los apartados (*a*) y (*b*), la fuerza que actúa sobre el camión es constante y el desplazamiento es rectilíneo, de forma que podemos utilizar la ecuación 6.1, eligiendo $+y$ como la dirección del desplazamiento.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar el camión es su posición inicial y final. Elegir la dirección $+y$ en la dirección del desplazamiento (figura 6.4)

2. Calcular el trabajo realizado por la fuerza aplicada:

$$W_{\text{ap}} = F_{\text{ap}\,y}\,\Delta y = (31\text{ kN})(2{,}0\text{ m}) = \boxed{62\text{ kJ}}$$

(*b*) Calcular el trabajo realizado por la gravedad:
(*Nota*: el vector $\vec{\boldsymbol{g}}$ se dirige hacia abajo y la dirección de $+y$ es hacia arriba. En consecuencia $g_y = g\cos 180° = -g$.)

$$W_{\text{g}} = mg_y\,\Delta y = (3000\text{ kg})(-9{,}81\text{ N/kg})(2{,}0\text{ m}) = \boxed{-59\text{ kJ}}$$

(*c*) El trabajo total realizado sobre el camión es la suma del trabajo realizado por cada fuerza:

$$W_{\text{total}} = W_{\text{ap}\,y} + W_{\text{g}} = 62\text{ kJ} + (-59\text{ kJ}) = \boxed{3\text{ kJ}}$$

COMPROBACIÓN En el apartado (*a*), la fuerza se aplica en la misma dirección que el desplazamiento. En el apartado (*b*), la fuerza se aplica en la dirección opuesta al desplazamiento, por lo que se espera que el trabajo sea negativo. Los resultados confirman estas observaciones.

OBSERVACIÓN En el apartado (*c*), podríamos haber calculado el trabajo total calculando primero la fuerza resultante sobre el camión y luego utilizar la ecuación 6.5.

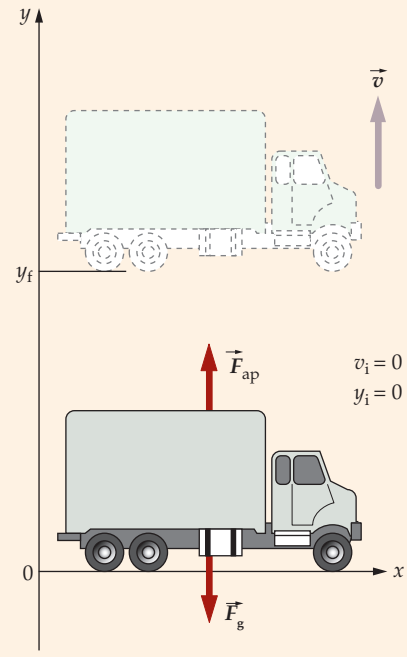


FIGURA 6.4

TEOREMA DEL TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA

El concepto de energía es uno de los más unificadores de la ciencia. En todos los procesos físicos está presente la energía. La **energía** de un sistema mide su capacidad de hacer trabajo.

Se utilizan diferentes términos para hacer referencia a la energía asociada a diferentes condiciones o estados. Así, la **energía cinética** está asociada al movimiento. La *energía potencial* es energía asociada a la configuración del sistema, como la distancia de separación entre dos sistemas que se atraen. La *energía térmica* está asociada con el movimiento aleatorio de átomos, moléculas o iones dentro de un sistema y está estrechamente relacionada con la temperatura del sistema. En este capítulo, nos centraremos en la energía cinética. La energía potencial y la térmica se estudiarán en el capítulo 7.

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula realizan trabajo, el resultado es el cambio asociado al movimiento de la partícula —la energía cinética. Para obtener la relación entre energía cinética y trabajo, veamos qué sucede si una fuerza constante neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{neta}\,x} = ma_x$$

Si la fuerza es constante, la aceleración es constante y el desplazamiento está relacionado con la velocidad inicial v_i y con la velocidad final v_f mediante la fórmula válida cuando la aceleración es constante (ecuación 2.16).

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a_x\,\Delta x$$

A partir de la expresión anterior, se obtiene para a_x

$$a_x = \frac{1}{2\Delta x}(v_f^2 - v_i^2)$$

Sustituyendo a_x en $F_{\text{neta}\,x} = ma_x$ y multiplicando ambos miembros por Δx, se tiene

$$F_{\text{neta}\,x}\,\Delta x = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

Como el primer miembro es el trabajo total realizado sobre la partícula, entonces

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad 6.6$$

La magnitud $\frac{1}{2}mv^2$ recibe el nombre de **energía cinética** K de la partícula:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad 6.7$$

DEFINICIÓN: ENERGÍA CINÉTICA

Obsérvese que la energía cinética depende sólo del módulo de la velocidad de la partícula y de su masa, pero no de la dirección de movimiento. Además, la energía cinética no puede ser nunca negativa y sólo es cero cuando la partícula está en reposo.

El segundo miembro de la ecuación 6.6 representa el cambio de energía cinética experimentado por la partícula. Así, la ecuación 6.6 nos da la relación entre el trabajo total realizado sobre una partícula y el cambio de energía cinética de dicha partícula.

$$W_{\text{total}} = \Delta K \qquad 6.8$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema trabajo-energía cinética**. Este teorema nos dice que cuando W_{total} es positivo, la energía cinética aumenta, lo que significa que la partícula se mueve más rápido al final del desplazamiento que al inicio. Cuando W_{total} es negativo, la energía cinética disminuye. Cuando W_{total} es cero, la energía cinética no cambia.

Como el trabajo total es igual al cambio de su energía cinética, las unidades de energía y las de trabajo son las mismas. Hay tres unidades habitualmente utilizadas para la energía: el joule (J), el pie-libra (ft-lb) y el electronvolt (eV).

La demostración del teorema trabajo-energía cinética que hemos presentado aquí sólo es válida si la fuerza neta permanece constante. Sin embargo, como se verá más adelante en este capítulo, este teorema es válido incluso cuando la fuerza neta varía y el movimiento no se realiza a lo largo de una línea recta.

¡ Obsérvese que la energía cinética sólo depende del módulo de la velocidad de la partícula y no de la velocidad como vector. Si la velocidad cambia de dirección, pero no de módulo, la energía cinética no cambia.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas donde interviene el trabajo y la energía cinética

PLANTEAMIENTO La elección de la dirección $+y$ o $+x$ puede ayudarnos a resolver fácilmente un problema de trabajo y energía cinética.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la partícula, primero en su posición inicial y luego en su posición final. Por conveniencia, el objeto se puede representar como un punto o una caja. Marcar las posiciones inicial y final del objeto.
2. Colocar uno o más ejes de coordenadas en el dibujo.
3. Dibujar flechas para las velocidades inicial y final, y marcarlas adecuadamente.
4. Colocar un vector para cada fuerza que actúa sobre el objeto en su posición inicial. Acompáñese a cada vector con su marca correspondiente.
5. Calcular el trabajo total realizado sobre la partícula debido a las fuerzas e igualar el resultado al cambio de energía cinética de las partículas.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que presta atención a los signos negativos durante los cálculos. Por ejemplo, el trabajo puede ser positivo o negativo dependiendo de la dirección del desplazamiento en relación a la dirección de la fuerza.

Ejemplo 6.2 La fuerza sobre un electrón

En un tubo de televisión*, se acelera un electrón desde el reposo hasta una energía cinética de 2,5 keV a lo largo de una distancia de 2,5 cm. (La fuerza que acelera el electrón es una fuerza eléctrica debida al campo eléctrico que se genera en el tubo.) Determinar la fuerza que actúa sobre el electrón suponiendo que es constante y tiene la dirección del movimiento.

PLANTEAMIENTO El electrón puede describirse como una partícula. Sus energías cinéticas inicial y final son conocidas y la fuerza eléctrica es simplemente la fuerza que actúa sobre el electrón. Aplicar el teorema del trabajo-energía cinética para despejar la fuerza.

* El tubo de televisión es un tipo de tubo de rayos catódicos.

SOLUCIÓN

1. Haga un dibujo de un electrón en su posición inicial y final. Incluya el desplazamiento, las velocidades inicial y final y la fuerza (figura 6.5):

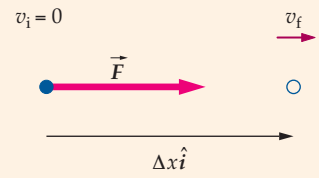


FIGURA 6.5

2. Iguale el trabajo al cambio de la energía cinética:

$$W_{total} = \Delta K$$
$$F_x \Delta x = K_f - K_i$$

3. Despeje la fuerza utilizando el factor de convesión $1{,}6 \times 10^{-19}$ J = 1,0 eV:

$$F_x = \frac{K_f - K_i}{\Delta x} = \frac{2500 \text{ eV} - 0}{0{,}025 \text{ m}} \times \frac{1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1{,}0 \text{ eV}}$$
$$= \boxed{1{,}6 \times 10^{-14} \text{ N}}$$

COMPROBACIÓN La masa de un electrón es sólo de $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg. Por eso, no es sorprendente que una fuerza pequeña sea capaz de comunicarle una gran velocidad y, por tanto, un importante cambio de energía cinética.

OBSERVACIÓN (*a*) 1 J = 1 N · m, así 1 J/m = 1 N. (*b*) 1 eV es la energía cinética adquirida por una partícula de carga $-e$ (un electrón, por ejemplo) cuando se acelera desde el polo negativo al positivo de una batería de 1 V a través del vacío.

Ejemplo 6.3 Una carrera de trineos

Durante sus vacaciones de invierno un profesor participa en una carrera de trineos tirados por personas en un lago helado. Para iniciar la carrera tira de su trineo (masa total 80 kg) con una fuerza de 180 N que forma un ángulo de 40° con la horizontal. Determinar (*a*) el trabajo realizado y (*b*) la velocidad final del trineo después de un recorrido Δx = 5 m, suponiendo que parte del reposo y que no existe rozamiento.

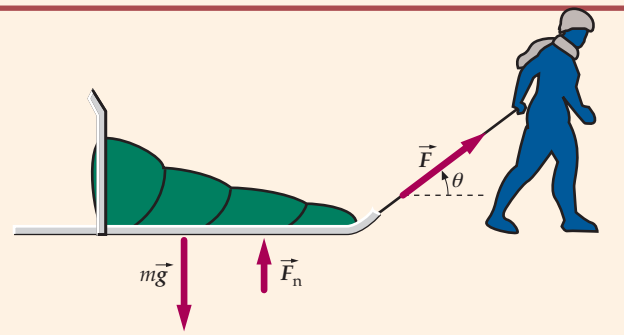


FIGURA 6.6

PLANTEAMIENTO El trabajo realizado por el profesor es $F_x \Delta x$, donde elegimos la dirección del desplazamiento como dirección positiva de x. Éste es también el trabajo total realizado sobre el trineo, ya que las otras fuerzas, mg y F_n, no tienen componentes x. La velocidad final del trineo se puede determinar a partir del teorema trabajo-energía cinética del trineo (figura 6.6). Calculamos el trabajo realizado por cada fuerza sobre el trineo y lo igualamos al cambio de energía cinética del trineo.

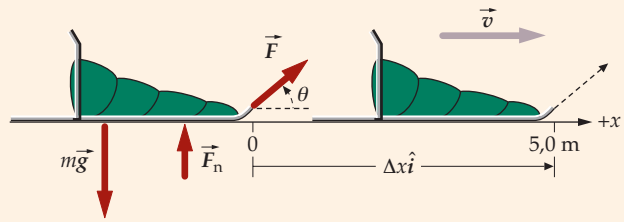


FIGURA 6.7

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un esquema del trineo en su posición inicial y en su posición tras haberse movido 5 m. Dibujar el eje x en la dirección del movimiento (figura 6.7):

2. El trabajo realizado por el profesor sobre el trineo es $F_x \Delta x$. (También es el trabajo total realizado en el trineo, ya que las otras fuerzas que actúan lo hacen en la dirección perpendicular al movimiento (figura 6.7) y su trabajo es cero:

$$W_{total} = W_{prof} = F_x \Delta x = F \cos\theta \, \Delta x$$
$$= (180 \text{ N})(\cos 40°)(5{,}0 \text{ m}) = 689 \text{ J}$$
$$= \boxed{6{,}9 \times 10^2 \text{ J}}$$

(*b*) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y resolver despejando la velocidad final:

$$W_{total} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$
$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2W_{total}}{m}$$
$$= 0 + \frac{2(689 \text{ J})}{80 \text{ kg}} = 17{,}2 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_f = \sqrt{17{,}2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 4{,}151 \text{ m/s} = \boxed{4{,}2 \text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN En el apartado (*b*) se ha utilizado que 1 J/kg = 1 m²/s². Esto es correcto porque

$$1\ \text{J/kg} = 1\ \text{N}\cdot\text{m/kg} = (1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\cdot\text{m/kg} = 1\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

OBSERVACIÓN La raíz cuadrada de 17,2 es 4,147 que se redondea a 4,1. Sin embargo, la respuesta correcta del apartado (*b*) es 4,2 m/s. Esto es correcto porque este valor se calculó tomando la raíz cuadrada de 17,235999970178 que era el resultado que aparecía en la pantalla de la calculadora como valor de v_f.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.2 ¿Cuál será el módulo de la fuerza que deberá ejercer el profesor si el trineo parte con una velocidad de 2 m/s y su velocidad final es de 4,5 m/s después de recorrer una distancia de 5 m formando un ángulo de 40º?

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

6.2 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE. MOVIMIENTO RECTILÍNEO

Muchas fuerzas varían con la distancia. Por ejemplo, un muelle estirado o comprimido ejerce una fuerza proporcional a la distancia estirada o comprimida. La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un vehículo espacial varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia que separa los dos cuerpos. ¿Cómo podemos calcular el trabajo realizado por fuerzas de este tipo?

En la figura 6.8, se representa una fuerza constante F_x en función de la posición x. El trabajo realizado sobre una partícula cuyo desplazamiento es Δx viene representado por el área comprendida bajo la curva fuerza en función de la posición, indicada por el sombreado de la figura 6.8. Se puede aproximar una fuerza variable por una serie de fuerzas esencialmente constantes (figura 6.9). Para cada pequeño intervalo Δx_i, la fuerza es aproximadamente constante. Por tanto, el trabajo realizado es, aproximadamente, igual al área del rectángulo de altura F_{xi} y anchura Δx_i. El trabajo realizado por una fuerza variable será entonces la suma de las áreas de los rectángulos en el límite en que la anchura de los rectángulos tiende a cero:

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_{xi}\,\Delta x_i = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \qquad 6.9$$

Este límite es la integral de $F_x\,dx$. Así, el trabajo realizado por una fuerza variable F_x que actúa sobre una partícula cuando ésta se desplaza de x_1 a x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \qquad 6.10$$

TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE—MOVIMIENTO RECTILÍNEO

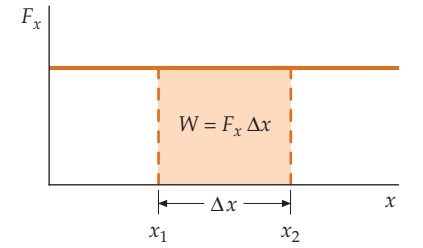


FIGURA 6.8 El trabajo realizado por una fuerza constante viene representado gráficamente por el área comprendida bajo la curva correspondiente, F_x en función de x.

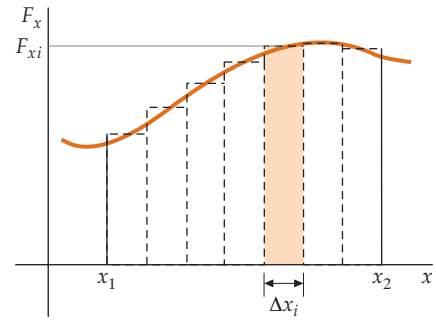


FIGURA 6.9 Una fuerza variable puede aproximarse mediante una serie de fuerzas constantes en intervalos pequeños. El trabajo realizado por una fuerza constante en cada intervalo es el área del rectángulo bajo la curva de esta fuerza. La suma de estas áreas rectangulares es la suma del trabajo realizado por la serie de fuerzas constantes, que se aproxima a la fuerza variable. En el límite de Δx_i infinitesimalmente pequeño, la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área comprendida bajo la curva completa.

Si la fuerza dibujada en la figura 6.9 es la fuerza neta sobre una partícula, entonces cada término $F_{xi}\,\Delta x_i$, en la suma de la ecuación 6.9, representa el trabajo total realizado sobre la partícula por una fuerza constante cuando la partícula se desplaza una distancia Δx_i. Entonces, $F_{xi}\,\Delta x_i$ es igual al cambio de la energía cinética ΔK_i de la partícula durante el desplazamiento Δx_i (ver ecuación 6.8). Además, el cambio de la energía cinética total de la partícula durante el desplazamiento total es igual a la suma de los cambios de la energía cinética en cada desplazamiento. De aquí se deduce que el trabajo total es igual al cambio de energía cinética del desplazamiento completo. Así, $W_{\text{total}} = \Delta K$ es válido tanto para fuerzas variables como para fuerzas constantes.

Ejemplo 6.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

Una fuerza $\vec{F} = F_x\hat{i}$ varía en función de x, como se indica en la figura 6.10. Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando actúa sobre una partícula que se mueve de $x = 0$ a $x = 6$ m.

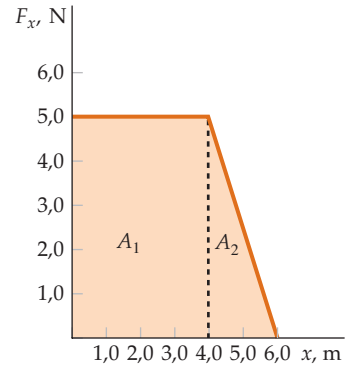


FIGURA 6.10

PLANTEAMIENTO El trabajo es el área bajo la curva desde $x = 0$ m a $x = 6$ m. Como la curva consta de segmentos rectilíneos, lo más fácil es separar el área en dos partes, una sería el rectángulo de área A_1 y la otra el triángulo de área A_2, y luego utilizar la fórmulas geométricas para encontrar el trabajo. (Otra forma alternativa es realizar las integrales, como en el ejemplo 6.5.)

SOLUCIÓN

1. El trabajo se determina calculando al área bajo la curva F_x en función de x: $W = A_{\text{total}}$

2. Esta área es la suma de las dos áreas indicadas. El área de un triángulo se calcula multiplicando la base por la mitad de la altura:
$$W = A_{\text{total}} = A_1 + A_2$$
$$= (5{,}0\text{ N})(4{,}0\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(5{,}0\text{ N})(2{,}0\text{ m})$$
$$= 20\text{ J} + 5{,}0\text{ J} = \boxed{25\text{ J}}$$

COMPROBACIÓN Si la fuerza fuese de 5 N sobre toda la distancia de 6 m, el trabajo sería (5 N)·(6 m) = 30 J. El paso 2 da 25 J, que es ligeramente inferior que 30 J, como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.3 La fuerza indicada es la única fuerza que actúa sobre una partícula de masa 3 kg. Si la partícula parte del reposo en $x = 0$, ¿a qué velocidad se mueve cuando alcanza el valor $x = 6$ m?

TRABAJO REALIZADO POR UN MUELLE QUE OBEDECE LA LEY DE HOOKE

La figura 6.11 muestra un bloque conectado a un muelle sobre una superficie horizontal cuyo rozamiento es despreciable. Si el muelle se comprime o estira, el muelle ejerce una fuerza sobre el bloque. Recuérdese que la fuerza ejercida por el muelle sobre el bloque viene dada por la ecuación 4.7, es decir

$$F_x = -kx \qquad \text{(ley de Hooke)} \qquad 6.11$$

Donde k es una constante positiva y x es el alargamiento del muelle. Si el muelle se alarga, entonces x es positivo y la componente F_x es negativa. Si el muelle se comprime, entonces x es negativa y la componente F_x es positiva.

Como la fuerza varía con x, podemos utilizar la ecuación 6.10 para calcular el trabajo realizado por la fuerza del muelle sobre el bloque cuando éste realiza un desplazamiento desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$. (Además de la fuerza del muelle hay otras dos fuerzas que actúan sobre el bloque: la fuerza de la gravedad, $m\vec{g}$, y la fuerza normal de la superficie, $\vec{F}_n$. Sin embargo, ninguna de esas dos fuerzas realiza trabajo porque ninguna de ellas tiene componente en la dirección del desplazamiento. La única fuerza que realiza trabajo sobre el bloque es la fuerza del muelle.) Sustituyendo F_x de la ecuación 6.11 en la ecuación 6.10, obtenemos

$$W_{\text{muelle}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = -k\left(\frac{x_f^2}{2} - \frac{x_i^2}{2}\right) \qquad 6.12$$

que reagrupando da:

$$W_{\text{muelle}} = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \qquad 6.13$$

TRABAJO REALIZADO POR UN MUELLE

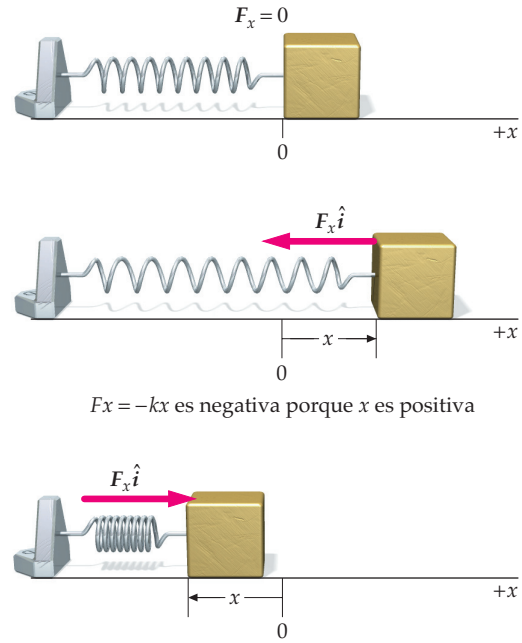


FIGURA 6.11 Muelle horizontal. (*a*) Cuando el muelle no se estira, no ejerce fuerza sobre el bloque. (*b*) Cuando el muelle se estira siendo x positiva, ejerce una fuerza sobre el bloque de módulo kx en la dirección $-x$. (c) Cuando el muelle se contrae siendo x negativa, ejerce una fuerza sobre el bloque de módulo $k|x|$ en la dirección $+x$.

La integral de la ecuación 6.12 se puede calcular utilizando la geometría a fin de calcular el área bajo la curva (figura 6.12*a*). Esto da

$$W_{\text{muelle}} = A_1 + A_2 = |A_1| - |A_2| = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2$$

que es idéntica a la ecuación 6.13.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.4

Utilizando la geometría, calcular el área bajo la curva de la figura 6.12*b* y mostrar que se obtiene la misma expresión que la de la ecuación 6.13.

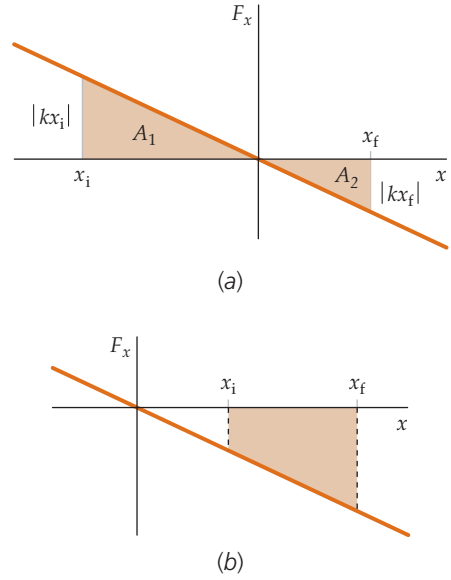


FIGURA 6.12

Supóngase que se tira de un muelle inicialmente en reposo (figura 6.13) estirándolo hasta que alcanza una longitud x_f. ¿Cuánto trabajo hace la fuerza $\vec{F}_{SH}$ que ejerce la mano? La fuerza de la mano sobre el muelle es kx. (Es igual y opuesta a la fuerza que realiza el muelle sobre la mano.) Conforme x aumenta de 0 a x_f, la fuerza sobre el muelle aumenta linealmente desde 0 a $F_{SHx} = kx_f$, de forma que tiene un valor medio* de $\frac{1}{2}kx_f$. El trabajo realizado por esta fuerza es igual al producto de este valor medio por x_f. Entonces, el trabajo W realizado por la mano sobre el muelle es

$$W = \tfrac{1}{2}kx_f^2$$

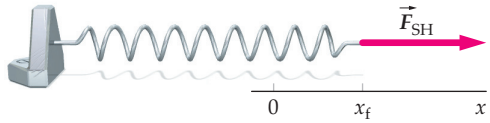


FIGURA 6.13

Ejemplo 6.5 Trabajo de un muelle realizado sobre un bloque

Un bloque de 4 kg apoyado sobre una mesa sin rozamiento está sujeto a un muelle horizontal con $k = 400$ N/m. El muelle está originalmente comprimido con el bloque en la posición $x_1 = -5$ cm (figura 6.14). Calcular (*a*) el trabajo realizado por el muelle cuando el bloque se desplaza desde $x_1 = -5$ cm hasta su posición de equilibrio $x_2 = 0$ y (*b*) la velocidad del bloque en la posición $x_2 = 0$.

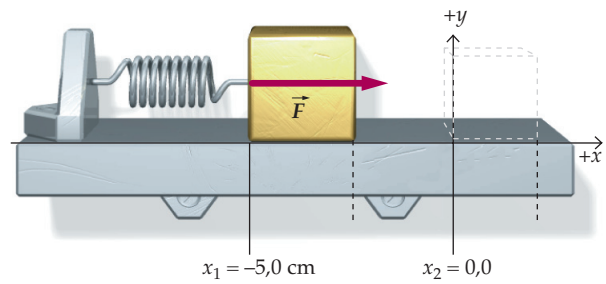


FIGURA 6.14

PLANTEAMIENTO Hacer un gráfico de F_x en función de x. El trabajo realizado sobre el bloque cuando éste se desplaza de x_1 a x_2 es igual al área bajo la curva de F_x en función de x entre estos límites (área sombreada en la figura 6.15), que puede calcularse integrando la fuerza sobre esta distancia. El trabajo realizado es igual a la variación de energía cinética, que coincide con la energía cinética final, ya que el valor inicial de esta magnitud es cero. La velocidad del bloque en el punto $x = 0$ puede calcularse a partir de la energía cinética del bloque.

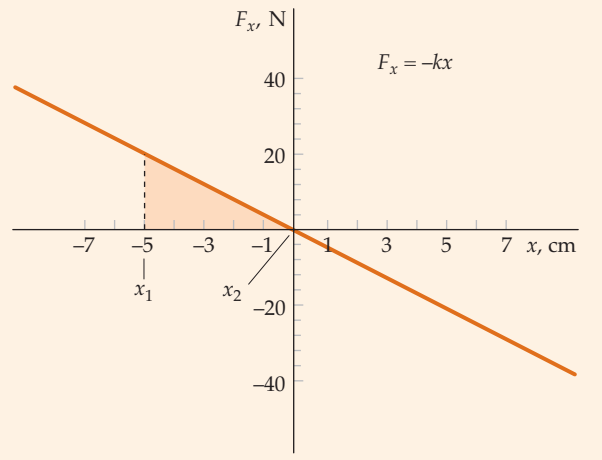


FIGURA 6.15

SOLUCIÓN

(*a*) El trabajo W realizado por el muelle sobre el bloque es la integral de $F_x\,dx$ desde $x_1 = -5$ cm a $x_2 = 0$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$
$$= -\tfrac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{x_2} = -\tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(400\text{ N/m})[(0{,}000\text{ m})^2 - (0{,}050\text{ m})^2]$$
$$= \boxed{0{,}50\text{ J}}$$

(*b*) Aplicando el teorema trabajo-energía cinética y despejando v_2:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

por lo tanto,

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m} = 0 + \frac{2(0{,}50\text{ J})}{4{,}0\text{ kg}} = 0{,}25\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = \boxed{0{,}50\text{ m/s}}$$

*Generalmente, valor medio se refiere a un promedio temporal, pero aquí nos referimos a un promedio sobre posiciones.

COMPROBACIÓN El trabajo realizado es positivo. La fuerza y el desplazamiento van en la misma dirección. Como el trabajo es positivo se espera que la velocidad aumente. Los resultados así lo confirman.

OBSERVACIÓN Obsérvese que no puede resolverse determinando la aceleración, aplicando la segunda ley de Newton, y después utilizando las ecuaciones cinemáticas de aceleración constante. La fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque, $F_x = -kx$, varía con la posición y, por lo tanto, la aceleración también es variable, con lo que la condición de aceleración constante no se cumple.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.5 Determinar la velocidad del bloque cuando alcanza la distancia $x = 3$ cm si parte de $x = 0$ con velocidad $v_x = 0{,}5$ m/s.

6.3 PRODUCTO ESCALAR

El trabajo se basa en la componente de la fuerza que va en la dirección del desplazamiento del cuerpo. Para un movimiento rectilíneo, es fácil calcular la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. Sin embargo, cuando la trayectoria es curvilínea, la fuerza y el desplazamiento pueden tener cualquier dirección. En ese caso, podemos utilizar la operación conocida como producto escalar, que nos proporcionará la componente de una fuerza dada en la dirección del desplazamiento. El producto escalar consiste en un producto de vectores que da como resultado una magnitud escalar.

Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria arbitraria como la que se muestra en la figura 6.16*a*. La componente $F_{||}$ en la figura 6.16*b* está relacionada con el ángulo ϕ entre $\vec{F}$ y $d\vec{\ell}$ por la expresión $F_{||} = F\cos\phi$, de tal modo que el trabajo realizado por $\vec{F}$ en un desplazamiento $d\vec{\ell}$ es

$$dW = F_{||}d\ell = F\cos\phi\, d\ell$$

Este tipo de combinación entre dos vectores y el coseno del ángulo comprendido entre ambos es muy frecuente en física y recibe el nombre de **producto escalar** de dos vectores. El producto escalar entre dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se escribe $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y se define como

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi \qquad 6.14$$

DEFINICIÓN: PRODUCTO ESCALAR

donde A y B son los módulos de los vectores y ϕ es el ángulo comprendido entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. (El ángulo entre dos vectores se define como el ángulo entre sus direcciones en el espacio.)

El producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ puede considerarse como el producto de A y la componente de $\vec{B}$ en la dirección de $\vec{A}$ ($A \times B\cos\phi$), o como el producto de B por la componente de $\vec{A}$ en la dirección de ($B \times A\cos\phi$) (ver figura 6.17). Las propiedades del producto escalar se resumen en la tabla 6.1. El producto escalar también puede escribirse en función de las componentes rectangulares de los dos vectores usando vectores unitarios:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

El producto escalar de un vector unitario por sí mismo, como $\hat{i}\cdot\hat{i}$, es 1 (esto se debe a que $\hat{i}\cdot\hat{i} = |\hat{i}||\hat{i}|\cos(0) = 1 \times 1 \times \cos(0) = 1$) de modo que un término como $A_x\hat{i}\cdot B_x\hat{i} = A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i}$ es igual a $A_x B_x$. Por otro lado, como los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son mutuamente perpendiculares, el producto escalar de

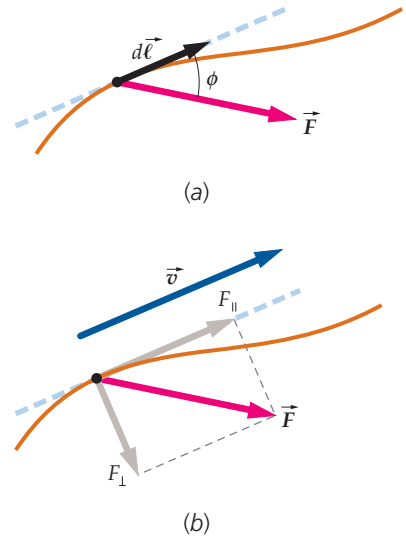


FIGURA 6.16 (*a*) Una partícula se desplaza a lo largo de una curva en el espacio. (*b*) La componente de la fuerza $F_\perp$ afecta a la dirección del movimiento, pero no a la velocidad. La componente tangencial $F_{||}$ cambia el módulo de la velocidad, pero no su dirección. $F_{||}$ es igual a la masa m por la aceleración tangencial dv/dt. La componente paralela de la fuerza realiza un trabajo $F_{||}d\ell$ mientras que la componente perpendicular no realiza trabajo.

Tabla 6.1 Propiedades del producto escalar

Si	se cumple
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares	$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ (pues $\phi = 90°$, $\cos\phi = 0$)
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos	$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$ (pues $\phi = 0°$, $\cos\phi = 1$)
$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{A} = 0$ o $\vec{B} = 0$ o $\vec{A} \perp \vec{B}$
Además	
$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$	porque $\vec{A}$ es paralelo a sí mismo
$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$	propiedad conmutativa de la multiplicación
$(\vec{A} + \vec{B})\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$	propiedad distributiva de la multiplicación

dos de ellos, como $\hat{i}\cdot\hat{j}$, es cero. (Esto se debe a que $\hat{i}\cdot\hat{j} = |\hat{i}||\hat{j}|\cos(90°) = 1\times 1\times\cos(90°) = 0$.) Por lo tanto, productos como $A_x\hat{i}\cdot B_y\hat{j}$ (llamados términos cruzados) son igual a cero. El resultado es

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad 6.15$$

La componente de un vector a lo largo de un eje puede escribirse como el producto escalar del vector por el vector unitario sobre dicho eje. Por ejemplo, la componente A_x se obtiene del producto

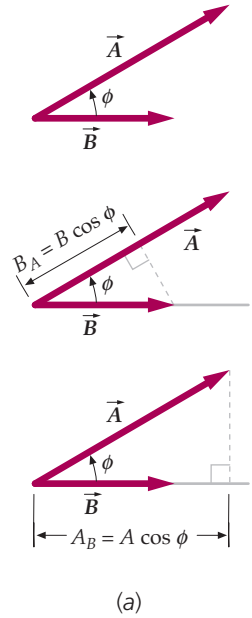
$$\vec{A}\cdot\hat{i} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot\hat{i} = A_x \qquad 6.16$$

Esta relación sugiere un procedimiento algebraico para obtener una ecuación para las componentes, a partir de una ecuación vectorial. Multiplicando la ecuación vectorial $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ por $\hat{i}$ se obtiene $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\hat{i} = \vec{C}\cdot\hat{i}$, que conduce a $A_x + B_x = C_x$.

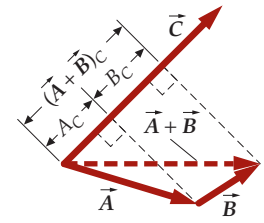
La regla para diferenciar el producto escalar es

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt} \qquad 6.17$$

Esta regla es análoga a la regla para diferenciar el producto de dos magnitudes escalares. La regla para diferenciar el producto escalar puede obtenerse diferenciando ambos lados de la ecuación 6.15.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 6.17 (*a*) El producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es el producto de A por la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$ o el producto de B sobre la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$. Es decir, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = AB_A = BA_B$. (*b*) $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\vec{C} = (\vec{A} + \vec{B})_C C$ (la proyección de $\vec{A} + \vec{B}$ en la dirección de $\vec{C}$ por C). Sin embargo, $(\vec{A} + \vec{B})_C = A_C + B_C$, por lo que $(\vec{A} + \vec{B})\cdot\vec{C} = (A_C + B_C)C = A_CC + B_CC = \vec{A}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{C}$. Es decir, en el producto escalar, el producto es distributivo respecto de la suma.

Ejemplo 6.6 Uso del producto escalar

(*a*) Determinar el ángulo formado por los vectores $\vec{A} = (3{,}00\hat{i} + 2{,}00\hat{j})$ m y $\vec{B} = (4{,}00\hat{i} - 3{,}00\hat{j})$ m (figura 6.18). (*b*) Calcular la componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$.

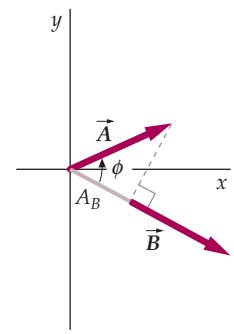


FIGURA 6.18

PLANTEAMIENTO Para el apartado (*a*), calculamos el ángulo a partir de la definición de producto escalar. Como nos dan las componentes de los vectores, calculamos el producto escalar y los valores de los módulos. Luego, utilizamos esos valores para calcular el ángulo ϕ a partir de la definición del producto escalar. La componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ se determina a partir del producto escalar de $\vec{A}\cdot\hat{B}$, donde $\hat{B} = \vec{B}/B$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de A, B y $\cos\phi$, y despejar $\cos\phi$:

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$, por lo tanto,

$$\cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

2. Determinar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ a partir de sus componentes:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y = (3{,}00\text{ m})(4{,}00\text{ m}) + (2{,}00\text{ m})(-3{,}00\text{ m})$$
$$= 12{,}0\text{ m}^2 - 6{,}00\text{ m}^2 = 6{,}0\text{ m}^2$$

3. Los módulos de los vectores se obtienen del producto escalar del vector por sí mismo:

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 = (3{,}00\text{ m})^2 + (2{,}00\text{ m})^2 = 13{,}0\text{ m}^2$$

de modo que $A = \sqrt{13{,}0}$ m

y

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = B^2 = B_x^2 + B_y^2 = (4{,}00\text{ m})^2 + (-3{,}00\text{ m})^2 = 25{,}0\text{ m}^2$$

por lo tanto, $B = 5{,}00$ m

4. Sustituir estos valores en la ecuación obtenida en el paso 1 para $\cos\phi$ y determinar ϕ:

$$\cos\phi = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{6{,}0\text{ m}^2}{(\sqrt{13}\text{ m})(5{,}00\text{ m})} = 0{,}333$$

$$\phi = \boxed{71°}$$

(*b*) La componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ es el producto escalar de $\vec{A}$ por el vector unitario $\hat{B} = \vec{B}/B$:

$$A_B = \vec{A}\cdot\hat{B} = \vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \frac{6{,}0\text{ m}^2}{5{,}00\text{ m}} = \boxed{1{,}2\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$ es $A\cos\phi = (\sqrt{13}\,\text{m})\cos 71° = 1{,}2\,\text{m}$. Este resultado verifica el resultado del apartado (*b*).

PROBLEMA PRÁCTICO 6.6 (*a*) Determinar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ para $\vec{A} = (3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j})\,\text{m}$ y $\vec{B} = (2{,}0\hat{i} + 8{,}0\hat{j})\,\text{m}$. (*b*) Determinar A, B y el ángulo formado entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para estos dos vectores.

TRABAJO EN LA NOTACIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR

En la notación del producto escalar, el trabajo dW realizado por una fuerza $\vec{F}$ sobre una partícula que experimenta un desplazamiento $d\vec{\ell}$ es

$$dW = F_{\parallel}d\ell = F\cos\phi\, d\ell = \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad 6.18$$

TRABAJO INFINITESIMAL

donde $d\ell$ es el módulo de $d\vec{\ell}$ y $F_{\parallel}$ es la componente de $\vec{F}$ en la dirección de $d\vec{\ell}$. El trabajo realizado sobre la partícula cuando se desplaza del punto 1 al 2 es

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{\ell} \qquad 6.19$$

DEFINICIÓN DE TRABAJO

(Si la fuerza se mantiene constante, el trabajo puede expresarse como $W = \vec{F}\cdot\vec{\ell}$, donde $\vec{\ell}$ es el desplazamiento neto.) En el capítulo 3, vimos que el desplazamiento se expresaba como $\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}$; $\vec{\ell}$ y $\Delta\vec{r}$ son diferentes símbolos para la misma magnitud.)

Cuando varias fuerzas $\vec{F}_i$ actúan sobre una partícula cuyo desplazamiento es $d\vec{\ell}$, el trabajo total es

$$dW_{\text{total}} = \vec{F}_1\cdot d\vec{\ell} + \vec{F}_2\cdot d\vec{\ell} + \cdots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots)\cdot d\vec{\ell} = (\Sigma\vec{F}_i)\cdot d\vec{\ell} \qquad 6.20$$

Ejemplo 6.7 Caja que hacemos subir por una pendiente

Se empuja una caja por la pendiente de una rampa con una fuerza horizontal $\vec{F}$ de 100 N. Por cada 5 m que se recorre, la caja sube 3 m. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$ cada 5 m de recorrido de la caja por la rampa (a) calculando directamente el producto escalar a partir de las componentes de $\vec{F}$ y del desplazamiento $\vec{\ell}$, (*b*) multiplicando el producto de los módulos de $\vec{F}$ y de $\vec{\ell}$ por el coseno del ángulo que forman sus direcciones, (*c*) calculando $F_{\parallel}$ (la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento) y multiplicándola por el módulo del desplazamiento, y (*d*) determinando la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza y multiplicándola por el módulo de la fuerza.

PLANTEAMIENTO Dibujar un esquema de la caja en su posición inicial y final. Utilizar un sistema de coordenadas con el eje x horizontal. Expresar los vectores fuerza y desplazamiento en sus componentes y efectuar el producto escalar. Determinar la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y viceversa.

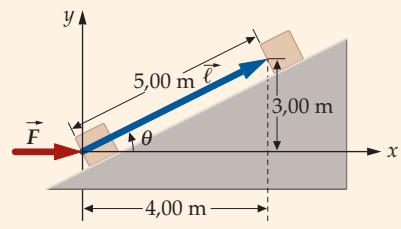


FIGURA 6.19

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un dibujo de la situación (figura 6.19).

2. Expresar $\vec{F}$ y $\vec{\ell}$ mediante sus componentes y realizar el producto escalar:

$$\vec{F} = (100\hat{i} + 0\hat{j})\,\text{N}$$
$$\vec{\ell} = (4{,}00\hat{i} + 3{,}00\hat{j})\,\text{m}$$
$$W = \vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_x\Delta x + F_y\Delta y = (100\,\text{N})(4{,}00\,\text{m}) + 0(3{,}00\,\text{m})$$
$$= \boxed{4{,}00\times 10^2\,\text{J}}$$

(*b*) Calcular $F\ell\cos\phi$, donde ϕ es el ángulo entre los dos vectores. Igualar esta expresión con el resultado del apartado (*a*) y determinar $\cos\phi$; al final, calcular el trabajo:

$$\vec{F}\cdot\vec{\ell} = F\ell\cos\phi \quad \text{y} \quad \vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_x\Delta x + F_y\Delta y$$

por lo tanto

$$\cos\phi = \frac{F_x\Delta x + F_y\Delta y}{F\ell} = \frac{(100\text{ N})(4{,}00\text{ m}) + 0}{(100\text{ N})(5{,}00\text{ m})} = 0{,}800$$

y

$$W = F\ell\cos\phi = (100\text{ N})(5{,}00\text{ m})0{,}800 = \boxed{4{,}00\times10^2\text{ J}}$$

(*c*) Determinar $F_{||}$ y multiplicarlo por ℓ:

$$F_{||} = F\cos\phi = (100\text{ N})0{,}800 = 80{,}0\text{ N}$$

$$W = F_{||}\ell = (80{,}0\text{ N})(5{,}00\text{ m}) = \boxed{4{,}00\times10^2\text{ J}}$$

(*d*) Multiplicar F y $\ell_{||}$, donde $\ell_{||}$ es la componente de $\vec{\ell}$ en la dirección de $\vec{F}$:

$$\ell_{||} = \ell\cos\phi = (5{,}00\text{ m})0{,}800 = 4{,}00\text{ m}$$

$$W = F\ell_{||} = (100\text{ N})(4{,}00\text{ m}) = \boxed{4{,}00\times10^2\text{ J}}$$

COMPROBACIÓN Los cuatro métodos de cálculo dan el mismo resultado para el trabajo.

OBSERVACIÓN En este problema, es más fácil calcular el trabajo usando el procedimiento del apartado (*a*). En otros casos, puede resultar conveniente utilizar cualquiera de los otros métodos explicados en este problema. Conviene familiarizarse con cualquiera de estos procedimientos para poder usar el que más convenga en función del problema que se pretenda resolver.

Ejemplo 6.8 Desplazamiento de una partícula — *Inténtelo usted mismo*

Una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{\ell} = (2{,}00\hat{\imath} - 5{,}00\hat{\jmath})$ m. Durante el desplazamiento, una fuerza constante $\vec{F} = (3{,}00\hat{\imath} + 4{,}00\hat{\jmath})$ N actúa sobre la partícula. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la fuerza y (*b*) la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

PLANTEAMIENTO El trabajo W se determina calculando $W = \vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_x\Delta x + F_y\Delta y$. Combinándolo con la relación $\vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_{||}\ell$, podemos determinar la componente de $\vec{F}$ en la dirección del desplazamiento.

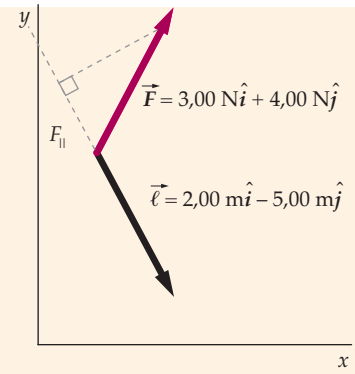


FIGURA 6.20

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Hacer un esquema que muestre $\vec{F}$, $\vec{\ell}$ y $F_{||}$ (figura 6.20).	
2. Calcular el trabajo realizado W.	$W = \vec{F}\cdot\vec{\ell} = \boxed{-14{,}0\text{ J}}$
(*b*) 1. Calcular $\vec{\ell}\cdot\vec{\ell}$ y utilizar el resultado para determinar la distancia ℓ.	$\vec{\ell}\cdot\vec{\ell} = 29{,}0\text{ m}^2$, por tanto, $\ell = \sqrt{29{,}0}\text{ m}$
2. Usando $\vec{F}\cdot\vec{\ell} = F_{||}\ell$, calcular $F_{||}$.	$F_{||} = \vec{F}\cdot\vec{\ell}/\ell = \boxed{-2{,}60\text{ N}}$

COMPROBACIÓN A partir de la figura 6.20 se observa como el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{\ell}$ está entre 90° y 180°; por tanto, uno espera que $F_{||}$ y el trabajo sean negativos.

OBSERVACIÓN En ningún momento se dice que el movimiento se realiza a lo largo de un camino concreto. Como la fuerza es constante, el trabajo depende del desplazamiento neto $\vec{\ell}$, pero no del camino tomado. El camino bien podría ser una línea recta o una trayectoria curva (figura 6.21) y no cambiaría ninguno de los resultados.

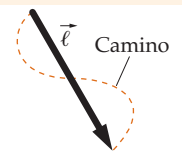


FIGURA 6.21

PROBLEMA PRÁCTICO 6.7 Determinar el módulo de $\vec{F}$ y el ángulo ϕ entre $\vec{F}$ y $\vec{\ell}$.

Ejemplo 6.9 Diferenciación de un producto escalar

Demostrar que $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)/dt$, donde $\vec{a}$ es la aceleración y $\vec{v}$ es el vector velocidad de módulo v.

PLANTEAMIENTO Se utiliza la regla para diferenciar el producto escalar, ya que $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$.

SOLUCIÓN

Aplicar al producto $\vec{v} \cdot \vec{v}$ la regla para diferenciar productos escalares:

$$\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = 2\vec{a} \cdot \vec{v}$$

por lo tanto, $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$

COMPROBACIÓN La velocidad v tiene dimensiones de longitud sobre tiempo, por tanto, dv^2/dt tiene dimensiones de longitud al cuadrado sobre tiempo al cubo. La aceleración $\vec{a}$ tiene dimensiones de longitud sobre tiempo al cuadrado, por tanto, $\vec{a} \cdot \vec{v}$ tiene dimensiones de longitud al cuadrado sobre tiempo al cubo. Entonces, ambos lados $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)/dt$ tienen las mismas unidades (longitud al cuadrado sobre tiempo al cubo).

OBSERVACIÓN Este ejemplo atañe únicamente a parámetros cinemáticos, por lo que la relación resultante es estrictamente cinemática. Asimismo, el resultado es válido siempre, ya que sólo se ha utilizado la definición de aceleración y el cálculo de la derivada de un producto.

En el ejemplo 6.9 hemos obtenido la relación cinemática

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) \qquad 6.21$$

En la sección 6.4, esta ecuación se utiliza para deducir el teorema trabajo-energía cinética para partículas que se mueven a lo largo de trayectorias curvas bajo la influencia de fuerzas no necesariamente constantes.

POTENCIA

En la definición de trabajo no se dice nada acerca del tiempo que se tarda en realizar el trabajo. Por ejemplo, si se empuja una caja cuesta arriba a velocidad constante, se hace el mismo trabajo sobre la caja independientemente de lo que se tarde en desplazar la caja. En física, el ritmo al cual una fuerza realiza un trabajo se denomina potencia P. Como el trabajo es una medida de la energía transferida por una fuerza, la potencia es el ritmo al que se transmite la energía.

Consideremos una partícula con velocidad instantánea $\vec{v}$. En un intervalo corto de tiempo dt, la partícula se desplaza $d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$. El trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la partícula durante este intervalo de tiempo es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$$

La potencia suministrada por la partícula es

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad 6.22$$

DEFINICIÓN: POTENCIA

Obsérvese la diferencia entre potencia y trabajo. Dos motores que elevan una determinada carga a igual distancia consumen la misma energía, pero el que la levanta en menos tiempo es más potente.

La potencia es una magnitud escalar, al igual que el trabajo y la energía. La unidad del SI de la potencia es un joule por segundo, que se llama **watt** (W):

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}$$

En el sistema utilizado habitualmente en los EEUU, la unidad de energía es el pie-libra y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. Un múltiplo muy usado de esta unidad es el caballo de fuerza (hp):

$$1\ \text{hp} = 550\ \text{ft}\cdot\text{lb/s} \approx 746\ \text{W}$$

El producto de la unidad de potencia y la unidad de tiempo es una unidad de energía. Las compañías eléctricas facturan por la energía consumida, no por la potencia, normalmente en kilowatts-hora (kW · h). Un kilowatt -hora de energía es la energía transferida en una hora a un ritmo constante de un kilowatt, o bien

$$1\ \text{kW}\cdot\text{h} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3{,}6 \times 10^6\ \text{W}\cdot\text{s} = 3{,}6\ \text{MJ}$$

Ejemplo 6.10 Potencia de un motor

Un pequeño motor mueve un ascensor que eleva una carga de ladrillos de peso 500 N a una altura de 10 m en 20 s (figura 6.22) a velocidad constante. La plataforma pesa 300 N. ¿Cuál es la potencia mínima que debe suministrar el motor?

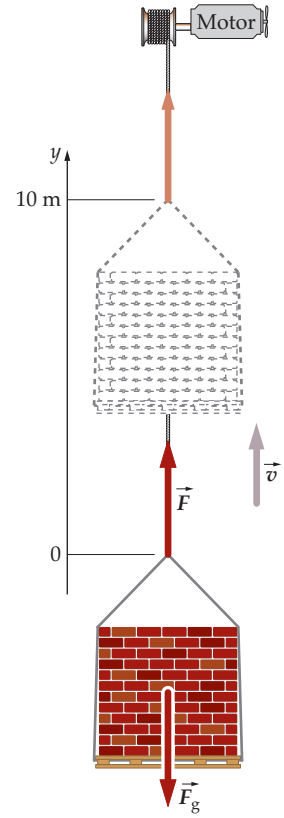


FIGURA 6.22

PLANTEAMIENTO Como la aceleración es cero, el módulo de la fuerza hacia arriba ejercida por el motor es igual al peso de los ladrillos más la plataforma, 800 N. La potencia transmitida por el motor es la suministrada por $\vec{F}$.

SOLUCIÓN

La potencia viene dada por $\vec{F}\cdot\vec{v}$:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = Fv\cos\phi = Fv\cos(0) = Fv$$
$$= (800\ \text{N})\frac{10\ \text{m}}{20\ \text{s}} = \boxed{4{,}0 \times 10^2\ \text{W}}$$

COMPROBACIÓN El trabajo realizado por la fuerza es (800 N)(10 m) = 8000 J. Este trabajo realizado en 20 s nos da un trabajo de 400 W.

OBSERVACIÓN (1) El ascensor podría comunicar una aceleración sobre los ladrillos y la plataforma. Por ejemplo, si los ladrillos y la plataforma parten del reposo se acelerarían hasta alcanzar la velocidad constante. En ese caso, la potencia resultante sería mayor que 400 W. Sin embargo, al llegar al final del trayecto se tendría que desacelerar para acabar en reposo. En ese caso, la potencia resultante sería inferior a 400 W. El valor medio de la potencia suministrada por el motor sería de 400 W. (2) Esta potencia mínima resultante de 400 W es algo superior a medio caballo de vapor.

PROBLEMA PRÁCTICO 6.8 Calcular la potencia media suministrada por el motor necesaria para elevar los ladrillos y la plataforma una altura de 10 m en 40 s. ¿Cuál sería el trabajo realizado por el motor? ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad?

Ejemplo 6.11 Potencia y energía cinética

Demostrar que la potencia transmitida sobre una partícula por la fuerza neta que actúa sobre ella es igual a la tasa de cambio de la energía cinética de la partícula.

PLANTEAMIENTO La potencia transmitida por la fuerza neta viene dada por $\vec{F}_{\text{neta}}\cdot\vec{v}$. Demostrar que $\vec{F}_{\text{neta}}\cdot\vec{v} = dK/dt$, donde $K = \frac{1}{2}mv^2$.

SOLUCIÓN

1. Sustituir en $\vec{F}_{\text{neta}}$ aplicando la segunda ley de Newton: $\vec{F}_{\text{neta}}\cdot\vec{v} = m\vec{a}\cdot\vec{v}$

2. El producto $\vec{a}\cdot\vec{v}$ está relacionado con la derivada de v^2 respecto al tiempo (ecuación 6.21): $\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = 2\vec{a}\cdot\vec{v}$

3. Introducir el resultado del paso 2 en el resultado del paso 1: $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v} = m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}v^2$
4. La masa m es constante, por lo que conjuntamente con el $\frac{1}{2}$ puede introducirse dentro de la derivada: $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$
5. La función que se deriva es precisamente la energía cinética: $\boxed{P_{\text{neta}} = \vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt}}$

COMPROBACIÓN El joule es la unidad de energía, por tanto, dK/dt tiene unidades de joules por segundo o watts. El watt es la unidad de potencia, por tanto, el resultado es dimensionalmente consistente.

Del ejemplo 6.11 se ha visto que

$$P_{\text{neta}} = \vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = \frac{dK}{dt} \qquad 6.23$$

que relaciona la potencia proporcionada por la fuerza neta con el ritmo con el que cambia la energía cinética de un cuerpo cualquiera que pueda ser descrito mediante una partícula.

6.4 TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA. TRAYECTORIAS CURVILÍNEAS

El teorema trabajo-energía cinética a lo largo de una curva arbitraria puede establecerse integrando los dos términos de $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v} = dK/dt$ (ecuación 6.23) con respecto del tiempo. Esto nos conduce a

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v}\, dt = \int_1^2 \frac{dK}{dt} dt \qquad 6.24$$

Como $d\vec{\ell} = \vec{v}\, dt$, donde $d\vec{\ell}$ es el desplazamiento durante el tiempo dt, y teniendo en cuenta, además, que $(dK/dt)dt = dK$, la ecuación 6.24 puede expresarse

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 dK$$

donde la integral de la izquierda es el trabajo total W_{total} realizado sobre la partícula. La integral de la derecha es sencilla, y así se obtiene

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\ell} = K_2 - K_1 \quad (\text{o } W_{\text{total}} = \Delta K) \qquad 6.25$$

ECUACIÓN TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA EN TRES DIMENSIONES

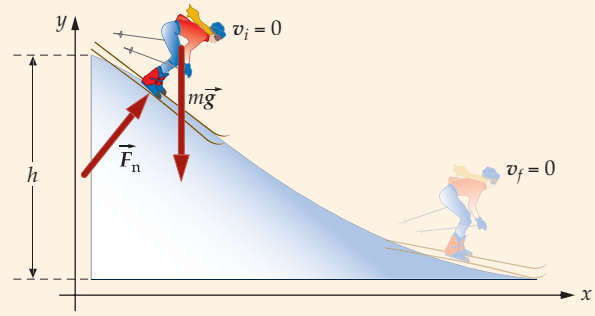
La ecuación 6.25 se obtiene directamente de la segunda ley de Newton del movimiento.

Ejemplo 6.12 Trabajo realizado sobre una esquiadora *Póngalo en su contexto*

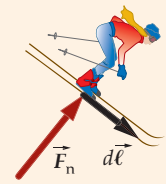
Dos esquiadoras visitan una estación de esquí que tiene dos pistas, una para principiantes y otra para expertos. Ambas pistas comienzan en la parte alta de un telearrastre y acaban en el punto donde comienza el telearrastre. Sea h la distancia vertical entre el comienzo y el final de ambas pistas. Naturalmente, la pista para principiantes es más larga y con pendientes menos pronunciadas que la pista para esquiadores expertos. Las dos esquiadoras, una de las cuales es mucho mejor esquiadora que la otra, están probando unos esquís experimentales que no tienen rozamiento. Para hacer las cosas más interesantes, la menos experta apuesta con su amiga que si una va por la pista para expertos y la otra por la de principiantes, ambas llegaran al final común de las dos pistas a la misma velocidad. La experta acepta la apuesta (olvidándose que su amiga está siguiendo un curso de física) con la condición de que ambas comiencen desde el reposo en el mismo punto en la parte alta del telearrastre y que bajen toda la pista sin frenar. ¿Quién gana la apuesta, suponiendo que la resistencia con el aire es despreciable?

(PhotoDisc/Getty.)

PLANTEAMIENTO Dado que las dos amigas se deslizan con los esquís, pueden considerarse como dos partículas. Sobre cada una de las esquiadoras actúan dos fuerzas, la gravedad $m\vec{g}$ y la fuerza normal $\vec{F}_n$. (El teorema trabajo-energía cinética sólo funciona para partículas.)



(a)



(b)

FIGURA 6.23

SOLUCIÓN

1. Hacer un esquema de las fuerzas que actúan sobre una cualquiera de las esquiadoras dibujando los dos vectores e incluyendo los ejes de coordenadas (figura 6.23*a*). El teorema trabajo-energía cinética, con $v_i = 0$, relaciona la velocidad final v_f con el trabajo total:

2. La velocidad final está relacionada con la energía cinética final, que a su vez está relacionada con el trabajo total por el teorema trabajo-energía cinética:
$$W_{total} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

3. Para cada esquiadora, el trabajo total es el trabajo realizado por la fuerza normal más el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria:
$$W_{total} = W_n + W_g$$

4. La fuerza $m\vec{g}$ sobre las esquiadoras es constante, pero la fuerza normal $\vec{F}_n$ no lo es. Calcular primero el trabajo realizado por $\vec{F}_n$. Así, calcular el trabajo dW_n realizado sobre una de las esquiadoras por $\vec{F}_n$ para un desplazamiento infinitesimal $d\vec{\ell}$ (figura 6.23*b*) en una posición arbitraria a lo largo del descenso:
$$dW_n = \vec{F}_n \cdot d\vec{\ell} = F_n \cos\phi \, d\ell$$

5. Determinar el ángulo ϕ entre las direcciones de $\vec{F}_n$ y $d\vec{\ell}$. El desplazamiento $d\vec{\ell}$ es paralelo a la pendiente:
$$\phi = 90°$$

6. Calcular el trabajo realizado por $\vec{F}_n$ durante todo el descenso:
$$W_n = \int F_n \cos 90° \, d\ell = \int (0)\, d\ell = 0$$

7. La fuerza de la gravedad es constante; por lo tanto, el trabajo realizado por la gravedad es $W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{\ell}$, donde $\vec{\ell}$ es el desplazamiento neto desde el inicio de la pista al final (figura 6.24):
$$W_g = m\vec{g} \cdot \vec{\ell} = -mg\,\hat{j} \cdot (\Delta x\,\hat{i} + \Delta y\,\hat{j}) = -mg\,\Delta y$$

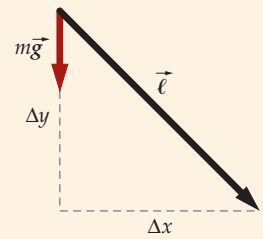


FIGURA 6.24

8. Las esquiadoras descienden por la pendiente, por lo que Δy es negativo. De la figura 6.23*a*, vemos que $\Delta y = -h$:
$$\Delta y = -h$$

9. Sustituyendo, se obtiene:
$$W_g = mgh$$

10. Aplicar el teorema trabajo-energía cinética para determinar v_f:
$$W_n + W_g = \Delta K$$

11. La velocidad final depende sólo de h, que es la misma para los dos descensos. Ambas esquiadoras tendrán la misma velocidad final.
$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0 \quad \text{por lo tanto,} \quad v_f = \sqrt{2gh}$$
La esquiadora menos experta ha ganado la apuesta, ya que ambas han llegado a la misma velocidad.

COMPROBACIÓN La fuerza que genera el movimiento es la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es proporcional a la masa, como también lo será el trabajo realizado. Como la energía cinética es proporcional a la masa, la masa se anula en la ecuación del teorema del trabajo-energía cinética. Así, es de esperar que la velocidad final sea independiente de la masa.

OBSERVACIÓN La esquiadora más experta invertirá un tiempo menor en llegar a la línea de llegada, pero la apuesta no era ésta. Lo que se ha demostrado en este ejercicio es que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad es igual a mgh. No depende de la forma de la colina ni del camino tomado. Depende únicamente de la diferencia de altura entre el punto de salida y el de llegada.

* 6.5 TRABAJO DEL CENTRO DE MASAS

A continuación, vamos a analizar la relación del trabajo-energía cinética para sistemas que no se pueden describir mediante una sola partícula. (Una partícula es un sistema tal que todas sus partes realizan el mismo desplazamiento.) En el capítulo 5, se determinó (ecuación 5.23) que para un sistema de partículas

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} = \sum \vec{F}_{i\,\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \qquad 6.26$$

donde $M = \Sigma m_i$ es la masa del sistema y $\vec{a}_{\text{cm}}$ es la aceleración del centro de masas. La ecuación 6-26 puede ser integrada a fin de obtener una ecuación útil que relacione el trabajo y la energía cinética y que pueda ser aplicada a sistemas que se pueden describir como partículas. En primer lugar, multiplicaremos ambos lados de la ecuación 6.26 bajo producto escalar por $\vec{v}_{\text{cm}}$ para obtener

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \cdot \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2\right) = \frac{dK_{\text{tras}}}{dt} \qquad 6.27$$

donde $K_{\text{tras}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$, denominada **energía cinética de traslación**, es la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas. Multiplicando ambos lados de la ecuación 6.27 por dt e integrando, se obtiene

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}} \qquad 6.28$$

RELACIÓN TRABAJO DEL CENTRO DE MASAS-ENERGÍA CINÉTICA

donde $d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \vec{v}_{\text{cm}}dt$. La integral de la ecuación 6.28 se denomina **trabajo del centro de masas*** realizado por la fuerza neta sobre el sistema de partículas. La ecuación 6.28 es la **relación entre el trabajo del centro de masas y la energía cinética**. Expresado en palabras: "El trabajo del centro de masas realizado por una fuerza neta externa sobre un sistema de partículas es igual al cambio de la energía cinética de traslación del sistema." Aunque la ecuación 6.28 se parece mucho a la ecuación del teorema trabajo-energía cinética (ecuación 6.25) hay algunas diferencias importantes. La relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación tiene que ver sólo con el desplazamiento y la velocidad del centro de masas del sistema; así, cuando utilizamos esta relación, ignoramos el movimiento de cualquier otra parte del sistema relativo al centro de masas. (El sistema de referencia del centro de masas es un sistema de referencia† que no rota y que se desplaza con el centro de masas.)

Para un sistema que se mueve como una partícula (con todas sus partes moviéndose a la misma velocidad) la relación trabajo del centro de masas-energía cinética se transforma en el teorema trabajo-energía cinética.

A veces es útil hacer referencia al trabajo del centro de masas hecho por una sola fuerza. El trabajo del centro de masas W_{cm} realizado por una fuerza es

$$W_{\text{cm}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} \qquad 6.29$$

* Al trabajo del centro de masas se le llama también pseudotrabajo.

† Un sistema de referencia que no rota es un sistema que no rota respecto a un sistema de referencia inercial.

Ejemplo 6.13 Dos discos y una cuerda

Dos discos idénticos se encuentran sobre una mesa de aire y conectados por un trozo de cuerda (ver figura 6.25). Los discos, ambos con masa m, están inicialmente en la configuración que muestra la figura. Una fuerza constante de módulo F acelera el sistema hacia la derecha. Pasado el punto P, la fuerza se desplaza una distancia d, los dos discos chocan y se deslizan unidos. ¿Cuál es la velocidad de los discos inmediatamente después de la colisión?

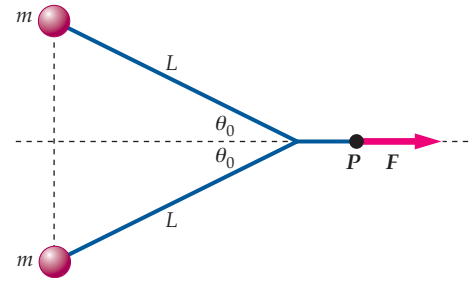


FIGURA 6.25

PLANTEAMIENTO Considere el sistema de los dos discos y la cuerda. Aplique la relación del trabajo del centro de masas-energía cinética. Después de la colisión la velocidad de cada disco es igual a la velocidad del centro de masas. (Los discos se deslizan sobre la mesa sin rozamiento.)

SOLUCIÓN

1. Dibuje el sistema en la situación inicial y después de haber recorrido una distancia d (figura 6.26):

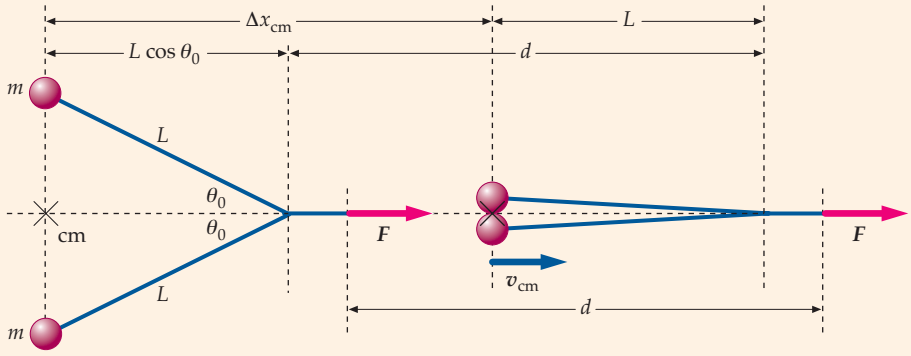


FIGURA 6.26 Como el centro de masas se desplaza una distancia Δx_{cm}, el punto de aplicación de la fuerza se desplaza una distancia d.

2. Aplique la relación del trabajo del centro de masas-energía cinética al sistema. La fuerza neta sobre el sistema es $\vec{F} = F\hat{i}$:

$$\int_i^f \vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot d\vec{\ell}_{cm} = \Delta K_{\text{tras}}$$

$$\int_i^f F\hat{i} \cdot dx_{cm}\hat{i} = K_{\text{tras f}} - K_{\text{tras i}}$$

$$F\int_i^f dx_{cm} = E_{c\,\text{tras f}} - 0$$

$$F\Delta x_{cm} = \tfrac{1}{2}(2m)v_{cm}^2 = mv_{cm}^2$$

3. Determine Δx_{cm} en función de d y L, a partir de la figura 6.26

$$\Delta x_{cm} + L = L\cos\theta_0 + d$$
$$\text{luego,}\quad \Delta x_{cm} = d - L(1 - \cos\theta_0)$$

4. Introduzca el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2 y despeje v_{cm}:

$$F\Delta x_{cm} = mv_{cm}^2$$
$$F[d - L(1 - \cos\theta_0)] = mv_{cm}^2$$
$$\text{luego,}\quad v_{cm} = \boxed{\sqrt{\frac{F[d - L(1 - \cos\theta_0)]}{m}}}$$

COMPROBACIÓN Si el ángulo inicial θ_0 es cero, el sistema se puede describir como una sola partícula que cumpliría el teorema trabajo-energía cinética. Esto daría $Fd = \frac{1}{2}(2m)v^2 = mv^2$, o $v = \sqrt{Fd/m}$. El resultado del paso 4 da el mismo resultado si tomamos $\theta_0 = 0$.

OBSERVACIÓN (1) En este ejemplo, el desplazamiento del centro de masas Δx_{cm} es inferior a d, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza $\vec{F}$. En consecuencia, el trabajo del centro de masas hecho por la fuerza es menor que el trabajo Fd realizado por la fuerza. (2) Los discos pierden energía cinética cuando colisionan y permanecen unidos. Esta energía aparece en otra forma de energía, como, por ejemplo, en forma de energía térmica. La conservación de la energía se estudia en el capítulo 7.

Ejemplo 6.14 Distancia de frenado

El conductor de un coche de 1000 kg que se mueve a 90 km/h sobre una carretera recta horizontal pisa los frenos con la máxima fuerza para evitar un accidente. El sistema ABS no funciona y la ruedas se bloquean completamente, de forma que los neumáticos se deslizan sobre el pavimento hasta que el coche se detiene. El coeficiente de rozamiento cinético entre el pavimento y los neumáticos es 0,8. ¿Qué distancia recorre el coche hasta pararse?

PLANTEAMIENTO El coche no se puede describir como una sola partícula. Los puntos de aplicación de las fuerzas de rozamiento cinéticas son las partes de los neumáticos que están en contacto con el pavimento. Los puntos de contacto entre los neumáticos y el pavimento se pegan y se deslizan de forma alternativa. La relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación aplicada al coche nos proporcionará la distancia de frenado.

SOLUCIÓN

1. Escribir la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación. Necesitamos determinar el desplazamiento del centro de masas:

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta ext}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}}$$

2. Dibujar el diagrama de fuerzas del coche durante el deslizamiento (figura 6.27):

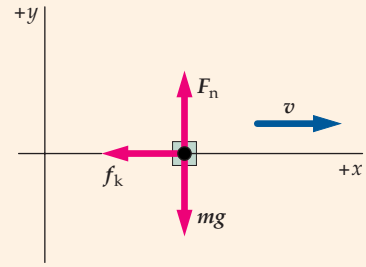


FIGURA 6.27

3. La aceleración vertical es cero, de forma que la fuerza normal y la gravitacional suman cero. La fuerza neta sobre el coche es igual a la fuerza de rozamiento. Calculamos la fuerza neta sobre el coche:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_n + m\vec{g} + \vec{f}_c = \vec{f}_c$$

luego

$$F_{\text{neta}} = f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg$$

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -\mu_c mg\,\hat{\imath}$$

4. Aplicamos la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación al coche:

$$\int_1^2 \vec{F}_{\text{neta}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}}$$

$$\int_1^2 -\mu_e mg\,\hat{\imath} \cdot dx_{\text{cm}}\,\hat{\imath} = K_{\text{tras}2} - K_{\text{tras}1}$$

$$-\mu_e mg \int_1^2 dx_{\text{cm}} = 0 - K_{\text{tras}1}$$

$$-\mu_e mg(x_{\text{cm}2} - x_{\text{cm}1}) = -\tfrac{1}{2} m v_{\text{cm}1}^2$$

5. Despejamos el desplazamiento del coche, pero primero pasamos la velocidad de km/h a m/s:

$$v_{\text{cm}1} = 90 \text{ km/h} \cdot \frac{1 \text{ h}}{(3{,}6 \text{ ks})} = 25 \text{ m/s}$$

por tanto

$$\Delta x_{\text{cm}} = x_{\text{cm}2} - x_{\text{cm}1} = \frac{v_{\text{cm}1}^2}{2\mu_c g}$$

$$\Delta x_{\text{cm}} = \frac{(25 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (0{,}80)(9{,}81 \text{ m/s}^2)} = \boxed{40 \text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Era de esperar que cuanto mayor sea la velocidad inicial del coche, mayor sea la distancia de frenado y menor sea cuanto mayor sea el coeficiente de rozamiento. El resultado del paso 5 confirma este razonamiento.

OBSERVACIÓN La energía cinética de traslación del coche se disipa como energía térmica entre los neumáticos y el pavimento. La disipación de la energía cinética en energía térmica por medio del rozamiento cinético se analizará en el capítulo 7.

Montañas rusas, equipajes y trabajo (¡Dios mío!)

Los métodos de transporte de equipajes de los grandes aeropuertos tienen mucho en común con las montañas rusas. Los cambios bruscos de aceleración durante largos periodos de tiempo no son buenas ni para los pasajeros ni para los equipajes. Ambos deben moverse rápidamente, pero sin paradas ni sacudidas.

Algunas vagonetas de las montañas rusas (y algunos transportadores de equipaje) ganan energía cinética a causa del trabajo realizado sobre ellas por fuerzas constantes generadas por series de **motores de inducción lineal** (LIM). Un LIM es un mecanismo electromagnético que genera una fuerza sin piezas en movimiento.[1] La razón principal para el uso de los LIM es su flexibilidad para aplicar fuerza en determinados puntos durante el movimiento de las vagonetas de las montañas rusas o las carretillas de los equipajes. Estas vagonetas y carretillas circulan por unos raíles que utilizan sensores que determinan su velocidad y las comunican a los controladores de los motores. Los LIM dejan de funcionar cuando el vehículo adquiere la velocidad deseada. En ambos casos, los LIM pueden actuar como frenos, ejerciendo fuerzas en la dirección contraria al movimiento.

Speed—The Ride es una montaña rusa lanzada desde el Café Nascar en el Hotel y Casino Sahara de las Vegas. La empresa que la diseñó, Ingenieurbuero Stengel GmbH, colocó 88 motores en tres puntos a lo largo de los raíles. La primera serie de motores lanza el tren. El tren de 6 vagonetas y 24 pasajeros se acelera suavemente a 72 km/h en 2 segundos. Pasa por una curva y desciende rápidamente hasta unos 8 m bajo tierra antes de subir y entrar en un doble rizo.[2] Después de pasar por el doble rizo, las fuerzas ejercidas por la segunda serie de LIM cuadruplican la energía cinética del tren en 2 segundos.[3] A continuación, pasa a través del Las Vegas Boulevard y recorre unos 60 m en dirección casi vertical. Por razones de seguridad, hay una serie de LIM en la cima, que pueden actuar como frenos si fuese necesario. El tren viaja de nuevo, pero en sentido inverso, a través de toda la montaña rusa. Cuando regresa a la estación, los LIM actúan como freno hasta detener el tren.

Sobre los trenes de las montañas rusas actúan otras fuerzas, además de las fuerzas de los LIM, como la gravedad, el rozamiento o la fuerza normal. Cada una de las vagonetas del tren recorre el mismo camino, pero los puntos inicial y final no son los mismos. La aceleración máxima de cada pasajero es 3,5g. Esta aceleración no es exageradamente grande —la aceleración instantánea producida por un almohadillazo sobre la cabeza puede ser superior a 20g.[4]

El aeropuerto internacional de Heathrow suele transportar equipaje entre las terminales 1 y 4. Las terminales están separadas más de 1 km y están conectadas por un tren. Cada equipaje se coloca en pequeñas carretillas que se mueven sobre los raíles. (La velocidades de las carretillas están controladas por LIM montados en los raíles.) Las carretillas bajan hasta llegar a 20 m bajo tierra. Viajan por un túnel a 30 km/h, velocidad mantenida por LIM distribuidos a lo largo de los raíles. Al final de túnel, las carretillas suben hasta la planta apropiada de la otra terminal. Cuando cambie de vuelo en un gran aeropuerto, recuerde que el equipaje también se desplaza con su propio vehículo.

Las velocidades de las carretillas que transportan los equipajes entre las terminales del aeropuerto Internacional de Heathrow están controladas por LIM.
(Vanderlande Industries.)

[1] "Whoa! Linear motors blast Vegas coaster straight up." *Machine Design*, May 4, 2000. Vol. 28; "Sectors" EI-WHS http://www.eiwhs.co.uk/sectors.asp Abril 2006; "Baggage Handling Case Study." Force Engineering http://www.force.co.uk/bagcase.htm, Abril 2006; "Leisure Rides." Force Engineering, http://www.force.co.uk/leishome.htm April 2006.

[2] "Roller coaster constructor Werner Stengel receives honorary doctorate at Göteborg University." Göteborg University Faculty of Science. http://www2.science.gu.se/english/werner_stengel.shtml Abril 2006.

[3] "Speed Facts." Sahara Hotel and Casino, http://www.saharavegas.com/thrills/facts.html Abril 2006.

[4] Exponent Failure Analysis Associates. *Investigation of Amusement Park and Roller Coaster Injury Likelihood and Severity:* 48. http://www.emerson-associates.com/safety/articles/ExponentReport.pdf Abril 2006.

Resumen

1. Trabajo, energía cinética y potencia son magnitudes dinámicas derivadas importantes.
2. El teorema del trabajo-energía cinética es una relación importante deducida de las leyes de Newton aplicadas a una partícula. (En este contexto, una partícula es un objeto perfectamente rígido que se mueve sin rotar.)
3. El producto escalar de dos vectores es una definición matemática útil en todos los campos de la física.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Trabajo	$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 F_{\parallel} d\ell$ (definición)
Fuerza constante	$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = F_{\parallel}\ell = F\ell_{\parallel} = F\ell\cos\theta$
Movimiento en una dimensión—Fuerza constante	$W = F_x \Delta x = F\lvert\Delta x\rvert\cos\theta$
Movimiento en una dimensión—Fuerza variable	$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx =$ área bajo la curva de F_x en función de x
2. Energía cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$ (definición)
3. Teorema del trabajo-energía cinética	$W_{\text{total}} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$
4. Producto escalar	$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$ (definición)
En función de las componentes	$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
Componente del vector	$\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x$
Derivada	$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$
5. Potencia	$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$
6. Relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación	$\int_1^2 \vec{F}_{\text{net a ext}} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{tras}}$ 6.2 Esta relación es útil para resolver problemas de sistemas que no se pueden modelar como una sola partícula
Trabajo del centro de masas	$W_{\text{cm}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_{\text{cm}}$ 6.3
Energía cinética de traslación	$K_{\text{tras}} = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$, donde $M = \Sigma m_i$

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

6.1 El trabajo realizado por la fuerza es negativo.

Respuestas a los problemas prácticos

6.1 34 J

6.2 $1{,}7 \times 10^2$ N

6.3 4,1 m/s

6.4 La región de interés está por debajo del eje x; por tanto, el "área bajo la curva" es negativa. El "área bajo la curva" es $-(|A_1| - |A_2|)$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.28. El trabajo realizado por el muelle es

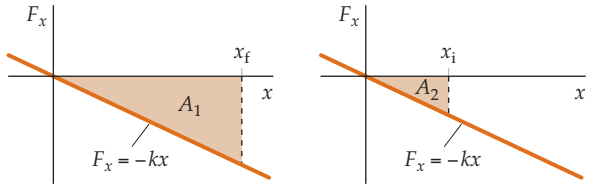


FIGURA 6.28

igual al "área bajo la curva" y el área de un triángulo es una mitad de la base por la altura. Entonces,

$$W_{\text{muelle}} = -(|A_1| - |A_2|) = -(\tfrac{1}{2} \cdot kx_f \cdot x_f - \tfrac{1}{2} \cdot kx_i \cdot x_i) = \boxed{\tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2}$$

que es idéntico a la ecuación 6.13.

6.5 0,40 m/s

6.6 (*a*) 38 m², (*b*) $A = 5{,}0$ m, $B = 8{,}2$ m, $\phi = 23°$

6.7 $F = 5{,}00$ N, $\phi = 121°$

6.8 $P = 2{,}0 \times 10^2$ W, $W = 8{,}0 \times 10^3$ J, $W = -8{,}0 \times 10^3$ J

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s² para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso: (*a*) Si el trabajo total realizado sobre una partícula no es cero, entonces el módulo de su velocidad debe cambiar. (*b*) Si el trabajo total realizado sobre una partícula no es cero, entonces el vector velocidad debe cambiar. (*c*) Si el trabajo total realizado sobre una partícula no era cero, entonces la dirección del movimiento no podía haber cambiado. (*d*) Las fuerzas que actúan sobre una partícula no realizan trabajo si la partícula se mantiene en reposo. (*e*) Una fuerza que en todo momento es perpendicular a la velocidad de una partícula no realiza trabajo sobre ésta.

2 • Se tiene que empujar una caja pesada en línea recta sobre una mesa horizontal y rugosa. La caja parte del reposo y acaba en reposo. Describa el trabajo realizado sobre la caja incluyendo el signo de cada una de las fuerzas que actúan sobre ella y el trabajo total realizado sobre la misma.

3 • Una persona montada en una noria se mueve en un círculo a velocidad constante. Verdadero o falso: durante una fracción de vuelta (*a*) ninguna de las fuerzas que actúan sobre la persona realizan trabajo, (*b*) el trabajo total realizado por todas las fuerzas es cero, (*c*) la fuerza resultante sobre la persona es cero, (*d*) la persona se acelera.

4 • ¿En qué factor se modifica la energía cinética de un automóvil al duplicar su velocidad y reducir su masa a la mitad?

5 • Dar un ejemplo de una partícula que tenga energía cinética constante pero se acelere. ¿Puede cambiar su energía cinética una partícula que no se acelere? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

6 • Inicialmente un objeto posee la energía cinética K. El mismo objeto se mueve después en dirección opuesta y a una velocidad triple de la inicial. ¿Cuál es ahora su energía cinética? (*a*) K, (*b*) 3 K, (*c*) – 3 K, (*d*) 9 K, (*e*) – 9 K.

7 • ¿Qué trabajo se necesita para alargar un muelle 2 cm a partir de su posición natural en comparación con el necesario para alargarlo 1 cm, también desde su posición natural? SSM

8 • Un muelle se estira 2 cm respecto de su posición de equilibrio. Si se estira 2 cm más respecto a la posición anterior, ¿cómo es el trabajo necesario para el segundo estiramiento en comparación con el primero? Dar el cociente del segundo sobre el primero.

9 • La dimensión de potencia es (*a*) $M \cdot L^2 \cdot T^2$, (*b*) $M \cdot L^2/T$, (*c*) $M \cdot L^2/T^2$, (*d*) $M \cdot L^2/T^3$.

10 • Demostrar que en el SI de unidades la constante de fuerza de un muelle se expresa en kg/s².

11 • Verdadero o falso: (*a*) La fuerza gravitacional no puede realizar trabajo sobre un objeto porque no es una fuerza de contacto. (*b*) El rozamiento estático no puede realizar trabajo sobre un objeto. (*c*) Cuando se arranca un electrón, la fuerza que ejerce el núcleo realiza un trabajo positivo. (*d*) Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular, el trabajo realizado sobre ella es necesariamente cero.

12 •• Un disco de hockey tiene un velocidad inicial en la dirección $+x$ sobre una capa de hielo horizontal. Dibuje cualitativamente la fuerza frente a la posición para el caso de una fuerza horizontal constante que actuara sobre el disco hasta detenerlo. Suponga que el disco se halla en el punto $x = 0$ cuando la fuerza empieza a actuar. Muestre que el signo del área bajo la curva coincide con el signo del cambio de la energía cinética e interprete esto en términos del teorema del trabajo-energía cinética.

13 •• Verdadero o falso: (*a*) El producto escalar no puede tener unidades. (*b*) Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, entonces éstos son paralelos. (*c*) Si el producto escalar de dos vectores no nulos es igual al producto de sus módulos, entonces los dos vectores son paralelos. (*d*) Cuando un objeto se desliza sobre un plano inclinado, el signo del producto escalar de la fuerza gravitatoria que actúa sobre él y su desplazamiento es negativo. SSM

14 •• (*a*) ¿El producto escalar de dos vectores unitarios paralelos debe ser siempre cero? En caso negativo, dar un ejemplo. (*b*) En

un determinado instante, la velocidad de un objeto es $\vec{v}$. Interpretar $\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ físicamente. (*c*) Una pelota rueda sobre una mesa horizontal. ¿Cuál es el producto escalar entre la velocidad y la aceleración en el preciso instante en que la pelota cae de la mesa? Explíquelo. (*d*) En el apartado (*c*), ¿cuál es el signo del producto escalar de la velocidad y la aceleración en el instante anterior al impacto con el suelo?

15 •• Una persona levanta un paquete verticalmente una distancia L en un tiempo Δt. La persona levanta un segundo paquete con el doble de masa que el anterior, la misma altura y suministrando la misma potencia. ¿Cuánto tiempo tardó en levantar el segundo paquete? (Dar la respuesta en función de Δt.)

16 •• Hay láseres que emiten señales con más de 1 GW de potencia. Una central eléctrica moderna genera una potencia eléctrica de 1 GW. ¿Significa esto que un láser produce una enorme cantidad de energía? Explíquelo. *Ayuda: esos láseres de alta potencia emiten de manera intermitente, de manera que la potencia no se emite durante periodos de tiempo muy grandes.*

17 •• Una persona conduce un coche que acelera horizontalmente partiendo del reposo sin que sus ruedas roten. Utilizar la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación y el diagrama de fuerzas para explicar qué fuerzas (o fuerza) son responsables del aumento de energía cinética de traslación de la persona y el coche. *Ayuda: la relación hace referencia sólo a las fuerzas externas, de forma que el motor no es la solución. Elija su sistema adecuadamente en cada caso.* SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 •• Calcular (*a*) el trabajo realizado por la gravedad sobre una persona que sube a un ascensor que le lleva desde la planta baja hasta el último piso del Empire State de Nueva York (102 pisos), (*b*) el trabajo realizado por la fuerza normal que ejerce el ascensor sobre la persona. *Ayuda: la respuesta no es cero*, y (*c*) la potencia media ejercida por la gravedad.

19 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Sin contar el Sol, las estrellas más cercanas están a años luz de la Tierra. Aun así, si queremos enviar naves espaciales para investigar las estrellas, deberán viajar a velocidades que sean una fracción apreciable de la velocidad de la luz. (*a*) Calcular la energía cinética de una nave de 10 000 kg que viaje a un 10% de la velocidad de la luz en un año. ¿Cuál es la cantidad mínima de energía requerida? Cuando una velocidad se aproxima a la velocidad de la luz, la teoría de la relatividad nos dice que la fórmula de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ no es válida, aunque, sin embargo, la corrección en este caso es de un 1% de la velocidad real (0,1*c*). (*b*) Comparar el resultado con la energía consumida durante un año por los Estados Unidos (unos 5×10^{20} J). (*c*) Estimar la potencia media mínima necesaria para el sistema de propulsión.

20 •• La masa de la lanzadera espacial es de unos 8×10^4 kg y el periodo de su órbita es de 90 minutos. Calcular la energía cinética de la lanzadera cuando está en órbita y el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad entre el momento del lanzamiento y el instante que alcanza la órbita. (Aunque la fuerza de la gravedad decrece con la altitud, este efecto es pequeño en una órbita cercana a la Tierra. Utilizar este hecho para evitar el cálculo de la integral.) Las órbitas se encuentran a 402 km de la superficie terrestre.

21 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Hay que limpiar de nieve el camino de 15 m que conduce al aparcamiento, ya que durante la noche han caído 25 cm de nieve (figura 6.29). Estimar cuánto trabajo hay que realizar sobre la nieve para llevar a cabo este trabajo. Para ello, formular y justificar hipótesis sobre los datos necesarios (por ejemplo, la anchura del camino).

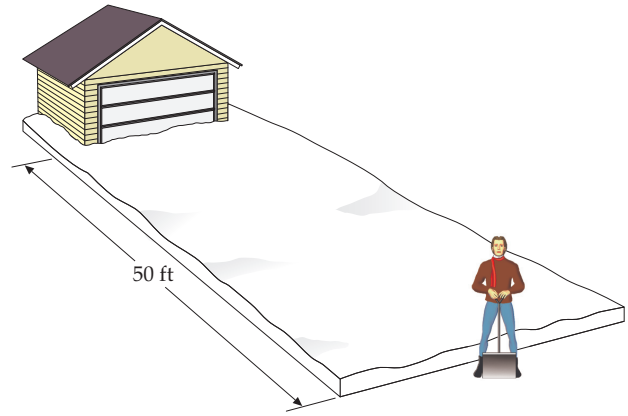


FIGURA 6.29 Problema 21

TRABAJO, ENERGÍA CINÉTICA Y APLICACIONES

22 • Una bala de 15 g posee una velocidad de 1,2 km/s. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética en joules? (*b*) Si la velocidad se reduce a la mitad, ¿cuál será su energía cinética? (*c*) ¿Y si la velocidad se duplica?

23 • Determinar la energía cinética en joules de (*a*) una pelota de béisbol de 0,145 kg que lleva una velocidad de 45 m/s y (*b*) un corredor de 60 kg que recorre una milla en 9 minutos a un ritmo constante.

24 • Una masa de 6 kg en reposo se eleva a una altura de 3 m con una fuerza vertical de 80 N. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la fuerza, (*b*) el trabajo realizado por la gravedad y (*c*) la energía cinética final de la masa.

25 • Una fuerza constante de 80 N actúa sobre una caja de 5,0 kg de masa que se está moviendo en la dirección de la fuerza aplicada con una velocidad de 20 m/s. Tres segundos después, la caja se mueve con una velocidad de 68 m/s. Determinar el trabajo realizado por esta fuerza.

26 •• Un alumno compite en una carrera con su amiga. Al principio, ambos tienen la misma energía cinética, pero el alumno observa que su amiga le está venciendo. Incrementando su velocidad en un 25%, él corre a la misma velocidad que ella. Si la masa del joven es 85 kg, ¿cuál es la masa de la muchacha?

27 •• Una partícula de 3 kg se desplaza con una velocidad de 2 m/s cuando se encuentra en $x = 0$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza F_x que varía con la posición del modo indicado en la figura 6.30. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética para $x = 0$? (*b*) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0$ m a $x = 4$ m? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando se encuentra en $x = 4$ m? SSM

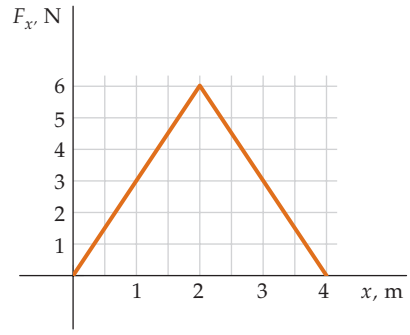


FIGURA 6.30 Problema 27

28 •• Un objeto de 3 kg se mueve en la dirección x con una velocidad de 2,40 m/s. Al pasar por el origen actúa sobre este objeto una única fuerza F_x que varía con x como indica la figura 6.31. (*a*) Hallar el trabajo realizado por la fuerza desde $x = 0$ hasta $x = 2$ m. (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del objeto en el punto $x = 2$ m? (*c*) ¿Cuál es la velocidad del objeto en dicho punto? (*d*) Determinar el trabajo realizado sobre el objeto desde $x = 0$ a $x = 4$ m. (*e*) ¿Cuál es la velocidad del objeto para $x = 4$ m?

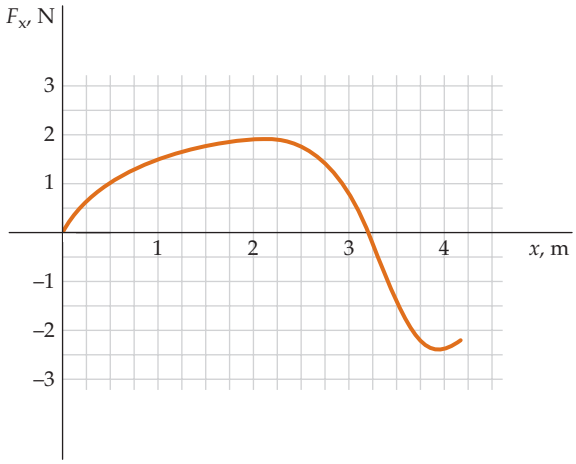


FIGURA 6.31 Problema 28

29 •• Uno de los extremos de un muelle de masa despreciable (constante de fuerza k) se ata al techo, y el otro extremo se engancha a un objeto de masa m. El muelle, inicialmente, está en posición vertical y en su posición de equilibrio. Entonces se deja caer lentamente el objeto sujetándolo con la mano hasta que alcanza una nueva posición de equilibrio a una distancia h por debajo de la de equilibrio. A continuación, se repite el experimento, pero dejamos caer el objeto sin aguantarlo con la mano y observamos que cae una distancia H respecto de la posición de equilibrio antes de detenerse momentáneamente. (*a*) Demostrar que $h = mg/k$. (*b*) Utilizar el teorema del trabajo-energía cinética para demostrar que $H = 2h$. Intente realizar el experimento usted mismo.

30 •• Sobre una partícula de 1,5 kg actúa una fuerza que está relacionada con la posición de la partícula por la fórmula $F_x = Cx^3$, en donde C = 0,5 si x está dada en metros y F_x en newtons. (*a*) Determinar las unidades de C en el SI. (*b*) Calcular el trabajo realizado por esta fuerza al actuar sobre la partícula que se desplaza desde $x = 3$ m hasta $x = 1,5$ m. (*c*) En $x = 3$ m, la fuerza apunta en dirección contraria a la dirección de la velocidad de la partícula (con 12 m/s de módulo). ¿Cuál es su velocidad en $x = 1,5$ m? ¿Podría decir la dirección del movimiento en $x = 1,5$ m utilizando sólo el teorema del trabajo-energía cinética? Razonar la respuesta.

31 •• En una cabaña de vacaciones hay un depósito de agua a 4 m del suelo que se calienta con la radiación solar. Durante los últimos días del verano, el motor del depósito se estropeó y se tuvo que llenar de agua manualmente. Supongamos que la masa del cubo es de 5 kg y puede llenarse con 15 kg de agua. El cubo tiene un agujero y va perdiendo agua a ritmo constante. El cubo se eleva a velocidad constante y sólo llegan arriba 5 kg de agua. (*a*) Escribir una expresión para la masa del cubo más el agua en función de la altura sobre el suelo. (*b*) Calcular el trabajo realizado por cada 5 kg de agua vertidos al depósito.

32 •• Un bloque de masa 6 kg se desliza 1,5 m hacia abajo por un plano inclinado sin rozamiento. El ángulo del plano inclinado es 60°. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre el bloque y calcular el trabajo realizado por cada fuerza cuando el bloque se desliza 1,5 m sobre el plano (medidos a lo largo del plano). (*b*) ¿Cuál es el trabajo total realizado sobre el bloque? (*c*) ¿Cuál es la velocidad del bloque después de recorrer 1,5 m si parte del reposo? (*d*) ¿Y si parte con una velocidad inicial de 2 m/s?

33 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Usted está diseñando una secuencia del descenso de un árbol con la ayuda de una cuerda para la última película de Tarzán. Para determinar la velocidad en el punto más bajo del descenso y asegurarse de que no se sobrepasan los límites de seguridad, usted decide describir el sistema Tarzán + cuerda como un péndulo. Suponga que su modelo está formado por una partícula (Tarzán, 100 kg) que se cuelga de una cuerda (formada por ramas de enredadera) de longitud ℓ enganchada a un soporte. El ángulo entre la vertical y la cuerda es ϕ. (*a*) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre la partícula. (*b*) El arco de longitud infinitesimal recorrido por la partícula es $\ell d\phi$. Escribir una expresión para el trabajo total dW_{total} realizado sobre la partícula cuando recorre ese arco. (*c*) Si $\ell = 7$ m, y la partícula parte de un ángulo de 50°, determinar la energía cinética de la partícula y la velocidad en el punto más bajo de la trayectoria utilizando el teorema del trabajo-energía cinética. SSM

34 •• Para reducir la fuerza que hay que suministrar para realizar determinadas tareas como, por ejemplo, levantar un peso pesado, se utilizan *máquinas simples*. Estas máquinas están formadas por tornillos, sistemas de bloqueo y palancas, pero la más simple de todas es el plano inclinado. En la figura 6.32 puede verse una caja que hay que subir a un camión por una rampa. (*a*) Definimos la *ventaja mecánica* MA del plano inclinado como la razón de la fuerza que habría que realizar para llevar la caja al camión directamente desde el suelo (a velocidad constante) con respecto de la fuerza que hay que realizar para llevarla por la rampa (a velocidad constante). Si el plano inclinado no ejerce rozamiento, demostrar que $MA = 1/\text{sen}\,\theta = L/H$, donde H es la altura de la plataforma del camión y L es la longitud de la rampa. (*b*) Demostrar que el trabajo que se realiza moviendo la caja es el mismo si se levanta el objeto directamente que si se le empuja por la rampa.

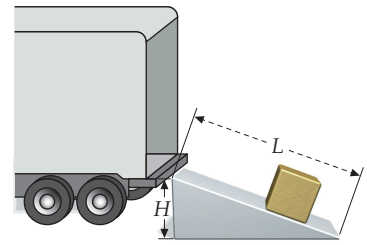


FIGURA 6.32 Problema 34

35 •• Una partícula a tiene una masa m y está localizada inicialmente sobre el eje $+x$ en $x = x_0$, y sometida a una fuerza repulsiva F_x producida por la partícula b. La partícula b está fijada en el origen. La fuerza F_x es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia x entre las partículas. Es decir, $F_x = A/x^2$, donde A es una *constante positiva*. La partícula a parte del reposo y se mueve bajo la influencia de la fuerza. Hallar la expresión del trabajo realizado por la fuerza sobre a en función de x. Determinar la velocidad y la energía cinética de a cuando x tiende a infinito.

36 • Una fuerza de módulo F actúa sobre el extremo libre de la cuerda. (*a*) Si el peso ha de elevarse una distancia h, ¿qué distancia debe recorrer el punto de aplicación de la fuerza? (*b*) ¿Qué trabajo se realiza sobre el peso? (*c*) ¿Qué trabajo realiza el agente? (*d*) ¿Cuál es la ventaja mecánica (definida en el problema 34) del sistema?

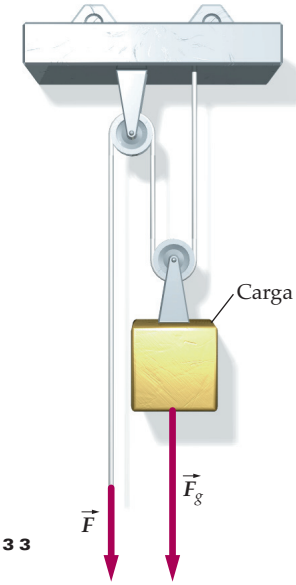


FIGURA 6.33 Problema 36

PRODUCTOS ESCALARES

37 • ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ si $\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$?

38 • Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen módulos de 6 m y forman un ángulo de 60° entre sí. Determinar el producto $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

39 • Determinar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ para los siguientes vectores: (*a*) $\vec{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j}$, $\vec{B} = -4\hat{i} + 2\hat{j}$; (*b*) $\vec{A} = 5\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$; y (*c*) $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j}$.

40 • Hallar los ángulos comprendidos entre los vectores dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$: (*a*) $\vec{A} = 3\hat{i} - 6\hat{j}$, $\vec{B} = -4\hat{i} + 2\hat{j}$; (*b*) $\vec{A} = 5\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$; y (*c*) $\vec{A} = 6\hat{i} + 4\hat{j}$, $\vec{B} = 4\hat{i} - 6\hat{j}$.

41 • Un cuerpo de 2 kg experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{r} = (3{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (-2{,}0\text{ m})\hat{k}$. Durante el desplazamiento actúa sobre el cuerpo una fuerza constante $\vec{F} = (2{,}0\text{ N})\hat{i} - (1{,}0\text{ N})\hat{j} + (1{,}0\text{ N})\hat{k}$. (*a*) Determinar el trabajo realizado por $\vec{F}$ en este desplazamiento. (*b*) Hallar la componente de $\vec{F}$ en la dirección y sentido del desplazamiento.

42 •• (*a*) Determinar el vector unitario que es paralelo al vector $\vec{A} = 2{,}0\hat{i} - 1{,}0\hat{j} - 1{,}0\hat{k}$. (*b*) Determinar la componente del vector $\vec{A} = 2{,}0\hat{i} - 1{,}0\hat{j} - 1{,}0\hat{k}$ en la dirección del vector $\vec{B} = 3{,}0\hat{i} + 4{,}0\hat{j}$.

43 •• (*a*) Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, demostrar que si $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$, entonces $\vec{A} \perp \vec{B}$. (*b*) Dado un vector $\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$, encontrar un vector del plano *xy* que sea perpendicular a *A* y tenga un módulo igual a 10. ¿Es este vector el único que cumple los requisitos especificados? Razonar la respuesta. SSM

44 •• $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son dos vectores unitarios en el plano *xy*. Forman ángulos θ_1 y θ_2 con el eje *x* positivo, respectivamente. (*a*) Determinar las componentes *x* e *y* de los dos vectores. (*b*) Considerando el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, demostrar que se cumple $\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$.

45 •• En el capítulo 8, introduciremos un nuevo vector para las partículas, llamado momento lineal $\vec{p}$. Matemáticamente, está relacionado con la velocidad *v* y la masa *m* de la partícula por $\vec{p} = m\vec{v}$. (*a*) Mostrar que la energía cinética de la partícula puede expresarse como $K = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}$. (*b*) Calcular el momento lineal de una partícula de 2,5 kg de masa que se mueve a 15 m/s con un ángulo de 25° respecto al eje $+x$ en el plano *xy*. (*c*) Calcular la energía cinética utilizando $K = \frac{1}{2}mv^2$ y $K = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m}$, y verificar que dan el mismo resultado.

46 ••• (*a*) Sea $\vec{A}$ un vector constante con su extremo en el origen de coordenadas. Sea $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ un vector en el plano *xy* que satisface la relación $\vec{A} \cdot \vec{r} = 1$. Demostrar que los puntos (*x*, *y*) están alineados. (*b*) Si $\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$, determinar la pendiente y la ordenada en el origen de la línea. (*c*) Si ahora $\vec{A}$ y $\vec{r}$ son vectores en el espacio tridimensional, demostrar que la relación $\vec{A} \cdot \vec{r} = 1$ especifica un plano.

47 ••• Cuando una partícula se mueve en un círculo centrado en el origen y con velocidad constante, los módulos de su vector posición y de los vectores velocidad son constantes. (*a*) Derivar respecto al tiempo la expresión $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 =$ constante para demostrar que $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$, y que, por lo tanto, $\vec{v} \perp \vec{r}$. (*b*) Derivar $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$ respecto al tiempo y demostrar que $\vec{a} \cdot \vec{r} + v^2 = 0$, y que, por lo tanto, $a_r = -v^2/r$. (*c*) Derivar respecto al tiempo la expresión $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$ para demostrar que $\vec{a} \cdot \hat{v} = dv/dt$, y que, por lo tanto, $a_t = dv/dt$. SSM

TRABAJO Y POTENCIA

48 • La fuerza A realiza un trabajo de 5 J en 10 s. La fuerza B realiza un trabajo de 3 J en 5 s. ¿Cuál de las dos fuerzas suministra mayor potencia?, ¿A o B?

49 • **MÚLTIPLES PASOS** Una fuerza simple de 5 N actúa en la dirección *x* sobre un objeto de 8 kg. (*a*) Si el objeto parte del reposo en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$, determinar la velocidad *v* en función del tiempo *t*. (*b*) Escribir una expresión para la potencia desarrollada por la fuerza en función del tiempo. (*c*) ¿Cuál es la potencia desarrollada por esta fuerza en el tiempo $t = 3$ s?

50 • Determinar la potencia suministrada por una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula que se mueve con una velocidad $\vec{v}$, en los casos: (*a*) $\vec{F} = (4{,}0\text{ N})\hat{i} + (3{,}0\text{ N})\hat{k}$ y $\vec{v} = (6{,}0\text{ m/s})\hat{i}$; (*b*) $\vec{F} = (6{,}0\text{ N})\hat{i} - (5{,}0\text{ N})\hat{j}$ y $\vec{v} = -(5{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (4{,}0\text{ m/s})\hat{j}$; y (*c*) $\vec{F} = (3{,}0\text{ N})\hat{i} + (6{,}0\text{ N})\hat{j}$ y $\vec{v} = (2{,}0\text{ m/s})\hat{i} + (3{,}0\text{ m/s})\hat{j}$.

51 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un pequeño ascensor de un restaurante funciona mediante una polea que está conectada a un motor, tal como se muestra en la figura 6.34. El motor sube y baja la caja de 35 kg a una velocidad 0,35 m/s sin acelerarla, excepto un breve instante de tiempo (que podemos despreciar) durante la puesta en marcha del motor. Los motores eléctricos suelen tener un rendimiento del 78%. Calcular la potencia mínima que tendría este motor. Supongamos que las poleas funcionan sin rozamiento. SSM

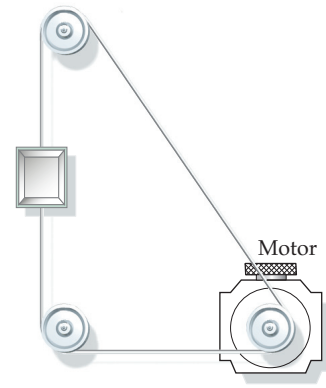


FIGURA 6.34 Problema 51

52 •• Un cañón, colocado en la cima de un acantilado de altura *H*, dispara directamente hacia arriba en el aire una bala con una velocidad inicial v_0. La bala sube, vuelve a caer, pasa muy cerca del cañón y cae por el acantilado. Si se desprecia la resistencia del aire, calcular para cualquier instante de tiempo la velocidad $\vec{v}$ de la bala, y demostrar explícitamente que la integral de $\vec{F}_{\text{neta}} \cdot \vec{v}$ durante el tiempo que la bala está en el aire es igual al cambio de la energía cinética de la bala.

53 •• Una partícula de masa *m* se mueve desde el tiempo $t = 0$ partiendo del reposo bajo la influencia de una fuerza constante $\vec{F}$. Demostrar que la potencia suministrada por la fuerza durante un tiempo *t* es $P = F^2t/m$.

54 •• Una caja de 7,5 kg es elevada por una cuerda de masa despreciable que pasa por la garganta de una polea enganchada al techo. (*a*) Si la caja sube a velocidad constante de 2 m/s, calcular la potencia desarrollada por la persona que sube la caja. (*b*) Si la caja se sube, con aceleración constante, desde el reposo en el suelo hasta una altura de 1,5 m por encima en 0,42 s, ¿cuál es la potencia media realizada por la persona que tira de la cuerda?

*TRABAJO DEL CENTRO DE MASAS Y ENERGÍA CINÉTICA DE TRASLACIÓN DEL CENTRO DE MASAS

55 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO, HOJA DE CÁLCULO** Le piden realizar una prueba a un coche para comparar su rendimiento real con lo que indican las fichas técnicas del fabricante. La potencia del motor es de 164 hp. Este valor es el pico de potencia, lo que significa que es capaz de desarrollar energía a un ritmo máximo de 164 hp sobre las ruedas motrices. Se determina que la masa del coche, incluyendo el equipo y ordenador para realizar el ensayo, es de 1120 kg. (*a*) Cuando va a 88 km/h, el ordenador indica que el motor desarrolla 13,5 hp. A partir de experimentos previos se ha determinado que el coeficiente de rozamiento por rodadura es 0,015.

Suponer que la fuerza de arrastre sobre el coche varía con el cuadrado de su velocidad. Es decir, $F_d = Cv^2$. (*a*) ¿Cuál es el valor de la constante C? (*b*) Considerando el pico de potencia, ¿cuál es la velocidad máxima que podría alcanzar el coche? (El problema se puede resolver analíticamente, pero se podría resolver de forma más rápida y sencilla con ayuda de una **calculadora gráfica** o una **hoja de cálculo**.)

56 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, CONCEPTUAL** Una persona conduce su coche por una carretera estatal a altas horas de la noche cuando de repente aparece un ciervo en medio de la carretera. Esto sucede justamente cuando pasa de la zona limitada a 88 km/h a la zona limitada a 80 km/h. Cuando pasa por la señal del límite de 80 km/h, la persona acciona bruscamente los frenos produciendo el bloqueo de las ruedas y derrapando hasta detenerse a pocos centímetros del ciervo; todavía respiraba aliviado cuando oyó la sirena de la policía. El agente le sancionó por ir a 90 km/h en la zona limitada a 80 km/h. Gracias a sus conocimientos de física, fue capaz de demostrarle que su velocidad era correcta. Sabiendo que las marcas del derrape miden 25 m y utilizando los datos de la tabla 5.1 para los coeficientes de rozamiento, ¿cómo argumenta su defensa?

PROBLEMAS GENERALES

57 • **APROXIMACIÓN** El mes de febrero de 2002, las plantas nucleares de los Estados Unidos generaron 60 700 millones de kWh. La población de los Estados Unidos era entonces de 287 millones de personas. Si un americano medio tiene una masa de 60 kg y si un 25% de la potencia de las centrales nucleares se invirtiera en proporcionar energía para un ascensor gigante, estimar la altura h a la que el ascensor podría levantar a toda la población americana. En los cálculos suponer que g es constante para cualquier h.

58 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una de las más poderosas grúas del mundo, que funciona en Suiza, es capaz de levantar lentamente una carga de $M = 6000$ ton a una altura de $h = 12{,}0$ m (1 ton = una tonelada, a veces llamada tonelada métrica; es una unidad de masa, no de fuerza, igual a 1000 kg). (*a*) ¿Cuánto trabajo realiza la grúa? (*b*) Determinar la potencia desarrollada por la grúa sabiendo que tiene una eficiencia del 20% y tarda 1,00 min en elevar la carga a velocidad constante a dicha altura.

59 • En Austria existía un telecabina de 5,6 km de longitud. Una cabina tardaba 60 min en recorrer todo el camino hasta el punto más alto. Si hubiera 12 cabinas ascendiendo simultáneamente, cada una con una carga de 550 kg, 12 cabinas descendiendo, y el ángulo de ascenso fuese de 30°, estimar la potencia P de la máquina necesaria para hacer funcionar el telecabina.

60 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para completar su graduación en física, su tutor le ha diseñado un pequeño acelerador lineal capaz de emitir protones con energía cinética de 10 keV (la masa de un protón es $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg). Si 10^9 protones por segundo deben llegar al final del acelerador de 1,5 m de longitud, (*a*) ¿cuál debe ser la potencia media necesaria para emitir los protones? (*b*) ¿Qué fuerza, supuesta constante, actuará sobre cada protón? (*c*) Si los protones parten del reposo, ¿con qué velocidad llegarán al final del acelerador?

61 ••• Las cuatro cuerdas de un violín pasan por encima del puente del instrumento, tal como se muestra en la figura 6.35. El ángulo que las cuerdas forman con la normal al plano del instrumento es de 72° en cada lado. La fuerza normal total que presiona el puente en el violín es de 103 N y la longitud de las cuerdas desde el puente a las clavijas a las que están atadas es de 32,6 cm. (*a*) Determinar la tensión de las cuerdas del violín, suponiendo que es la misma para todas las cuerdas. (*b*) Una de las cuerdas está punteada una distancia de 4 mm, como se muestra en la figura. Dibujar un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan sobre la cuerda en ese punto, y determinar la fuerza que tira de la cuerda para que recupere su posición de equilibrio, suponiendo que la tensión de la cuerda permanece constante. (*c*) Calcular el trabajo realizado sobre la cuerda al puntearla la distancia indicada. Recordar que la fuerza neta que tiende a volver a la cuerda a su posición de equilibrio depende de la posición de la misma, pero supóngase en este caso que es constante.

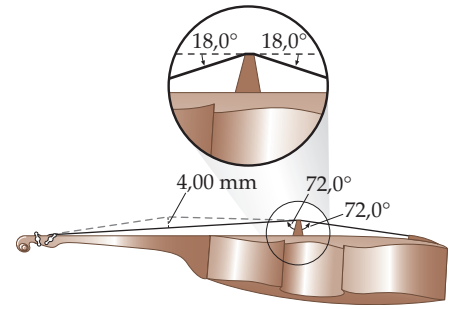


FIGURA 6.35 Problema 61

62 •• El módulo de la fuerza que actúa sobre una partícula de masa m es $F = bx^2$, donde b es constante. La partícula parte del reposo. Después de desplazarse una distancia L, determinar (*a*) su energía cinética y (*b*) su velocidad.

63 •• Una fuerza actúa sobre un carro de masa m de tal modo que la velocidad v del carro (que parte del reposo) se incrementa con la distancia x según la expresión $v = Cx$, donde C es una constante. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre el carro en función de la posición. (*b*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza al moverse el carro de $x = 0$ a $x = x_1$? SSM

64 ••• Una fuerza única $\vec{F} = (2{,}0\ \text{N/m}^2)x^2\hat{\boldsymbol{i}}$ se aplica a una partícula que inicialmente está en reposo en el plano xy. Determinar el trabajo realizado por la partícula y su velocidad final cuando se mueve a lo largo de una distancia total de 5 m (*a*) paralelamente al eje y desde el punto (2 m, 2 m) hasta el punto (2 m, 7 m) y (*b*) en línea recta desde (2 m, 2 m) a (5 m, 6 m).

65 •• Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo según la ecuación $x = 2t^3 - 4t^2$, donde x se mide en metros y t en segundos. Determinar (*a*) la velocidad y aceleración de la partícula en cualquier instante t, (*b*) la potencia suministrada a la partícula en cualquier instante t, (*c*) el trabajo realizado por la fuerza de $t = 0$ a $t = t_1$.

66 •• Una partícula de 3 kg parte del reposo en $x = 0{,}05$ m y se mueve bajo la influencia de una sola fuerza $F_x = 6 + 4x - 3x^2$, donde F_x se mide en newtons y x en metros. (*a*) Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza de $x = 0{,}05$ m a $x = 3$ m. (*b*) Determinar la potencia suministrada a la partícula cuando se encuentra en $x = 3$ m.

67 •• La energía cinética inicial impartida a una bala de 0,020 kg es de 1200 J. (*a*) Suponiendo que se acelera a lo largo del cañón del rifle de 1 m de longitud, calcular la potencia media desarrollada sobre la bala durante el disparo. (*b*) Despreciando la resistencia del aire, determinar el alcance de este proyectil cuando se dispara bajo un ángulo tal que el alcance es igual a la altura máxima de la trayectoria.

68 •• La figura 6.36 nos muestra la fuerza F_x que actúa sobre una partícula en función de x. (*a*) A partir del gráfico calcular el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0$ a los siguientes valores de x: -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 y 4 m. (*b*) Si parte con

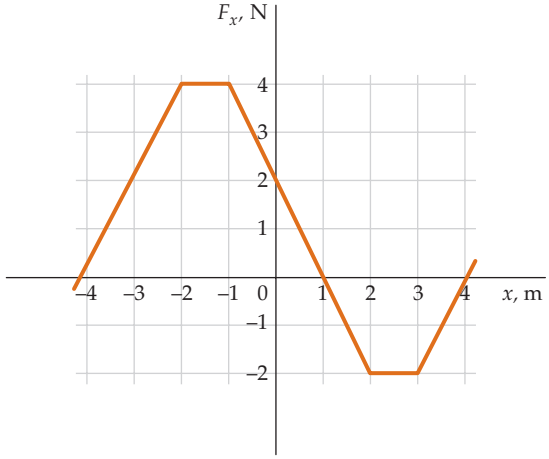


FIGURA 6.36 Problema 68

una velocidad de 2 m/s en la dirección $+x$, ¿a qué distancia se parará si sigue en esa dirección?

69 •• (a) Repetir el problema 68(a) para la fuerza F_x que se muestra en la figura 6.37. (b) Si el objeto parte del origen de coordenadas moviéndose con una energía cinética de 25 J, ¿cuánta energía cinética tendrá en $x = 4$ m?

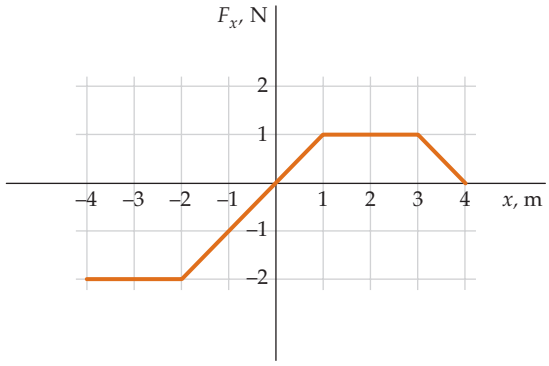


FIGURA 6.37 Problema 69

70 •• Una caja de masa M se encuentra en la parte más baja de un plano inclinado sin rozamiento (figura 6.38). La caja está atada a una cuerda que tira de ella con una tensión constante T. (a) Determinar el trabajo realizado por la tensión T cuando la caja se ha desplazado una distancia x a lo largo del plano. (b) Calcular la velocidad de la caja en función de x y θ. (c) Determinar la potencia desarrollada por la tensión en la cuerda en función de x y θ.

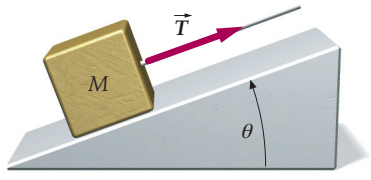


FIGURA 6.38 Problema 70

71 ••• Una fuerza que actúa en un plano xy viene dada por $\vec{F} = (F_0/r)(y\hat{i} - x\hat{j})$, donde F_0 es una constante y r es la distancia de la partícula respecto del origen. (a) Demostrar que el módulo de esta fuerza es F_0 y su dirección es perpendicular a $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. ($b$) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve en un círculo de radio 5 m centrado en el origen. ¿Es conservativa esta fuerza? SSM

72 ••• Una fuerza que actúa sobre una partícula de 2 kg en el plano xy viene dada por: $\vec{F} = -(b/r^3)(x\hat{i} + y\hat{j})$, donde b es una constante y r es la distancia de la partícula al origen. (a) Demostrar que el módulo de la fuerza varía según el inverso del cuadrado de la distancia al origen, y que su dirección es antiparalela (opuesta) al vector radio $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$. ($b$) Si $b = 3$ N · m^2, hallar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta entre una posición inicial $x = 2$ m, $y = 0$ m y una posición final $x = 5$ m, $y = 0$ m. (c) Determinar el trabajo realizado por esta fuerza sobre una partícula que se mueve por un círculo de radio $r = 7$ m centrado en el origen. (d) Si esta fuerza es la única fuerza que actúa sobre la partícula, ¿cuál es la velocidad de la partícula cuando se mueve por el círculo? Suponer que la masa de la partícula es $m = 2$ kg.

73 ••• Un bloque de masa m, unido mediante un pivote a un muelle que está atado al techo, se desliza sobre una mesa horizontal sin rozamiento (figura 6.39). La distancia entre la parte superior del bloque y el techo es y_0, y la posición horizontal es x. Cuando el bloque está en $x = 0$, el muelle, que tiene constante de fuerza k, está completamente en equilibrio. (a) ¿Cuál es F_x, la componente x de la fuerza sobre el bloque debida al muelle? (b) Demuestre que F_x es proporcional a x^3 para valores suficientemente pequeños de x. (c) Si el bloque parte del reposo cuando $x = x_0$, donde $|x_0| << y_0$, ¿cuál es su velocidad cuando pasa por $x = 0$?

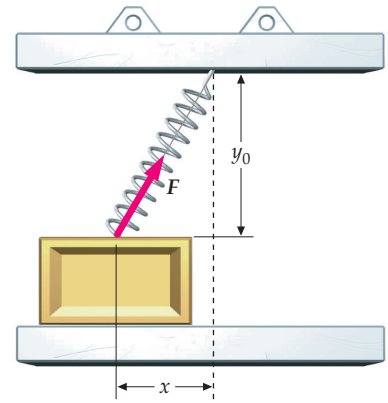


FIGURA 6.39 Problema 73

74 •• Dos caballos tiran de un contenedor, que se arrastra sobre el suelo de un establo a velocidad constante, mediante unos cables de acero de masa despreciable (figura 6.40). El contenedor tiene una masa de 250 kg. Cuando los caballos tiran, los cables están paralelos al suelo. El coeficiente de rozamiento entre el contenedor y el suelo es 0,25. (a) ¿Cuál es el trabajo realizado por cada caballo si el contenedor se desplazó 25 m? (b) ¿Cuál es la tensión de cada cable si el ángulo entre cada cable y la dirección del movimiento es de 15º?

FIGURA 6.40 Problema 74

CAPÍTULO 7

Conservación de la energía

7.1 Energía potencial
7.2 Conservación de la energía mecánica
7.3 Conservación de la energía
7.4 Masa y energía
7.5 Cuantización de la energía

CONFORME LAS VAGONETAS DE LA MONTAÑA RUSA SUBEN Y BAJAN, LA ENERGÍA SE VA TRANSFORMANDO DE UNA FORMA EN OTRA. ESTA MONTAÑA RUSA CONVIERTE LA ENERGÍA ELÉCTRICA COMPRADA A LA EMPRESA SUMINISTRADORA EN ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA DE LOS PASAJEROS Y DE LA VAGONETA. POSTERIORMENTE, LA ENERGÍA POTENCIAL SE TRANSFORMA EN ENERGÍA CINÉTICA Y ENERGÍA TÉRMICA- AUMENTANDO LEVEMENTE LA TEMPERATURA DE LAS VAGONETAS Y SUS ALREDEDORES. *(Michael S. Lewis/Corbis.)*

Cuando un cuerpo realiza trabajo sobre otro, se transfiere energía entre ambos cuerpos. Por ejemplo, cuando tiramos de un trineo, una parte de nuestra energía se transforma en energía cinética del trineo y otra parte en energía térmica que aparece como resultado del rozamiento entre el trineo y la nieve. Al mismo tiempo, la energía química interna de nuestro cuerpo disminuye. El resultado global es la transferencia de la energía química interna de nuestro cuerpo a la energía cinética externa del trineo más la energía térmica del trineo y la nieve. Esta transferencia de energía ilustra uno de los principios más importantes de la ciencia, la ley de conservación de la energía, que establece que la energía total del sistema y sus alrededores no cambia. Cuando cambia la energía de un sistema, en otro lugar aparece o desaparece energía.

En este capítulo, continuamos el estudio de la energía iniciado en el capítulo 6, describiendo y aplicando la ley de conservación de la energía y examinando distintas clases de energía, incluida la energía térmica y la energía potencial. También se analiza que los cambios de la energía en un sistema frecuentemente no son continuos, sino que se dan a "porciones" denominadas cuantos. Aunque en un sistema macroscópico el cuanto de energía es tan pequeño que pasa desapercibido, su presencia tiene consecuencias profundas para los sistemas microscópicos como los átomos y las moléculas.

? El principio de conservación de la energía mecánica, ¿nos permite determinar hasta dónde ha de subir un coche para que cuando baje por la pendiente adquiera suficiente velocidad para realizar una vuelta vertical completa? (Véase el ejemplo 7.8.)

7.1 ENERGÍA POTENCIAL

En el capítulo 6, vimos que el trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética. Sin embargo, a menudo una partícula es parte de un sistema que está formado por dos o más partículas y necesitamos examinar el trabajo externo realizado sobre el sistema.* En muchos casos, la energía transferida a dicho sistema a partir del trabajo realizado por las fuerzas externas al *sistema* no incrementa su energía cinética. En lugar de eso, la energía transferida se almacena como **energía potencial**, es decir, energía asociada a los cambios relativos de posición de las diferentes partes del sistema. La configuración del sistema es la forma en que las diferentes partes del sistema se colocan unas respecto a las otras. La energía potencial es una energía asociada a la configuración del sistema, mientras que la energía cinética está asociada al movimiento.

Por ejemplo, considere un martinete cuyo mazo está suspendido una distancia h sobre la estaca. Cuando el mazo cae, gana energía cinética hasta que impacta sobre la estaca, clavándola al suelo. El mazo se eleva de nuevo a su altura inicial para caer de nuevo. Cada vez que el mazo se eleva desde el suelo a su posición más alta, la fuerza de la gravedad realiza un trabajo sobre él dado por $-mgh$, donde m es la masa del mazo. Conforme el mazo se eleva, la fuerza realizada por el motor realiza un trabajo positivo sobre el mazo. Sabemos que ambos trabajos suman cero, pues el mazo puede tratarse como una partícula y el teorema del trabajo-energía cinética (ecuación 6.8) nos dice que el trabajo total realizado sobre el mazo es igual al cambio de su energía cinética, que es cero.

Consideremos el levantamiento de una barra de pesas de masa m a una altura h. La barra empieza y acaba en estado de reposo, de forma que el cambio en la energía cinética de la barra es cero. La barra se puede describir como una partícula durante el ascenso; así, el teorema del trabajo-energía cinética nos dice que el trabajo total realizado sobre la barra es también cero. Hay dos fuerzas que actúan sobre la barra, la fuerza de la gravedad y la fuerza de los brazos del atleta. La fuerza gravitacional sobre la barra es $m\vec{g}$ y el trabajo realizado sobre la barra durante el levantamiento es $-mgh$. Como sabemos que el trabajo total es cero, el trabajo realizado por los brazos del atleta es mgh.

Consideremos ahora la barra y el planeta Tierra (pero no el levantador de las pesas) como un *sistema* de partículas. Las fuerzas externas que actúan sobre el *sistema Tierra-barra* son la atracción gravitatoria que el atleta ejerce *sobre la Tierra*, la fuerza que sus pies ejercen sobre la Tierra y la fuerza mg que sus manos ejercen sobre la barra (figura 7.1). (Puede despreciarse la fuerza gravitatoria que el cuerpo del atleta ejerce sobre la barra.) La barra se mueve uno o dos metros, pero el movimiento de la Tierra es despreciable, de modo que la única fuerza externa ejercida sobre el sistema que realiza trabajo es la fuerza ejercida por el atleta sobre la barra. El trabajo total realizado sobre el sistema Tierra-barra por fuerzas externas al sistema es mgh. Este trabajo se almacena como *energía potencial gravitatoria*, energía asociada a la posición de la barra con respecto a la Tierra (energía asociada con la altura de la barra sobre el suelo).

Un muelle es otro ejemplo de sistema que almacena energía asociada a su configuración. Si se estira o se comprime un muelle, la energía asociada con la longitud del muelle se almacena como *energía potencial elástica*. Consideremos el muelle de la figura 7.2: si se comprime mediante fuerzas iguales y de sentido contrario, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, estas fuerzas suman cero y la fuerza neta que se ejerce sobre el muelle sigue siendo cero, por lo que no hay ningún cambio en la energía cinética del muelle. La energía transferida asociada con el trabajo que se ejerce sobre el sistema no se almacena como energía cinética sino como energía potencial elástica; la configuración de este sistema ha cambiado, como queda patente por el cambio de la longitud del muelle. El trabajo total realizado sobre el muelle es positivo porque las dos

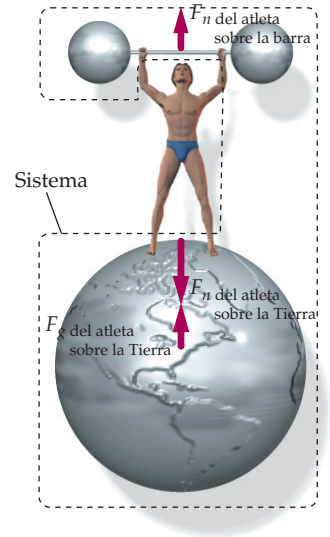


FIGURA 7.1

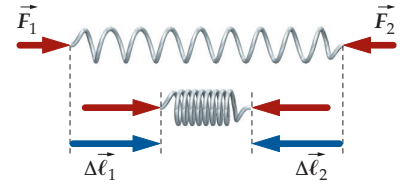


FIGURA 7.2 El muelle es comprimido por las fuerzas externas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Las dos fuerzas realizan un trabajo positivo en el muelle comprimiéndolo, por lo que la energía potencial elástica del muelle aumenta.

* Los sistemas de partículas se tratan más ampliamente en el capítulo 8.

fuerzas realizan un trabajo positivo. (El trabajo realizado por $\vec{F}_1$ es positivo porque tanto la fuerza como el desplazamiento de su punto de aplicación $\Delta\vec{\ell}_1$ van en la misma dirección, y lo mismo puede decirse de $\vec{F}_2$ y $\Delta\vec{\ell}_2$.)

FUERZAS CONSERVATIVAS Y NO-CONSERVATIVAS

Cuando un esquiador asciende mediante un telesquí a lo alto de una pista de altura h, el trabajo realizado por la gravedad es $-mgh$, donde m es la masa del esquiador. Cuando el esquiador se desliza desde arriba hasta el punto más bajo de la pista, el trabajo realizado por la gravedad es $+mgh$, independientemente de la forma de la pista (como se ha visto en el ejemplo 6.12). El trabajo total realizado por la gravedad sobre el esquiador en el viaje de ida y vuelta es cero, independientemente de la trayectoria seguida. En una situación tal como esta, donde el trabajo total realizado sobre sobre un cuerpo por una fuerza depende sólo de las posiciones inicial y final del cuerpo y no del camino tomado, la fuerza que realiza el trabajo se denomina **fuerza conservativa**.

> El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida por la partícula cuando se mueve de un punto a otro.
>
> DEFINICIÓN: FUERZA CONSERVATIVA

La figura 7.3 nos muestra que esta definición implica lo siguiente:

> Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula recorre cualquier trayectoria cerrada y vuelve a su posición inicial.
>
> DEFINICIÓN ALTERNATIVA: FUERZA CONSERVATIVA

En el ejemplo del telesquí, la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra sobre el esquiador, es una fuerza conservativa, pues el trabajo total realizado por la gravedad sobre el esquiador durante el viaje es cero, con independencia del trayecto realizado. Tanto la fuerza gravitacional sobre un objeto como la fuerza ejercida por un muelle de masa despreciable sobre un cuerpo son conservativas. (Si la masa de un muelle es despreciable, su energía cinética también será despreciable.) Cualquier muelle mencionado en este libro tendrá masa despreciable, a menos que se indique lo contrario.

No todas las fuerzas son conservativas. Se dice que una fuerza es **no-conservativa** si no cumple la definición de fuerza conservativa. Suponga, por ejemplo, que usted empuja un bloque sobre una mesa horizontal en línea recta desde un punto A a un punto B, y después lo empuja desde B hasta A, de forma que el bloque parte y acaba en el mismo punto. El rozamiento se opone al movimiento del bloque, de tal forma que la fuerza que usted realiza sobre el bloque va en la dirección del movimiento del bloque y el trabajo realizado sobre el bloque es positivo tanto en la ida como en la vuelta. El trabajo total realizado al empujar el bloque *no* es cero.

Consideremos la fuerza $\vec{F}$ que ejerce un asno sobre un palo cuando el asno tira de él describiendo una trayectoria circular con una velocidad de módulo constante. Conforme el asno anda, la fuerza $\vec{F}$ continuamente realiza trabajo cuyo valor es positivo. El punto de aplicación P de $\vec{F}$ vuelve a la posición inicial cada vez que el asno completa una vuelta, de forma que el trabajo no es cero cada vez que P vuelve al punto de partida. Por tanto, puede concluirse que $\vec{F}$ no es una fuerza conservativa.

Si el trabajo realizado sobre *cualquier* camino cerrado no es cero, podemos afirmar que la fuerza es no-conservativa. Sin embargo, concluiremos que la fuerza es conservativa sólo si el trabajo es cero sobre *todos* los caminos cerrados. Como hay infinitos caminos cerrados posibles es imposible calcular el trabajo en todos y

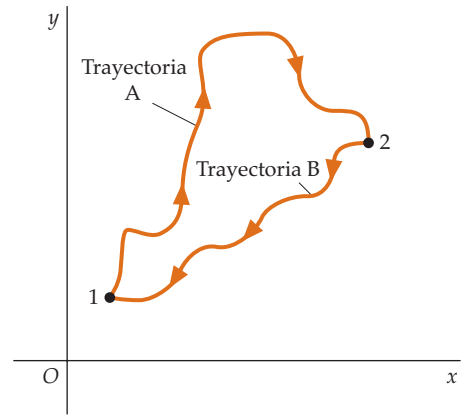


FIGURA 7.3 Dos trayectorias en el espacio conectan los puntos 1 y 2. Si el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de la trayectoria A de 1 a 2 es W, en el recorrido de vuelta a lo largo de la trayectoria B el trabajo debe ser igual a $-W$, ya que el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada que termine en el punto de partida es igual a cero. Cuando se recorre la trayectoria B de 1 a 2, la fuerza es la misma en cada punto, pero el desplazamiento es opuesto al que va de 2 a 1. Por lo tanto, el trabajo realizado a lo largo de la trayectoria B de 1 a 2 es también W. De aquí se deduce que el trabajo realizado sobre una partícula que se desplaza del punto 1 al 2 es el mismo para todas las trayectorias que conectan los dos puntos.

Máquina de bombear agua. El asno ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre el palo en el punto P, el punto de aplicación de la fuerza. *(O. Alamany and E. Vicens/Corbis.)*

cada uno de ellos. En consecuencia, si encontramos un solo camino cerrado sobre el cual el trabajo realizado por una fuerza determinada *no sea cero* será suficiente para deducir que es no-conservativa. En libros más avanzados se pueden encontrar métodos más sofisticados para determinar si una fuerza es conservativa.

Ejemplo 7.1 Integral a lo largo de un camino cerrado

Para calcular el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$ a lo largo de un camino (C) cerrado, calculamos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, donde el círculo sobre el signo integral quiere decir que la integral se determina sobre un camino cerrado. Para $\vec{F} = Ax\hat{i}$, calculamos $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ sobre el camino C mostrado en la figura 7.4.

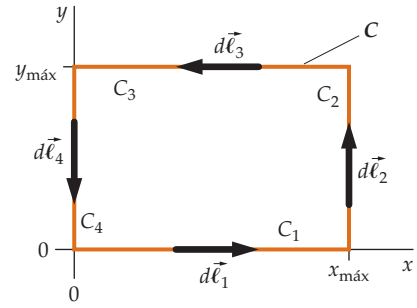


FIGURA 7.4

PLANTEAMIENTO El camino C consiste en cuatro segmentos rectilíneos. Determinar $d\vec{\ell} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ para cada segmento y calcular $\int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ separadamente para cada uno de los cuatro segmentos.

SOLUCIÓN

1. La integral a lo largo de C es igual a la suma de las integrales a lo largo de cada uno de los cuatro segmentos que forman C:
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_3 + \int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_4$$

2. Sobre C_1, $dy = 0$, así $d\vec{\ell}_1 = dx\hat{i}$:
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_1 = \int_0^{x_{máx}} Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = A\int_0^{x_{máx}} x\,dx = \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2$$

3. Sobre C_2, $dx = 0$ y $x = x_{máx}$, así $d\vec{\ell}_2 = dy\hat{j}$ y $\vec{F} = Ax_{máx}\hat{i}$:
$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_0^{y_{máx}} Ax_{máx}\hat{i} \cdot dy\hat{j} = Ax_{máx}\int_0^{y_{máx}} \hat{i} \cdot \hat{j}\,dy = 0$$
($\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, pues $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son perpendiculares.)

4. Sobre C_3, $dy = 0$, así $d\vec{\ell}_3 = dx\hat{i}$:
$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_3 = \int_{x_{máx}}^0 Ax\hat{i} \cdot dx\hat{i} = -A\int_0^{x_{máx}} x\,dx = -\tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2$$

5. Sobre C_4, $dx = 0$ y $x = 0$, así $d\vec{\ell}_4 = dy\hat{j}$ y $\vec{F} = 0$:
$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}_4 = \int_{y_{máx}}^0 0\hat{i} \cdot dy\hat{j} = 0$$

6. Sumamos los resultados de los pasos 2, 3, 4 y 5:
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2 + 0 - \tfrac{1}{2}Ax_{máx}^2 + 0 = \boxed{0}$$

COMPROBACIÓN La fuerza considerada corresponde a la ley de Hooke (fuerza de un muelle). Por tanto, es conservativa y la integral de esta fuerza a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

OBSERVACIÓN El signo negativo del paso 4 se debe a que se invirtieron los límites de integración.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.1 Para $\vec{F} = Bxy\hat{i}$, calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ para el camino C de la figura 7.4.

FUNCIONES DE ENERGÍA POTENCIAL

El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula no depende de la trayectoria, sólo depende de los puntos extremos. Podemos usar esta propiedad para definir la **función energía-potencial** U, asociada a una fuerza conservativa. Volvamos de nuevo al ejemplo del telesquí. Considere que el esquiador y la Tierra forman un *sistema de dos partículas* (el telesquí no forma parte del sistema). Cuando el telesquí eleva al esquiador, hasta la cima de la pista, realiza un trabajo mgh sobre el sistema esquiador-Tierra. Ese trabajo se almacena en forma

de energía potencial del sistema esquiador-Tierra. Cuando el esquiador desciende, esa energía potencial se convierte en la energía cinética del movimiento del esquiador. Obsérvese que cuando el esquiador se desliza hacia abajo por la pista, el trabajo realizado por la gravedad hace disminuir la energía potencial del sistema. En base a ello, la función energía potencial se puede definir de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sea igual a la disminución de la función energía-potencial:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\Delta U$$

es decir,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad 7.1a$$

DEFINICIÓN: FUNCIÓN ENERGÍA POTENCIAL

Esta ecuación nos proporciona el cambio de energía potencial debido a un cambio en la configuración del sistema.

Para un desplazamiento infinitesimal, $d\vec{\ell}$, tenemos

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} \qquad 7.1b$$

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Integrales**

Energía potencial gravitatoria Podemos calcular la función energía potencial asociada con la fuerza gravitatoria próxima a la superficie de la Tierra mediante la ecuación 7.1*b*. Para la fuerza $\vec{F} = -mg\hat{j}$, resulta

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -(-mg\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = +mg\,dy$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ y $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$. Integrando, obtenemos

$$U = \int mg\,dy = mgy + U_0$$

$$U = U_0 + mgy \qquad 7.2$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA PRÓXIMA A LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

donde U_0, la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Por ejemplo, si a la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se le asigna un valor igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos asignar el valor cero de energía potencial al momento en que el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, donde y es la distancia del esquiador respecto al punto P.

Tenemos libertad para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.2

Una muchacha de 55 kg se encuentra en un balcón a 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es la energía potencial del sistema muchacha-Tierra si a U (*a*) se le asigna un valor cero en el suelo, (*b*) se le asigna un valor cero a 4 m por encima del suelo, y (*c*) se le asigna un valor cero 10 m por encima del suelo?

Ejemplo 7.2 La botella que cae

Una botella de 0,350 kg de masa cae desde un estante que está 1,75 m por encima del suelo. Determinar la energía potencial del sistema Tierra-botella cuando la botella está en el estante y cuando está a punto de chocar con el suelo. Determinar la energía cinética de la botella justo antes del impacto.

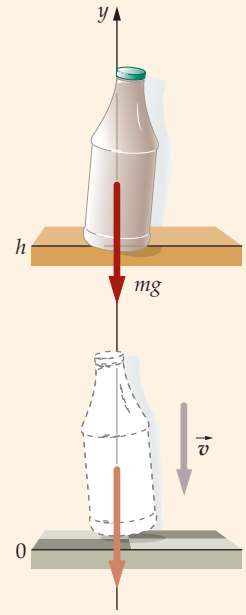


FIGURA 7.5

PLANTEAMIENTO Al caer la botella, el trabajo realizado por la Tierra sobre la botella iguala con signo contrario el cambio en la energía potencial del sistema botella-Tierra. Si se sabe cuánto vale este trabajo, se puede usar el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética.

SOLUCIÓN

1. Hacer un esquema que muestre la botella en el estante y la botella antes de chocar con el suelo (figura 7.5). Suponer que la energía potencial del sistema botella-Tierra es cero cuando la botella está en el suelo, y colocar el eje y con su origen en el suelo:

2. La única fuerza que realiza trabajo sobre la botella mientras cae es la fuerza de la gravedad, por lo que $W_{\text{total}} = W_g$. Aplicar el teorema trabajo-energía cinética a la botella que cae:
$$W_{\text{total}} = W_g = \Delta K$$

3. La fuerza ejercida por la Tierra sobre la botella durante su caída es una fuerza interna al sistema botella-Tierra. También es una fuerza conservativa, por lo que el trabajo realizado iguala el cambio en la energía potencial del sistema:
$$W_g = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -(mgy_f - mgy_i)$$
$$= mg(y_i - y_f) = mg(h - 0) = mgh$$

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2 y obtener la energía cinética final, teniendo en cuenta que la energía cinética inicial es cero:
$$mgh = \Delta K$$
$$mgh = K_f - K_i$$
$$K_f = K_i + mgh$$
$$= 0 + (0{,}350\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg})(1{,}75\ \text{m})$$
$$= 6{,}01\ \text{N} \cdot \text{m} = \boxed{6{,}01\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades de la respuesta del paso 4 son unidades de energía, ya que $1\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ \text{J}$.

OBSERVACIÓN La energía potencial se asocia con la configuración de un sistema de partículas, pero a veces en un sistema como el de la botella-Tierra de este ejemplo, sólo se mueve una partícula (el movimiento de la Tierra es despreciable). Para simplificar, muchas veces nos referimos a la energía potencial del sistema botella-Tierra simplemente como la energía potencial de la botella.

La energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas dentro de un campo gravitatorio uniforme es la misma que si toda la masa del sistema estuviese concentrada en el centro de masas del sistema. Para tal sistema, sea h_i la altura de la partícula i-ésima sobre un nivel de referencia dado. La energía potencial gravitatoria del sistema es entonces

$$U_g = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i$$

donde la suma se extiende a todas las partículas del sistema. Por definición de centro de masas, la altura del centro de masas del sistema viene dada por

$$Mh_{\text{cm}} = \sum_i m_i h_i, \qquad \text{donde } M = \sum_i m_i$$

Sustituyendo Mh_{cm} por $\Sigma m_i h_i$, tenemos

$$U_g = Mgh_{cm} \qquad 7.3$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Energía potencial elástica Otro ejemplo de una fuerza conservativa es la que ejerce un muelle estirado (o comprimido) de masa despreciable. Supongamos que tiramos de un bloque atado a un muelle y lo desplazamos desde una posición $x = 0$ (equilibrio) a otra $x = x_1$ (figura 7.6). El muelle realiza un trabajo negativo porque su fuerza se opone a la dirección del movimiento. Si ahora dejamos el bloque en libertad, el muelle realiza un trabajo positivo, al acelerar el bloque hacia su posición inicial. El trabajo total realizado por el muelle para mover el bloque hasta su posición inicial $x = x_1$ y devolverlo luego a $x = 0$ es cero, independientemente del valor de x_1 (siempre que el alargamiento no supere el límite de elasticidad del muelle). La fuerza que ejerce el muelle es, por lo tanto, una fuerza conservativa. Podemos calcular la función energía potencial asociada a esta fuerza a partir de la ecuación 7.1*b*:

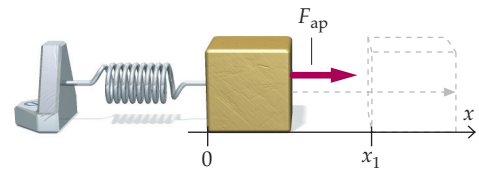


FIGURA 7.6 La fuerza aplicada F_{ap} mueve el bloque hacia la derecha tirando del muelle hasta x_1.

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -F_x\,dx = -(-kx)dx = +kx\,dx$$

Por lo tanto,

$$U = \int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

donde U_0 es la energía potencial para $x = 0$, es decir, cuando el muelle está sin tensar. Haciendo U_0 igual a cero, resulta

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad 7.4$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN MUELLE

La fórmula $U = \frac{1}{2}kx^2$ para la energía potencial de un muelle requiere que el muelle esté en reposo cuando $x = 0$. Así, la localización del punto donde $x = 0$ no es arbitraria cuando consideramos que la energía potencial es $U = \frac{1}{2}kx^2$.

Cuando tiramos del bloque desde $x = 0$ hasta $x = x_1$, ejercemos una fuerza aplicada sobre el muelle. Si el bloque inicia su movimiento en $x = 0$ y lo termina en $x = x_1$, en ambos casos en reposo, el cambio de su energía cinética es cero. El teorema trabajo-energía implica que el trabajo total realizado sobre el bloque es cero, es decir, $W_{ap} + W_{muelle} = 0$; por lo tanto,

$$W_{ap} = -W_{muelle} = \Delta U_{muelle} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - 0 = \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

La energía transferida por la fuerza que tira del muelle al sistema bloque-muelle es igual a W_{ap} y se almacena como energía potencial elástica en el muelle.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.3

El amortiguador de la suspensión de un Toyota Prius tiene una constante elástica de 11 000 N/m. ¿Cuánta energía se transfiere a uno de esos amortiguadores cuando, partiendo de la posición de relajación, se comprimen 30 cm?

Ejemplo 7.3 La energía potencial de un jugador de baloncesto

FIGURA 7.7 *(Elio Castoria/APF/Getty Images.)*

Consideremos el sistema formado por un jugador de baloncesto de 110 kg, el aro de una de las cestas y la Tierra. Supongamos que la energía potencial del sistema es cero cuando el jugador no está saltando y el aro está en posición horizontal. Determinar la energía potencial total de este sistema cuando el jugador se cuelga del aro como se muestra en la figura 7.7. Supongamos también que el centro de masas del jugador se encuentra a 0,8 m de altura por encima del suelo cuando está de pie y a 1,3 m de altura cuando se cuelga del aro. La constante elástica del aro es 7,2 kN/m y la parte frontal del aro se desplaza una distancia de 15 cm.

PLANTEAMIENTO En el cambio de posición del jugador, desde el suelo hasta el aro, la variación total de la energía potencial consiste en energía potencial gravitatoria, $U_g = mgy$, y energía almacenada por el aro desplazado, cuya energía potencial se supone análoga a la de un muelle: $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Elegimos 0,8 m del suelo como punto de referencia donde la energía potencial gravitatoria vale $U_g = 0$.

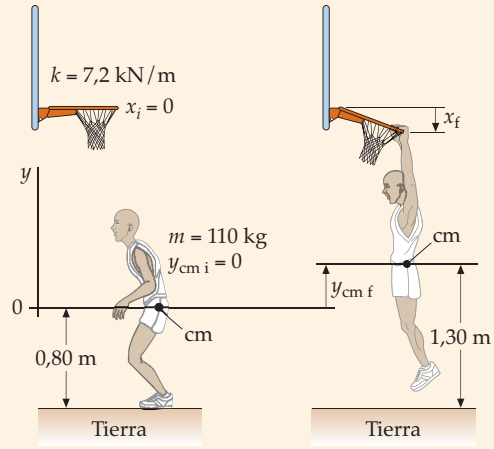


FIGURA 7.8 El jugador de baloncesto salta, se agarra al aro y se cuelga de él.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el sistema, primero en la configuración inicial y después en la configuración final (figura 7.8):

2. El punto de referencia donde la energía potencial es 0 es 0,8 m sobre el suelo. Entonces, $U_{gi} = 0$. La energía potencial inicial es 0:

$$U_{gi} = mgy_{cm\,i} = mg(0) = 0$$
$$U_{si} = \tfrac{1}{2}kx_i^2 = \tfrac{1}{2}k(0)^2 = 0$$
$$U_i = U_{gi} + U_{si} = 0$$

3. La energía potencial total es la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica del aro:

$$\begin{aligned} U_f &= U_{gf} + U_{sf} = mgy_{cm\,f} + \tfrac{1}{2}kx_f^2 \\ &= (110\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(0{,}50\text{ m}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(7{,}2\text{ kN/m})(0{,}15\text{ m})^2 \\ &= 540\text{ N}\cdot\text{m} + 81\text{ N}\cdot\text{m} = \boxed{6{,}2 \times 10^2\text{ J}} \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN Las unidades concuerdan si usamos la definición de joule: 1 J = 1 N · m.

OBSERVACIÓN Cuando el jugador se cuelga del aro, éste y el jugador oscilan. Sin embargo, llegan al reposo cuando el aro se dobla 15 cm por debajo de su posición de reposo. La energía potencial total es mínima cuando el sistema está en equilibrio (figura 7.9). El por qué esto es así se explica al final de la sección 7.2.

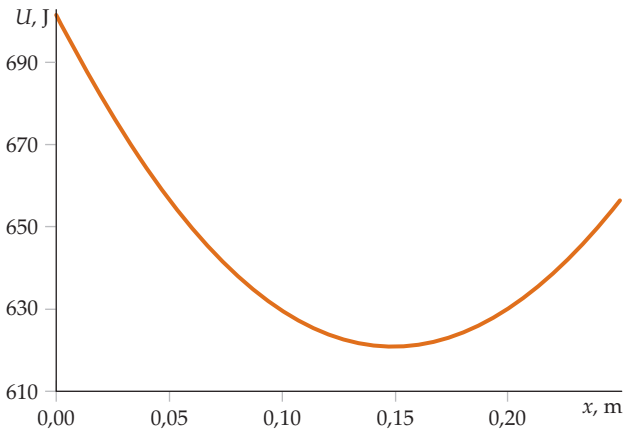


FIGURA 7.9 El gráfico muestra la energía potencial total $U_g + U_s$ en función de la deformación del aro.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.4 Un bloque de 3 kg cuelga verticalmente de un muelle cuya constante elástica es 600 N/m. (*a*) ¿Cuál será el alargamiento del muelle cuando el bloque alcance el equilibrio? (*b*) ¿Cuánta energía potencial se almacena en el muelle?

7.2 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Ahora ya podemos buscar la relación entre energía cinética y potencial. El trabajo total realizado sobre cada partícula de un sistema es igual al cambio de la energía cinética ΔK_i de esa partícula, por lo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas W_{total} es igual al cambio en la energía cinética del sistema ΔK_{sist}:

$$W_{total} = \sum \Delta K_i = \Delta K_{sist} \qquad 7.5$$

Hay dos tipos de fuerzas que realizan trabajo sobre una partícula: las fuerzas externas y las fuerzas internas. Las fuerzas internas pueden ser conservativas y no conservativas. El trabajo total realizado por todas las fuerzas es igual a la suma del trabajo realizado por todas las fuerzas externas W_{ext}, más el trabajo realizado por todas las fuerzas internas no-conservativas W_{nc}, más el trabajo realizado por todas las fuerzas internas conservativas W_c:

$$W_{total} = W_{ext} + W_{nc} + W_c$$

de donde reordenando los términos, queda

$$W_{ext} + W_{nc} = W_{total} - W_c$$

El trabajo total, cambiado de signo, realizado por todas las fuerzas internas conservativas $-W_c$ es igual al cambio de la energía potencial del sistema ΔU_{sist}:

$$-W_c = \Delta U_{sist} \qquad 7.6$$

Introduciendo las ecuaciones 7.5 y 7.6, tenemos

$$W_{ext} + W_{nc} = \Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} \qquad 7.7$$

El término de la derecha puede simplificarse

$$\Delta K_{sist} + \Delta U_{sist} = \Delta(K_{sist} + U_{sist}) \qquad 7.8$$

La suma de la energía cinética K_{sist} y la energía potencial U_{sist} de un sistema se denomina energía mecánica total, E_{mec}:

$$E_{mec} = K_{sist} + U_{sist} \qquad 7.9$$

DEFINICIÓN: ENERGÍA MECÁNICA TOTAL

Combinando las ecuaciones 7.8 y 7.9, y sustituyendo en la ecuación 7.7, se obtiene

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc} \qquad 7.10$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA PARA SISTEMAS

La energía mecánica de un sistema se conserva (E_{mec} = constante) si el trabajo total realizado por todas las fuerzas no-conservativas es cero

$$E_{mec} = K_{sist} + U_{sist} = \text{constante} \qquad 7.11$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Esta es la **ley de conservación de la energía mecánica** y es el origen de la expresión "fuerza conservativa".

Si $E_{\text{mec i}} = K_i + U_i$ es la energía mecánica inicial del sistema y $E_{\text{mec f}} = K_f + U_f$ es la energía mecánica final, la conservación de la energía mecánica implica que

$$E_{\text{mec f}} = E_{\text{mec i}} \quad (\text{o } K_f + U_f = K_i + U_i) \qquad 7.12$$

En otras palabras, cuando la energía mecánica de un sistema se conserva, podemos relacionar la energía mecánica final del sistema con la energía mecánica inicial sin tener que considerar el movimiento intermedio ni el trabajo realizado por las fuerzas involucradas. Por tanto, la conservación de la energía mecánica nos permite resolver problemas que podrían ser difíciles de resolver a partir de las leyes de Newton.

APLICACIONES

Consideremos una esquiadora que parte del reposo en un punto situado a una altura h_i por encima del punto más bajo de una colina nevada que suponemos sin rozamiento. Despreciando el rozamiento con el aire y con el suelo, ¿cuál es la velocidad de la esquiadora en un punto situado a una altura h sobre el fondo?

La energía mecánica del sistema Tierra-esquiadora se conserva, porque la única fuerza que realiza trabajo es la fuerza conservativa, interna, de la gravedad. Si asignamos $U = 0$ al fondo de la colina, la energía potencial original es mgh_i. Esta es también la energía mecánica total, ya que la energía cinética inicial es cero. Así,

$$E_{\text{mec i}} = K_i + U_i = 0 + mgh_i$$

A la altura h, la energía potencial es mgh y la velocidad es v. Por lo tanto,

$$E_{\text{mec f}} = K_f + U_f = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Igualando $E_{\text{mec f}} = E_{\text{mec i}}$, resulta

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgh = mgh_i$$

es decir,

$$v = \sqrt{2g(h_i - h)}$$

El módulo de la velocidad de la esquiadora es el mismo que habría alcanzado si hubiese caído en caída libre una distancia $h_i - h$. Sin embargo, durante el descenso por la colina nevada la esquiadora recorre una distancia mayor que la correspondiente a la caída libre y tarda más en recorrerla.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de energía mecánica

PLANTEAMIENTO Identificar un sistema que incluye el objeto u objetos de interés y cualquier otro objeto que interactúe con el objeto de interés, bien mediante fuerza conservativa o mediante fuerza de rozamiento cinético.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo del sistema con los datos disponibles. Incluir unos ejes de coordenadas y mostrar el sistema en sus configuraciones inicial y final (mostrar también una configuración intermedia puede ser útil). Los objetos pueden representarse mediante puntos al igual que hacíamos para los diagramas de fuerzas.
2. Identificar cualquier fuerza externa que haga trabajo sobre el sistema, así como cualquier fuerza interna no-conservativa y cualquier fuerza interna conservativa que realicen trabajo.
3. Aplicar la ecuación 7-10 (teorema trabajo-energía para sistemas). Para cada fuerza conservativa interna que realice trabajo utilizar una función energía potencial para representar el trabajo realizado.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que ha tenido en cuenta el trabajo de todas las fuerzas conservativas y no-conservativas.

Ejemplo 7.4 Golpeando un balón

Próximo al borde del tejado de un edificio de 12 m de altura, un joven golpea con el pie un balón con una velocidad inicial v_i = 16 m/s y un ángulo de tiro de 60° respecto a la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, determinar (*a*) la altura por encima del edificio que alcanza el balón y (*b*) su velocidad justo antes de chocar contra el suelo.

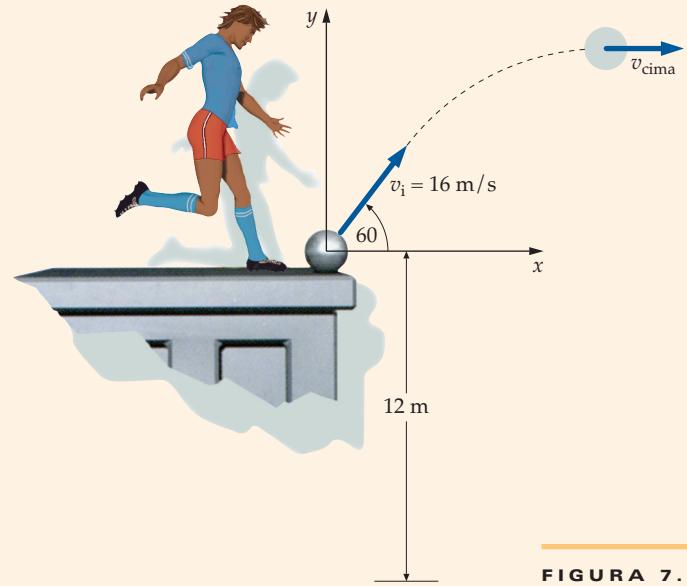


FIGURA 7.10

PLANTEAMIENTO Como la gravedad es la única fuerza que realiza trabajo sobre el sistema balón-Tierra, la energía mecánica se conserva. En la parte más alta de su trayectoria, el balón se mueve horizontalmente con velocidad, v_{cima}, igual a la componente horizontal v_{ix} de su velocidad inicial. Asignamos $y = 0$ en el tejado del edificio.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Realizar un dibujo (figura 7.10) de la trayectoria. Incluir ejes de coordenadas y mostrar la posición inicial del balón y la posición en la cima. Asignar $y = 0$ en el tejado del edificio:

2. Aplicar la ecuación trabajo-energía para sistemas. Escoger el balón y la Tierra como sistema. Después del puntapié y antes de caer al suelo no hay fuerzas externas ni fuerzas no-conservativas que realicen trabajo (despreciamos los efectos de resistencia del aire):

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$

3. La fuerza gravitacional realiza trabajo sobre el sistema. Para tenerlo en cuenta utilizamos la función energía potencial *mgy*:

$$E_{mec\,cima} = E_{mec\,i}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgy_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgh_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

4. La conservación de la energía mecánica relaciona la altura por encima del tejado con la velocidad inicial v_i y la velocidad en el punto más alto de su trayectoria v_{cima}:

$$E_{mec\,cima} = E_{mec\,i}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgy_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{cima}^2 + mgy_{cima} = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

5. Despejar y_{cima}:

$$y_{cima} = \frac{v_i^2 - v_{cima}^2}{2g}$$

6. La velocidad en la cima es igual a su velocidad horizontal inicial:

$$v_{cima} = v_{ix} = v_i \cos\theta$$

7. Sustituir el resultado del paso 3 en el paso 2 y despejar y_{cima}:

$$y_{cima} = \frac{v_i^2 - v_{cima}^2}{2g} = \frac{v_i^2 - v_i^2\cos^2\theta}{2g} = \frac{v_i^2(1 - \cos^2\theta)}{2g}$$
$$= \frac{(16\text{ m/s})^2(1 - \cos^2 60°)}{2(9{,}81\text{ m s}^2)} = \boxed{9{,}8\text{ m}}$$

(*b*) 1. Si v_f es la velocidad del balón justo antes de chocar contra el suelo, donde $y = y_f = -12$ m, su energía será:

$$E_{mec\,f} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

2. Establecer que la energía mecánica final sea igual a la inicial:

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + 0$$

3. Despejando v_f y haciendo $y = -12$ m, se determina la velocidad final:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 - 2gy_f}$$
$$= \sqrt{(16\text{ m/s})^2 - 2(9{,}81\text{ m/s}^2)(-12\text{ m})}$$
$$= \boxed{22\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que cuanto más alto sea el edificio, mayor será la velocidad de impacto contra el suelo. Este hecho se puede verificar con la expresión para v_f en el paso 3 del apartado (*b*).

Ejemplo 7.5 El péndulo

Un péndulo es un dispositivo en el que un cuerpo, denominado lenteja debido a su forma, de masa m se ata a una cuerda de longitud L. Si ésta se mueve lateralmente de modo que la cuerda forme un ángulo θ_0 con la vertical y luego se deja caer desde el reposo, ¿cuál es (a) el módulo de la velocidad v en la parte inferior de la oscilación y (b) la tensión de la cuerda en esa posición? La resistencia del aire es despreciable.

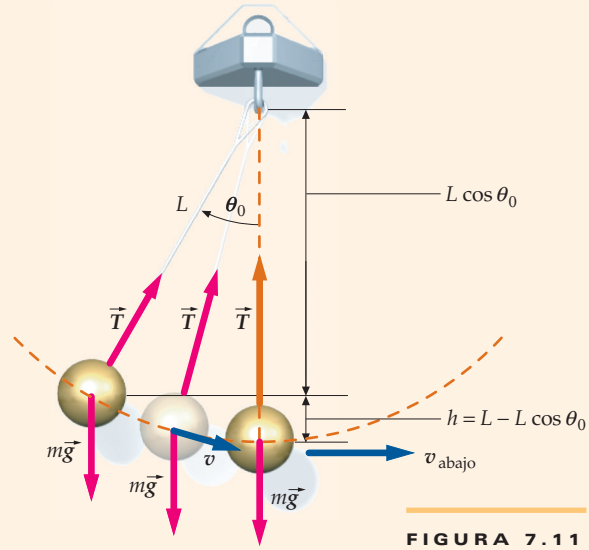


FIGURA 7.11

PLANTEAMIENTO El sistema consiste en el péndulo y la Tierra. La tensión $\vec{T}$ es una fuerza interna no-conservativa que actúa sobre la lenteja. El trabajo que hace $\vec{T}$ aumenta a razón de $\vec{T}\cdot\vec{v}$. La otra fuerza que actúa sobre la lenteja es la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, que es una fuerza interna conservativa. Utilizamos el teorema trabajo-energía para sistemas (ecuación 7.10) para encontrar la velocidad en la posición más baja de la oscilación. La tensión de la cuerda se obtiene usando la segunda ley de Newton.

SOLUCIÓN

(a) 1. Hacer un esquema del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 7.11). Asignamos $y = 0$ en la posición más baja de la oscilación e $y = h$ en la posición inicial:

2. El trabajo externo realizado sobre el sistema es igual al cambio de su energía mecánica menos el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas (ecuación 7.10):

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$

3. No hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. La tensión es una fuerza interna no-conservativa:

$$W_{ext} = 0$$
$$W_{nc} = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{\ell}$$

4. El incremeto de desplazamiento $d\ell$ es igual a la velocidad por el incremento temporal dt. Sustituyendo en el resultado del paso 3. La tensión es perpendicular a la velocidad $\vec{T}\cdot\vec{v} = 0$:

$$d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$$
$$\text{por lo tanto,}\quad W_{nc} = \int_1^2 \vec{T}\cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \vec{T}\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

5. Sustituimos W_{ext} y W_{nc} en el resultado del paso 2. La lenteja está inicialmente en reposo:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\Delta E_{mec} = 0$$

6. Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. Inicialmente la lenteja está en reposo:

$$E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$
$$\tfrac{1}{2}mv_{abajo}^2 + 0 = 0 + mgh$$

7. La conservación de la energía mecánica relaciona la velocidad v con la altura h:

$$\tfrac{1}{2}mv_{abajo}^2 = mgh$$

8. Despejar la velocidad v_{abajo}:

$$v_{abajo} = \sqrt{2gh}$$

9. Expresar esta velocidad en función del ángulo inicial θ_0 exige relacionar h con θ_0. Véase figura 7.11:

$$L = L\cos\theta_0 + h$$
$$\text{por lo tanto,}\quad h = L - L\cos\theta_0 = L(1 - \cos\theta_0)$$

10. Reemplazar h por el valor obtenido para expresar la velocidad en la parte más baja en función de θ_0:

$$v_{abajo} = \boxed{\sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}}$$

(b) 1. Cuando la lenteja está en la parte más baja del círculo, las fuerzas que actúan sobre ella son $m\vec{g}$ y $\vec{T}$. Aplicar $\Sigma F_y = ma_y$:

$$T - mg = ma_y$$

2. En su posición más baja, la lenteja tiene una aceleración centrípeta v_{abajo}^2/L hacia el centro del círculo, dirigida hacia arriba:

$$a_y = \frac{v_{abajo}^2}{L} = \frac{2\,gL(1 - \cos\theta_0)}{L} = 2g(1 - \cos\theta_0)$$

3. Sustituir este valor de a_y en la ecuación obtenida en el paso 1 de (b) para deducir T:

$$T = mg + ma_y = m(g + a_y) = m[g + 2g(1 - \cos\theta_0)]$$
$$= \boxed{(3 - 2\cos\theta_0)mg}$$

COMPROBACIÓN (1) La tensión de la cuerda en la parte más baja de la oscilación es mayor que el peso de la lenteja, ya que ésta está acelerando hacia arriba. (2) El paso 3 del apartado (b) muestra que para $\theta_0 = 0$, $T = mg$, el resultado que se esperaría para una lenteja estacionaria colgando de una cuerda.

OBSERVACIÓN (1) El ritmo al que la fuerza realiza trabajo es $\vec{F} \cdot \vec{v}$ (ecuación 6.22). El paso 4 del apartado (*a*) ilustra que la tasa a la que la tensión realiza trabajo es cero. Cualquier fuerza que sea perpendicular a la velocidad siempre realizará trabajo nulo. (2) El paso 8 del apartado (*a*) muestra que la velocidad en la parte más baja es la misma que la que tendría la lenteja si se hubiera dejado caer libremente desde una altura h. (3) La velocidad de la lenteja en la parte más baja del arco también se puede obtener directamente de las leyes de Newton, pero es más complicado porque la aceleración no es constante. (4) Si la cuerda no hubiese sido incluida en el sistema, entonces W_{ext} sería igual al trabajo realizado por la tensión y W_{nc} sería igual a cero porque no habría fuerzas no-conservativas. Los resultados hubieran sido los mismos.

Ejemplo 7.6 Bloque que comprime un muelle — *Inténtelo usted mismo*

Se empuja un bloque de 2 kg contra un muelle cuya constante elástica es 500 N/m. Después de comprimirlo 20 cm, el muelle se suelta de tal forma que acelera el bloque conforme se va estirando sobre la superficie horizontal sin rozamiento, y luego por un plano inclinado 45°, también sin rozamiento. ¿Qué distancia recorre el bloque hacia arriba sobre el plano inclinado antes de alcanzar momentáneamente el reposo?

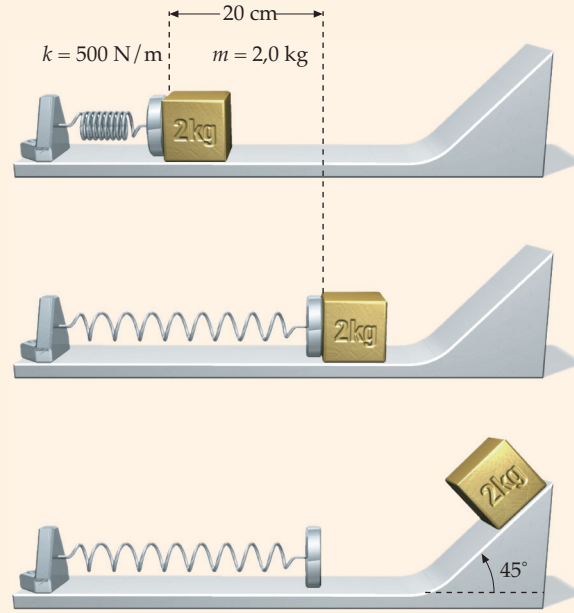


FIGURA 7.12

PLANTEAMIENTO Hacer que el sistema incluya el bloque, la Tierra, la superficie horizontal, la rampa y la pared vertical a la cual está ligado el muelle. Después de liberar el muelle no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema; las únicas fuerzas que realizan trabajo son la fuerza ejercida por el muelle y la fuerza de la gravedad. Como ambas fuerzas son conservativas, la energía mecánica total del sistema se conserva. Determinar h a partir de la conservación de la energía mecánica y, después calcular la distancia s recorrida por el bloque hacia arriba sobre el plano inclinado a partir de la expresión $\text{sen}\,45° = h/s$.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Elegir como sistema al bloque, el muelle, la Tierra, la superficie horizontal, la rampa y la pared a la que engancha el muelle. Hacer un esquema del sistema con la configuración inicial y la configuración final (véase la figura 7.12).	
2. Aplicar el teorema trabajo-energía para sistemas. Después de soltar el muelle no hay fuerzas que actúen sobre el sistema y tampoco fuerzas no-conservativas que realicen trabajo sobre él.	$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$ $0 = \Delta E_{mec} - 0$ $\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$
3. Expresar la energía mecánica inicial en función de la distancia de compresión x_i.	$E_{mec\,i} = U_{s\,i} + U_{g\,i} + K_i = \frac{1}{2}kx_i^2 + 0 + 0$
4. Expresar la energía mecánica final en función de la altura h.	$E_{mec\,f} = U_{s\,f} + U_{g\,f} + K_f = 0 + mgh + 0$
5. Sustituir en el resultado del paso 3 y despejar h.	$mgh = \frac{1}{2}kx_i^2$ $h = \dfrac{kx_i^2}{2mg} = 0{,}51\ \text{m}$
6. Determinar la distancia s a partir de h y el ángulo de inclinación (figura 7.13).	$h = s \times \text{sen}\,\theta$ $s = \boxed{0{,}72\ \text{m}}$

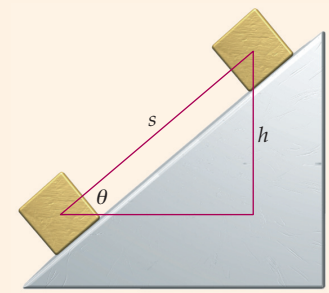


FIGURA 7.13

COMPROBACIÓN La expresión para h obtenida en el paso 5 resulta creíble. Se puede ver como al crecer x_i también aumenta la altura máxima mientras que utilizar una masa más grande hace disminuir la altura máxima.

OBSERVACIÓN (1) En este problema la energía mecánica inicial del sistema es la energía potencial del muelle. Esta energía se convierte primero en energía cinética y después en energía potencial gravitatoria. (2) La fuerza normal $\vec{F}_n$ que actúa sobre el bloque siempre forma ángulos rectos, de forma que $\vec{F}_n \cdot \vec{v} = 0$ todo el tiempo.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.5 Determinar el módulo de la velocidad del bloque en el momento justo en que se separa del muelle.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.6 ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza normal sobre el bloque?

Ejemplo 7.7 Saltador de puénting *Póngalo en su contexto*

Un muchacho salta desde una plataforma que está a 134 m sobre el río Nevis. Después de caer libremente 40 m, la cuerda atada a los tobillos del muchacho empieza a alargase (la longitud de reposo de la cuerda es de 40 m). El muchacho continúa descendiendo durante 80 m más antes de pararse en la parte más baja del descenso. Suponer que la masa del muchacho es de 100 kg, la cuerda sigue la ley de Hooke y tiene masa despreciable. ¿Cuál es la aceleración en la parte más baja del descenso? Despreciar el rozamiento con el aire.

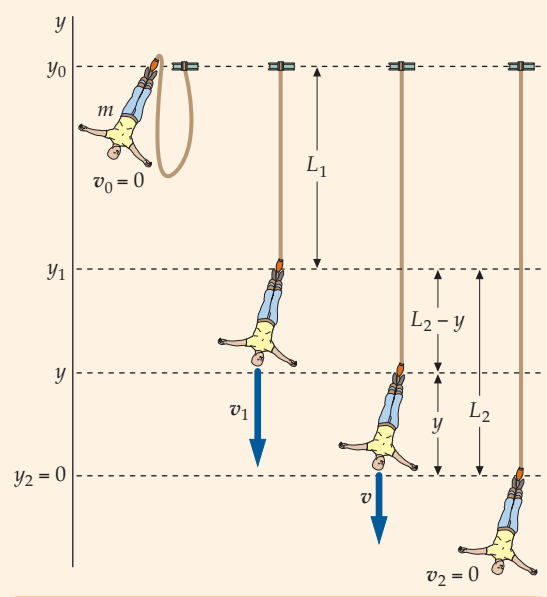


FIGURA 7.14

PLANTEAMIENTO Elegir como sistema todo aquello que se ha mencionado en el enunciado y la Tierra. Conforme el muchacho cae, la velocidad aumenta hasta un valor máximo, para después decrecer hasta cero cuando el muchacho llega a la parte más baja del descenso. Aplicar el teorema trabajo-energía para sistemas. Para determinar la aceleración utilizaremos la segunda ley de Newton y la ley de Hooke.

SOLUCIÓN

1. El sistema incluye al muchacho, la Tierra y la cuerda. Dibujar el sistema mostrando las posiciones inicial y final de los primeros 40 m de descenso y lo mismo para los 80 restantes (figura 7.14). Incluir un eje $+y$ con el cero situado en la parte más baja del descenso. Sea $L_1 = 40$ m la longitud de la cuerda y $L_2 = 80$ m la longitud de máxima extensión de la cuerda:

2. Aplicar el teorema trabajo-energía para sistemas. No hay fuerzas externas ni fuerzas internas no-conservativas que realicen trabajo:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$

3. Aplicar el resultado del paso 2 a la parte descendente donde la cuerda se estira. La extensión de la cuerda es $L_2 - y$ (el subíndice 1 indica la situación en la figura 7.14 que está más a la izquierda y el 3 indica la que está más a la derecha):

$$E_{mec\,3} = E_{mec\,2}$$
$$U_{g3} + U_{s3} + K_3 = U_{g2} + U_{s2} + K_2$$
$$mgy_3 + \tfrac{1}{2}k(L_2 - y_3)^2 + \tfrac{1}{2}mv_3^2 = mgy_2 + \tfrac{1}{2}ky_2^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$
$$0 + \tfrac{1}{2}kL_2^2 + 0 = mgL_2 + 0 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$
$$\tfrac{1}{2}kL_2^2 = mgL_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

4. Para despejar k, necesitamos encontrar la energía cinética al final de la región de caída libre. Aplicar de nuevo el resultado del apartado 2 y determinar la energía cinética:

$$E_{mec\,2} = E_{mec\,1}$$
$$U_{g2} + K_2 = U_{g1} + K_1$$
$$mgy_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = mgy_1 + \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$mgL_2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2 = mg(L_1 + L_2) + 0$$
$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 = mgL_1$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 3 y despejar k:

$$\tfrac{1}{2}kL_2^2 = mgL_2 + mgL_1$$

$$k = \frac{2mg(L_2 + L_1)}{L_2^2}$$

6. Aplicar la segunda ley de Newton cuando el muchacho está en la parte más baja del descenso. Primero construir el diagrama de fuerzas (figura 7.15):

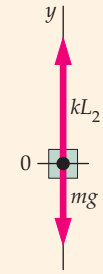


FIGURA 7.15

7. Aplicar la segunda ley de Newton y despejar la aceleración. Utilizar la expresión de k del paso 5:

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$-mg + kL_2 = ma_y$$

$$a_y = -g + k\frac{L_2}{m} = -g + \frac{2mg(L_2 + L_1)}{L_2^2}\frac{L_2}{m}$$

$$= g\left(1 + 2\frac{L_1}{L_2}\right) = g\left(1 + 2\frac{40}{80}\right) = \boxed{2{,}0g}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la aceleración en la parte más baja sea ascendente (dirección $+y$) y nuestros resultados lo corroboran. Los vectores velocidad y aceleración tienen la misma dirección inmediatamente después de que la velocidad cambie de dirección.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.7 Conforme cae, el muchacho gana velocidad hasta que la fuerza con la que la cuerda tira hacia arriba se iguala con la fuerza de la gravedad. ¿A qué altura se consigue la máxima velocidad?

Ejemplo 7.8 De regreso al futuro *Póngalo en su contexto*

Imaginemos que hemos viajado en el tiempo hasta finales del siglo XIX y estamos contemplando como unos antepasados nuestros, en su viaje de novios, se montan en las montañas rusas *Flip Flap* de Coney Island, que tienen un tramo que realiza un bucle, una vuelta vertical completa. Un saco de arena de 40 kg procedente de una zona en obras de la atracción cae en el asiento trasero de la vagoneta donde van nuestros familiares antes de entrar en el bucle. El impacto no causa ningún daño físico pero, en cambio, disminuye la velocidad del vehículo un 25%. La vagoneta había empezado a moverse, partiendo del reposo, desde un punto situado el doble de alto que el punto más alto del bucle. Despreciar cualquier pérdida debida al rozamiento o a la resistencia del aire. ¿Completará la vagoneta su recorrido sin caer?

PLANTEAMIENTO Consideraremos que el sistema está formado por la vagoneta, su contenido, las vías (incluyendo el bucle) y la Tierra. La vagoneta debe tener en el punto más alto del bucle una velocidad suficiente para mantenerse en las vías. Utilizar el teorema trabajo-energía para determinar la velocidad que lleva la vagoneta justo antes de la caída del saco y también para calcular la velocidad que tiene en el punto más alto del bucle. Usar la segunda ley de Newton para determinar la fuerza normal ejercida por el vehículo sobre los raíles.

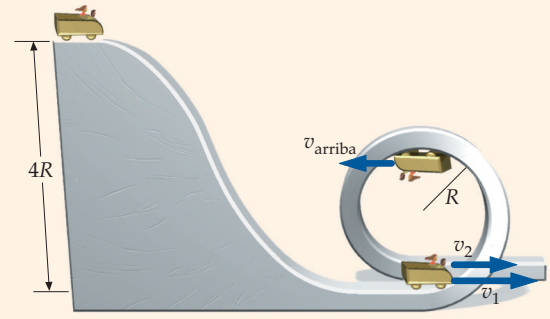


FIGURA 7.16

SOLUCIÓN

1. Elegimos como sistema la vagoneta, su contenido, los raíles y la Tierra. Se dibuja la vagoneta y el recorrido que debe seguir en la atracción, con la posición de la vagoneta en el punto de salida y en el punto más alto del bucle (figura 7.16):

2. Se aplica la segunda ley de Newton para relacionar la velocidad en el punto más alto del bucle con la fuerza normal:

$$F_n + mg = m\frac{v_{\text{arriba}}^2}{R}$$

3. Aplicar el teorema trabajo-energía al intervalo anterior al impacto. No hay fuerzas externas y tampoco fuerzas internas no-conservativas que realicen trabajo. Determinar la velocidad antes del impacto. Medir las alturas respecto a la parte más baja del bucle. La altura inicial $4R$, donde R es el radio del bucle, es el doble de la altura de la cima del bucle:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$$
$$0 = \Delta E_{mec} - 0$$
$$\therefore E_{mec\,f} = E_{mec\,i}$$
$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$
$$mg\,4R + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$\text{por lo tanto,} \quad v_1 = \sqrt{8Rg}$$

4. El impacto del saco de arena produce la reducción de la velocidad un 25%. La velocidad después del impacto es:

$$v_2 = 0{,}75\,v_1 = 0{,}75\sqrt{8Rg}$$

5. Usando el teorema trabajo-energía durante el intervalo posterior al impacto, la velocidad en el punto más alto del bucle es:

$$U_{arriba} + E_{c\,arriba} = U_2 + K_2$$
$$mg\,2R + \tfrac{1}{2}mv_{arriba}^2 = 0 + \tfrac{1}{2}m(0{,}75^2 \cdot 8Rg)$$
$$\text{por lo tanto,} \quad v_{arriba}^2 = (0{,}75^2 \cdot 8 - 4)\,Rg = 0{,}5Rg$$

6. Sustituyendo v_{arriba}^2 en el paso 2, resulta:

$$F_n + mg = m\frac{0{,}5Rg}{R}$$
$$F_n + mg = 0{,}5mg$$

7. Se obtiene F_n:

$$F_n = -0{,}5mg$$

8. F_n es el módulo de la fuerza normal. No puede ser negativo:

¡Ojo! La vagoneta cae.

COMPROBACIÓN Una pérdida del 25% de la velocidad supone perder casi un 44% de la energía cinética. La velocidad es la misma si la vagoneta hubiese partido del reposo desde una altura de $0{,}56 \times 4R = 1{,}12 \times 2R$ (12% más alto que la altura de la cima del bucle). No nos debe sorprender tanto que la vagoneta caiga.

OBSERVACIÓN Afortunadamente, hay sistemas de seguridad que evitan que las vagonetas caigan, por lo que nuestros antepasados probablemente habrían sobrevivido. La mayor preocupación entre los usuarios de aquella atracción era la rotura del cuello. En el bucle, los viajeros estaban sometidos a aceleraciones del orden de $12g$. Aquel bucle del *Flip Flap* fue el último de los bucles circulares en montañas rusas. Los bucles actuales tienen forma oval, más altos que anchos.

ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

Se puede obtener mucha información acerca del movimiento de un sistema observando detenidamente un gráfico de la energía potencial en función de la posición de la partícula. Para simplificar, nos centraremos en partículas que sólo se mueven en una dirección. Para crear este gráfico, primero tenemos que determinar la relación entre la energía potencial y la fuerza que actúa sobre la partícula. Para una fuerza conservativa general en una dimensión, $\vec{F} = F_x\hat{i}$, la ecuación 7.1*b* queda:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -F_x dx$$

La fuerza es, por lo tanto, la derivada con signo menos* de la función energía potencial:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad 7.13$$

Esta expresión general puede comprobarse para el caso de un sistema bloque-muelle diferenciando la función $U = \frac{1}{2}kx^2$, con lo que obtenemos

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

La figura 7.17 muestra un gráfico de $U = \frac{1}{2}kx^2$ e*n* función del desplazamiento x para un sistema bloque-muelle. La derivada de esta función se representa gráficamente por la pendiente de la línea tangente a la curva. La fuerza es, por lo tanto,

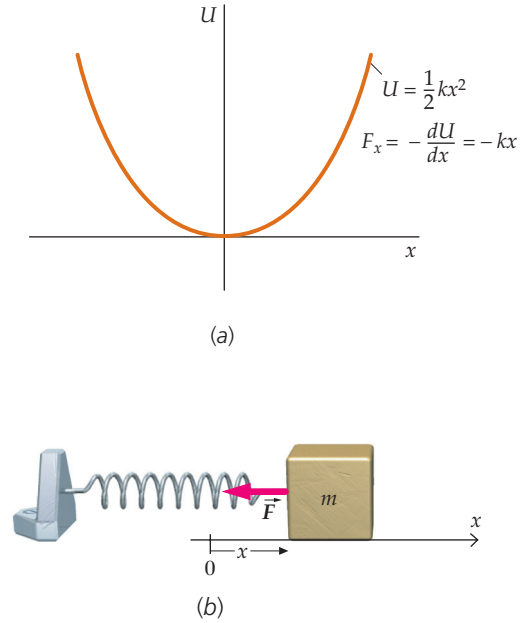


FIGURA 7.17 (*a*) Energía-potencial U en función del desplazamiento x para un objeto sujeto a un muelle. Un mínimo en una curva de energía potencial es un punto de equilibrio estable, ya que los desplazamientos a ambos lados de este punto dan lugar a una fuerza que está dirigida hacia la posición de equilibrio. (*b*) La fuerza aplicada $\vec{F}$ tira del bloque hacia la derecha estirando el muelle una distancia x_1.

* La derivada de la ecuación 7.13 se reemplaza por una derivada parcial cuando el movimiento no está restringido sólo al eje x.

igual al valor negativo de la pendiente de la curva. Para $x = 0$, la fuerza $F_x = -dU/dx$ es cero y el bloque está en *equilibrio*.

Cuando x es positiva (figura 7.17*a*), la pendiente es positiva y la fuerza F_x es negativa. Cuando x es negativa, la pendiente es negativa y la fuerza F_x es positiva. En ambos casos, la fuerza tiene la dirección que acelera el bloque hacia los valores de energía potencial más bajos. Si el bloque se desplaza ligeramente de $x = 0$, la fuerza se dirige hacia atrás, es decir, hacia $x = 0$. El equilibrio en $x = 0$ es, por lo tanto, un **equilibrio estable**, ya que un desplazamiento pequeño hace que una fuerza restauradora acelere la partícula de nuevo hacia su posición de equilibrio.

En el equilibrio estable, un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza restauradora que acelera la partícula hacia atrás en busca de su posición de equilibrio.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO ESTABLE

En la figura 7.18, se muestra una curva para la energía potencial con un máximo para $x = 0$ en lugar de un mínimo. Esta curva podría representar, por ejemplo, la energía potencial de una nave espacial en el punto entre la Tierra y la Luna donde la gravedad terrestre tira de la nave hacia la Tierra con la misma fuerza que la gravedad lunar tira de la nave hacia la Luna (despreciamos aquí la gravedad solar.). En esta curva, cuando x es positiva, la pendiente es negativa, y la fuerza F_x es positiva; y cuando x es negativa, la pendiente es positiva y la fuerza F_x es negativa. Por otra parte, la fuerza tiene aquella dirección que acelera la partícula hacia la menor energía potencial, pero en este caso la fuerza se aleja de la posición de equilibrio. El máximo para $x = 0$ en la figura 7.18 es un punto de **equilibrio inestable**, ya que un desplazamiento pequeño da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de su posición de equilibrio.

En el equilibrio inestable, un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de la posición de equilibrio.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO INESTABLE

La figura 7.19 muestra una curva de energía potencial que es plana en la región próxima a $x = 0$ y, por lo tanto, la partícula está en equilibrio. Si la partícula se desplaza ligeramente en cualquier dirección, la fuerza seguirá siendo cero. Este es un ejemplo de **equilibrio neutro**.

En el equilibrio neutro, un pequeño desplazamiento no da lugar a ninguna fuerza, de modo que la partícula sigue en equilibrio.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO NEUTRO

¡ La función energía potencial tiene un mínimo en los puntos de equilibrio estable.

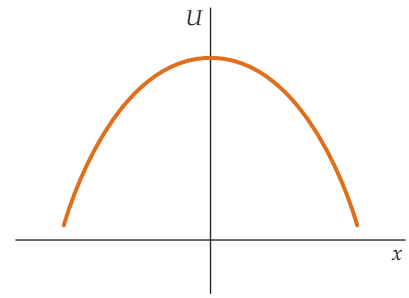


FIGURA 7.18 Una partícula cuya energía potencial se represente mediante esta gráfica se encontrará en equilibrio inestable en $x = 0$, ya que los desplazamientos respecto a la posición $x = 0$ en una u otra dirección, dan lugar a una fuerza que la aleja de la posición de equilibrio.

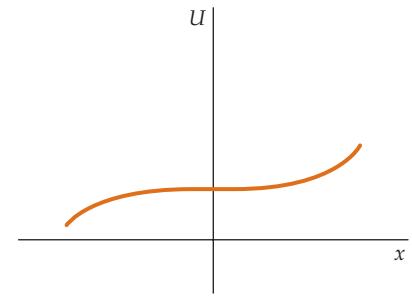


FIGURA 7.19 Equilibrio neutro. La fuerza $F_x = -dU/dx$ es cero para $x = 0$ y para los puntos próximos. Si una partícula se desplaza en cualquier dirección a partir de $x = 0$, no experimenta ninguna fuerza y, por lo tanto, permanece en equilibrio.

Ejemplo 7.9 Función energía potencial y fuerzas

La fuerza de una partícula en la región $-a < x < a$ se representa mediante la función energía potencial

$$U = -b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

donde a y b son constantes positivas. (*a*) Determinar la fuerza F_x en la región $-a < x < a$. (*b*) ¿Para qué valor de x la fuerza vale cero? (*c*) En el punto en que la fuerza se anula, ¿el equilibrio es estable o inestable?

PLANTEAMIENTO La fuerza es la derivada, con signo negativo, de la función energía potencial. El equilibrio es estable cuando la función energía potencial está en un mínimo e inestable cuando la función energía potencial está en un máximo.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular $F_x = -dU/dx$:

$$F_x = -\frac{d}{dx}\left[-b\left(\frac{1}{(a+x)} + \frac{1}{(a-x)}\right)\right] = \boxed{-b\left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right)}$$

(*b*) Igualar F_x a cero y resolver para x:

$$F_x = 0 \quad \text{para} \quad \boxed{x = 0}$$

(*c*) Calcular d^2U/dx^2. Si es positivo en la posición de equilibrio, U alcanza un mínimo y el equilibrio es estable. Si es negativo, entonces U es un máximo y el equilibrio es inestable:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -2b\left(\frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(a-x)^3}\right)$$

$$\text{En } x = 0, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = \frac{-4b}{a^3} < 0$$

Por lo tanto, equilibrio $\boxed{\text{inestable}}$

COMPROBACIÓN Si U se expresa en joules y x y a se expresan en metros, entonces b debe expresarse en joules · metros y F_x debe expresarse en newtons. En el resultado del apartado (*a*) se muestra que F_x tiene unidades de $\text{J} \cdot \text{m}/\text{m}^2 = \text{J}/\text{m}$. Como $1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m}$, la expresión para F_x tiene las unidades correctas.

OBSERVACIÓN Esta función energía potencial es la que corresponde a una partícula bajo la influencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por dos masas fijas e idénticas, una en $x = -a$ y la otra en $x = +a$. La partícula está en la línea que une las masas y en el punto medio la fuerza neta es cero. En caso contrario, la fuerza neta hará que la partícula se mueva en la dirección de la masa más próxima.

Este resultado puede utilizarse para localizar experimentalmente el centro de masas de un objeto. Por ejemplo, dos objetos conectados por una barra ligera estarán en equilibrio sobre un pivote situado en el centro de masas (figura 7.20). Si pivotamos el sistema en cualquier otro punto, el sistema girará hasta que la energía potencial pase por un mínimo, lo cual tiene lugar cuando el centro de masas se encuentra en el punto más bajo posible directamente debajo del pivote (figura 7.21). (La energía potencial gravitatoria de un sistema es $U_g = mgh_{cm}$ [ecuación 7.3].)

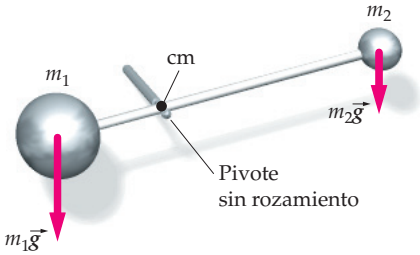


FIGURA 7.20

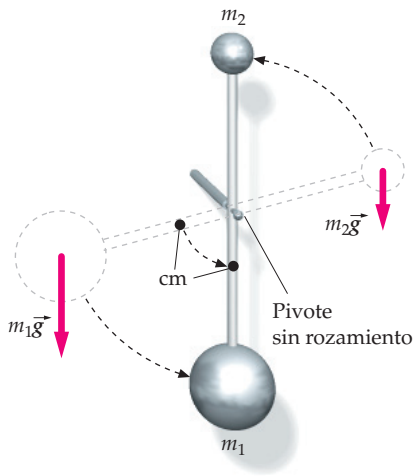


FIGURA 7.21

Si suspendemos cualquier cuerpo irregular de un pivote, este cuerpo colgará de modo que sus centro de masas se encuentre en un punto de la línea vertical que pasa por el pivote y debajo de éste. Si ahora suspendemos el cuerpo de otro punto y trazamos la línea vertical que pasa a través del mismo, el centro de masas se encuentra en la intersección de las dos líneas (figura 7.22).

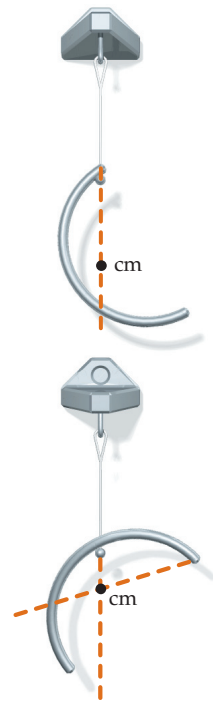


FIGURA 7.22 El centro de masas de un objeto irregular puede determinarse suspendiéndolo de dos puntos distintos, de forma sucesiva.

Para un sistema para el cual la energía mecánica se mantenga constante, los gráficos para la energía potencial U y la energía mecánica E resultan muy útiles. Por ejemplo, la figura 7.23 muestra un gráfico de la función energía potencial

$$U = b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

que es la función energía potencial utilizada en el ejemplo 7.9 pero cambiada de signo. La figura 7.23 contiene gráficos tanto de la función energía potencial como de la energía mecánica total E. La energía cinética para un valor dado de x se representa mediante la distancia entre la línea de la energía mecánica total y la curva de la energía potencial, pues $K = E - U$.

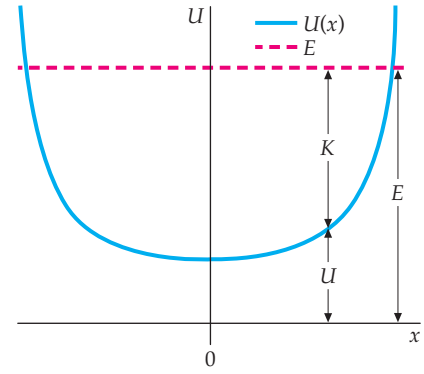


FIGURA 7.23 La energía potencial U y la energía mecánica total E se dibujan en función de x. La suma de la energía cinética K y la energía potencial es igual a la energía mecánica total. Esto es, $K = E - U$.

7.3 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En el mundo macroscópico siempre existen, en algún grado, fuerzas no-conservativas, como la fuerza de rozamiento cinético, que disminuyen la energía mecánica de un sistema. Sin embargo, toda disminución de este tipo viene acompañada del incremento de energía térmica correspondiente. (Tenga en cuenta como se calientan los cojinetes o el tambor de los frenos de un coche cuando se frena frecuentemente.) Otro tipo de fuerza no-conservativa es la implicada en la deformación de los objetos. Cuando doblamos arriba y abajo un alambre realizamos un trabajo, pero éste no aparece como energía mecánica. En su lugar, el alambre, se calienta. El trabajo realizado al deformarlo se disipa en forma de energía térmica. De igual modo, cuando una bola de masilla cae al suelo, ésta se calienta a medida que se deforma como consecuencia del impacto; la energía cinética disipada aparece en forma de energía térmica. Para el sistema bola-suelo-Tierra la energía total es la suma de la energía térmica y la energía mecánica. La energía total del sistema se conserva aunque individualmente no se conserven ni la energía mecánica total ni la energía térmica total.

Un tercer tipo de fuerza no-conservativa está asociado a las reacciones químicas. Cuando tratamos sistemas en los cuales tienen lugar reacciones químicas, la suma de la energía mecánica más la energía térmica no se conserva. Por ejemplo, supongamos que una persona comienza a correr desde el reposo. Inicialmente, no posee energía cinética. Al correr, la energía química almacenada en determinadas moléculas de sus músculos se transforma en energía cinética del cuerpo y se produce energía térmica. Es posible identificar y medir la energía química consumida. En este caso, la suma de la energía mecánica, térmica y química se conserva.

Incluso cuando se incluyen las energías térmica y química, la energía total del sistema no permanece siempre constante. La energía de un sistema puede cambiar por alguna forma de radiación, tal como las ondas sonoras o las ondas electromagnéticas. Sin embargo, *el aumento o disminución de la energía total de un sistema puede siempre explicarse por la aparición o desaparición de energía fuera del sistema*. Este resultado experimental se conoce como **ley de conservación de la energía** y es una de las leyes más importantes de la ciencia. Sea E_{sist} la energía total de un determinado sistema, E_{entrada} la energía absorbida por el sistema y E_{salida} la energía cedida por el mismo. La ley de conservación de la energía establece

$$E_{\text{entrada}} - E_{\text{salida}} = \Delta E_{\text{sist}} \qquad 7.14$$

LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Alternativamente

> La energía total del universo es constante. La energía puede transformarse de una forma en otra o ser transmitida de una región a otra, pero la energía no puede nunca ser creada o destruida.
>
> LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La energía total E de muchos sistemas de nuestra vida diaria puede explicarse completamente mediante la energía mecánica, E_{mec}, la energía térmica, $E_{térm}$, y la energía química, $E_{quím}$. Si queremos incluir cualquier otra forma posible de energía, como la electromagnética y la nuclear, añadiremos otro término, E_{otras}, y escribiremos de modo general

$$E_{sist} = E_{mec} + E_{térm} + E_{quím} + E_{otras} \qquad 7.15$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

Una forma común de transferir energía (absorbida o cedida) de un sistema es intercambiando trabajo con el exterior. Si ésta es la única fuente de energía transferida hacia dentro o hacia fuera del sistema, la ley de conservación de la energía se expresa así:

$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{otras} \qquad 7.16$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA

donde W_{ext} es el trabajo realizado sobre el sistema por fuerzas externas y ΔE_{sist} es la variación de la energía total experimentada por el sistema. Este teorema trabajo-energía es un instrumento poderoso para estudiar una amplia variedad de sistemas. Obsérvese que si el sistema está formado por una sola partícula, su energía sólo puede ser cinética. En ese caso, el teorema trabajo-energía (ecuación 7.16) es el mismo que el teorema trabajo-energía cinética (ecuación 6.8) estudiado en el capítulo 6.

Hay dos métodos de transferir energía hacia el interior o hacia fuera de un sistema. El segundo método se llama calor. El calor es la transferencia de energía asociada al cambio de temperatura. Los intercambios de energía debido a diferencias de temperatura entre el sistema y sus alrededores se discutirán en el capítulo 18. En este capítulo supondremos que la transferencia de energía en forma de calor es despreciable.

Ejemplo 7.10 La bola de plastilina que cae — *Conceptual*

Una bola de plastilina de masa m en reposo a una altura h sobre el suelo, perfectamente liso, se deja caer libremente. Analizar la aplicación de la ley de conservación de la energía (*a*) al sistema formado por la bola aislada, y (*b*) al sistema formado por la Tierra, el suelo y la bola.

PLANTEAMIENTO Dos fuerzas actúan sobre la bola: la gravedad y la fuerza de contacto del suelo. Como el suelo no se mueve, la fuerza que ejerce no realiza ningún trabajo. No hay energía química ni otros cambios energéticos, por lo que podemos prescindir de los términos $\Delta E_{quím}$ y ΔE_{otras}. Si despreciamos la energía sonora emitida al chocar la bola contra el suelo, la única energía transferida hacia el sistema, o desde él, es el trabajo realizado por la gravedad, de modo que podemos utilizar el teorema trabajo-energía.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Escribir el teorema trabajo-energía:

$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{otras}$$
$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + E_{térm}$$

2. Las dos fuerzas externas que actúan sobre el sistema son la gravedad y la fuerza ejercida por el suelo. Sin embargo, la parte de la bola en contacto con el suelo no se mueve, de forma que la fuerza sobre la bola debida al suelo no realiza trabajo. El único trabajo hecho sobre la bola es por gravedad: $W_{ext} = mgh$

3. Como la bola aislada es nuestro sistema, su energía mecánica es enteramente cinética, la cual es cero, tanto inicialmente como finalmente. Así, el cambio de energía mecánica es cero: $\Delta E_{mec} = 0$

4. Sustituir mgh en W_{ext} y 0 en ΔE_{mec} en el paso 1:
$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + E_{térm}$$
$$mgh = 0 + \Delta E_{térm}$$
por lo tanto, $\boxed{\Delta E_{térm} = mgh}$

Nota: Si el suelo no fuese perfectamente rígido, el aumento de energía térmica sería compartido entre la bola y el suelo.

(*b*) 1. No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema bola-Tierra-suelo (la fuerza de la gravedad y la del suelo son ahora internas al sistema), de modo que no hay trabajo externo realizado: $W_{ext} = 0$

2. Expresar el teorema trabajo-energía con $W_{ext} = 0$:
$$W_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$
$$0 = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

3. La energía mecánica inicial del sistema bola-Tierra es la energía potencial gravitatoria inicial, y la energía mecánica final es cero:
$$E_{mec\,i} = mgh$$
$$E_{mec\,f} = 0$$

4. El cambio de energía mecánica del sistema bola-Tierra es, por lo tanto: $\Delta E_{mec} = 0 - mgh = -mgh$

5. El teorema trabajo-energía nos da el mismo resultado que el obtenido en el apartado (*a*): $\Delta E_{térm} = \boxed{-\Delta E_{mec} = mgh}$

COMPROBACIÓN En ambos apartados (*a*) y (*b*), se llega al mismo resultado, la energía térmica del sistema aumenta mgh, que era lo esperado.

OBSERVACIÓN En (*a*) la energía se transfiere a la bola en virtud del trabajo realizado por la gravedad. Esta energía aparece en forma de energía cinética de la bola antes de que choque contra el suelo y como energía térmica después. La bola se calienta ligeramente y finalmente la energía se transfiere a los alrededores en forma de calor. En (*b*) la energía potencial inicial del sistema bola-Tierra-suelo se convierte en energía cinética de la bola antes de que choque contra el suelo y después en energía térmica.

PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENE EL ROZAMIENTO CINÉTICO

Cuando dos superficies se deslizan una sobre otra, las fuerzas de rozamiento cinético ejercidas por una superficie sobre la otra, disminuyen la energía mecánica total del sistema e incrementan la energía térmica. Consideremos un bloque que comienza a moverse con velocidad inicial v_i y se desliza sobre una mesa sin rozamiento (figura 7.24). La mesa está inicialmente en reposo. Sean el bloque y la mesa nuestro sistema. Por lo tanto, $\Delta E_{quím} = \Delta E_{otras} = 0$ y ningún trabajo externo se realiza sobre este sistema. El teorema trabajo-energía nos dice que

$$0 = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} \qquad 7.17$$

El cambio en la energía mecánica es

$$\Delta E_{mec} = \Delta K_{bloque} + \Delta K_{mesa} = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2) + (\tfrac{1}{2}MV_f^2 - 0) \qquad 7.18$$

donde m es la masa del bloque, M es la masa de la mesa, v es la velocidad del bloque y V la de la mesa. Relacionemos ahora la pérdida de energía mecánica con la fuerza de rozamiento. Si f_c es el módulo de la fuerza de rozamiento, la segunda ley de Newton expresa que

$$-f_c = ma_x$$

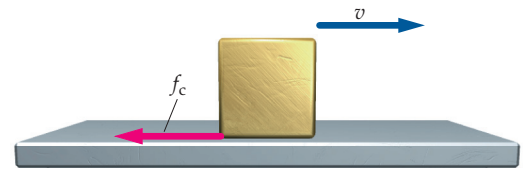


FIGURA 7.24

donde a_x es la aceleración del bloque. Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por el desplazamiento del bloque Δx, se obtiene

$$-f_c \Delta x = ma_x \Delta x \qquad 7.19$$

despejando $a_x \Delta x$ de la fórmula para la aceleración constante $2a_x \Delta x = v_f^2 - v_i^2$ y sustituyendo en la ecuación 7.19, resulta

$$-f_c \Delta x = ma_x \Delta x = m(\tfrac{1}{2}v_f^2 - \tfrac{1}{2}v_i^2) = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \qquad 7.20$$

La ecuación 7.20 no es más que la aplicación de la relación trabajo del centro de masas-energía cinética de traslación al bloque. Aplicando la misma relación a la mesa, se tiene

$$f_c \Delta X = MA_x \Delta X = M(\tfrac{1}{2}V_f^2 - \tfrac{1}{2}V_i^2) = \tfrac{1}{2}MV_f^2 - 0 \qquad 7.21$$

donde ΔX y A_x son el desplazamiento y aceleración de la mesa. Sumando las ecuaciones 7.20 y 7.21, obtenemos

$$-f_c(\Delta x - \Delta X) = (\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2) + \tfrac{1}{2}MV_f^2 \qquad 7.22$$

Obsérvese que $\Delta x - \Delta X$ es la distancia, relativa a la mesa, s_{rel} que el bloque recorre al deslizarse sobre la mesa. Obsérvese también que el lado derecho de la ecuación 7.22 es el cambio de la energía mecánica ΔE_{mec} del sistema bloque-mesa. Sustituyendo en la ecuación 7.22, nos da

$$-f_c s_{rel} = \Delta E_{mec} \qquad 7.23$$

La disminución de la energía mecánica del sistema bloque-mesa viene acompañada por un aumento de la energía térmica del sistema. Esta energía aparece tanto en la superficie inferior del bloque como sobre la superficie de la mesa. Reemplazando $\Delta E_{térm}$ por $-\Delta E_{mec}$ (ecuación 7.17), obtenemos

$$f_c s_{rel} = \Delta E_{térm} \qquad 7.24$$

ENERGÍA DISIPADA POR ROZAMIENTO CINÉTICO

donde s_{rel} es la distancia que una de las superficies en contacto recorre en contacto con la otra. Puesto que esa distancia es la misma, cualquiera que sea el sistema de referencia, la ecuación 7.24 será válida en cualquier sistema de referencia, independientemente de si es inercial o no.

Introduciendo este resultado en el teorema trabajo-energía (con $\Delta E_{quim} = \Delta E_{otro} = 0$), obtenemos

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = \Delta E_{mec} + f_c s_{rel} \qquad 7.25$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CON ROZAMIENTO

Ejemplo 7.11 Un bloque en una mesa

Una persona empuja con una fuerza horizontal de 25 N un bloque de 4 kg, inicialmente en reposo sobre una mesa horizontal, una distancia de 3 m. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,35. Determinar (*a*) el trabajo externo sobre el sistema bloque-mesa, (*b*) la energía disipada por rozamiento, (*c*) la energía cinética final del bloque y (*d*) el módulo de la velocidad del bloque.

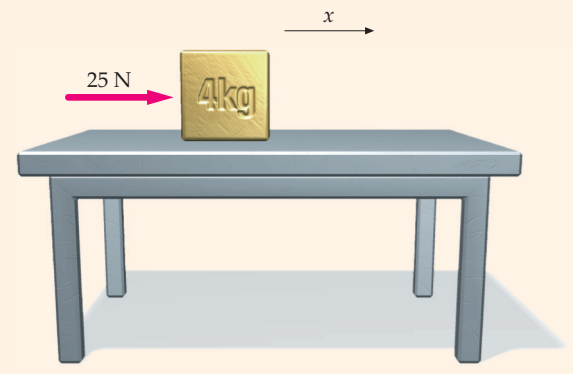


FIGURA 7.25

PLANTEAMIENTO El bloque y la mesa constituyen el sistema (figura 7.25). La persona es externa al sistema, por lo que la fuerza que ejerce es externa. La velocidad final del bloque se deduce de su energía cinética final, la cual determinamos mediante el teorema trabajo-energía con $\Delta E_{quím} = 0$ y $\Delta E_{térm} = f_c \Delta x$. La energía del sistema aumenta por el trabajo externo. Parte del aumento de la energía es en forma de energía cinética y parte en forma de energía térmica.

SOLUCIÓN

(*a*) Hay cuatro fuerzas externas que actúan sobre el sistema, aunque sólo hay una que realiza trabajo. El trabajo externo realizado es el producto de la fuerza de la persona por la distancia que se ha movido el bloque:

$$\begin{aligned}\Sigma W_{\text{ext}} &= W_{\text{persona sobre bloque}} + W_{\text{gravedad sobre bloque}} + W_{\text{gravedad sobre mesa}} + W_{\text{suelo sobre mesa}}\\ &= F\,\Delta x + 0 + 0 + 0 = (25\text{ N})(3{,}0\text{ m})\\ &= \boxed{75\text{ J}}\end{aligned}$$

(*b*) La energía disipada por rozamiento es $f_c\,\Delta x$ (el módulo de la fuerza normal es mg):

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{térm}} &= f_c\,\Delta x = \mu_c F_n\,\Delta x = \mu_c mg\,\Delta x\\ &= (0{,}35)(4{,}0\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(3{,}0\text{ m})\\ &= \boxed{41\text{ J}}\end{aligned}$$

(*c*) 1. Aplicar el teorema trabajo-energía para determinar la energía cinética final:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}}$$

2. Como no hay fuerzas conservativas internas que hagan trabajo, el cambio en la energía potencial es cero. El cambio en la energía cinética es igual a la variación de la energía mecánica:

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta U + \Delta K = 0 + (K_f - 0) = K_f$$

3. Sustituir este resultado en el resultado del paso 1 y utilizar después los valores de los apartados (*a*) y (*b*) para determinar K_f:

$$\begin{aligned}&W_{\text{ext}} = K_f + \Delta E_{\text{térm}}\\ &\text{por lo tanto, } K_f = W_{\text{ext}} - \Delta E_{\text{térm}}\\ &\qquad = 75\text{ J} - 41\text{ J} = \boxed{34\text{ J}}\end{aligned}$$

(*d*) El módulo de la velocidad final del bloque está relacionado con su energía cinética. Despejar la velocidad final del bloque:

$$K_f = \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

$$\text{con lo cual,}\quad v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(34\text{ J})}{4{,}0\text{ kg}}} = \boxed{4{,}1\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Parte de la energía transferida al sistema por la persona termina como energía cinética y otra parte se convierte en energía térmica. Como era de esperar, el cambio en la energía térmica (apartado (*b*)) es positivo y es menor que el trabajo realizado por la fuerza externa (apartado (*a*)).

Ejemplo 7.12 Un trineo en la nieve — *Inténtelo usted mismo*

Un trineo se desliza por una superficie horizontal cubierta de nieve con una velocidad inicial de 4 m/s. Si el coeficiente de rozamiento entre el trineo y la nieve es 0,14, ¿qué distancia recorrerá hasta alcanzar el reposo?

PLANTEAMIENTO Elegimos el trineo y la nieve como nuestro sistema y aplicamos el teorema trabajo-energía.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Dibujar el sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 7.26).

Respuestas

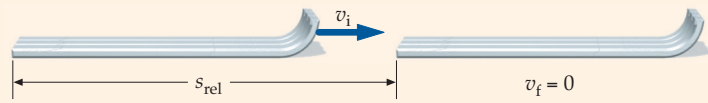


FIGURA 7.26

2. Aplicar el teorema trabajo-energía. Establecer el cambio a energía térmica debido a la fuerza de rozamiento.

$$\begin{aligned}W_{\text{ext}} &= \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{term}}\\ &= (\Delta U + \Delta K) + f_c s_{\text{rel}}\end{aligned}$$

3. Determinar f_c. La fuerza normal es igual a mg.

$$f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg$$

4. En este sistema no hay fuerzas externas ni fuerzas internas conservativas que hagan trabajo. Eliminar dos términos del resultado del paso 2 teniendo en cuenta estas dos observaciones.

$$\begin{aligned}&W_{\text{ext}} = 0 \text{ y } \Delta U = 0\\ &\text{por tanto,}\quad W_{\text{ext}} = \Delta U + \Delta K + f_c s_{\text{rel}}\\ &\qquad 0 = 0 + \Delta K + \mu_c mg\, s_{\text{rel}}\end{aligned}$$

5. Expresar el cambio en la energía cinética en función de la masa y de la velocidad inicial, y obtener Δs.

$$s_{\text{rel}} = \frac{v^2}{2\mu_c g} = \boxed{5{,}8\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La expresión para el desplazamiento que aparece en el paso 5 es dimensionalmente correcta. El coeficiente de rozamiento μ_c es adimensional, y v^2/g tiene dimensiones de longitud.

Ejemplo 7.13 Un tobogán

Una niña de masa 40 kg se desliza hacia abajo por un tobogán de 8 m de largo inclinado 30°. El coeficiente de rozamiento cinético entre la niña y el tobogán es $\mu_c = 0{,}35$. Si la niña parte del reposo desde el punto más alto del tobogán, a una altura de 4 m sobre el suelo, ¿qué velocidad tiene al llegar al suelo?

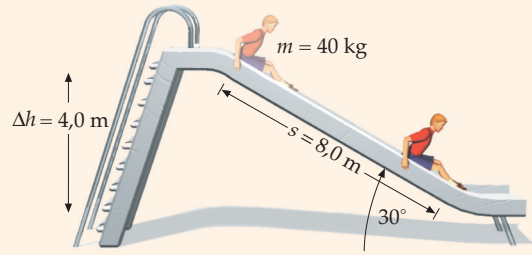


FIGURA 7.27

PLANTEAMIENTO Cuando la niña se desliza hacia abajo, parte de su energía potencial se convierte en cinética y parte en energía térmica debido al rozamiento. Nuestro sistema es niña-tobogán-Tierra. Aplicamos el teorema trabajo-energía.

SOLUCIÓN

1. Se dibuja un esquema del sistema mostrando sus configuraciones inicial y final (figura 7.27):
2. Se escribe la ecuación de conservación de la energía: $W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = (\Delta U + \Delta K) + f_c s_{rel}$
3. La energía cinética inicial es cero. La velocidad al final del tobogán está relacionada con la energía cinética final: $\Delta K = K_i - 0 = \frac{1}{2} m v_f^2$
4. Sobre el sistema no actúan fuerzas externas: $W_{ext} = 0$
5. El cambio de la energía potencial está relacionado con el cambio de altura Δh (que es negativo): $\Delta U = mg\,\Delta h$
6. Para determinar f_c aplicamos la segunda ley de Newton a la niña. Primero se dibuja el diagrama de fuerzas (figura 7.28):

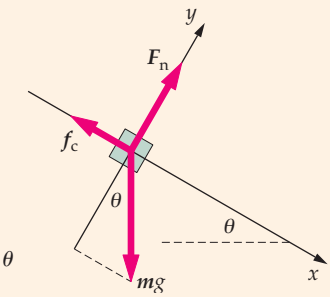


FIGURA 7.28

7. Después, se aplica la segunda ley de Newton. La componente normal de la aceleración es cero. Para determinar F_n tenemos en cuenta las componentes en la dirección normal y obtenemos f_c teniendo en cuenta que $f_c = \mu_c F_n$: $F_n - mg\cos\theta = 0$ por lo tanto, $f_c = \mu_c F_n = \mu_c mg\cos\theta$
8. La relación entre $s = s_{rel}$ y Δh es trigonométrica: $|\Delta h| = s\,\text{sen}\,\theta$
9. Sustituyendo en el resultado del paso 2: $0 = mg\,\Delta h + \frac{1}{2} m v_f^2 + f_c s = -mgs\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2} m v_f^2 + \mu_c mg\cos\theta\, s$
10. Despejando para v_f, se obtiene: $v_f^2 = 2gs(\text{sen}\,\theta - \mu_c\cos\theta) = 2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(8{,}0\ \text{m})(\text{sen}\,30° - 0{,}35\cos 30°) = 30{,}9\ \text{m}^2/\text{s}^2$
y entonces $v_f = \boxed{5{,}6\ \text{m/s}}$

COMPROBACIÓN Como era de esperar la expresión para v_f^2 del paso 10 es independiente de la masa de la niña. Esto era así porque todas las fuerzas que actúan sobre la niña son proporcionales a la masa m.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.8 Utilizar el extremo inferior del tobogán como origen del sistema de referencia y origen de la energía potencial. Para el sistema Tierra-niña-tobogán, calcular (*a*) la energía mecánica inicial, (*b*) la energía mecánica final y (*c*) la energía disipada por rozamiento.

Ejemplo 7.14 Dos bloques y un muelle

Un bloque de 4 kg cuelga de una cuerda ligera que, a través de una polea sin rozamiento y sin masa, está conectada a un bloque de 6 kg que descansa sobre una plataforma. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_c = 0{,}2$. El bloque de 6 kg se empuja contra un muelle. El muelle tiene una constante elástica de 180 N/m y se comprime 30 cm. Determinar la velocidad (módulo) de los bloques cuando el muelle se libera y el bloque de 4 kg cae una distancia de 40 cm. (Suponer que el bloque de 6 kg se encuentra inicialmente a 40 cm de la polea.)

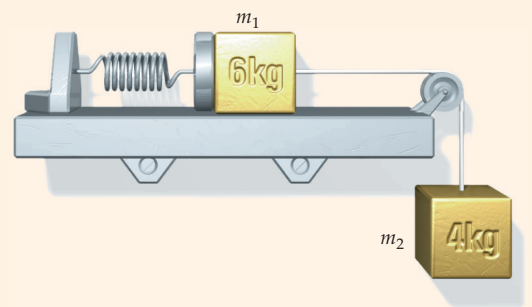


FIGURA 7.29 El sistema está constituido por todos los elementos que se muestran más la Tierra.

PLANTEAMIENTO La velocidad de los bloques se deduce de su energía cinética final. Consideremos que el sistema está formado por todo lo que se muestra en la figura 7.29 más la Tierra. Este sistema tiene energía potencial gravitatoria y elástica. Aplicar el teorema trabajo-energía para determinar la energía cinética de los bloques. A continuación, utilizar ese resultado para calcular su velocidad.

SOLUCIÓN

1. El sistema está constituido por todos los elementos que se muestran en la figura más la Tierra. Plantear la ecuación de la conservación de la energía del sistema:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$
$$= (\Delta U_s + \Delta U_g + \Delta E_c) + f_c s_{rel}$$

2. Hágase un dibujo de del sistema (figura 7.30) que incluya las configuraciones inicial y final:

3. Sobre el sistema no hay fuerzas externas:

$$W_{ext} = 0$$

4. La energía potencial del muelle depende de su constante k y de su alargamiento x. (Si el muelle se comprime, x es negativa). La energía potencial gravitacional depende de la altura del bloque 2:

$$U_s = \tfrac{1}{2}kx^2$$
$$U_g = mgy_2$$

5. Construir una tabla donde se incluyan los términos de la energía mecánica iniciales, cuando el muelle está comprimido 30 cm, y finales, cuando el bloque se ha movido una distancia $s = 40$ cm y el muelle se ha extendido. Hacer que la energía potencial gravitatoria de la configuración inicial sea cero. Añadir la diferencia (final menos inicial) entre ambas expresiones:

	Final	Inicial	Diferencia
U_s	0	$\frac{1}{2}kx_i^2$	$-\frac{1}{2}kx_i^2$
U_g	$-m_2gs$	0	$-m_2gs$
K	$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$	0	$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2$

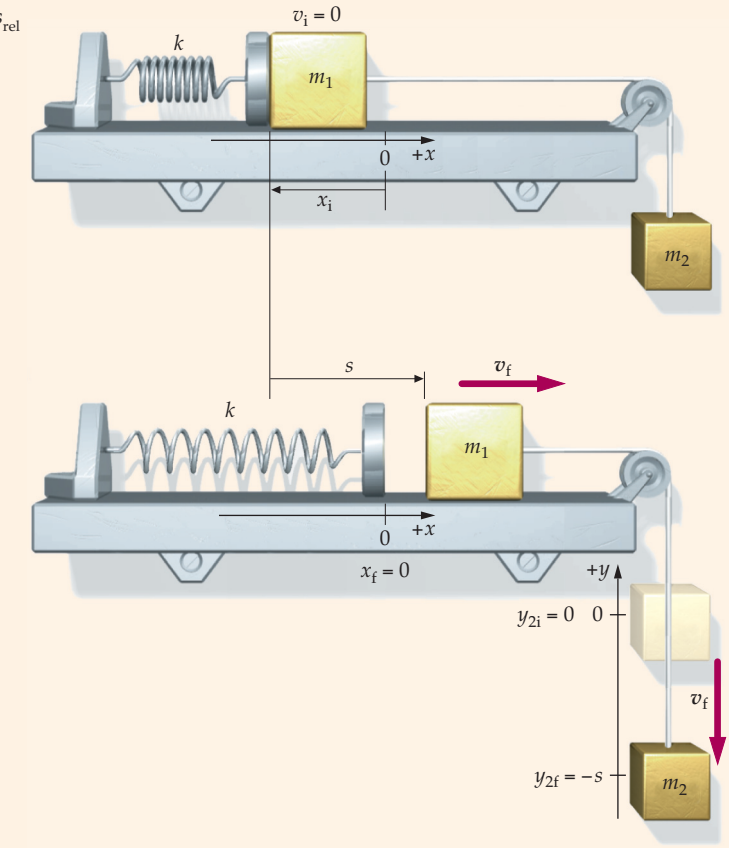


FIGURA 7.30 El sistema está constituido por todos los elementos mostrados más la Tierra. Se muestra el sistema en sus configuraciones inicial y final.

6. Determinar una expresión para f_c que incluya μ_c:

$$f_c = \mu_c m_1 g$$

7. Sustituir los resultados de los pasos 3-6 en el resultado del paso 1.

$$0 = -\tfrac{1}{2}kx_i^2 - m_2gs + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 + \mu_c m_1 gs$$

8. Despejar v_f^2 a partir del paso 7 y, finalmente, obtener v_f sustituyendo los valores numéricos:

$$v_f^2 = \frac{kx_i^2 + 2(m_2 - \mu_c m_1)gs}{m_1 + m_2}$$

por lo tanto, $v_f = \boxed{2{,}0 \text{ m/s}}$

COMPROBACIÓN Si $m_2 = \mu_c = 0$, entonces la velocidad final no dependerá ni de g ni de μ_c (ver paso 8). Esto era de esperar, pues $m_2 g$ es la fuerza gravitacional sobre m_2 que hace tirar del sistema y $\mu_c m_1 g$ es la fuerza de rozamiento sobre m_1 opuesta al avance del sistema. Si esas dos fuerzas se equilibran, los efectos de la gravedad y del rozamiento no afectarán al resultado de la velocidad final.

OBSERVACIÓN Esta solución supone que la cuerda permanece tensa en todo momento, lo cual será cierto si la aceleración de m_1 es menor que g, es decir, si la fuerza neta sobre m_1 es menor que $m_1 g = (6 \text{ kg})(9{,}81 \text{ N/kg}) = 58{,}9$ N. Inicialmente, la fuerza ejercida por el muelle sobre m_1 tiene el módulo $k\,\Delta x_1 = (180 \text{ N/m})(0{,}3 \text{ m}) = 54{,}0$ N, y la fuerza de rozamiento $f_c = \mu_c m_1 g = 0{,}2(58{,}9 \text{ N}) = 11{,}8$ N. Estas fuerzas se combinan para dar una fuerza de 42,2 N dirigida hacia la derecha. Como la fuerza del muelle decrece a medida que el bloque m_1 se mueve hacia delante, la aceleración del bloque de 6 kg siempre será menor que g y la cuerda permanecerá tensa en todo momento.

PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENE LA ENERGÍA QUÍMICA

A veces, la energía química interna de un sistema se transforma en energía mecánica y térmica sin que ningún agente exterior realice trabajo. Por ejemplo, al andar empujamos con los pies el suelo hacia atrás y el suelo nos empuja hacia delante con la fuerza de rozamiento estático. Esta fuerza nos acelera, pero no realiza trabajo. El desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es cero (suponiendo que los zapatos no se deslizan sobre el suelo) y, por lo tanto, no se realiza ningún trabajo y ninguna energía se transfiere del suelo a nuestro cuerpo. La energía cinética del cuerpo procede de la transformación de la energía química procedente de los alimentos que ingerimos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.15 Subiendo escaleras — *Conceptual*

Una persona de masa m sube por una escalera hasta una altura h. Analizar la aplicación del principio de conservación de la energía al sistema formado por la persona sola.

(Corbis.)

PLANTEAMIENTO Dos fuerzas actúan sobre la persona: la gravedad y la fuerza de contacto de los peldaños sobre sus pies. Aplicar el teorema trabajo-energía sobre el sistema (la persona).

SOLUCIÓN

1. La persona es el sistema. Expresar el teorema trabajo-energía (ecuación 7.16) para este sistema: $W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}}$
2. Hay dos fuerzas externas que actúan sobre el sistema, la fuerza de la gravedad y la fuerza de los peldaños sobre los pies. La fuerza de gravedad realiza un trabajo negativo, ya que su dirección es $-h$. La fuerza de los peldaños no efectúa ningún trabajo porque el punto de aplicación, las suelas de los zapatos del hombre, no se mueve mientras se aplica la fuerza: $W_{\text{ext}} = -mgh$
3. La persona sola es el sistema. Como la configuración de la persona no cambia (sigue estando erguida), cualquier cambio de su energía mecánica es un cambio de su energía cinética, que es la misma, al inicio que al final: $\Delta E_{\text{mec}} = 0$
4. Aplicando estos resultados en el teorema trabajo-energía: $W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{otras}}$
   luego, $-mgh = 0 + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + 0$
   o $\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la energía química de la persona decrezca. De acuerdo con el resultado del paso 4, el cambio de la energía es negativa como se esperaba.

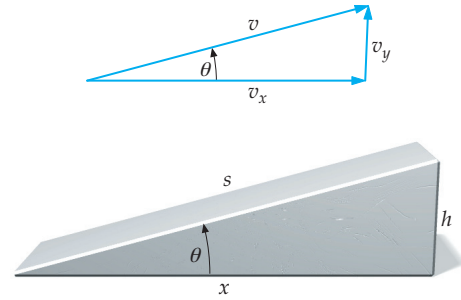
OBSERVACIÓN Si no se realizaran cambios de energía térmica, la energía química del hombre disminuiría en mgh. Como el rendimiento del cuerpo es relativamente bajo, la cantidad de energía química transformada en el cuerpo del hombre es considerablemente mayor que mgh. La disminución de la energía química almacenada es mgh más algo de energía térmica. El exceso de energía será posiblemente transferido en forma de calor a los alrededores.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 7.1

Analizar la conservación de la energía en el sistema hombre más Tierra.

Ejemplo 7.16 Yendo cuesta arriba

Un coche de 1000 kg se mueve a una velocidad constante de 100 km/h = 28 m/s por una pendiente hacia arriba del 10%. (Es decir, la carretera se eleva 1 m por cada 10 m de distancia horizontal, lo que equivale a un ángulo de inclinación θ, tal que tg θ = 0,1 (figura 7.31)). (*a*) Si la eficiencia es del 15%, ¿cuál es la tasa de consumo de energía química del sistema coche-Tierra-atmósfera? (La eficiencia es la fracción de energía química consumida que aparece en forma de energía mecánica.) (*b*) ¿A qué ritmo se genera energía térmica?



$\text{tg}\,\theta = h/x \sim \text{sen}\,\theta = h/s$

FIGURA 7.31

PLANTEAMIENTO Parte de la energía incrementa la energía potencial del coche cuando éste asciende por la cuesta, y otra parte aumenta la energía térmica, gran parte de la cual se expulsa por el tubo de escape. Para resolver el problema, consideraremos que el sistema está formado por el coche, la cuesta, el aire y la Tierra. Luego, podemos aplicar el teorema trabajo-energía para calcular el ritmo al que se genera la energía térmica.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La tasa con que se pierde energía química, es decir, la potencia suministrada por el motor, es igual al valor absoluto del cambio de energía química por unidad de tiempo:

$$\text{Tasa de consumo de la energía química} = \frac{|\Delta E_{\text{quím}}|}{\Delta t}$$

2. El incremento de energía mecánica es igual al 15% de la disminución de la energía química:

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0{,}150|\Delta E_{\text{quím}}|$$

3. Determinar la tasa de consumo de energía química:

$$\frac{|\Delta E_{\text{quím}}|}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}150}\frac{\Delta E_{\text{mec}}}{\Delta t}$$

4. El coche se mueve a velocidad constante, por lo que $\Delta K = 0$ y $\Delta E_{\text{mec}} = \Delta U$. Relacionar el cambio de la energía mecánica con la variación de altura Δh y sustituir en el resultado del paso 3. (La energía química decrece):

$$\Delta E_{\text{mec}} = mg\,\Delta h$$

$$\text{por lo tanto,}\quad \frac{\Delta E_{\text{quím}}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150}\frac{mg\,\Delta h}{\Delta t}$$

5. Convertir los incrementos en derivadas, es decir, hacer el límite cuando Δt tiende a cero:

$$\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = -\frac{1}{0{,}150}\frac{mgdh}{dt}$$

6. La tasa de cambio de h es v_y, que está relacionada con el módulo de la velocidad v tal como se muestra en la figura 7.31:

$$\frac{dh}{dt} = v_y = v\,\text{sen}\,\theta$$

7. Como el ángulo θ es pequeño podemos aproximar sen θ por tg θ:

$$\text{sen}\,\theta \approx \text{tg}\,\theta = 0{,}100$$

8. Calcular la tasa de consumo de energía química:

$$\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = -\frac{mg}{0{,}15}v\,\text{sen}\,\theta \approx -\frac{(1000\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})}{0{,}15}(27{,}8\text{ m/s})0{,}100$$

$$\approx -182\text{ kW}$$

$$\therefore\ -\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} \approx \boxed{182\text{ kW}}$$

(*b*) 1. Plantear la relación trabajo-energía:

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}}$$

2. Hacer W_{ext} igual a cero, dividir ambos lados por Δt, convertir los incrementos a derivadas y calcular $dE_{\text{térm}}/dt$:

$$0 = \frac{dE_{\text{mec}}}{dt} + \frac{dE_{\text{térm}}}{dt} + \frac{dE_{\text{quím}}}{dt}$$

$$\text{por lo tanto,}\quad \frac{dE_{\text{térm}}}{dt} = -\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} - \frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = 0{,}150\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} - \frac{dE_{\text{quím}}}{dt}$$

$$= -0{,}850\frac{dE_{\text{quím}}}{dt} = 0{,}850(182\text{ kW}) = \boxed{154\text{ kW}}$$

COMPROBACIÓN Las diferencias relativas de los resultados de los apartados (*a*) y (*b*) se deben, como era de esperar, al 15% de la eficiencia.

OBSERVACIÓN Los vehículos propulsados por motores de gasolina suelen tener una eficiencia del 15%. Alrededor del 85% de la energía química se transforma en energía térmica, la mayor parte de la cual sale por el tubo de escape. También se produce energía térmica a causa del rozamiento por rodadura y de la resistencia del aire. El contenido energético de la gasolina es de 31,8 MJ/L.

7.4 MASA Y ENERGÍA

En 1905, Albert Einstein publicó su teoría especial de la relatividad, que incluye su famosa ecuación

$$E = mc^2 \qquad 7.26$$

donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. En capítulos posteriores estudiaremos esta teoría con detalle. Sin embargo, utilizamos aquí esta ecuación para presentar una visión más completa y moderna de la conservación de la energía.

De acuerdo con la ecuación 7.26, una partícula o sistema de masa m posee la energía en "reposo" mc^2. Esta energía es intrínseca a la partícula. Consideremos el positrón, partícula emitida en un proceso nuclear llamado desintegración beta. Los positrones y los electrones tienen idéntica masa, pero carga eléctrica igual y de signo contrario. Cuando un positrón choca con un electrón, en la materia tiene lugar la aniquilación electrón-positrón. La aniquilación es un proceso en el cual el electrón y el positrón desaparecen, y su energía aparece en forma de radiación electromagnética. Si las dos partículas están inicialmente en reposo, la energía de la radiación electromagnética es igual a la energía en reposo del electrón más la del positrón.

En física atómica y nuclear, las energías se expresan normalmente en unidades de electronvolts (eV) o megaelectronvolts (1 MeV = 10^6 eV). Así, una unidad que resulta útil para expresar las masas de las partículas atómicas es eV/c^2 o MeV/c^2. La tabla 7.1 relaciona las energías en reposo (y por lo tanto, las masas) de algunas partículas elementales y núcleos ligeros. La energía total en reposo de un positrón más un electrón es 2(0,511 MeV), que es la energía radiante emitida en el proceso de aniquilación entre el electrón y el positrón en el sistema de referencia en el cual el electrón y el positrón están inicialmente en reposo.

La energía en reposo de un sistema puede consistir en la energía potencial u otras energías internas del sistema, además de las energías en reposo intrínsecas de las partículas que lo forman. Si el sistema en reposo absorbe energía, ΔE, y permanece en reposo, entonces su energía en reposo crece ΔE y su masa crece ΔM, donde

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad 7.27$$

Tabla 7.1 Energías en reposo* de algunas partículas elementales y núcleos ligeros†

Partícula	Símbolo	Energía en reposo (MeV)	
Electrón	e^-	0,5110	
Positrón	e^+	0,5110	
Protón	p	938,272	
Neutrón	n	939,565	
Deuterón	d	1875,613	
Tritón	t	2808,921	
Helión	h	2808,391	
Partícula alfa	α	3727,379	

* Los valores de la tabla se han tomado de CODATA 2002 (excepto para el valor del tritón).

† El protón, deuterón y tritón son idénticos a los núcleos de ^{1}H, ^{2}H, y ^{3}H, respectivamente, y el helión y la partícula alfa son idénticos a los núcleos de ^{3}He y ^{4}He, respectivamente.

Consideremos dos bloques de 1 kg conectados por un muelle de constante elástica k. Si estiramos el muelle una distancia x, la energía potencial del sistema crece en $\Delta U = \frac{1}{2}kx^2$. De acuerdo con la ecuación 7.27, la masa del sistema se incrementa también en $\Delta M = \Delta U/c^2$. Como c es un número extraordinariamente grande, este incremento de masa no puede observarse en sistemas macroscópicos. Por ejemplo, supongamos $k = 800$ N/m y $x = 10$ cm $= 0{,}1$ m. La energía potencial del sistema formado por el muelle es, por tanto, $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(800\,\text{N/m})(0{,}100\,\text{m})^2 = 4{,}00$ J. El incremento correspondiente de masa del sistema es $\Delta M = \Delta U/c^2 = 4{,}00\,\text{J}/(3{,}00 \times 10^8\,\text{m/s})^2 = 4{,}44 \times 10^{-17}$ kg. El incremento relativo está dado por

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{4{,}44 \times 10^{-17}\,\text{kg}}{2{,}00\,\text{kg}} = 2{,}22 \times 10^{-17}$$

que es demasiado pequeño para poder ser observado. Sin embargo, en las reacciones nucleares, los cambios energéticos constituyen frecuentemente una fracción apreciable de la energía en reposo del sistema. Consideremos, por ejemplo, el deuterón o núcleo del deuterio, que es un isótopo del hidrógeno, llamado también hidrógeno pesado. El deuterón está formado por un protón y un neutrón ligados conjuntamente. Según la tabla 7.1, la masa del protón es 938,28 MeV/c^2 y la masa del neutrón 939,57 MeV/c^2. La suma de ambas masas es 1877,85 MeV/c^2. Sin embargo, la masa del deuterón es 1875,63 MeV/c^2, o sea, inferior a la suma de las dos partículas que lo constituyen en 2,22 MeV/c^2. Obsérvese que esta diferencia de masa es mucho mayor que las incertidumbres inherentes a las medidas de estas masas, y que la diferencia relativa de $\Delta M/M \approx 1{,}2 \times 10^{-3}$ está casi 14 órdenes de magnitud por encima del 2×10^{-17} tratado anteriormente para el sistema muelle-bloques.

Las moléculas de agua pesada (óxido de deuterio) se producen en el agua previamente enfriada de un reactor nuclear, cuando neutrones chocan con los núcleos de hidrógeno (protones) de las moléculas de agua. Cuando un neutrón lento es capturado por un protón, se libera una energía de 2,22 MeV en forma de radiación electromagnética. Así, la masa de un átomo de deuterio es 2,22 MeV/c^2 menor que la suma de las masas de un átomo de ^{1}H y un neutrón aislados. (El superíndice 1 es el número másico del isótopo. Así, el ^{1}H, conocido como protio, es un isótopo del hidrógeno que no tiene neutrones.)

Este proceso puede invertirse, rompiendo un deuterón en sus partes constituyentes, si se transfieren por lo menos 2,22 MeV de energía al deuteron con radiación electromagnética o mediante colisiones con otras partículas energéticas. Toda la energía transferida que sobrepase los 2,22 MeV aparece como energía cinética del protón y del neutrón resultantes.

La energía necesaria para romper un núcleo en sus partes constituyentes se denomina **energía de enlace** del núcleo. El deuterón es un ejemplo de un sistema ligado. Un sistema está ligado si no tiene la energía suficiente como para romperlo en partes separables. Su energía en reposo es menor que la energía en reposo de sus partes constituyentes, de tal modo que es necesario añadir energía al sistema para romperlo. Si la energía en reposo de un sistema es superior a la energía en reposo de sus partes, se dice que el sistema no está ligado. Un ejemplo es el uranio-236, que se rompe o **fisiona** en dos núcleos más pequeños.* La suma de las masas de las partes resultantes es inferior a la masa del núcleo original. Así, la masa del sistema decrece y se libera energía.

En la fusión nuclear, dos núcleos muy ligeros, tales como el deuterón y el tritón (núcleo del isótopo del hidrógeno llamado tritio) se unen (se fusionan) entre sí. La masa en reposo del núcleo resultante es inferior a la masa de las partes originales y, por tanto, se libera energía. En una reacción química que produce energía, como por ejemplo la combustión del carbón, el decrecimiento de la masa es del orden de 1 eV/c^2 por átomo. Este valor es más de un millón de veces más pequeño que las variaciones de masa en las reacciones nucleares y no se observa fácilmente.

---

* El uranio-236, que también puede escribirse en la forma ^{236}U, se produce en un reactor nuclear cuando el isótopo estable uranio-235 absorbe un neutrón.

Ejemplo 7.17 Energía de enlace

Un átomo de hidrógeno formado por un protón y un electrón tiene una energía de enlace de 13,6 eV. ¿En qué porcentaje la masa del protón más la del electrón es superior a la del átomo de hidrógeno?

PLANTEAMIENTO La masa de un protón m_p más la masa de un electrón m_e es igual a la masa del átomo de hidrógeno más la energía de enlace E_b dividido por c^2. Así, la diferencia fraccional entre $m_e + m_p$ y la masa del átomo de hidrógeno es el cociente entre E_b/c^2 y $m_e + m_p$.

SOLUCIÓN

1. La diferencia fraccional es el cociente de masas entre la energía de enlace E_b/c^2 y $m_e + m_p$:
$$\text{DF} = \frac{(m_e + m_p) - m_H}{m_e + m_p} = \frac{E_b/c^2}{m_e + m_p} = \frac{13{,}6\ \text{eV}/c^2}{m_e + m_p}$$
2. Tomar las masas en reposo del protón y el electrón de la tabla 7.1:
$$m_p = 938{,}28\ \text{MeV}/c^2$$
$$m_e = 0{,}511\ \text{MeV}/c^2$$
3. Sumar estas masas:
$$m_p + m_e = 938{,}79\ \text{MeV}/c^2$$
4. La masa en reposo del átomo de hidrógeno es inferior a este valor en 13,6 eV/c^2. La diferencia fraccional es:
$$\text{DF} = \frac{13{,}6\ \text{eV}/c^2}{938{,}79 \times 10^6\ \text{eV}/c^2} = 1{,}45 \times 10^{-8} = \boxed{1{,}45 \times 10^{-6}\,\%}$$

COMPROBACIÓN Las unidades han de ser correctas. Si expresamos todas las masas en unidades de eV/c^2, se obtiene que la diferencia fraccional es adimensional.

OBSERVACIÓN Esta diferencia de masa es demasiado pequeña para ser medida directamente. Sin embargo, las energías de enlace pueden medirse con exactitud y, en consecuencia, la diferencia de masa se puede obtener a partir de la expresión $E_b = (\Delta m)c^2$.

Ejemplo 7.18 Fusión nuclear — *Inténtelo usted mismo*

En una reacción típica de fusión nuclear, un núcleo de tritio (t) y un núcleo de deuterio (d) se fusionan para formar un núcleo de helio (α) más un neutrón, según la reacción d + t → α + n. ¿Cuánta energía se libera por deuterio en esta reacción de fusión?

PLANTEAMIENTO Como en este proceso se libera energía, la energía en reposo total de las partículas iniciales debe ser mayor que la de las partículas finales. Esta diferencia es igual a la energía liberada.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Tomar los valores de las energías en reposo del d y t de la tabla 7.1 y sumarlas para conocer la energía en reposo total inicial.	$E_{\text{inicial}} = 1875{,}613\ \text{MeV} + 2808{,}921\ \text{MeV} = 4684{,}534\ \text{MeV}$
2. Hacer lo mismo con el α y el n para determinar la energía en reposo final.	$E_{\text{final}} = 3727{,}379\ \text{MeV} + 939{,}565\ \text{MeV} = 4666{,}944\ \text{MeV}$
3. La energía liberada se determina a partir de $E_{\text{liberada}} = E_0\,(\text{inicial}) - E_0\,(\text{final})$.	$E_{\text{liberada}} = 4684{,}534\ \text{MeV} - 4666{,}944\ \text{MeV} = \boxed{17{,}59\ \text{MeV} \approx 17{,}6\ \text{MeV}}$

COMPROBACIÓN La energía liberada es una pequeña fracción de la energía inicial. Esta fracción es 17,6 MeV/4685 MeV = $3{,}76 \times 10^{-3}$, que es del mismo orden de magnitud que la fracción de masa que aumenta durante la fusión de un protón y un neutrón que fue estudiado al inicio de este apartado sobre energía nuclear. Entonces, 17,6 MeV es un resultado razonable para la emisión de energía cuando el deuterio y el helio fusionan para formar una partícula alfa.

OBSERVACIÓN Esta y otras reacciones de fusión tienen lugar en el Sol. La energía liberada alcanza la Tierra y es, en definitiva, responsable de la vida en el planeta. La energía emitida constantemente por el Sol va acompañada por una disminución constante de su masa en reposo.

MECÁNICA NO-RELATIVISTA (NEWTONIANA) Y RELATIVIDAD

Cuando la velocidad de un partícula se aproxima a una fracción significativa de la velocidad de la luz, la segunda ley de Newton deja de cumplirse y debemos modificar la mecánica newtoniana según la teoría einsteniana de la relatividad. El criterio de validez de la mecánica newtoniana también puede establecerse en función de la energía de una partícula. En la mecánica no-relativista (newtoniana), la energía cinética de una partícula que se mueve con velocidad v es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}mc^2\frac{v^2}{c^2} = \tfrac{1}{2}E_0\frac{v^2}{c^2}$$

donde $E_0 = mc^2$ es la energía en reposo de la partícula. Despejando,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2K}{E_0}}$$

La mecánica newtoniana es válida si la velocidad de la partícula es mucho menor que la velocidad de la luz o, dicho de otra forma, si la energía cinética de la partícula es mucho menor que su energía en reposo.

PROBLEMA PRÁCTICO 7.9

Un satélite orbita cercano a la Tierra a una velocidad de 8 km/s. ¿A qué fracción de la velocidad de la luz corresponde esta velocidad? ¿Qué velocidad en millas/s es equivalente al 1% de c?

7.5 CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA

Cuando un sistema que permanece en reposo absorbe energía, su energía interna aumenta. (Energía interna es sinónimo de energía en reposo. Es la energía total del sistema menos cualquier energía cinética asociada al movimiento del centro de masas del sistema.) Parecería lógico que se pudiera cambiar la energía interna de un sistema ligado como el sistema solar o el átomo de hidrógeno mediante una cantidad arbitraria de energía; sin embargo, se ha comprobado que esto no es cierto. Esto es especialmente perceptible para sistemas microscópicos como moléculas, átomos y núcleos atómicos. La energía interna de un sistema microscópico sólo puede aumentar en cantidades discretas.

Si tenemos dos bloques conectados a un muelle (figura 7.32) por sus extremos y tiramos de ellos, realizamos trabajo sobre el sistema muelle-bloques y su energía potencial crece. Si, a continuación, liberamos los bloques, éstos oscilan hacia atrás y adelante. La energía de oscilación E, que es la energía cinética de movimiento de los bloques, más la energía potencial debida al alargamiento del muelle, es igual a la energía potencial original. Con el tiempo, la energía del sistema decrece a causa de los efectos de amortiguación producidos por el rozamiento y la resistencia del aire. Con la precisión de nuestras medidas, la energía decrece continuamente. Finalmente, toda la energía se disipa y la energía de oscilación se hace cero.

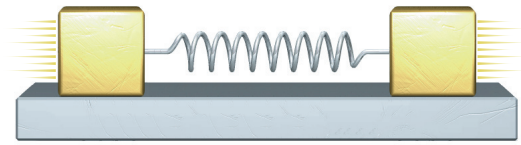


FIGURA 7.32

Consideremos ahora una molécula diatómica tal como el oxígeno molecular, O_2. La fuerza de atracción entre los dos átomos de oxígeno varía casi linealmente con el cambio en la separación (para pequeños cambios) de una forma muy parecida a lo que ocurre en un muelle. Si una molécula diatómica se hace oscilar con cierta energía E, ésta decrece con el tiempo cuando la molécula irradia o interacciona con los alrededores, pero el decrecimiento *no es continuo*, como así lo corroboran medidas de gran precisión. La energía disminuye en saltos finitos y el estado energético más bajo, llamado **estado fundamental**, no tiene energía cero. Se dice que la ener-

gía de vibración de una molécula diatómica está **cuantizada**; es decir, la molécula sólo puede absorber o ceder energía en ciertas cantidades, llamadas **cuantos**.

Cuando los bloques unidos por un muelle o las moléculas diatómicas oscilan, el tiempo transcurrido durante una oscilación se denomina periodo, T. La inversa del periodo es la frecuencia de oscilación, $f = 1/T$. Como veremos en el capítulo 14, el periodo y la frecuencia de un oscilador no dependen de la energía de oscilación. Cuando disminuye la energía, la frecuencia no se modifica. La figura 7.33 muestra un **diagrama de niveles energéticos** de un oscilador. Las energías permitidas están casi igualmente espaciadas y vienen dadas por*

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})hf \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad 7.28$$

donde f es la frecuencia de oscilación y h una constante fundamental de la naturaleza llamada constante de Planck:†

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s} = 4{,}136 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s} \qquad 7.29$$

El número entero n se denomina **número cuántico**. La energía más baja posible es la **energía del estado fundamental**, $E_0 = \frac{1}{2}hf$.

Los sistemas microscópicos frecuentemente ganan o pierden energía absorbiendo o emitiendo radiación electromagnética. Por el principio de conservación de la energía, si E_i y E_f son las energías inicial y final del sistema, la energía emitida o absorbida es

$$E_{rad} = |E_f - E_i|$$

Como las energías E_i y E_f del sistema están cuantizadas, la energía irradiada también lo está.‡ El cuanto de la energía de radiación se llama **fotón**. La energía de un fotón viene dada por

$$E_{\text{fotón}} = hf \qquad 7.30$$

donde f es la frecuencia de la radiación electromagnética.§

Por lo que sabemos, todos los sistemas ligados presentan cuantización de la energía. En los sistemas ligados macroscópicos, los saltos entre niveles energéticos son tan pequeños que resultan inobservables. Por ejemplo, las frecuencias de oscilación típicas de dos bloques sobre un muelle son del orden de 1 a 10 veces por segundo. Si $f = 10$ oscilaciones por segundo, el espaciado entre los niveles energéticos es $hf = (6{,}626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}) \times (10/\text{s}) \approx 7 \times 10^{-33}$ J. Como la energía de un sistema macroscópico es del orden de 1 J, un salto cuántico de 10^{-33} J es demasiado pequeño para ser observado. Dicho de otro modo, si la energía de un sistema es 1 J, el valor de n es del orden de 10^{32} y los cambios de una o dos unidades cuánticas no serán observables.

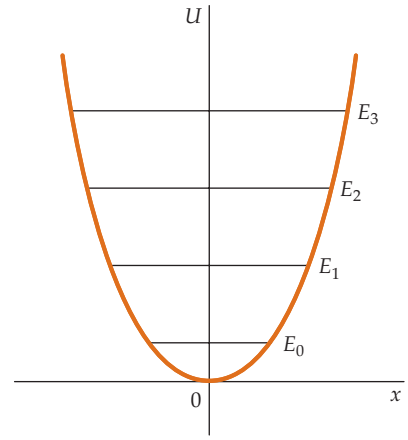


FIGURA 7.33

PROBLEMA PRÁCTICO 7.10

La frecuencia de vibración típica de una molécula diatómica es de 10^{14} vibraciones por segundo. Utilizar la ecuación 7.28 para determinar el espaciado entre energías permitidas.

¡ La energía típica de una molécula diatómica es de 10^{-19} J. Por tanto, los cambios en la energía de oscilación son del mismo orden que la energía de la molécula y la cuantización es claramente observable.

* Una molécula diatómica también puede tener energía rotacional. Esta energía, como era de esperar, está también cuantizada, pero los niveles energéticos no están igualmente espaciados y la energía más baja posible es cero. En los capítulos 9 y 10, estudiaremos la energía rotacional.

† En 1900, el físico alemán Max Planck introdujo esta constante como un instrumento de cálculo para explicar las discrepancias entre los resultados experimentales y teóricos sobre el espectro de la radiación del cuerpo negro. El significado de la constante de Planck no fue apreciado por Planck ni por sus contemporáneos científicos, hasta que Einstein en 1905 postuló que la energía de la radiación electromagnética no es continua, sino que tiene lugar en paquetes de tamaño hf.

‡ Históricamente, la cuantización de la radiación electromagnética propuesta por Max Planck y Albert Einstein fue el primer "descubrimiento" de la cuantización de la energía.

§ La radiación electromagnética incluye la luz, las microondas, las ondas de radio y de televisión, los rayos X y los rayos gamma. Todas estas radiaciones difieren entre sí en su frecuencia.

Soplando aire cálidos

Los parques eólicos están desperdigados por la costa danesa, las planicies del alto medio-oeste de EE.UU. y las montañas desde California hasta Vermont. El aprovechamiento de la energía cinética del viento no es nada nuevo. Durante siglos, los molinos de viento se han utilizado para bombear agua, ventilar minas[1] y moler el grano.

En la actualidad, las turbinas de viento hacen funcionar generadores eléctricos. Esas turbinas transforman energía cinética en energía electromagnética. Las turbinas modernas tienen precios, tamaños y rendimientos muy variados. Algunas de ellas son pequeñas y sencillas máquinas que cuestan unos 500 dólares y producen unos 100 watts de potencia.[2] Otras son gigantes y complejas y cuestan unos 2 millones de dólares pero generan hasta 2,5 MW por turbina.[3] Todas ellas funcionan gracias a una fuente de energía fácilmente disponible —el viento.

La teoría que hay detrás de la conversión de energía cinética en electromagnética es simple. Las moléculas de aire golpean sobre las aspas de la hélice y hacen girar la turbina. Las aspas hacer girar unos engranajes que hacen aumentar la velocidad de rotación que a su vez hace girar el rotor generador. El generador envía energía electromagnética a cables que soportan alta tensión.

Sin embargo, la conversión de la energía cinética del viento en energía electromagnética no es perfectamente eficiente; de hecho, no puede ser 100% eficiente. Si las turbinas convirtieran completamente la energía cinética del viento en energía eléctrica, el aire saldría de las turbinas sin energía cinética. Es decir, las turbinas pararían el aire. Si la turbina parase completamente el aire, éste fluiría alrededor de la turbina en lugar de fluir a través de ella.

Así, la turbina debe ser capaz de capturar la energía cinética del aire en movimiento y de evitar el flujo de aire a su alrededor. Las turbinas propulsadas por hélices son las más comunes y su eficiencia teórica varía de 30% a 59%.[4] (Las eficiencias teóricas varían en función de cómo el aire fluye alrededor de la turbina y a través de las hélices.)

En resumen, ni la más eficiente de las turbinas puede convertir el 100% de la energía disponible. ¿Qué sucede? Antes de llegar a la turbina el aire fluye de forma laminar mientras que al dejar atrás la turbina el aire se vuelve turbulento. La componente rotacional del movimiento del aire de detrás de la turbina, aumenta su energía aunque también hay alguna disipación debida a la viscosidad del aire. Si un determinado volumen de aire se mueve más lentamente, aparecerá un rozamiento entre este aire y el aire más veloz que fluye a su alrededor.[5] Las hélices se calientan y el aire también. Los engranajes de la turbina también disipan energía debido al rozamiento. Las hélices vibran individualmente —la energía absorbida para producir estas vibraciones también hace disminuir la eficiencia. Finalmente, la turbina necesita corriente para hacer funcionar los motores que lubrican los engranajes y el motor que orienta la turbina en la dirección más apropiada para la captura del viento.

En definitiva, la mayoría de las turbinas funcionan con una eficiencia de entre un 10 y un 20 por ciento,[6] pero siguen siendo un recurso energético más limpio que el petróleo. Un propietario de turbinas eólicas decía, "Lo fundamental del negocio de las turbinas radica en que nos ayuda a controlar nuestro futuro".[7]

Un parque eólico que convierte la energía cinética del aire en energía eléctrica. *(Image Slate.)*

[1] Agricola, Georgius, *De Re Metallic*. (Herbert and Lou Henry Hoover, Transl.) Reprint Mineola, NY: Dover, 1950, 200–203.
[2] Conally, Abe, and Conally, Josie, "Wind Powered Generator," *Make*, Feb. 2006, Vol. 5, 90–101.
[3] "Why Four Generators May Be Better than One," *Modern Power Systems*, Dec. 2005, 30.
[4] Gorban, A. N., Gorlov, A. M., and Silantyev, V. M., "Limits of the Turbine Efficiency for Free Fluid Flow." *Journal of Energy Resources Technology*, Dec. 2001, Vol. 123, 311–317.
[5] Roy, S. B., S. W. Pacala, and R. L. Walko. "Can Large Wind Farms Affect Local Meteorology?" *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)*, Oct. 16, 2004, 109, D19101.
[6] Gorban, A. N., Gorlov, A. M., and Silantyev, V. M., "Limits of the Turbine Efficiency for Free Fluid Flow." *Journal of Energy Resources Technology*, December 2001, Vol. 123, 311–317.
[7] Wilde, Matthew, "Colwell Farmers Take Advantage of Grant to Produce Wind Energy." *Waterloo-Cedar Falls Courier*, May 1, 2006, B1+.

Resumen

1. La conservación de la energía mecánica es una relación importante deducida de las leyes de Newton para las fuerzas conservativas. Es útil para resolver muchos problemas.
2. El teorema trabajo-energía y la conservación de la energía son leyes fundamentales de la naturaleza que tienen aplicaciones en todas las áreas de la física.
3. La ecuación de Einstein $E_0 = mc^2$ es una relación fundamental entre la masa y la energía.
4. La cuantización es un propiedad fundamental de la energía en sistemas ligados.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Fuerza conservativa	Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a lo largo de cualquier trayectoria que retorna a su posición inicial. Es decir, el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula es independiente de la trayectoria recorrida por la partícula al pasar ésta de un punto a otro.	
2. Energía potencial	La energía potencial de un sistema es la energía asociada con su configuración. La variación en la energía potencial de un sistema se define por el valor negativo del trabajo realizado por todas las fuerzas conservativas que actúan sobre el sistema.	
Definición	$\Delta U = U_2 - U_1 = -W = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$	**7.1**
Gravitatoria	$U = U_0 + mgy$	**7.2**
Elástica (muelle)	$U = \frac{1}{2}kx^2$	
Fuerza conservativa	$F_x = -\dfrac{dU}{dx}$	**7.13**
Curva de energía potencial	En un mínimo de la curva de la función energía potencial en función del desplazamiento, la fuerza es cero y el sistema se encuentra en equilibrio estable. En un máximo, la fuerza es cero y el sistema está en equilibrio inestable. Una fuerza conservativa siempre tiende a acelerar una partícula hacia una posición de energía potencial más baja.	
3. Energía mecánica	La suma de las energías cinética y potencial de un sistema se denomina energía mecánica total: $E_{mec} = K_{sist} + U_{sist}$	**7.9**
Teorema trabajo-energía para sistemas	El trabajo total realizado por las fuerzas externas sobre un sistema es igual al cambio de la energía mecánica del sistema menos el trabajo total realizado por fuerzas internas no-conservativas: $W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}$	**7.10**
Conservación de la energía mecánica	Si no hay fuerzas externas que realicen trabajo sobre un sistema, y todas las fuerzas internas son conservativas, la energía mecánica total del sistema permanece constante: $K_f + U_f = K_i + U_i$	**7.12**
4. Energía total de un sistema	La energía de un sistema consiste en energía mecánica, E_{mec}, energía térmica, $E_{térm}$, energía química, $E_{quím}$ y otros tipos de energía, E_{otras}, tales como radiación sonora y radiación electromagnética: $E_{sist} = E_{mec} + E_{térm} + E_{quím} + E_{otras}$	**7.15**
5. Conservación de la energía		
Universo	La energía total del universo es constante. La energía puede transformarse de una forma en otra o transmitirse de una región a otra, pero nunca crearse o destruirse.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
Sistema	La energía de un sistema puede modificarse por trabajo realizado sobre el sistema y por transmisión de energía en forma de calor. (Ésta incluye la emisión o absorción de radiación.) El aumento o disminución de la energía del sistema puede explicarse siempre por la aparición o desaparición de algún tipo de energía en otra parte. $E_{\text{entrada}} - E_{\text{salida}} = \Delta E_{\text{sist}}$ **7.14**
Teorema trabajo-energía	$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{sist}} = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{térm}} + \Delta E_{\text{quím}} + \Delta E_{\text{otras}}$ **7.16**
6. Energía disipada por rozamiento	Para un sistema formado por un par de superficies deslizantes, la energía total disipada por rozamiento sobre ambas superficies es igual al incremento de energía térmica del sistema y viene expresada por $f_c s_{\text{rel}} = \Delta E_{\text{térm}}$ **7.24** donde s_{rel} es el desplazamiento de una superficie respecto a la otra.
7. Resolución de problemas	La conservación de la energía mecánica y el teorema trabajo-energía pueden utilizarse como una alternativa de las leyes de Newton para resolver problemas mecánicos que requieren la determinación del módulo de la velocidad de una partícula en función de su posición.
8. Masa y energía	Una partícula de masa m posee una energía en reposo intrínseca E dada por $E = mc^2$ **7.26** donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Un sistema de masa M posee también una energía en reposo $E = Mc^2$. Si un sistema gana o pierde energía interna ΔE, simultáneamente gana o pierde masa, $\Delta M = \Delta E/c^2$.
Energía de enlace	La energía requerida para descomponer un sistema en sus partes constituyentes se denomina energía de enlace. Esta energía es ΔMc^2, donde ΔM es la suma de las masas de sus partes constituyentes menos la masa del sistema ligado.
9. Mecánica newtoniana y teoría de la relatividad	Cuando la velocidad de un partícula se aproxima a la velocidad de la luz en el vacío, c (cuando la energía cinética de la partícula se aproxima a su energía en reposo), la mecánica newtoniana deja de cumplirse y debe reemplazarse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.
10. Cuantización de la energía	La energía interna de un sistema microscópico sólo puede tener una serie discreta de valores posibles. Para un sistema que oscila con frecuencia f, los valores energéticos permitidos están separados por una cantidad hf, donde h es la constante de Planck: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$ **7.29**
Fotones	Los sistemas microscópicos con frecuencia intercambian energía con sus alrededores emitiendo o absorbiendo radiación electromagnética, que también está cuantizada. El cuanto de la energía radiante se llama fotón: $E_{\text{fotón}} = hf$ **7.30** donde f es la frecuencia de la radiación electromagnética.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

7.1 En este sistema no se realiza ningún trabajo externo, de modo que la energía total, que ahora incluye la energía potencial, se conserva. La variación de energía mecánica es ahora mgh, de modo que el teorema trabajo-energía nos da $\Delta E_{\text{quím}} = -(mgh + \Delta E_{\text{térm}})$.

Respuestas a los problemas prácticos

7.1 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{1}{2} B x_{\text{máx}}^2 y_{\text{máx}}$

7.2 (*a*) 4,3 kJ, (*b*) 2,2 kJ, (*c*) −1,1 kJ

7.3 495 J

7.4 (*a*) 4,9 cm, (*b*) 0,72 J

7.5 3,16 m/s

7.6 Ninguno

7.7 53 m

7.8 (*a*) 1600 J, (*b*) 620 J, (*c*) 950 J

7.9 $2{,}7 \times 10^{-5}$; $1{,}9 \times 10^3$ mi/s

7.10 $E_{n+1} - E_n = hf \approx (6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(10^{14}\ \text{s}) \approx 6 \times 10^{-20}\ \text{J}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Dos cilindros de masas desiguales están conectados por una cuerda sin masa que pasa por un polea sin rozamiento (figura 7.34). Una vez liberados del reposo, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas? (U = energía potencial gravitatoria, K = energía cinética del sistema.) (*a*) $\Delta U < 0$ y $\Delta K > 0$. (*b*) $\Delta U = 0$ y $\Delta K > 0$. (*c*) $\Delta U < 0$ y $\Delta K = 0$. (*d*) $\Delta U = 0$ y $\Delta K = 0$. (*e*) $\Delta U > 0$ y $\Delta K < 0$. SSM

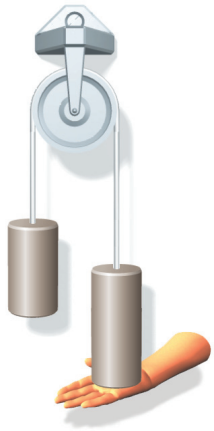


FIGURA 7.34
Problema 1

2 • Dos piedras se lanzan a la vez con la misma velocidad inicial y en el mismo instante desde el tejado de un edificio. Una piedra se lanza con un ángulo de 30° por encima de la horizontal; la otra se lanza horizontalmente. (Despreciar la resistencia del aire.) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(*a*) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con iguales velocidades.
(*b*) Las piedras chocan contra el suelo al mismo tiempo y con diferentes velocidades.
(*c*) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades iguales.
(*d*) Las piedras chocan contra el suelo en tiempos distintos y con velocidades diferentes.

3 • Verdadero o falso:

(*a*) La energía total de un sistema no puede variar.
(*b*) Cuando una persona salta en el aire, el suelo realiza un trabajo sobre ella incrementando su energía potencial.
(*c*) El trabajo realizado por las fuerzas de rozamiento debe disminuir la energía mecánica total del sistema.
(*d*) Se requiere más trabajo cuando se comprime 2 cm un muelle a partir de su longitud en reposo que si se estira 2 cm a partir de su longitud en reposo.

4 • Un jugador novato de hockey sólo sabe frenarse deslizándose sobre las vallas de la pista (supóngase que las vallas son rígidas y que no hay rozamiento alguno). Discútase los cambios de energía que tienen lugar cuando este jugador utiliza este sistema para detenerse.

5 • Verdadero o falso (La partícula se puede mover sólo a lo largo del eje x y sobre ella actúa una única fuerza, siendo $U(x)$ la función energía potencial asociada a esta fuerza):

(*a*) La partícula estará en equilibrio si está en una posición donde $dU/dx = 0$
(*b*) La partícula se acelerará en la dirección $-x$ si está en una posición donde $dU/dx > 0$.
(*c*) La partícula estará en reposo y tendrá velocidad constante si está en una región en la que a lo largo de ella $dU/dx = 0$.
(*d*) La partícula estará en equilibrio estable si está en una posición donde $dU/dx = 0$ y $d^2U/dx^2 > 0$.
(*e*) La partícula estará en equilibrio neutro si está en una posición donde $dU/dx = 0$ y $d^2U/dx^2 > 0$.

6 • Dos exploradores, S y J, deciden ascender a la cumbre de una montaña. S escoge el camino más corto por la pendiente más abrupta, mientras que J, que pesa lo mismo que S, sigue un camino más largo, de pendiente suave. Al llegar a la cima comienzan a discutir sobre cuál de los dos ganó más energía potencial. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(*a*) S gana más energía potencial que J.
(*b*) S gana menos energía potencial que J.
(*c*) S gana la misma energía potencial que J.
(*d*) Para comparar las energías potenciales, debemos conocer la altura de la montaña.
(*e*) Para comparar las energías potenciales, debemos conocer la longitud de las dos trayectorias.

7 • Verdadero o falso:

(*a*) Sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo.
(*b*) Si sobre una partícula únicamente se ejercen fuerzas conservativas, la energía cinética de la partícula no varía.
(*c*) El trabajo realizado por una fuerza conservativa coincide con la disminución de la energía potencial asociada con esa fuerza.
(*d*) La fuerza conservativa que actúa sobre una partícula, confinada en el eje x, se dirige hacia la izquierda si la energía potencial asociada decrece conforme la partícula se mueve hacia la derecha.
(*e*) La energía potencial asociada a una fuerza conservativa que actúa sobre una partícula, confinada en el eje x, crece conforme la partícula se mueve hacia la izquierda si la fuerza se dirige hacia la derecha.

8 • La figura 7.35 muestra una función energía potencial U en función de x. (*a*) En cada punto indicado, establecer si la componente x de la fuerza asociada a esta función es positiva, negativa o cero. (*b*) ¿En qué punto la fuerza posee el módulo máximo? (*c*) Identificar los puntos de equilibrio y establecer si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

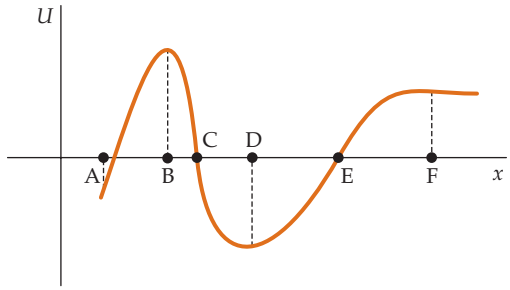


FIGURA 7.35 Problema 8

9 • Supóngase que al frenar se ejerce una fuerza de rozamiento constante sobre las ruedas de un coche. Si esto es así, se deduce que (*a*) la distancia que el coche recorre antes de pararse es proporcional a la velocidad que tenía antes de accionar los frenos, (*b*) la energía cinética del coche disminuye a una tasa constante, (*c*) la energía cinética del coche es inversamente proporcional al tiempo que ha pasado desde la aplicación de los frenos, (*d*) ninguna de las respuestas anteriores es cierta.

10 •• Una piedra atada al extremo de una barra sin masa y rígida se mueve en una circunferencia vertical cuya velocidad tiene módulo constante (figura 7.36). La energía mecánica total del sistema piedra-Tierra no es constante. La energía cinética del movimiento sí lo es. En cambio, la energía potencial cambia continuamente. Durante todos los intervalos de tiempo, ¿el trabajo total realizado sobre la piedra es nulo? ¿Es nula la componente tangencial de la fuerza que actúa sobre la piedra?

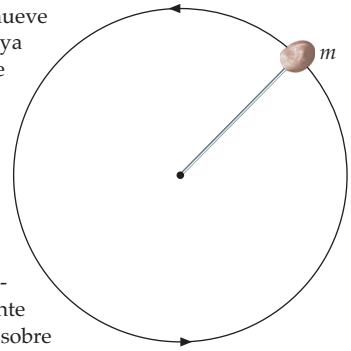


FIGURA 7.36
Problema 10

11 •• Utilizar las energías en reposo dadas en la tabla 7.1 para responder a las siguientes cuestiones. (*a*) ¿Puede el tritón desintegrase en helio? (*b*) ¿Puede una partícula alfa desintegrarse de forma espontánea en helio y un neutrón? (*c*) ¿Puede un protón desintegrarse de forma espontánea en un neutrón y un positrón?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

12 • Calcular (*a*) el cambio en la energía potencial cuando una persona sube a un ascensor que le lleva desde la planta baja hasta el último piso del Empire State de Nueva York (102 pisos), (*b*) la fuerza media que ejerce el ascensor sobre la persona durante el trayecto, y (*c*) la potencia media ejercida por el ascensor. (Puede ser necesario estimar la duración del trayecto.)

13 • En un circo, un equilibrista de 50 kg camina por una cuerda floja sostenida por dos soportes que están separados 10 m. La tensión en la cuerda es de 5000 N cuando está justo en el centro de la cuerda. Estimar (*a*) cuánto se afloja la cuerda cuando el equilibrista está en el centro, y (*b*) el cambio en la energía potencial gravitatoria del equilibrista desde antes de caminar en la cuerda hasta el momento que está justo en el centro de la misma.

14 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La *tasa metabólica* es el ritmo con que el cuerpo usa energía química para sostener sus funciones vitales. La tasa metabólica media es proporcional al área total superficial del cuerpo. El área superficial de un varón de 1,78 m de altura y 80 kg de peso es de unos 2,0 m^2, mientras que el de una mujer de 1,62 m de altura y 50 kg de peso es 1,5 m^2. Hay un cambio de un 1% en el área superficial por cada 1,2 kg por encima o por debajo de los pesos indicados y de un 1% por cada 7,5 cm por encima o por debajo de las alturas que aquí se señalan. (*a*) Estime su tasa metabólica media diaria (por metro cuadrado de área de piel) usando la siguiente guía para la actividad física: tasa metabólica de: dormir 40 W/m^2; caminar: 160 W/m^2; actividad física moderada: 175 W/m^2; ejercicio aeróbico moderado: 300 W/m^2. Compararlo con la potencia de una bombilla de 100 W. (*b*) Exprese su tasa metabólica media en kcal/día (1 kcal = 4190 J). (Una kcal es la "caloría alimentaria" usada por los expertos en nutrición.) (*c*) Un valor estimado por los dietistas es que una persona estándar debe comer entre 25-32 kcal/kg para mantener su peso. A partir de los cálculos del apartado (*b*) estimar si este valor es razonable.

15 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Suponga que el ritmo metabólico máximo con el que su cuerpo puede gastar energía es 1500 W. Suponiendo que la conversión de energía química en energía mecánica tiene una eficiencia máxima del 40%, estimar (*a*) el tiempo mínimo empleado para subir cuatro tramos de escalera, cada uno de los cuales tiene 3,5 m de altura. (*b*) El tiempo mínimo necesario para subir el Empire State (102 pisos de alto) utilizando el resultado del apartado (*a*). Comentar si el resultado del apartado (*b*) resulta factible. SSM

16 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted es el encargado de reemplazar las barras de uranio por unas nuevas en la central nuclear en la que trabaja. Para saber cuándo se deben cambiar decide determinar cuanta masa del núcleo del reactor se reduce por unidad de energía eléctrica producida. (*Nota*: en las centrales nucleares, el reactor genera energía térmica que se transforma en energía eléctrica mediante una turbina. Para producir 1 J de energía eléctrica se requieren 3 J de energía térmica.) (*a*) ¿Qué resultado obtiene para la producción de (*a*) 1 J de energía térmica? (*b*) ¿Y para obtener la energía suficiente para mantener una bombilla de 100 W encendida durante 10 años? (*c*) ¿Y para lograr una tasa de energía eléctrica constante de 1 GW por año? (Producción habitual en centrales modernas.)

17 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** La energía química liberada cuando se quema 1 litro de gasolina es aproximadamente $1{,}3 \times 10^5$ kJ. Estimar la energía total consumida por todos los coches de los Estados Unidos durante un año. ¿Qué fracción representa del total de energía consumida en los Estados Unidos en 1 año (unos 5×10^{20} J)? SSM

18 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un panel de energía solar la eficiencia máxima de conversión en energía eléctrica es del orden del 12 por ciento. En el suroeste de los Estados Unidos, la intensidad solar que llega a la superficie de la Tierra es 1 kW/m^2 diarios en promedio. Estimar el área que debería cubrirse para suministrar los requerimientos energéticos de Estados Unidos (5×10^{20} J/año) y comparar el resultado con el área de Arizona. Supóngase que el cielo no tiene nubes.

19 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Las plantas de producción de energía hidroeléctrica transforman la energía potencial gravitatoria del agua en otras formas más útiles de energía. Para ello hacen pasar un flujo de agua, corriente abajo, a través de una turbina que genera energía eléctrica. La central de Hoover en el río Colorado tiene una altura de 211 m y genera 4000 millones de kW · h por año ($1W \cdot h = 3{,}6 \times 10^3$ J). ¿Con qué caudal (en L/s) fluye el agua a través de las turbinas para generar esta potencia? La densidad del agua es 1 kg/L. Supóngase que la transformación de la energía potencial del agua en energía eléctrica tiene una eficiencia del 90%.

FUERZA, ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

20 • En las cataratas Victoria, de 128 m de altura, el agua cae con un caudal medio de $1{,}4 \times 10^6$ kg/s. Si la mitad de la energía potencial del agua se convirtiera en energía eléctrica, ¿cuánta potencia se produciría en el salto?

21 • Un libro de 2 kg se desliza por un plano inclinado de pendiente 30° sin rozamiento. Parte del reposo en el tiempo $t = 0$ desde lo alto del plano inclinado, a una altura de 20 m sobre el suelo. (*a*) ¿Cuál es la energía potencial inicial del libro con respecto al suelo? (*b*) A partir de las leyes de Newton, determinar la distancia recorrida por el libro en el intervalo $0 < t < 1$ y su velocidad para $t = 1$ s. (*c*) Determinar la energía potencial y la energía cinética del libro para $t = 1$ s. (*d*) Calcular la energía cinética y la velocidad del libro un instante antes de que choque contra el suelo.

22 • Una fuerza $F_x = 6$ N es constante y va en la dirección $+x$. (*a*) Determinar la función energía potencial $U(x)$ asociada con esta fuerza para una posición de referencia arbitraria x_0 en la cual $U = 0$. (*b*) Hallar $U(x)$ si sabemos que $U = 0$ para $x = 4$ m. (*c*) Determinar $U(x)$ si se cumple que $U = 14$ J para $x = 6$ m.

23 • Un muelle tiene una constante elástica $k = 10^4$ N/m. ¿Cuánto debe alargarse para que su energía potencial sea (*a*) 50 J y (*b*) 100 J?

24 • (*a*) Determinar la fuerza F_x asociada con la función energía potencial $U = Ax^4$, donde A es una constante. (*b*) ¿En qué punto (o puntos) la fuerza es nula?

25 •• Una función energía potencial viene dada por $U = C/x$, donde C es una constante positiva. (*a*) Determinar la fuerza F_x en función de x. (*b*) ¿Está dirigida esta fuerza hacia el origen o se aleja de él en la región $x > 0$? ¿Y en la región $x < 0$? (*c*) ¿Crece o decrece la energía potencial cuando x crece en la región $x > 0$? (*d*) Responder a los apartados (*b*) y (*c*) para el caso en que C sea una constante negativa. SSM

26 •• En la curva de energía potencial U en función de y indicada en la figura 7.37, los segmentos AB y CD son líneas rectas. Representar la fuerza F_y asociada a $U(y)$ en función de y. Inclúyanse valores numéricos con unidades en ambos ejes. Estos valores se pueden obtener del gráfico U en función de y.

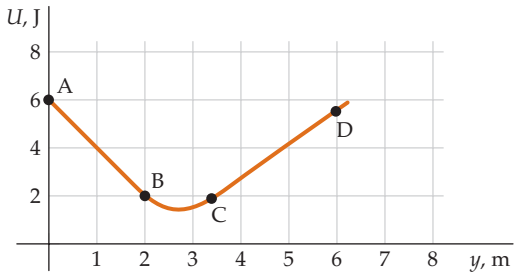


FIGURA 7.37 Problema 26

27 •• La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por la expresión $F_x = a/x^2$. Cuando $x = 5$ m se sabe que la fuerza apunta en la dirección $-x$ y tiene un módulo de 25 N. Determinar la energía potencial del objeto en función de x suponiendo que cuando $x = 2$ m la energía potencial vale -10 J.

28 •• La energía potencial de un objeto viene dada por $U(x) = 3x^2 - 2x^3$, donde U se expresa en joules y x en metros. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre este cuerpo. (*b*) ¿En qué posiciones está el objeto en equilibrio? (*c*) ¿Cuáles de estas posiciones de equilibrio son estables y cuáles inestables?

29 •• La energía potencial de un objeto viene dada por $U(x) = 8x^2 - x^4$, donde U se expresa en joules y x en metros. (*a*) Determinar la fuerza que actúa sobre este objeto. (*b*) ¿En qué posiciones el objeto se encuentra en equilibrio? (*c*) ¿Cuáles de estas posiciones de equilibrio son estables y cuáles son inestables? SSM

30 •• La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por la expresión $F(x) = x^3 - 4x$. (La fuerza se da en newtons y x en metros.) Localizar las posiciones de equilibrio estable e inestable y demostrar que en estos puntos $U(x)$ es, respectivamente, un máximo o un mínimo local.

31 •• La energía potencial de un objeto de 4 kg viene dada por las ecuaciones $U = 3x^2 - x^3$ para $x \leq 3$ m, y $U = 0$ para $x \geq 3$ m, donde U se expresa en joules y x en metros. (*a*) ¿En qué posiciones se encuentra este objeto en equilibrio? (*b*) Dibujar un gráfico de U en función de x. (*c*) Analizar la estabilidad del equilibrio para los valores de x obtenidos en (*a*). (*d*) Si la energía de la partícula es 12 J, ¿cuál es su velocidad para $x = 2$ m?

32 •• Una fuerza viene dada por $F_x = Ax^{-3}$, siendo $A = 8$ N · m^3. (*a*) Para valores positivos de x, ¿crece o decrece la energía potencial asociada con esta fuerza al crecer x? (Para responder a esta cuestión imagínese lo que le ocurriría a una partícula si se dejara en reposo en algún punto x y luego se liberara.) (*b*) Determinar la función energía potencial U asociada con esta fuerza, de modo que U se aproxime a cero cuando x tiende a infinito. (*c*) Representar U en función de x.

33 •• **MÚLTIPLES PASOS** Una barra recta de masa despreciable se monta sobre un pivote sin rozamiento como indica la figura 7.38. Las masas m_1 y m_2 se acoplan a la barra a las distancias ℓ_1 y ℓ_2. (*a*) Expresar la energía potencial gravitatoria del sistema masas-Tierra en función del ángulo θ formado por la barra y la horizontal. (*b*) ¿Para qué ángulo θ es mínima la energía potencial? ¿Es compatible el resultado obtenido con la expresión "los sistemas tienden hacia el mínimo de energía potencial"? (*c*) Demostrar que si $m_1\ell_1 = m_2\ell_2$, la energía potencial es la misma para todos los valores de θ. (Cuando esto ocurra, el sistema se equilibrará bajo el ángulo θ. Este resultado se conoce como *ley de la palanca de Arquímedes*.) SSM

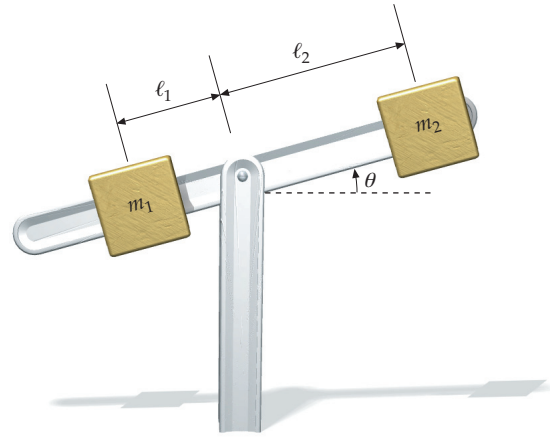


FIGURA 7.38 Problema 33

34 •• Una máquina de Atwood sencilla utiliza dos masas, m_1 y m_2 (figura 7.39). Partiendo del reposo, la velocidad de las dos masas es 4,0 m/s al cabo de 3,0 s. En ese instante, la energía cinética del sistema es de 80 J y cada una de las masas se ha desplazado una distancia de 6,0 m. Determinar los valores de m_1 y m_2.

FIGURA 7.39 Problema 34

35 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, MÚLTIPLES PASOS** Un reloj de masa m, como el que se muestra en la figura 7.40, cuelga de dos cables ligeros que pasan por dos poleas sin rozamiento y masa despreciable de las que cuelgan dos contrapesos de masa M. (*a*) Determinar la energía potencial del sistema en función de la distancia y. (*b*) Determinar el valor de y para el cual la energía potencial del sistema es mínima. (*c*) Si la energía potencial es mínima, el sistema está en equilibrio. Aplicar la segunda ley de Newton al reloj y demostrar que está en equilibrio (la suma de las fuerzas sobre él es cero) para el valor de y obtenido en el apartado (*b*). (*d*) ¿Es éste un punto de equilibrio estable o inestable?

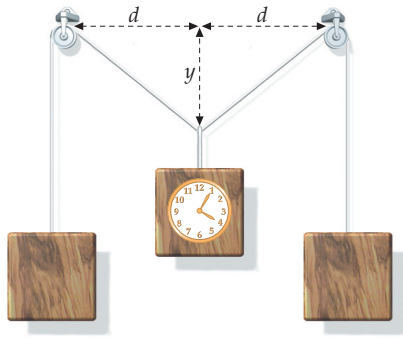


FIGURA 7.40 Problema 35

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

36 • Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal comprime un muelle una distancia x y luego se deja en libertad. El muelle impulsa el bloque a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad v. El mismo muelle impulsa un segundo bloque de masa $4m$ con una velocidad $3v$. ¿Qué distancia se comprimió el muelle en este último caso? Expresar el resultado en función de x.

37 • Un péndulo simple de longitud L con una lenteja de masa m se separa lateralmente hasta que la lenteja se encuentra a una distancia $L/4$ por encima de su posición de equilibrio. La lenteja se deja entonces en libertad. Determinar la velocidad de la lenteja cuando sobrepasa la posición de equilibrio. Despreciar los efectos de la resistencia del aire.

38 • Un bloque de 3 kg se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 7 m/s (figura 7.41). Después de recorrer una distancia de 2 m, el bloque pasa de forma suave a una rampa sin rozamiento inclinada un ángulo de 40° con la horizontal. ¿Qué distancia recorrerá el bloque en la rampa ascendente antes de detenerse?

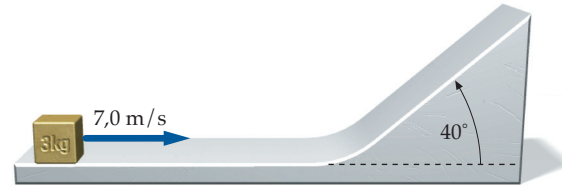


FIGURA 7.41 Problemas 38 y 64

39 • Un objeto de 3 kg en reposo (figura 7.42) se deja libre a una altura de 5 m sobre una rampa curva y sin rozamiento. Al pie de la rampa hay un muelle cuya constante es $k = 400$ N/m. El objeto se desliza por la rampa y choca contra el muelle, comprimiéndolo una distancia x antes de alcanzar momentáneamente el reposo. (*a*) Hallar x. (*b*) ¿Qué ocurre con el objeto (si se mueve) después de alcanzar el reposo momentáneamente?

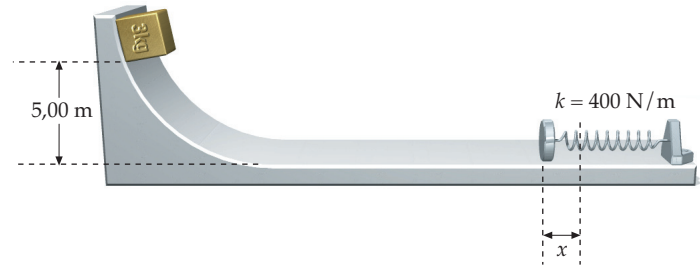


FIGURA 7.42 Problema 39

40 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una persona diseña un juguete para niños y quiere comprobar si la velocidad máxima de la pelota es lo suficientemente grande como para requerir el uso de gafas protectoras. En el juego, una pelota de 15 g es disparada por un muelle cuya constante elástica es de 600 N/m. El muelle se comprime 5 cm antes de cada disparo. ¿Con qué velocidad sale disparada la bola? Si se dispara verticalmente, ¿a qué altura llegará? ¿Serían necesarias las gafas protectoras?

41 • Un muchacho de 16 kg se está columpiando en el patio de recreo de forma que lleva una velocidad de 3,4 m/s cuando el columpio, de 6 m de longitud, se encuentra en el punto más bajo de sus oscilaciones. ¿Qué ángulo forma el columpio con la vertical cuando el niño se encuentra en el punto más elevado? Despreciar los efectos de la resistencia del aire y suponer que el niño no impulsa el columpio. SSM

42 •• El sistema que se muestra en la figura 7.43 está en reposo cuando se corta la cuerda inferior. Determinar la velocidad de los objetos cuando están momentáneamente a la misma altura. En la polea no hay rozamiento y su masa es despreciable.

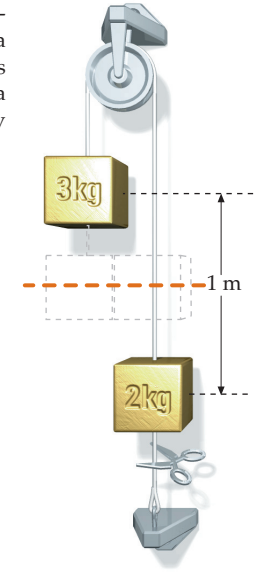


FIGURA 7.43 Problema 42

43 •• Un bloque de masa m reposa sobre un plano inclinado como indica la figura 7.44. El coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es μ_e. Una fuerza que aumenta gradualmente tira del muelle (constante elástica k). Determinar la energía potencial U del muelle en el momento que el bloque comienza a moverse.

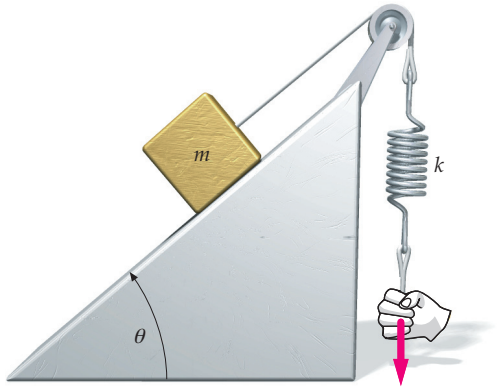


FIGURA 7.44 Problema 43

44 •• Un bloque de 2,4 kg se deja caer hacia un muelle desde una altura de 5,0 m (figura 7.45). Cuando el bloque alcanza momentáneamente el reposo, el muelle se ha comprimido 25 cm. Determinar la velocidad del bloque cuando la compresión del muelle es de 15 cm.

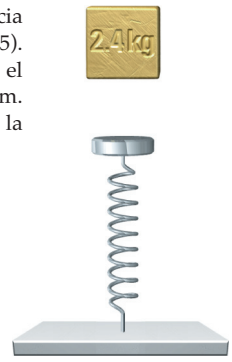


FIGURA 7.45
Problema 44

45 •• Una pelota en el extremo de una cuerda se mueve en un círculo vertical con energía mecánica constante E. ¿Qué diferencia existe entre la tensión en la parte más baja del círculo y la tensión en su parte más alta? SSM

46 •• Una muchacha de masa m lleva una cesta de comida a su abuela. Para cruzar un riachuelo ata una cuerda de longitud R a la rama de un árbol y comienza a oscilar desde el reposo en un punto que se encuentra a una distancia $R/2$ por debajo de la rama. ¿Cuál es la tensión mínima de rotura de la cuerda para que no se rompa y la muchacha no caiga en el arroyo?

47 •• La vagoneta de una montaña rusa de masa 1500 kg parte de un punto situado a una altura H de 23 m sobre la parte más baja de un rizo de 15 m de diámetro (figura 7.46). Si el rozamiento es despreciable, determinar la fuerza hacia abajo de los carriles sobre la vagoneta cuando los viajeros están cabeza abajo en lo alto del rizo.

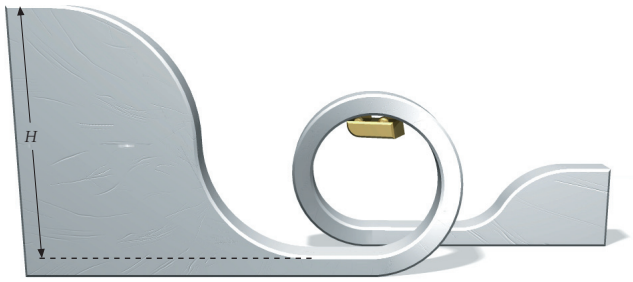


FIGURA 7.46 Problema 47

48 •• Una vagoneta de una montaña rusa que se mueve con velocidad v_0 desciende 5 m en el primer tramo de la pista y, a continuación, sube hasta un tramo del recorrido que está 4,5 m por encima del primer tramo. Despreciar los efectos de resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la mínima velocidad necesaria v_0 para que la vagoneta supere esta altura? (*b*) ¿Se puede modificar esta velocidad cambiando la posición del punto más bajo de modo que la vagoneta adquiera mayor velocidad al pasar por este punto?

49 •• Las vagonetas de la montaña rusa *Graviton* pasan por un bucle construido con el objetivo de que las personas que vayan montadas en ellas se sientan perfectamente ingrávidas cuando lleguen a la cima del arco. ¿Qué peso sentirán cuando lleguen al punto más bajo de la trayectoria, es decir, cuál es la fuerza normal que los hunde en el fondo de sus asientos al llegar al fondo del bucle? Expresar la respuesta como múltiplo de mg. Supóngase que la trayectoria es perfectamente circular y que sobre la vagoneta no hay fuerzas de rozamiento.

50 •• Una piedra se lanza hacia arriba con un ángulo de 53° sobre la horizontal. Su altura máxima durante la trayectoria es de 24 m. ¿Cuál fue la velocidad inicial de la piedra? Despreciar los efectos de resistencia del aire.

51 •• Una pelota de béisbol de masa 0,17 kg se lanza desde el tejado de un edificio situado a 12 m por encima del suelo. Su velocidad inicial es de 30 m/s y el ángulo de lanzamiento 40° sobre la horizontal. Despreciar los efectos de resistencia del aire. (*a*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo?

52 •• Un péndulo de 80 cm de longitud con una lenteja de 0,6 kg se suelta desde el reposo cuando forma un ángulo inicial θ_0 con la vertical. En la parte más baja de su oscilación, la velocidad de la lenteja es 2,8 m/s. (*a*) ¿Cuál era el ángulo inicial del péndulo? (*b*) ¿Qué ángulo formará el péndulo con la vertical cuando la velocidad de la lenteja sea de 1,4 m/s? ¿Es este ángulo igual a $\frac{1}{2}\theta_0$? Razonar la respuesta.

53 •• El puente Royal Gorge sobre el río Arkansas tiene una altura aproximada de $L = 310$ m. Un saltador de masa 60 kg tiene una cuerda elástica de longitud $d = 50$ m atada a sus pies. Suponer que la cuerda actúa como un muelle ideal de constante elástica k. El saltador se lanza, apenas toca el agua y después de numerosas subidas y bajadas se detiene a una altura h sobre el agua. (*a*) Calcular h. (*b*) Determinar la velocidad máxima alcanzada por el saltador.

54 •• Un péndulo está formado por una lenteja de 2 kg atada a una cuerda ligera de longitud 3 m. Mientras cuelga verticalmente y en reposo, la lenteja es golpeada horizontalmente, de modo que alcanza una velocidad horizontal inicial de 4,5 m/s. En el punto en que la cuerda forma un ángulo de 30° con la vertical (*a*) ¿cuál es el módulo de la velocidad de la lenteja? (*b*) ¿Cuál es su energía potencial relativa a su valor en el punto más bajo? (*c*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*d*) ¿Qué ángulo forma la cuerda con la vertical cuando la lenteja alcanza su máxima altura?

55 •• Un péndulo está formado por una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m. La cuerda se dispone en posición horizontal y se da a la lenteja la velocidad inicial mínima para que el péndulo dé una vuelta completa en el plano vertical. (*a*) ¿Cuál es la máxima energía cinética K de la lenteja? (*b*) ¿Cuál es en ese momento la tensión de la cuerda? SSM

56 •• Un muchacho de peso 360 N se balancea sobre una charca de agua con una cuerda atada a la rama de un árbol en el borde de la charca. La rama está a 12 m por encima del nivel del suelo y la superficie del agua de la charca está a 1,8 m por debajo del suelo. El muchacho coge la cuerda con la mano en un punto a 10,6 m de la rama y se mueve hacia atrás hasta que la cuerda forma con la vertical un ángulo de 23°. Entonces se lanza y cuando la cuerda está en posición vertical se suelta de la cuerda y cae en la charca. Determinar el módulo de la velocidad del muchacho en el momento de caer en el agua. (El muchacho puede suponerse como una partícula puntual colgado de la cuerda a una distancia de 10,6 m de la rama.)

57 •• Paseando junto a un estanque, un muchacho encuentra una cuerda atada a la rama de un árbol a 5,2 m del suelo y decide utilizarla para balancearse sobre el estanque. La cuerda está algo deteriorada, pero soporta su peso. El muchacho estima que la cuerda se romperá si la tensión supera en 80 N su propio peso, que es de unos 650 N. Agarra la cuerda en un punto que está a 4,6 m de la rama y se mueve hacia atrás para balancearse sobre el estanque. (Suponer que el muchacho es una partícula puntual atado a una cuerda a 4,6 m de distancia de la rama.) (*a*) ¿Cuál es el ángulo inicial máximo entre la cuerda y la vertical que permite al muchacho balancearse con seguridad sin que se rompa la cuerda? (*b*) Si el muchacho comienza con este ángulo máximo y la superficie del estanque está 1,2 m por debajo del nivel del suelo, ¿con qué módulo de la velocidad entrará en el agua si se suelta de la cuerda cuando ésta pasa por la posición vertical?

58 ••• Un péndulo de longitud L tiene una lenteja de masa m atada a una cuerda ligera y conectada a un muelle de constante elástica k. Con el péndulo en la posición indicada en la figura 7.47, el muelle se encuentra en su posición natural. Si ahora tiramos lateralmente de la lenteja hasta que la cuerda forme un ángulo pequeño θ con la vertical, ¿cuál será la velocidad de la lenteja después de soltarla cuando pase por la posición de equilibrio? *Ayuda: recordar que cuando el ángulo es pequeño podemos usar estas aproximaciones: si θ se expresa en radianes y si $|\theta| \ll 1$, entonces* $\operatorname{sen}\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ *y* $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$.

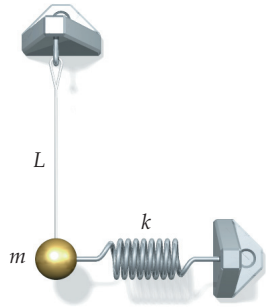


FIGURA 7.47 Problema 58

59 ••• Un péndulo está suspendido del techo y conectado a un muelle fijo en el extremo opuesto justo por debajo del soporte del péndulo (figura 7.48). La masa de la lenteja es m, la longitud del péndulo, L, y la constante del muelle, k. La longitud del muelle sin deformar es $L/2$ y la distancia entre la parte más baja del muelle y el techo es 1,5 L. El péndulo se desplaza lateralmente hasta formar un pequeño ángulo θ con la vertical y después se deja en libertad desde el reposo. Obtener una expresión para la velocidad de la lenteja cuando pasa justo por debajo del soporte del péndulo. SSM

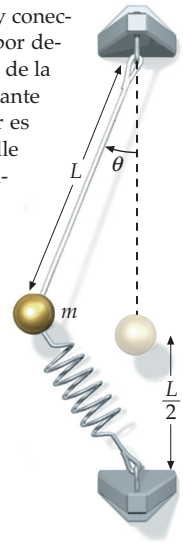


FIGURA 7.48
Problema 59

ENERGÍA TOTAL Y FUERZAS NO-CONSERVATIVAS

60 • En una erupción volcánica, 4 km^3 de una montaña con una densidad media de 1600 kg/m^3 se elevaron hasta una altura media de 500 m. (*a*) ¿Cuánta energía, en joules, se liberó en esta erupción? (*b*) La energía liberada en una bomba termonuclear se mide en megatones de TNT, siendo 1 megatón de TNT = $4{,}2 \times 10^{15}$ J. Expresar la respuesta de (*a*) en megatones de TNT.

61 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un estudiante de física de 80 kg sube a un monte de 120 m de altura. (*a*) ¿Cuál es el incremento de energía potencial gravitatoria del estudiante al llegar a la cumbre del monte? (*b*) ¿De dónde procede esta energía? (*c*) El organismo del estudiante tiene un rendimiento del 20%, es decir, por cada 100 J de energía interna consumida, 20 J se convierten en energía mecánica y 80 J se pierden en forma de calor. ¿Cuánta energía química consume el estudiante durante el ascenso al monte?

62 • Un coche de 2000 kg se mueve sobre una carretera horizontal con una velocidad inicial de 25 m/s. Se detiene a los 60 m por la acción de una fuerza de rozamiento constante. (*a*) ¿Cuánta energía se disipa por rozamiento? (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre los neumáticos y la carretera? (*Nota*: cuando se frena sin derrapar utilizando frenos convencionales, el total de la energía cinética del coche se disipa en los frenos. Con frenos regeneradores, como los que se utilizan en los vehículos híbridos, sólo el 70% de la energía cinética se disipa.)

63 • Un trineo de 8 kg se encuentra inicialmente en reposo sobre una carretera horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el trineo y la carretera es 0,4. El trineo se empuja a lo largo de una distancia de 3 m con una fuerza de 40 N que forma un ángulo de 30° hacia arriba con la horizontal. (*a*) Determinar el trabajo realizado por la fuerza aplicada. (*b*) Determinar la energía disipada por rozamiento. (*c*) Calcular la variación de energía cinética experimentada por el trineo. (*d*) Hallar la velocidad del trineo después de recorrer la distancia de 3 m.

64 •• Partiendo de la figura 7.41, suponer ahora que las superficies poseen rozamiento y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y las superficies es 0,30. El bloque tiene una velocidad inicial de 7 m/s y se desliza 2 m antes de llegar a la rampa. Determinar (*a*) la velocidad del bloque cuando alcanza la rampa y (*b*) la distancia que alcanza el objeto en su deslizamiento antes de quedar momentáneamente en reposo. (Despreciar la energía disipada a lo largo de la curva de transición.)

65 •• Un bloque de 2 kg situado a una altura de 3 m se desliza por una rampa curva y lisa desde el reposo (figura 7.49). Resbala 9 m sobre una superficie horizontal rugosa antes de llegar al reposo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del bloque en la parte inferior de la rampa? (*b*) ¿Cuánta energía se ha disipado por rozamiento? (*c*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal? SSM

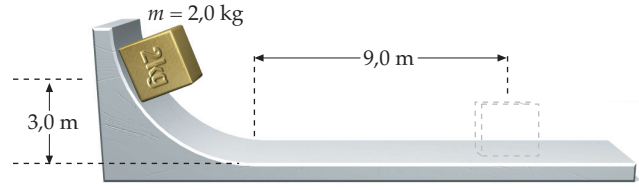


FIGURA 7.49 Problema 65

66 •• Una niña de 20 kg se desliza por un tobogán de 3,2 m de altura. Cuando alcanza su parte inferior lleva una velocidad de 1,3 m/s. (*a*) ¿Cuánta energía se ha disipado por rozamiento? (*b*) Si el tobogán está inclinado 20°, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento entre la niña y la superficie de deslizamiento?

67 •• El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque de 4 kg y la plataforma de la figura 7.50 es 0,35. (*a*) Determinar la energía disipada por rozamiento cuando el bloque de 2 kg cae una distancia *y*. (*b*) Calcular la energía mecánica total E_{mec} del sistema después de que el bloque de 2 kg caiga la distancia *y*, suponiendo que inicialmente $E_{mec} = 0$. (*c*) Utilizar el resultado de (*b*) para determinar el módulo de la velocidad de cualquiera de los bloques después que el bloque de 2 kg caiga 2 m.

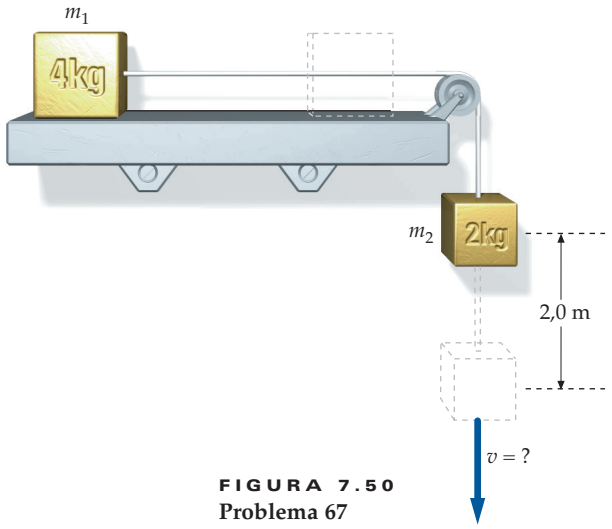


FIGURA 7.50
Problema 67

68 •• Un objeto compacto de masa *m* se mueve en un círculo horizontal de radio *r* sobre una mesa rugosa. Está sujeto a una cuerda fija en el centro del círculo. La velocidad del objeto es inicialmente v_0. Después de completar una vuelta alrededor del círculo, la velocidad es $0{,}5v_0$. (*a*) Determinar la energía disipada por rozamiento durante una vuelta en función de *m*, v_0 y *r*. (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético? (*c*) ¿Cuántas vueltas da la partícula antes de alcanzar la posición de reposo?

69 •• Un bloque de 2,4 kg posee una velocidad inicial de 3,8 m/s dirigida hacia arriba sobre un plano inclinado 37° con la horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y el plano es 0,30. (*a*) ¿Qué distancia sobre el plano inclinado sube el bloque? (*b*) ¿Cuál es el módulo de su velocidad cuando ha recorrido la mitad de distancia del apartado (*a*)? SSM

70 ••• Un bloque de masa *m* descansa sobre un plano inclinado θ grados sobre la horizontal. El bloque está unido a un muelle de constante *k* (figura 7.51). Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque y el plano son μ_e y μ_c, respectivamente. Tiramos del muelle lentamente hacia arriba a lo largo del plano hasta que el bloque comienza a moverse. (*a*) Determinar una expresión para el alargamiento *d* del muelle en el momento en que el bloque se mueve. (*b*) Determinar el valor de μ_c tal que el bloque se detenga justo cuando el muelle se encuentra en su condición natural, es decir, ni alargado, ni comprimido.

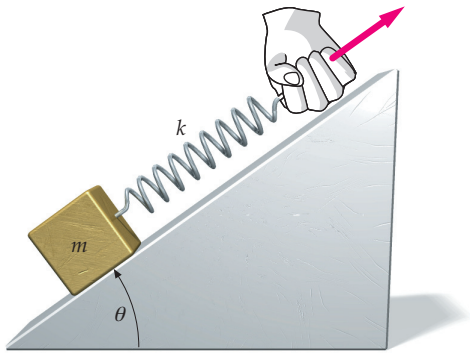


FIGURA 7.51 **Problema 70**

MASA Y ENERGÍA

71 • (*a*) Calcular la energía en reposo que hay en 1 g de polvo. (*b*) Si se pudiera transformar esta energía en forma eléctrica y venderla a 10 céntimos el kilowatt-hora, ¿cuánto dinero se obtendría? (*c*) Si con esa energía se encendiera un lámpara de 100 W, ¿durante cuánto tiempo permanecería encendida?

72 • Cuando se detona un kilotón de TNT se produce una energía explosiva de unos 5×10^{12} J. ¿Cuál es la masa equivalente a la energía de la explosión? Si fuera capaz de juntar de nuevo todas las piezas, ¿sería apreciable la pérdida de masa?

73 • **CONCEPTUAL** Calcular la energía en reposo de una persona tanto en megaelectronvolts como en joules. Si esa energía se pudiese convertir completamente en la energía cinética de un coche, hállese su velocidad. Utilice la versión no-relativista para la energía cinética y comente cuando se puede justificar el uso de la expresión no-relativista de la energía cinética.

74 • Si un agujero negro y una estrella "normal" orbitan uno alrededor del otro, los gases de la estrella que caen en el agujero negro se calientan millones de grados debido al rozamiento en el disco de acumulación del agujero. Cuando los gases se calientan tanto, empiezan a radiar luz en la región de rayos X del espectro electromagnético. Se cree que Cygnus X-1, la segunda fuente de rayos X más brillante del firmamento, es uno de estos sistemas binarios. Emite radiación a una potencia estimada de 4×10^{31} W. Si suponemos que el 1% de la masa-energía que cae escapa en forma de rayos X, ¿con qué tasa está ganando masa el agujero negro?

75 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una persona se encarga de diseñar las necesidades de combustible de una pequeña central de fusión. Suponga que la planta tiene un 33% de eficiencia en la conversión a energía eléctrica. Para la reacción de fusión deuterón-tritón del ejemplo 7.18, calcular el número de reacciones por segundo que son necesarias para generar 1 kW de potencia eléctrica. SSM

76 • Utilizar la tabla 7.1 para calcular la energía necesaria para extraer un neutrón de una partícula alfa estática, dejando estático un helio-3 y emitiendo un neutrón con una energía cinética de 1,5 MeV.

77 • Un neutrón libre se puede desintegrar en un protón más un electrón y un antineutrino [el antineutrino (símbolo $\bar{\nu}_e$) es una partícula elemental de masa casi nula]: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Utilizar la tabla 7.1 para calcular la energía liberada durante esta reacción.

78 •• Durante un determinado tipo de reacción de fusión nuclear, dos deuterones se combinan para dar lugar a una partícula alfa. (*a*) ¿Cuánta energía se libera durante esta reacción? (*b*) ¿Cuántas reacciones por segundo de este tipo deben tener lugar para producir 1 kW de potencia?

79 •• Una gran central nuclear produce 1000 MW de potencia por fisión nuclear. (*a*) ¿Cuánta masa se transforma en energía al cabo de un año? (Suponer una eficiencia del 33 por ciento en una central nuclear.) (*b*) En una central térmica de carbón, cada kilogramo de carbón libera en la combustión 31 MJ de energía térmica. ¿Cuántos kilogramos de carbón se necesitarán anualmente para una central de 1000 MW? (Suponer una eficiencia del 38 por ciento en una central térmica de carbón.)

CUANTIZACIÓN DE LA ENERGÍA

80 •• Una masa unida al extremo de un muelle cuya constante elástica es de 1000 N/kg oscila con una frecuencia de 2,5 oscilaciones por segundo. (*a*) Determinar el número cuántico *n* del estado en el que tiene una energía de 10 J. (*b*) ¿Cuánto vale la energía de su estado fundamental?

81 •• Repetir el problema 80, pero considerando ahora un átomo de un sólido que vibra con una frecuencia de $1{,}00 \times 10^{14}$ oscilaciones por segundo y que tiene una energía de 2,7 eV.

PROBLEMAS GENERALES

82 • Un bloque de masa m, inicialmente en reposo, se arrastra con una cuerda hacia arriba por un plano inclinado un ángulo θ sobre la horizontal (sin rozamiento). La tensión en la cuerda es T y la cuerda es paralela al plano. Después de recorrer una distancia L, la velocidad del bloque es v. Deducir una expresión para el trabajo realizado por la tensión.

83 • Un bloque de masa m se desliza hacia abajo con velocidad constante v por un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal. Hallar una expresión para la energía disipada por rozamiento durante el intervalo de tiempo Δt.

84 • En física de partículas, la energía potencial asociada a la unión de dos quarks por la fuerza nuclear fuerte viene dada por: $U(r) = -(\alpha/r) + kr$, donde k y α son constantes positivas y r es la distancia de separación entre dos quarks.* (*a*) Dibujar un gráfico de la energía potencial. (*b*) ¿Cuál es la fuerza que ejerce cada quark? (*c*) ¿Cómo se simplifica la fuerza cuando se consideran los casos de valores muy grandes o muy pequeños de r?

85 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encarga de instalar energía solar en la granja de su abuelo. A la superficie del suelo de la granja llegan 1 kW/m² de energía durante las horas diurnas en días claros. Si esta energía se pudiese convertir en eléctrica con un 25% de eficiencia, ¿qué cantidad de superficie habría que cubrir con placas solares para hacer funcionar una bomba de riego de 4 hp durante las horas diurnas? SSM

86 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La radiación solar que llega a la órbita terrestre es 1,35 kW/m². (*a*) El 25% de esta energía es absorbida y/o reflejada por la atmósfera antes de que llegue a la superficie terrestre, incluso cuando el Sol está verticalmente sobre la superficie terrestre y las condiciones son de sequedad desértica. Si la frecuencia media de la radiación electromagnética solar es de $5{,}5 \times 10^{14}$ Hz, ¿cuántos fotones por segundo incidirán sobre un panel solar de 1 m²? (*b*) Suponer que la eficiencia de los paneles para convertir la energía solar en eléctrica es del 10%. ¿Cómo de grande debe ser el panel necesario para hacer funcionar un coche solar de 5 hp (suponiendo que el coche sólo utiliza la energía solar para funcionar) durante una carrera de coches en el Cairo un 21 de marzo al mediodía? (*c*) Suponiendo una eficiencia más realista de un 3,3% y que los paneles pueden rotar a fin de mantenerse perpendiculares a los rayos solares, ¿cómo de grandes deberían ser los paneles necesarios para hacer funcionar la Estación Espacial Internacional (EEI)? La EEI requiere 110 kW de potencia eléctrica.

87 •• En 1964, el coche *Spirit of America*, de 1250 kg, propulsado a chorro, tras perder su paracaídas y correr sin control sobre la pista de Bonneville Salt Flats (Utah), dejó unas marcas de derrape de 8 km de longitud (debido a esto se ganó un puesto en el libro Guinness de los récords por las marcas de derrape más largas). (*a*) Si el coche se desplazaba inicialmente a 800 km/h e iba a 300 km/h cuando el conductor pisó a fondo el freno, determinar el coeficiente de rozamiento μ_c. (*b*) ¿Cuál era la energía cinética del coche 60 s después del inicio del derrape?

* Este potencial se conoce como "Potencial de Cornell" desarrollado en *Physical Review Letters*. Mencionar aquí también su relación con el premio Nobel del 2004 concedido a Gross, Wilczek y Politzer.

88 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** La barra de un telesquí en forma de T debe transportar un máximo de 80 esquiadores una distancia de 600 m con una inclinación de 15° sobre la horizontal a una velocidad de 2,5 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético entre los esquís de los esquiadores y la nieve es de 0,06. ¿Qué potencia deberá tener el motor del telesquí si la masa media de cada esquiador es de 75 kg? Suponer que los requisitos de seguridad exigen un 50% más de potencia de la mínima necesaria.

89 •• **MÚLTIPLES PASOS** Una caja de masa m descansa sobre el suelo y se conecta a un muelle horizontal cuya constante elástica es k (figura 7.52). El coeficiente de rozamiento cinético entre la caja y el suelo es μ_c. El otro extremo del muelle está conectado a una pared. El muelle está inicialmente en reposo. Si la caja se estira una distancia d_0 y se suelta, la caja se deslizará hacia la pared. Suponer que las espirales del muelle no llegan a tocarse. (*a*) Obtener una expresión para la distancia d_1 que la caja recorre antes de llegar a pararse. (*b*) Suponiendo que $d_1 > d_0$, obtener una expresión para la velocidad de la caja cuando ha recorrido una distancia d_0 tras ser soltada. (*c*) Obtener el valor de μ_c para el cual $d_1 = d_0$.

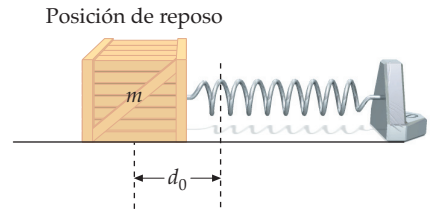


FIGURA 7.52 Problema 89

90 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encarga de hacer funcionar un montacargas de grano en Champaign (Illinois). Uno de los silos utiliza un montacargas que sube una carga máxima de 800 kg a una altura de 40 m (el montacargas funciona con una correa continua como en el caso de una cinta transportadora). (*a*) ¿Cuál es la potencia suministrada por el motor eléctrico si el montacargas asciende a una velocidad constante de 2,3 m/s? (*b*) Suponiendo que el motor tiene una eficiencia del 85%, ¿cuánto cuesta hacerlo funcionar al día suponiendo que funciona el 60% del tiempo entre las 7:00 h y las 19:00 h elevando una carga media del 85% de la carga máxima? Suponer que el coste energético es de 15 céntimos por kilowatt hora.

91 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para reducir el consumo de potencia de los motores de los ascensores, éstos utilizan contrapesos conectados mediante un cable que pasa por una polea situada en la parte superior del eje del ascensor. Si el ascensor del problema 90 tiene un contrapeso de masa 1500 kg, ¿cuál es la potencia suministrada por el motor cuando asciende a plena carga a una velocidad de 2,3 m/s? ¿Qué potencia suministra el motor cuando el ascensor asciende vacío a 2,3 m/s?

92 •• En las antiguas películas de ciencia ficción, los escritores intentaban idear nuevas formas de enviar naves espaciales a la Luna. Uno de los guionistas pensó en utilizar un túnel profundo, inclinado 65° sobre la horizontal. En el fondo del túnel habría un enorme muelle anclado por un extremo. Cuando el muelle está relajado, su otro extremo estaría a 30 m de la parte alta del túnel. El guionista había calculado que para que una nave de 318 kg llegara a la Luna debía salir del túnel a 11,2 km/s. Si el muelle se comprime 95 m justo antes del lanzamiento, ¿cuál es el valor mínimo de la constante elástica del muelle? Despreciar el rozamiento con el aire.

93 •• En una erupción volcánica, se expulsa verticalmente hacia arriba un trozo de 2 kg de roca volcánica porosa con una velocidad inicial de 40 m/s, alcanzando una altura de 50 m antes de que comience a caer hacia la Tierra. (*a*) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la roca? (*b*) ¿Cuál es el incremento de energía térmica debido al rozamiento del aire durante el ascenso? (*c*) Si el incremento de energía térmica debido al rozamiento del aire en el descenso es el 70% del que tuvo lugar en el ascenso, ¿cuál es la velocidad de la roca cuando vuelve a su posición inicial? SSM

94 •• Un bloque de masa m parte del reposo a una altura h y se desliza hacia abajo por un plano inclinado, sin rozamiento, que forma un ángulo θ con la horizontal, como indica la figura 7.53. El bloque choca contra un muelle de constante elástica k. Determinar la compresión del muelle cuando el bloque se detiene momentáneamente.

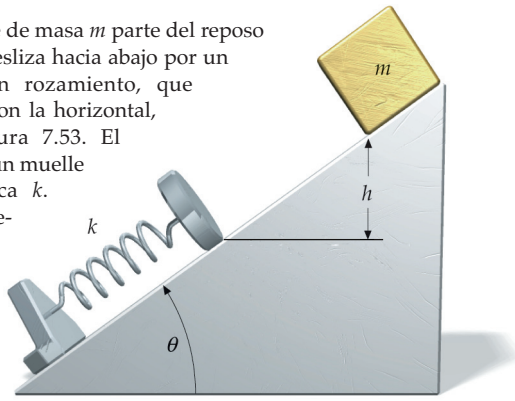


FIGURA 7.53 Problema 94

95 •• **HOJA DE CÁLCULO** Se suspende una masa m del techo mediante un muelle que puede moverse verticalmente en la dirección y, como se indica en la figura 7.54. La dirección $+y$ va hacia abajo y el origen se sitúa en la posición de la masa cuando se halla en reposo. (*a*) Mostrar que la energía potencial como función de la posición se expresa mediante $U = \frac{1}{2}ky^2 - mgy$. (*b*) Representar U en función de y usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica. Tomar los valores $k = 2$ N/m y $mg = 1$ N. (*c*) Explicar cómo este gráfico muestra que hay una posición de equilibrio estable para un valor positivo de y. Utilizando la expresión del apartado (*a*) para U, determinar (simbólicamente) el valor de y para el cual la masa está en equilibrio. (*d*) A partir de la expresión de U, determinar la fuerza neta hacia abajo que actúa sobre m en cualquier posición y. (*e*) La masa se deja libre desde el reposo en $y = 0$; si no hay rozamiento, ¿cuál es el valor máximo, $y_{máx}$, que alcanzará la masa? Indicar $y_{máx}$ en el gráfico. SSM

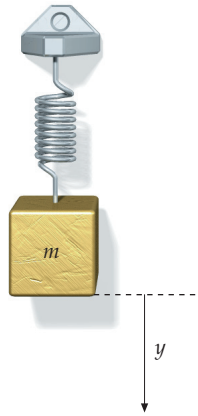


FIGURA 7.54 Problema 95

96 •• Una pistola lanzaseñales se carga comprimiendo el muelle una distancia d y dispara una bengala de masa m dirigida verticalmente hacia arriba. La bengala tiene una velocidad v_0 cuando abandona el muelle y alcanza una altura máxima h respecto al punto donde abandona el muelle. Los efectos de resistencia del aire son importantes. (Expresar las respuestas en función de m, v_0, d, h y g.) (*a*) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el muelle en el proceso de compresión? (*b*) ¿Cuál es el valor de la constante del muelle, k? (*c*) ¿Cuánta energía mecánica se transforma en energía térmica a causa de la fuerza de arrastre del aire sobre la bengala en el tiempo que transcurre entre el disparo y la llegada a su altura máxima?

97 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una vagoneta de una montaña rusa de masa total 500 kg (incluidos los pasajeros) se desplaza libremente por la pista, sin rozamiento del aire, indicada en la figura 7.55. Los puntos A, E y G son secciones rectas horizontales, todas ellas de la misma altura de 10 m sobre el suelo. El punto C, que está a una altura de 10 m sobre el suelo,

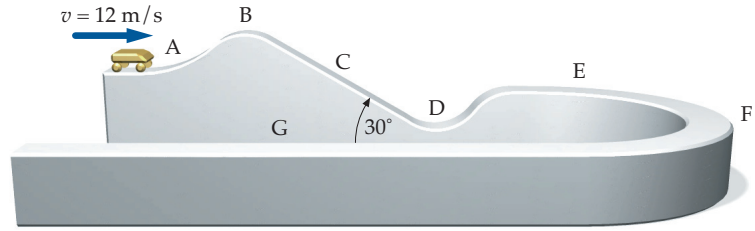


FIGURA 7.55 Problema 97

pertenece a una pendiente que forma un ángulo de 30°. El punto B está en lo alto de una cuesta, mientras que el punto D pertenece a una hondonada que está al nivel del suelo. El radio de curvatura de cada uno de estos puntos es 20 m. El punto F está en el medio de una curva horizontal con peralte de radio de curvatura 30 m y a la misma altura de 10 m sobre el suelo que los puntos A, E y G. En el punto A, la velocidad de la vagoneta es 12 m/s. (*a*) Si la vagoneta es capaz de llegar justamente al punto B de la cuesta, ¿cuál es la altura de este punto sobre el suelo? (*b*) Si se cumple la condición (*a*), ¿cuál es la magnitud de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto B? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de la vagoneta en el punto C? (*d*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto D? (*e*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de la fuerza total ejercida sobre la vagoneta por la pista en el punto F? (*f*) Al llegar el punto G se aplica a la vagoneta una fuerza de frenado constante que provoca su parada en una distancia de 25 m. ¿Cuál es la fuerza de frenado?

98 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El cable de un ascensor de 200 kg se ha roto y éste se mueve hacia abajo a $v_0 = 1{,}5$ m/s. Un sistema de frenado evita que la velocidad de descenso se incremente. (*a*) ¿A qué ritmo (en J/s) se transforma la energía mecánica en energía térmica en el sistema de frenado? (*b*) Cuando el ascensor se mueve hacia abajo a $v_0 = 1{,}5$ m/s, falla el sistema de frenado y cae libremente a lo largo de una distancia $d = 5$ m antes de chocar contra el tope de un gran muelle de seguridad con una constante elástica $k = 1{,}5 \times 10^4$ N/m. Determinar la distancia Δy que se comprime el muelle tras el choque antes de que la cabina del ascensor quede en reposo.

99 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Para medir la fuerza de rozamiento (rozamiento por rodadura y fuerza arrastre del aire) sobre un coche en movimiento, un mecánico apaga el motor y deja que el vehículo se deslice cuesta abajo en pendientes conocidas. El mecánico registra los siguientes datos: (1) Sobre una pendiente de 2,87° el coche se desliza uniformemente a 20 m/s. (2) Sobre una pendiente de 5,74° la velocidad constante de deslizamiento es 30 m/s. La masa total del coche es 1000 kg. (*a*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento a 20 m/s (F_{20}) y a 30 m/s (F_{30})? (*b*) ¿Qué potencia útil debe suministrar el motor para que el coche circule sobre una carretera horizontal a las velocidades estacionarias de 20 m/s (P_{20}) y 30 m/s (P_{30})? (*c*) A todo gas, el motor suministra 40 kW. ¿Cuál es el ángulo máximo de pendiente hacia arriba para el cual el coche puede mantener una velocidad estacionaria de 20 m/s? (*d*) Suponer que el motor suministra el mismo trabajo útil total por cada litro de combustible, cualquiera que sea su velocidad. A 20 m/s sobre una carretera horizontal, el coche recorre 12,7 km/L. ¿Cuántos kilómetros por litro recorrerá si su velocidad es 30 m/s? SSM

100 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** (*a*) Calcular la energía cinética de un coche de 1200 kg que se mueve a 50 km/h. (*b*) Si el rozamiento (de rodadura y del aire) produce una fuerza de 300 N a una velocidad de 50 km/h, ¿cuál es la energía mínima necesaria para que el coche se desplace 300 m a 50 km/h?

101 ••• Un péndulo consiste en una pequeña masa (M) atada al extremo de una cuerda de longitud L. Tal como muestra la figura 7.56, la masa se coloca en posición horizontal y se suelta. En el punto más bajo de la oscilación, la cuerda choca con una clavija delgada situada a una distancia R por encima de dicho punto. Demostrar que R debe ser menor que $2L/5$ para que la masa describa un círculo entero alrededor del punto R.

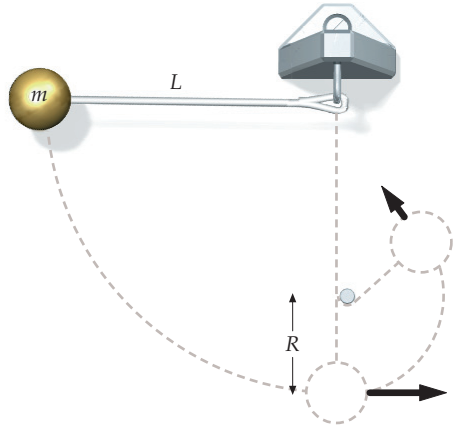


FIGURA 7.56 Problema 101

102 •• Una lancha de 285 kg se conduce sobre la superficie de un lago a una velocidad de 13,5 m/s en dirección hacia una rampa inclinada un ángulo de 25° sobre la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la parte inferior de la lancha y la superficie de la rampa es de 0,15 y la parte más elevada de la rampa queda a 2 m por encima de la superficie del agua. (*a*) Suponiendo que los motores se apagan cuando la lancha llega a la rampa, ¿a qué velocidad sale la lancha de la rampa? (*b*) ¿Con qué velocidad cae de nuevo la lancha sobre el agua? Despreciar la resistencia del aire.

FIGURA 7.57 Problema 103

103 •• En la figura 7.57 se muestra una experiencia estándar de un curso introductorio de física diseñada para analizar la conservación de la energía y las leyes de Newton. Una pequeña viga de masa M atada a una cuerda sin masa de cuyo extremo cuelga un peso de masa m se coloca en un raíl de aire. Cuando el aire circula por el raíl, éste esencialmente no tiene rozamiento. Se suelta entonces la masa m y se mide la velocidad de la viga después de que el peso haya caído una distancia y. Para demostrar que las leyes de la física son coherentes, determinar la velocidad de la viga de dos formas diferentes: (*a*) mediante la conservación de la energía mecánica; (*b*) usando la segunda y la tercera leyes de Newton directamente, es decir, haciendo un diagrama de fuerzas para las dos masas, determinando su aceleración y, a partir de ella, calculando la velocidad de la viga.

104 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** En el caso de una persona haciendo *footing*, se supone que la energía se consume principalmente en acelerar y decelerar los pies y las partes más bajas de las piernas. Si esta persona corre a una velocidad v, entonces la velocidad máxima de un pie y de la parte inferior de la pierna es $2v$. (Desde el momento en que el pie deja de estar en contacto con el suelo hasta el momento que contacta de nuevo recorre casi dos veces la distancia que recorre el torso, de forma que debe ir casi dos veces más rápido que el torso.) Si la masa del pie y la parte más baja de la pierna es m, la energía necesaria para acelerar el pie y la parte baja de la pierna desde el reposo hasta una velocidad $2v$ es $\frac{1}{2}m(2v)^2 = 2mv^2$, y la misma energía se necesita para decelerar esta masa hasta el próximo paso. Suponer que la masa del pie y la parte más baja de la pierna es de 5 kg y que una persona corre a 3 m/s con una zancada de 1 m. La energía que se debe aportar a cada pierna por cada 2 m de recorrido es $2mv^2$, de forma que la energía necesaria para ambas piernas por cada segundo de footing es $6mv^2$. Calcular la tasa de consumo energético de una persona cuyos músculos tienen un eficiencia del 20% utilizando este modelo.

105 •• Un profesor de química de secundaria sugirió medir el módulo de la aceleración de la gravedad mediante el método siguiente: Colgar un peso de un hilo muy fino de longitud L formando un péndulo que se coloca en el extremo de una mesa, de tal forma que éste queda a una altura H sobre el suelo en el punto de altura mínima de su oscilación. Tirar entonces del hilo de forma que forme un ángulo θ_0 con la vertical. Colocar en el punto más bajo del péndulo una cuchilla que corte el hilo. Cuando éste se ha cortado, la masa se proyecta horizontalmente y cae a una distancia D del borde de la mesa. La idea es medir D en función de θ_0 y que esto sirva para determinar g. Además de las dificultades experimentales obvias, el procedimiento tiene un problema grave: ¡D no depende de g! Muestre que esto es verdad y que D depende únicamente de θ_0. SSM

106 ••• Se empuja hacia un lado la lenteja de un péndulo de longitud L de modo que la cuerda forme con la vertical un ángulo θ_0, y luego se suelta. En el ejemplo 7.5 se utilizó el principio de conservación de la energía para obtener su velocidad en la parte inferior de la trayectoria. En este problema se pide llegar al mismo resultado utilizando la segunda ley de Newton. (*a*) Demostrar que la componente tangencial de la segunda ley de Newton viene dada por $dv/dt = -g \operatorname{sen}\theta$, donde v es el módulo de la velocidad y θ el ángulo que forma la cuerda con la vertical. (*b*) Demostrar que v se puede escribir en la forma $v = L\, d\theta/dt$. (*c*) Utilizar este resultado y la regla de la derivación en cadena para obtener $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{v}{L}$. (*d*) Combinar los resultados de (*a*) y (*c*) para obtener $v\, dv = -gL \operatorname{sen}\theta\, d\theta$. (*e*) Integrar el miembro de la izquierda de esta ecuación desde $v = 0$ hasta la velocidad final v y el miembro de la derecha desde $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$ y demostrar que el resultado es equivalente a $v = \sqrt{2gh}$, siendo h la altura original de la lenteja del péndulo sobre el punto más bajo de su recorrido.

107 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Un escalador de 85 kg está bajando por la pendiente de una roca cuando su sujeción falla y queda sostenido únicamente por la cuerda de seguridad atada a un punto de la cima. La forma de la pared puede esquematizarse tal como se muestra en la fi-

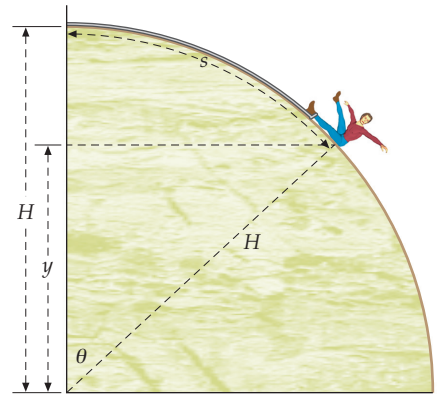


FIGURA 7.58 Problema 107

gura 7.58, con $H = 300$ m. Suponga que la cuerda se comporta como un muelle de constante elástica $k = 5$ N/m y de 60 m de longitud. (*a*) Usando una hoja de cálculo, represente gráficamente la energía potencial del escalador en función de s, siendo ésta la distancia desde la cima medida a lo largo de la curva de la superficie de la roca. Use valores de s comprendidos entre 60 m y 200 m. (*b*) Si la caída comenzó cuando estaba a una distancia $s_i = 60$ m de la cima y acabó a una distancia $s_f = 110$ m, determinar cuánta energía se disipó por rozamiento desde el momento que empezó a resbalar hasta que finalmente quedó parado.

108 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Un bloque de madera de masa m está conectado a dos muelles sin masa, tal como se muestra en la figura 7.59. Cada muelle tiene una longitud L y una constante elástica k. (*a*) Si el bloque se desplaza una distancia x, como se muestra en la figura, ¿cuál es el cambio de la energía potencial almacenada en los muelles? (*b*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza que tira del bloque hacia la posición de equilibrio? (*c*) Usando una hoja de cálculo o una calculadora gráfica, represente gráficamente la energía potencial U en función de x para $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$ m. Supóngase $k = 1$ N/m, $L = 0{,}1$ m y $m = 1$ kg. (*d*) Si el bloque se desplaza una distancia $x = 0{,}1$ m y, posteriormente, se suelta, ¿cuál es su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio? Supóngase que el bloque está descansando sobre una superficie sin rozamiento.

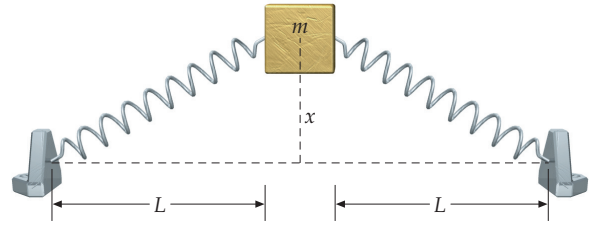


FIGURA 7.59 **Problema 108**

CAPÍTULO 8

DURANTE EL BREVE PERIODO DE TIEMPO QUE LA CABEZA DE UN PALO DE GOLF ESTÁ EN CONTACTO CON LA BOLA DE GOLF, SE EJERCE UNA GRAN FUERZA QUE HACE VOLAR A LA BOLA A TRAVÉS DEL AIRE. LA FUERZA APLICADA SUELE SER UNAS 10 000 VECES EL PESO DE LA BOLA, COMUNICANDO UNA ACELERACIÓN DE 10 000*g* DURANTE MEDIO MILISEGUNDO, APROXIMADAMENTE.
(Joe McNally/Getty Images.)

Conservación del momento lineal

8.1 Conservación del momento lineal
8.2 Energía cinética de un sistema
8.3 Colisiones
*8.4 Colisiones en el sistema de referencia del centro de masas
8.5 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes

? Si el golfista desplaza la bola a 200 metros, ¿cuánto vale la fuerza que ejerció el palo de golf sobre la bola? (Véase el ejemplo 8.8.)

Cuando la cabeza del palo de golf golpea la bola, el módulo de la fuerza ejercida sobre la bola crece hasta alcanzar un valor máximo a partir del cual desciende hasta cero cuando la bola sale despedida. Para describir cómo una fuerza dependiente del tiempo afecta al movimiento del cuerpo sobre el que actúa, necesitaremos introducir dos conceptos nuevos: el impulso de una fuerza y el momento* de un cuerpo. Como sucede con la energía, el momento es una magnitud que se conserva. Uno de los principios más importantes de la física es la *ley de conservación del momento*, que dice que el momento total de un sistema y sus alrededores no cambia. Siempre que el momento de un sistema cambie, quiere decir que debemos considerar la aparición o desaparición de momento en algún otro lugar. Teniendo presente estas ideas, dispondremos de nuevas herramientas para analizar las colisiones que tienen lugar entre partículas, como, por ejemplo, entre los palos y las bolas de golf, entre coches o entre partículas subatómicas en un reactor.

* En este capítulo, el término momento se refiere al momento lineal. (El momento angular se trata en el capítulo 10.)

En este capítulo, introducimos las ideas de impulso y momento lineal y demostramos cómo a partir de la integración de la segunda ley de Newton obtendremos un teorema importante conocido como el teorema impulso-momento. Determinaremos si el momento de un sistema permanece constante y cómo aplicar esta conservación para resolver problemas de colisiones entre cuerpos. Además, examinamos un nuevo sistema de referencia, conocido como el sistema de referencia del centro de masas y exploraremos situaciones en las cuales un sistema tiene una masa que varía continuamente.

8.1 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

Cuando Newton concibió su segunda ley consideró el producto de la masa y la velocidad como una medida de la cantidad de movimiento de un cuerpo. Hoy en día, llamamos momento lineal o cantidad de movimiento $\vec{p}$ al producto de la velocidad de una partícula por su masa:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{8.1}$$

DEFINICIÓN: MOMENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA

La cantidad $\vec{p}$ se designa como *momento lineal de una partícula* para distinguirlo del momento angular, que se trata en el capítulo 10. Cuando no hace falta clarificar que el momento se refiere al momento lineal, el adjetivo lineal se omite y nos referimos simplemente al *momento*. En el resto de este capítulo se usa el vocablo momento para referirnos al *momento* lineal.

El momento lineal es una magnitud vectorial. Es el producto entre un vector (la velocidad) y un escalar (la masa). Su módulo es mv y tiene la misma dirección que $\vec{v}$**.** Las unidades del momento son unidades de masa por velocidad; así, en el SI las unidades del momento son kg · m/s.

El momento puede considerarse como una medida de la dificultad de llevar la partícula hasta el reposo. Por ejemplo, un camión pesado tiene mayor momento lineal que un automóvil ligero que se mueve con igual velocidad. Es necesaria una fuerza mayor para detener el camión en un tiempo determinado que para detener el automóvil en el mismo tiempo.

La segunda ley de Newton puede escribirse en función del momento de una partícula. Diferenciando la ecuación 8.1, se obtiene

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Sustituyendo $m\vec{a}$ por la fuerza $\vec{F}_{\text{neta}}$, resulta

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.2}$$

Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la derivada respecto al tiempo del momento de la partícula. En realidad, el enunciado original de Newton sobre la segunda ley tenía esta forma. (En su famoso tratado *Principia* (1687), Isaac Newton presenta la segunda ley de Newton de esa forma, mas que de la forma $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$.)

El momento total $\vec{P}_{\text{sist}}$ de un sistema de muchas partículas es la suma de los momentos de las partículas individuales:

$$\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

De acuerdo con la ecuación 5.20, $\Sigma m_i\vec{v}_i$ es igual a la masa total M multiplicada por la velocidad del centro de masas:

$$\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{cm}} \tag{8.3}$$

MOMENTO TOTAL DE UN SISTEMA

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{P}}_{\text{sist}}}{dt} = M\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{cm}}}{dt} = M\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{cm}}$$

pero de acuerdo con la segunda ley de Newton, $M\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{cm}}$ es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema. Por lo tanto,

$$\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\text{neta ext}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{P}}_{\text{sist}}}{dt} \qquad 8.4$$

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la derivada del momento lineal total es también cero, y el momento lineal total del sistema permanece constante:

Si $\Sigma\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}} = 0$, entonces $\vec{\boldsymbol{P}}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{\boldsymbol{v}}_i = M\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{cm}} = \text{constante}$ 8.5

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

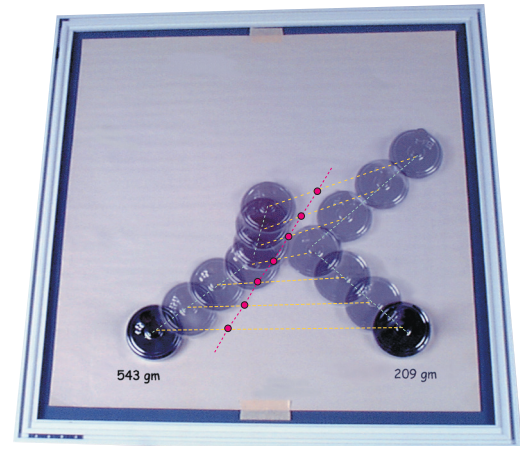
Este resultado se conoce con el nombre de **ley de conservación del momento**:

> Si la fuerza externa resultante sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema permanece constante.

Esta ley es una de las más importantes de la física. Es aplicable en un mayor número de casos que la ley de conservación de la energía mecánica debido a que las fuerzas internas ejercidas por una partícula del sistema sobre otra son frecuentemente no-conservativas. Así pues, estas fuerzas internas pueden hacer variar la energía mecánica total del sistema, pero no pueden modificar la cantidad de movimiento total del sistema. Si el momento lineal total de un sistema es constante, la velocidad vectorial del centro de masas del sistema también es constante. La ley de conservación del momento es una relación vectorial, por lo que es válida componente a componente. Por ejemplo, si la suma de las componentes x de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es cero, la componente x del momento total del sistema permanece constante. Es decir,

Si $\Sigma F_{\text{ext}\,x} = 0$, entonces $P_{\text{sist}\,x} = \text{constante}$ 8.6

CONSERVACIÓN DE UNA COMPONENTE DEL MOMENTO



Dos discos se mueven en un colchón de aire sobre una superficie horizontal. (En la fotografía no se ven los pequeños agujeros por los que sale el aire.) La colisión hace cambiar el módulo y la dirección de la velocidad de cada disco, pero la velocidad del centro de masas sigue constante, sin que le afecten las fuerzas internas de la colisión. *(Gentileza de Daedalon Corporation.)*

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Calcular velocidades utilizando la conservación del momento (ecuación 8.5)

PLANTEAMIENTO Verificar que la fuerza neta externa $\Sigma\vec{\boldsymbol{F}}_{\text{ext}}$ (o $\Sigma F_{\text{ext}\,x}$) que actúa sobre el sistema es despreciable durante algún intervalo de tiempo. Si esto no se cumple, no se puede resolver el problema de la forma que se plantea a continuación.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el sistema antes y después del intervalo de tiempo. Incluir ejes de coordenadas e indicar en la gráfica los vectores velocidad inicial y final.
2. Igualar los momentos iniciales con los finales. Es decir, escribir la ecuación $m_1\vec{\boldsymbol{v}}_{1\text{i}} + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_{2\text{i}} = m_1\vec{\boldsymbol{v}}_{1\text{f}} + m_2\vec{\boldsymbol{v}}_{2\text{f}}$ (o $m_1v_{1ix} + m_2v_{2ix} = m_1v_{1fx} + m_2v_{2fx}$).
3. Introducir la información dada en las ecuaciones del paso 2 y despejar las incógnitas.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que se incluyen los signos de las direcciones de las velocidades, ya que tendrán influencia en el resultado final.

Ejemplo 8.1 Mantenimiento espacial

Durante la reparación del telescopio espacial *Hubble*, una astronauta reemplaza dos paneles solares cuyos marcos se han curvado. Al empujar los paneles deteriorados hacia atrás en el espacio exterior, ella experimenta un impulso en sentido opuesto. La masa de la astronauta es 60 kg y la del panel 80 kg. La astronauta y el panel están inicialmente en reposo respecto al telescopio. La astronauta empuja el panel y éste se mueve a 0,3 m/s respecto del telescopio. ¿Cuál es su velocidad posterior respecto al telescopio? (Durante esta operación la astronauta está sujeta con una cuerda a la nave espacial; para nuestro cálculo, suponer que la cuerda permanece floja.)

(NASA.)

PLANTEAMIENTO Consideramos que el sistema está compuesto de la astronauta y el panel, y tomamos la dirección $-x$ como la dirección del movimiento del panel. El momento del sistema se conserva, pues no hay fuerzas externas que actúen sobre él. Como sabemos las masas de la astronauta y del panel, podemos calcular la velocidad de la astronauta utilizando la conservación del momento. Como el momento total del sistema es inicialmente cero, permanecerá igual a cero.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo del sistema antes y después del empujón. Incluir los vectores velocidad (figura 8.1):

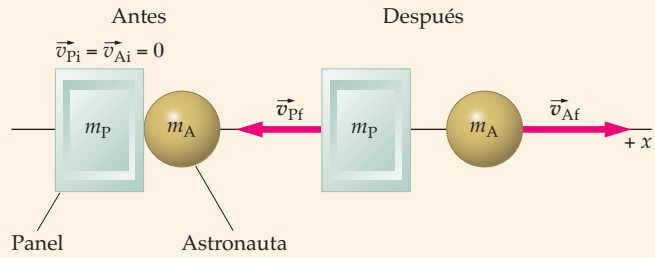


FIGURA 8.1

2. Aplicar la segunda ley de Newton al sistema. Como no hay fuerzas externas, el momento total del sistema permanece constante:

$$\sum_i \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt}$$

$$0 = \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt},$$

por lo tanto, $\vec{P}_{sist} = \text{constante}$

3. Igualar los momentos inicial y final. Aplicar la conservación del momento para determinar la velocidad de la astronauta. Como el momento inicial total es cero, continuará siendo cero durante el proceso:

$$\vec{P}_{sist\,i} = \vec{P}_{sist\,f}$$
$$m_P\vec{v}_{Pi} + m_A\vec{v}_{Ai} = m_P\vec{v}_{Pf} + m_A\vec{v}_{Af}$$
$$0 + 0 = m_P\vec{v}_{Pf} + m_A\vec{v}_{Af}$$

4. Despejar la velocidad de la astronauta:

$$\vec{v}_{Af} = -\frac{m_P}{m_A}\vec{v}_{Pf} = -\frac{80\text{ kg}}{60\text{ kg}}(-0{,}30\text{ m/s})\hat{i} = \boxed{(0{,}40\text{ m/s})\hat{i}}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar que la velocidad de la astronauta vaya en la dirección $+x$, pues la velocidad del panel va en la dirección $-x$. Como la masa de la astronauta es menor que la del panel también es de esperar que que su velocidad sea mayor que la del panel. Nuestros resultados confirman estos razonamientos.

OBSERVACIÓN Aunque el momento se conserva, la energía mecánica de este sistema se incrementa, ya que, al realizar un esfuerzo, la energía química de la astronauta se convierte en energía cinética.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.1 Determinar la energía cinética final del sistema astronauta-panel.

Ejemplo 8.2 El vagón incontrolado

Un vagón de ferrocarril incontrolado de masa 14 000 kg se desplaza horizontalmente a 4 m/s hacia un cambio de agujas. Al pasar cerca de un almacén de grano, 2000 kg de grano caen súbitamente sobre el vagón. ¿Cuánto tiempo tardará el vagón en cubrir la distancia de 500 m que hay desde el almacén hasta el cambio de agujas? Suponer que el grano cae verticalmente y que la desaceleración debida al rozamiento por rodadura y a la resistencia del aire es despreciable.

PLANTEAMIENTO Determinamos el tiempo de recorrido a partir de la distancia al cambio de agujas y la velocidad del vagón. Consideramos como sistema el vagón y el grano caído en él (figura 8.2). Sea $+x$ la dirección del vagón. Como no actúan fuerzas externas horizontales sobre el sistema, la componente horizontal del momento lineal del sistema se conserva. La velocidad final del vagón lleno de grano puede determinarse a partir de su momento final, el cual es igual al momento inicial del vagón. (El grano inicialmente carece de momento lineal horizontal.) Sean m_v y m_g las masas del vagón y del grano, respectivamente.

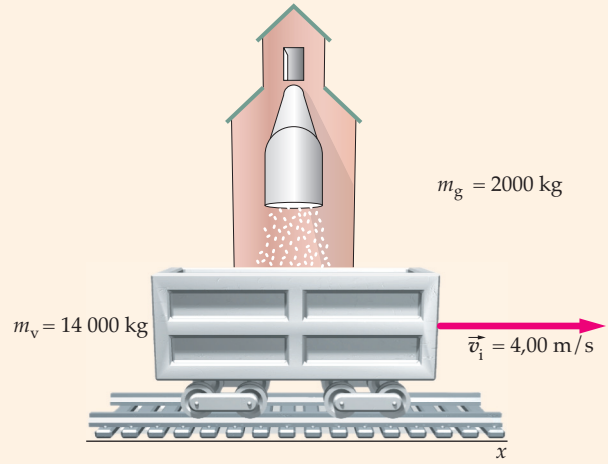


FIGURA 8.2

SOLUCIÓN

1. El tiempo transcurrido desde el almacén hasta el cambio de agujas es la distancia d recorrida dividida por la velocidad v_f del vagón después de que haya caído el grano:
$$d = v_{fx}\,\Delta t$$

2. Dibujar el diagrama de fuerzas del sistema formado por el vagón, el grano que ya está en el vagón y el grano cayendo dentro del vagón (figura 8.3). Incluir los ejes de coordenadas:

3. La suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema grano-vagón es igual al cambio del momento del sistema (ecuación 8.4):
$$\sum \vec{F}_{i\,\text{ext}} = \vec{F}_{\text{g grano}} + \vec{F}_{\text{g vagón}} + \vec{F}_n = \frac{d\vec{P}_{\text{sist}}}{dt}$$

4. Todas las fuerzas son verticales, es decir, no tienen componente x. Tomamos la componente x de cada término del resultado del paso 3. La componente x de la fuerza externa es cero, de forma que $P_{\text{sist}\,x}$ es constante:
$$F_{\text{g grano}x} + F_{\text{g vagón}x} + F_{nx} = \frac{dP_{\text{sist}x}}{dt}$$
$$0 + 0 + 0 = \frac{dP_{\text{sist}x}}{dt}$$
$$\therefore\ P_{\text{sist f}x} = P_{\text{sist i}x}$$

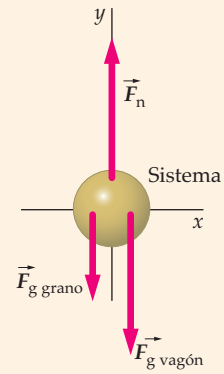


FIGURA 8.3 Las tres fuerzas que actúan sobre el sistema son: la fuerza gravitacional sobre el grano y la vagoneta y la fuerza normal del raíl sobre el vagón.

5. Hacer un esquema del sistema antes y después de la colisión (figura 8.4):

6. Aplicar el principio de conservación del momento para relacionar la velocidad final v_{fx} con la velocidad inicial v_{ix}. ¡Cuidado! Sólo se conserva la componente horizontal del momento del sistema:
$$P_{\text{sist f}x} = P_{\text{sist i}}$$
$$(m_v + m_g)v_{fx} = m_v v_{ix} + m_g(0)$$

7. Despejar v_{fx}:
$$v_{fx} = \frac{m_v}{m_v + m_s} v_{ix}$$

8. Aplicar el valor de v_{fx} del paso 1 y despejar el tiempo:
$$\Delta t = \frac{d}{v_{fx}} = \frac{(m_v + m_s)d}{m_v v_{ix}}$$
$$= \frac{(14\,000\text{ kg} + 2000\text{ kg})(500\text{ m})}{(14\,000\text{ kg})(4{,}00\text{ m/s})}$$
$$= \boxed{1{,}43 \times 10^2\text{ s}}$$

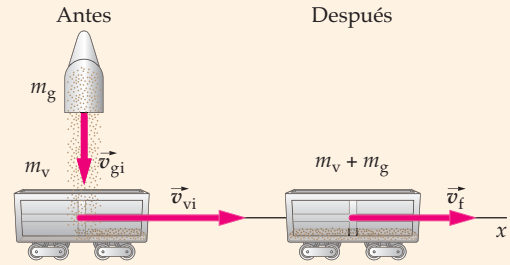


FIGURA 8.4

COMPROBACIÓN La masa del vagón vacío es siete veces mayor que la masa del grano, de forma que no se espera que el grano reduzca mucho la velocidad del vagón. Si el vagón hubiese continuado con la velocidad inicial de 4 m/s, hubiese tardado 125 s en recorrer los 500 m, un poco menos de lo que tardó en realidad, 143 s.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.2 Supongamos que hay un pequeño agujero en el fondo del vagón, de modo que el grano se escapa por él a razón de 10 kg/s. ¿Cuánto tiempo tarda ahora el vagón en cubrir los 500 m?

Ejemplo 8.3 Los ejercicios de la patinadora

Una patinadora de 40 kg está entrenándose con dos pesas de 5 kg sobre una tabla de 3 kg. Partiendo del reposo, lanza los pesos horizontalmente uno tras otro desde su tabla. Después de su lanzamiento, la velocidad de cada peso es de 7 m/s relativa a la patinadora y su tabla. (*a*) ¿Con qué velocidad es impulsada la patinadora en dirección opuesta después de lanzar el primer peso? (*b*) ¿Y tras lanzar el segundo peso? Suponer que la tabla se mueve sin rozamiento.

PLANTEAMIENTO Consideremos el sistema formado por la tabla, la patinadora y los pesos, y sea $-x$ la dirección en la que se lanza el primer peso. Ninguna fuerza externa horizontal actúa sobre el sistema patinadora-pesos-tabla, de modo que la componente horizontal del momento lineal se conserva. Necesitamos determinar la velocidad de la patinadora después del lanzamiento de cada peso (figura 8.5). Podemos utilizar la conservación del momento, donde la masa m de cada peso es 5 kg y la masa M de la tabla más la patinadora es de 43 kg. El suelo es un sistema de referencia inercial.

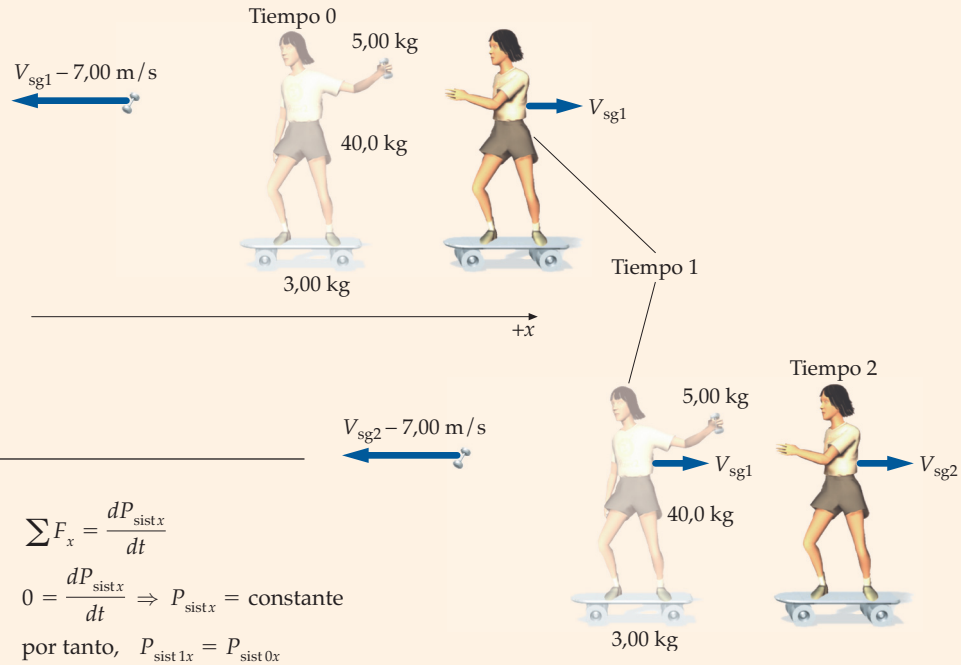


FIGURA 8.5 Los subíndices indican el tiempo. El tiempo 0 corresponde a un instante anterior al lanzamiento del primer peso, el tiempo 1 corresponde a un instante de tiempo comprendido entre el primer y el segundo lanzamiento, y el subíndice 2 indica que la patinadora ya ha lanzado los dos pesos.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Sean V_{sg1x} y V_{ws1x} las componentes x de velocidades respectivas de la patinadora y del primer peso lanzado relativas al suelo. Aplicar la conservación del momento después del lanzamiento del primer peso:

$$\sum F_x = \frac{dP_{sistx}}{dt}$$

$$0 = \frac{dP_{sistx}}{dt} \Rightarrow P_{sistx} = \text{constante}$$

por tanto, $P_{sist\,1x} = P_{sist\,0x}$

$$(M + m)V_{sg1x} + mv_{wg1x} = 0$$

2. La velocidad del peso lanzado relativo al suelo es la velocidad del peso relativa a la tabla más la velocidad de la tabla relativa al suelo:

$$v_{wg1x} = v_{ws\,1x} + V_{sg1x}$$

3. Sustituyendo v_{ws1x} por el resultado del paso 1, se obtiene V_{sg1x}:

$$(M + m)V_{sg1x} + m(v_{ws1x} + V_{sg1x}) = 0$$

por lo tanto, $V_{sg1x} = -\dfrac{m}{M + 2m}v_{ws1x}$

$$= -\frac{5{,}00\text{ kg}}{43{,}0\text{ kg} + 10{,}0\text{ kg}}(-7{,}00\text{ m/s}) = \boxed{0{,}660\text{ m/s}}$$

(*b*) 1. Se repite el paso 1 del apartado (*a*) para el lanzamiento del segundo peso. Sean V_{sg2x} y $v_{w's2x}$ las velocidades respectivas de la patinadora y del segundo peso lanzado relativas al suelo:

$$P_{sist2x} = P_{sist\,1x}$$

$$MV_{sg2x} + mv_{w'g2x} = (M + m)V_{sg1x}$$

2. Se repite el paso 2 del apartado (*a*) para el lanzamiento del segundo peso:

$$v_{w'g2x} = v_{w's2x} + V_{sg2x}$$

3. Sustituyendo en $v_{w'g2x}$ el resultado del paso 1 del apartado (*b*), se obtiene V_{sg2x}:

$$MV_{sg2x} + m(v_{w's2x} + V_{sg2x}) = (M + m)V_{sg1x}$$

por lo tanto, $V_{sg2x} = \dfrac{(M + m)V_{sg1x} - mv_{w's2x}}{M + m} = V_{sg1x} - \dfrac{m}{M + m}v_{w's2x}$

$$= 0{,}660\text{ m/s} - \frac{5{,}00\text{ kg}}{48{,}0\text{ kg}}(-7{,}00\text{ m/s}) = \boxed{1{,}39\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Después del segundo lanzamiento, la masa de la tabla y su carga es de 43 kg, es decir, 5 kg menos que después del primer lanzamiento. Como la masa es menor para el segundo lanzamiento, esperamos que el aumento de la velocidad de la patinadora sea mayor en el segundo lanzamiento que en el primero. Los resultados muestran cómo su velocidad aumenta en 0,66 m/s durante el primer lanzamiento y en 1,39-0,66 m/s = 0,73 m/s durante el segundo lanzamiento, como era de esperar, se trata de un pequeño aumento en el cambio de la velocidad.

OBSERVACIÓN Este ejemplo ilustra el principio del cohete; un cohete se mueve hacia delante lanzando combustible hacia atrás en forma de gases de escape. Conforme la masa del cohete disminuye, su aceleración aumenta, como sucede con la patinadora, que gana más velocidad con el segundo lanzamiento que con el primero.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.3 ¿A qué velocidad se mueve la patinadora si, partiendo del reposo, lanza los dos pesos a la vez, de tal modo que después de lanzados, su velocidad respecto a la patinadora y su tabla es de 7 m/s? ¿Cómo gana más velocidad, lanzándolos a la vez o primero uno y después el otro?

Ejemplo 8.4 Desintegración radiactiva

Un núcleo de torio-227 en reposo se desintegra en un núcleo de radio-223 (masa 223 u) por emisión de una partícula α (masa 4 u) (figura 8.6). La energía cinética de la partícula α resulta ser de 6,00 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del núcleo de radio en retroceso?

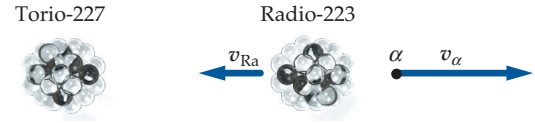


FIGURA 8.6

PLANTEAMIENTO La desintegración de una partícula en dos partículas es como una colisión invertida en el tiempo. Como el núcleo de torio antes de la desintegración está en reposo, su momento lineal total es cero. Podemos relacionar la velocidad del núcleo de radio con la velocidad de la partícula alfa a partir del principio de conservación del momento lineal.

SOLUCIÓN

1. Expresar la energía cinética del núcleo de radio K_{Ra} en función de su masa m_{Ra} y su velocidad v_{Ra}:
$$K_{Ra} = \tfrac{1}{2} m_{Ra} v_{Ra}^2$$

2. Expresar la energía cinética de la partícula α, K_α en función de su masa m_α y su velocidad v_α:
$$K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$

3. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar v_{Ra} con v_α. El núcleo de torio estaba en reposo, entonces el momento del sistema es cero:
$$m_\alpha v_\alpha = m_{Ra} v_{Ra}$$

4. Despejar las velocidades v_{Ra} y v_α de los pasos 1 y 2, y sustituir sus expresiones en el resultado del paso 3:
$$K_{Ra} = \tfrac{1}{2} m_{Ra} v_{Ra}^2 \qquad K_\alpha = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2$$
$$v_{Ra} = \left(\frac{2K_{Ra}}{m_{Ra}}\right)^{1/2} \qquad v_\alpha = \left(\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2}$$
$$\text{luego} \quad m_\alpha \left(\frac{2K_\alpha}{m_\alpha}\right)^{1/2} = m_{ra} \left(\frac{2K_{Ra}}{m_{Ra}}\right)^{1/2}$$

5. Despejar K_{Ra}:
$$K_{Ra} = \frac{m_\alpha}{m_{Ra}} K_\alpha = \frac{4{,}00\ \text{u}}{223\ \text{u}} (6{,}00\ \text{MeV}) = \boxed{0{,}107\ \text{MeV}}$$

COMPROBACIÓN Comprobemos el resultado del paso 5 para varios valores de m_α / m_{Ra}. Si las dos masas son iguales, obtenemos, lógicamente, $K_\alpha = K_{Ra}$. Si $m_\alpha << m_{Ra}$ entonces nuestro resultado da $K_{Ra} << K_\alpha$, lo que significa que la energía cinética de la partícula alfa es mucho mayor que la del núcleo de radio. Así mismo, como era de esperar, la velocidad de la partícula alfa será mucho mayor que la del núcleo de radio.

OBSERVACIÓN En este proceso, la energía en reposo del núcleo de torio se transforma en energía cinética de la partícula alfa y del núcleo de radio. La masa del núcleo de torio es mayor que la de la partícula alfa más la del núcleo de radio en unos $(K_\alpha + K_{Ra})/c^2 = 6{,}1\ \text{MeV}/c^2$.

8.2 ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Aunque el momento lineal total de un sistema de partículas debe ser constante si la fuerza externa resultante sobre el sistema es cero, la energía mecánica total del sistema puede variar. Como vimos en los ejemplos de la sección anterior, las fuerzas internas, que no pueden alterar el momento lineal total, pueden ser fuerzas no-conservativas y, por lo tanto, modificar la energía mecánica total del sistema. Existe un importante teorema que se refiere a la energía cinética de un sistema de partículas que nos permite tratar más fácilmente la energía de sistemas complejos, así como los cambios energéticos dentro de un sistema:

> La energía cinética de un sistema de partículas puede escribirse como la suma de dos términos: (1) la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, donde M es la masa total del sistema; y (2) la energía cinética asociada con el movimiento de las partículas del sistema respecto al centro de masas, $\Sigma\frac{1}{2}m_iu_i^2$, siendo $\vec{u}_i$ la velocidad de la partícula i relativa al centro de masas.

TEOREMA PARA LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

Así,

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + K_{rel} \qquad 8.7$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

donde M es la masa total y K_{rel} es la energía cinética de las partículas *relativa al centro de masas*.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Factorización**

Para demostrar este teorema, recordemos que la energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

donde hemos utilizado que $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$. La velocidad de la partícula i puede escribirse como la suma de la velocidad del centro de masas $\vec{v}_{cm}$ y la velocidad de la partícula relativa al centro de masas $\vec{u}_i$:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{u}_i \qquad 8.8$$

La energía cinética del sistema es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} K &= \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{u}_i) \\ &= \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + u_i^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{u}_i) \end{aligned}$$

que puede escribirse como suma de tres términos:

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \sum_i m_i\vec{u}_i$$

donde en el sumando de la derecha hemos sacado factor común $\vec{v}_{cm}$, ya que es el mismo para todas las partículas, es decir, se refiere al sistema y no a una partícula específica. La magnitud $\Sigma m_i\vec{u}_i$ es el momento lineal del sistema referido al centro de masas. Esta magnitud, que es igual a $M\vec{u}_{cm}$, es necesariamente cero. (Con respecto al centro de masas, la velocidad del centro de masas $\vec{u}_{cm}$ es cero, de modo que el momento lineal total $\Sigma m_i\vec{u}_i$ es también cero.) Por lo tanto,

$$K = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_{cm}^2 + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iu_i^2 = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + K_{rel}$$

que completa la demostración de la ecuación 8.7. Cuando no hay fuerzas externas, $\vec{v}_{cm}$ es constante y la energía cinética asociada con el movimiento global $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ no varía. Sólo la energía cinética relativa puede cambiar en un sistema aislado.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.4

Un carrito A se desliza a 1 m/s en la dirección $+x$ a lo largo de un carril con aire sin rozamiento. Un carrito B idéntico se estaciona delante del carrito A. La masa de cada carrito es de 1 kg y el sistema está constituido por ambos carritos. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética de cada carrito relativa al centro de masas? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética total relativa al centro de masas? (*d*) Los carritos colisionan y quedan pegados. ¿Cuál es ahora la energía cinética relativa al centro de masas?

8.3 COLISIONES

Un coche colisiona frontalmente con otro. Un bate golpea una pelota de béisbol. Un dardo impacta sobre el blanco de una diana. Cada uno de ellos son ejemplos de colisiones en los cuales dos cuerpos se acercan e interaccionan fuertemente durante un breve periodo de tiempo.

Durante el breve tiempo de colisión, cualquier fuerza externa es mucho menor que las fuerzas de interacción entre los objetos. Entonces, los objetos que colisionan pueden ser tratados como sistemas aislados durante la colisión. Por ello, las únicas fuerzas importantes que actúan sobre el sistema formado por los dos objetos son las fuerzas de interacción, que son iguales y opuestas, de modo que el momento lineal total del sistema permanece invariable. Es decir, el momento total del sistema en el instante anterior a la colisión es igual al momento en el instante posterior a la colisión. El tiempo de colisión es, normalmente, tan pequeño que el desplazamiento de los objetos durante el choque puede despreciarse.

Cuando la energía cinética total de los dos objetos es la misma antes y después del choque se trata de un **choque elástico**. Si la energía cinética total no es la misma después del choque, se dice que es un **choque inelástico**. Un caso extremo es el **choque perfectamente inelástico**, en el cual toda la energía cinética relativa al centro de masas se convierte en calor o energía interna del sistema y los dos objetos comparten la misma velocidad, pues quedan unidos después de la colisión. Examinaremos los diferentes tipos de colisiones con mayor detalle en la próxima sección.

IMPULSO Y FUERZA MEDIA

Cuando dos objetos colisionan, se ejercen mutuamente grandes fuerzas durante un breve tiempo. La fuerza ejercida por un bate de béisbol, por ejemplo, puede ser varios miles de veces el peso de la pelota, pero esta enorme fuerza se ejerce solo durante un milisegundo, aproximadamente. Tales fuerzas se denominan *fuerzas impulsivas*. En la figura 8.7 se muestra la variación con el tiempo del módulo de una fuerza típica ejercida por un cuerpo sobre otro durante un choque. Durante la mayor parte del tiempo de colisión, el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$, la fuerza es grande. El resto del tiempo, la fuerza es despreciablemente pequeña. El impulso $\vec{I}$ de la fuerza $\vec{F}$ durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es un vector definido por

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt \qquad 8.9$$

DEFINICIÓN: IMPULSO

El impulso es una medida de la intensidad y de la duración de la fuerza de colisión. La componente x del impulso de una fuerza es el área de la curva F_x frente a t. La unidad del impulso en el SI es N · s.

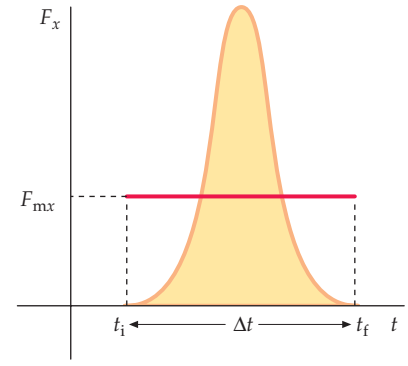


FIGURA 8.7 Variación típica de la fuerza de colisión con el tiempo. El área bajo la curva F_x en función de t es la componente x del impulso, I_x. F_{mx} es la fuerza media en el intervalo de tiempo Δt. El área rectangular $F_{mx}\,\Delta t$ es la misma que la encerrada bajo la curva de F_x en función de t.

Si $\vec{F}_{\text{neta}}$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula, su relación con la variación del momento de esta partícula viene expresada por la segunda ley de Newton, $\vec{F}_{\text{neta}} = d\vec{p}/dt$. Por lo tanto, el impulso de la fuerza neta es igual a la variación total del momento Δp durante el intervalo de tiempo de la colisión:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta}}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

Identificando el lado izquierdo de esta ecuación como el impulso de la fuerza neta, se tiene

$$\vec{I}_{\text{neta}} = \Delta\vec{p} \qquad 8.10$$

TEOREMA IMPULSO: MOMENTO PARA UNA PARTÍCULA

donde $\vec{I}_{\text{neta}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta}}\, dt$ y $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$. La ecuación 8-10 se denomina *teorema del impulso mecánico para una partícula*. Asimismo, el impulso neto debido a fuerzas externas en un sistema se iguala con el cambio del momento total del sistema:

$$\vec{I}_{\text{neta ext}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta ext}}\, dt = \Delta\vec{P}_{\text{sist}} \qquad 8.11$$

TEOREMA IMPULSO: MOMENTO PARA UN SISTEMA

La fuerza media durante el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ viene definida por

$$\vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \frac{1}{\Delta t}\vec{I} \qquad 8.12$$

DEFINICIÓN: FUERZA MEDIA

que puede reescribirse de la forma

$$\vec{I} = \vec{F}_m\, \Delta t \qquad 8.13$$

IMPULSO Y FUERZA MEDIA

La fuerza media es la fuerza constante que produce el mismo impulso que la fuerza real en el intervalo de tiempo Δt, como indica el rectángulo de la figura 8.7. La fuerza media puede calcularse a partir del cambio del momento si se conoce el tiempo de choque. Este tiempo puede estimarse a partir de la distancia recorrida por uno de los objetos durante la colisión.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estimación de la fuerza media

PLANTEAMIENTO Para estimar la fuerza media $\vec{F}_m$ primero estimamos el impulso de la fuerza $\vec{I}$. El impulso de la fuerza es igual (suponiendo que otras fuerzas externas son despreciables) al cambio de momento, que es igual al producto de la masa m por el cambio de velocidad $\vec{v}_f - \vec{v}_i$. Una estimación del cambio de velocidad puede obtenerse a partir del tiempo de colisión Δt y del desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

SOLUCIÓN

1. Calcular (o estimar) el impulso $\vec{I}$ y el tiempo Δt. Para realizar esta estimación debemos suponer que durante la colisión, la fuerza de colisión es muy grande en comparación con otras fuerzas que actúan sobre el

objeto. Este procedimiento es válido *sólo* si se puede determinar el desplazamiento después de la colisión.

2. Dibujar el sistema antes y después de la colisión. Incluir los ejes de coordenadas e indicar en la gráfica las velocidades inicial y final, así como el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ durante la colisión.
3. Calcular el cambio del momento del objeto durante la colisión. El impulso del objeto será igual al cambio de momento ($\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v}$).
4. Utilizar la cinemática para estimar el tiempo de colisión. Esto quiere decir que utilizando $\vec{v}_m \approx \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)$ y $\Delta\vec{r} = \vec{v}_m\,\Delta t$ podemos obtener $\Delta\vec{r} \approx \frac{1}{2}(\vec{v}_i + \vec{v}_f)\,\Delta t$, y luego despejar Δt.
5. Usar $\vec{F}_m = \vec{I}/\Delta t = m\,\Delta\vec{v}/\Delta t$ para calcular la fuerza media (ecuación 8.13).

COMPROBACIÓN La fuerza media es un vector. Los resultados de la fuerza media deberán tener la misma dirección que el cambio de velocidad.

(Robert R. Edwards/ BOB-E.)

Ejemplo 8.5 Una colisión en la práctica del kárate

Con un golpe experto de kárate, un karateca rompe un bloque de hormigón. Su mano tiene una masa de 0,70 kg, se mueve a 5,0 m/s al chocar contra el bloque y se detiene a 6 mm del punto de contacto. (*a*) ¿Qué impulso ejerce el bloque sobre la mano del karateca? (*b*) ¿Cuál es el tiempo de colisión aproximado y la fuerza media que el bloque ejerce sobre la mano?

PLANTEAMIENTO El impulso neto es igual a la variación del momento $\Delta\vec{p}$. Esta variación puede determinarse a partir de la masa y velocidad de la mano. El tiempo de colisión correspondiente al apartado (*b*) puede obtenerse del desplazamiento y de la velocidad media durante la colisión, que puede estimarse de la fórmula cinemática, suponiendo una aceleración constante.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un esquema de la mano y el bloque antes y despúes del golpe. En la figura de antes del golpe la mano está justo en contacto con el bloque. Incluir un eje de coordenadas vertical (figura 8.8):

2. Expresar que el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento:
$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m\,\Delta\vec{v}$$

3. La velocidad inicial $\vec{v}_i$ es la que posee la mano antes de chocar contra el bloque. La velocidad final es cero:
$$\vec{v}_i = -5{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j}$$
$$\vec{v}_f = 0$$

4. Sustituir los resultados del paso 3 en la ecuación del paso 2 para hallar el impulso que ejerce el bloque sobre la mano:
$$\vec{I} = m\,\Delta\vec{v} = (0{,}70\ \text{kg})[0 - (-5{,}0\ \text{m/s}\ \hat{j})]$$
$$= 3{,}5\ \text{kg}\cdot\text{m/s}\ \hat{j} = \boxed{3{,}5\ \text{N}\cdot\text{s}\ \hat{j}}$$

(*b*) 1. El desplazamiento es igual a la velocidad media multiplicada por el tiempo. Estimamos la velocidad media suponiendo que la aceleración es constante. Entonces $v_{my} \approx \frac{1}{2}(v_{iy} + v_{fy})$:
$$\Delta y = v_m\,\Delta t \approx \tfrac{1}{2}(v_{iy} + v_{fy})\,\Delta t$$

2. Como hemos elegido $+y$ como la dirección hacia arriba, tanto Δy como v_{my} son negativas. Calculamos Δt:
$$\Delta t \approx \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}(v_{iy} + v_{fy})} = \frac{-0{,}006\ \text{m}}{-2{,}5\ \text{m/s}} = 0{,}0024\ \text{s} = 2{,}4\ \text{ms}$$

3. A partir de la ecuación 8.12, la fuerza media es el impulso dividido por el tiempo de colisión. Está dirigida hacia arriba, como era de esperar:
$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{3{,}5\ \text{N}\cdot\text{s}\ \hat{j}}{2{,}4\ \text{ms}} = \boxed{1{,}5\ \text{kN}\ \hat{j}}$$

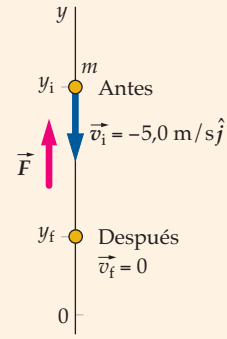


FIGURA 8.8

COMPROBACIÓN La fuerza media sobre la mano va en la dirección $+y$ (hacia arriba). Como era de esperar, esta dirección es la misma que la del cambio de velocidad. (La fuerza media que ejerce el borde de la mano sobre el bloque es igual y opuesta a la fuerza media que ejerce el bloque sobre la mano.)

OBSERVACIÓN La fuerza media es relativamente grande. Si la masa de la mano es aproximadamente de un kilogramo, la fuerza media es unas 150 veces mayor que el peso de la mano. La fuerza media de colisión es mucho mayor que la fuerza gravitacional que actúa sobre la mano durante la colisión.

Ejemplo 8.6 Un coche abollado

Un coche equipado con un maniquí de 80 kg para ensayos de accidentes (figura 8.9), choca contra un muro a 25 m/s. Estimar el desplazamiento del maniquí durante el choque.

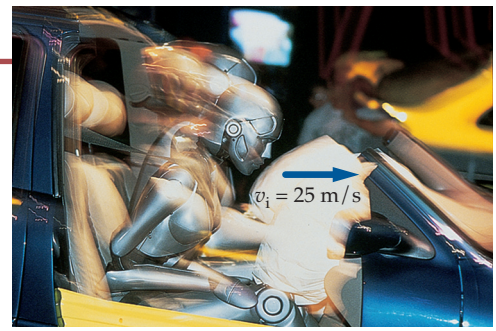


FIGURA 8.9 *(Romilly Lockyer/The Image Bank.)*

PLANTEAMIENTO El compartimento del pasajero de un coche está diseñado para permanecer rígido, mientras que los parachoques frontal y trasero están diseñados para deformarse con el impacto. Suponer que el maniquí está a medio camino entre la parte frontal y posterior del coche, y que la parte frontal se deforma completamente.

SOLUCIÓN

1. La parte frontal del coche es el compartimento del motor, el radiador, la chapa y el parachoques. Estimar la fracción de longitud que ocupa la parte frontal del coche: La parte frontal es, aproximadamente, un 25% de la longitud total del coche.
2. Estimar el desplazamiento del compartimento del pasajero si la parte frontal se deforma completamente: Como la parte frontal colapsa completamente, el desplazamiento del resto del coche, incluyendo el maniquí sería un 25% de la longitud del coche.
3. Estimar la longitud del coche: La longitud de un coche es de unos 4 m.
4. La longitud del desplazamiento es igual a la longitud de la parte frontal: La longitud del desplazamiento es el 25% de la longitud del coche, es decir, aproximadamente $\boxed{1{,}0\text{ m}}$.

COMPROBACIÓN El maniquí estaba a 2 m de la pared en el momento del impacto. Nuestro resultado es la mitad de esa distancia, lo que resulta aceptable.

Ejemplo 8.7 Ensayo de un accidente — *Inténtelo usted mismo*

Para el coche del ejemplo 8.6, estimar la fuerza que el cinturón de seguridad ejerce sobre el maniquí durante el impacto.

PLANTEAMIENTO Para determinar la fuerza, calcularemos el impulso $\vec{I}$ y después lo dividiremos por el tiempo de colisión Δt.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Relacionar la fuerza media con el impulso y, en consecuencia, con el cambio de momento.	$\vec{I} = \vec{F}_m \Delta t = \Delta\vec{p}$
2. Dibujar una figura que muestre el maniquí antes y después del choque (figura 8.10).	
3. Determinar el cambio del momento del maniquí. Elegir el eje $+x$ para la dirección hacia adelante.	$\Delta\vec{p} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = -2000\text{ N}\cdot\text{s}\,\hat{i}$
4. Relacionar el tiempo con el desplazamiento, suponiendo que la aceleración es constante.	$\Delta x = v_m \Delta t$
5. Obtener el desplazamiento del maniquí durante el accidente a partir del paso 4 del ejemplo 8.6.	$\Delta x = 1{,}0\text{ m}$
6. Determinar la velocidad media y usarla conjuntamente con los resultados de los pasos 4 y 5 para calcular el tiempo.	$\vec{v}_m \approx \frac{1}{2}(\vec{v}_f + \vec{v}_i) = 12{,}5\text{ m/s}\,\hat{i}$, por lo tanto $\Delta t = 0{,}080\text{ s} = 80\text{ ms}$
7. Sustituir los resultados de los pasos 3 y 6 en el resultado del paso 1 y determinar la fuerza.	$\vec{F}_m = \boxed{-25\text{ kN}\,\hat{i}}$

FIGURA 8.10

COMPROBACIÓN La fuerza media va en la dirección $+x$, que es opuesta a la dirección de avance del coche. Este resultado era de esperar porque la fuerza debe oponerse a la dirección del maniquí.

OBSERVACIÓN El módulo de la aceleración media es $a_m = \Delta v/\Delta t \approx 300\ \text{m/s}^2$, aproximadamente $32g$. Tal aceleración representa una fuerza neta de unas 32 veces el peso del maniquí, suficiente para provocar daños serios. Una bolsa de aire (airbag) incrementa la distancia de frenado, lo que ayuda a evitar daños. El airbag también permite que la fuerza se distribuya en un área mucho mayor. En la figura 8.11, el gráfico (*a*) muestra la fuerza media ejercida sobre el maniquí en función de la distancia de frenado x. Sin cinturón de seguridad ni airbag, el conductor "volaría" a través del parabrisas o sería detenido en una fracción de un metro por el salpicadero o el volante de dirección. El gráfico (*b*) muestra la fuerza en función de la velocidad inicial para tres distancias de frenado: 2 m, 1,5 m y 1 m.

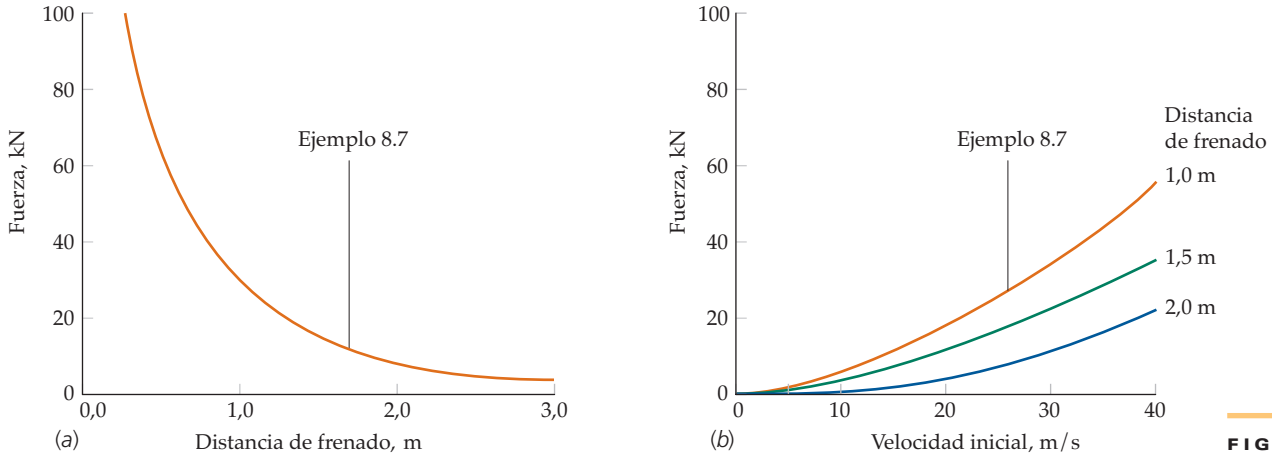


FIGURA 8.11

Ejemplo 8.8 Una pelota de golf

Una persona golpea una pelota con un palo de golf. Estimar (*a*) el impulso $\vec{I}$, (*b*) el tiempo de colisión Δt y (*c*) la fuerza media $\vec{F}_m$. Considerar que la masa de una pelota de golf típica es $m = 45$ g y su radio $r = 2$ cm. En un recorrido típico, el alcance R es de unos 190 m (figura 8.12). La pelota sale formando un ángulo $\theta_0 = 13^\circ$ con la horizontal.

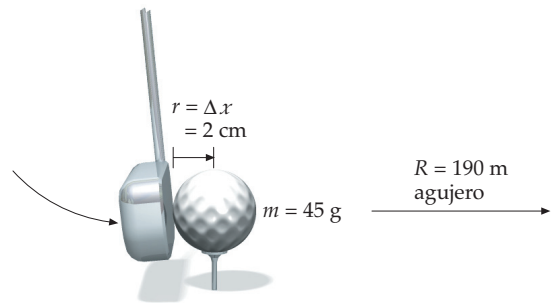


FIGURA 8.12

PLANTEAMIENTO Sea v_0 el módulo de la velocidad de la pelota cuando se separa del palo. El impulso es igual a la variación de su momento lineal, o sea, mv_0 durante la colisión. Estimaremos la velocidad inicial v_0 a partir del alcance. Estimaremos el tiempo de colisión a partir de la distancia recorrida durante el choque Δx y la velocidad media $\frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})$ durante la colisión, suponiendo constante la aceleración. Consideramos $\Delta x = 2$ cm, que es el radio de la bola. La fuerza media se obtiene entonces a partir del impulso $\vec{I}$ y el tiempo de colisión Δt.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Igualar el impulso con la variación del momento de la bola:

$$I_x = F_{mx}\Delta t = \Delta p_x$$

2. Hacer un dibujo donde se muestre la bola antes y después del impacto con el palo (figura 8.13):

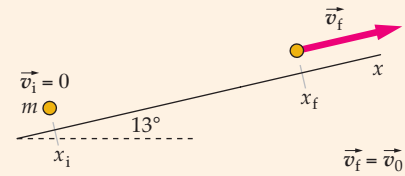


FIGURA 8.13

3. La velocidad v_f inmediatamente después de la colisión está relacionada con el alcance R mediante $R = (v_0^2/g)\operatorname{sen} 2\theta_0$ (ecuación 2.23) donde v_0 es la velocidad después de la colisión v_f:

$$R = \frac{v_f^2}{g}\operatorname{sen} 2\theta_0$$

4. Considerar que $\theta_0 = 13^\circ$ y calcular la velocidad inicial:

$$v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\operatorname{sen} 2\theta_0}} = \sqrt{\frac{(190\ \text{m})(9{,}81\ \text{m/s}^2)}{\operatorname{sen} 26^\circ}} = 65{,}2\ \text{m/s}$$

5. Utilizar este valor de v_0 para calcular el módulo del impulso:

$$I_x = \Delta p_x = m(v_{0x} - 0) = (0{,}045\ \text{kg})(65{,}2\ \text{m/s})$$
$$= 2{,}93\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = \boxed{2{,}90\ \text{N}\cdot\text{s}}$$

(*b*) Calcular el tiempo de colisión Δt considerando $\Delta x = 2{,}0$ cm y $v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx})$:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{mx}} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}(0 + v_0)} = \frac{0{,}020\ \text{m}}{\frac{1}{2}(65{,}2\ \text{m/s})}$$
$$= 6{,}13 \times 10^{-4}\ \text{s} = \boxed{6{,}1 \times 10^{-4}\ \text{s}}$$

(*c*) Mediante los valores calculados de I_x y Δt determinar el módulo de la fuerza media:

$$F_m = F_{mx} = \frac{I_x}{\Delta t} = \frac{2{,}93\ \text{N}\cdot\text{s}}{6{,}13 \times 10^{-4}\ \text{s}} = 4{,}78\ \text{kN} = \boxed{4{,}8\ \text{kN}}$$

COMPROBACIÓN El peso de la bola es mg, que es 0,5 N, aproximadamente. Por tanto, hemos calculado que la fuerza del palo sobre la bola es mucho mayor que el peso de la bola, como era de esperar.

OBSERVACIÓN En este ejemplo, la fuerza de resistencia del aire no se ha tenido en cuenta. En un lanzamiento de golf real la resistencia del aire no es despreciable.

FIGURA 8.14 En las carreras de coches, a menudo los conductores chocan con el coche de delante para "mandarles un recado" —un ejemplo de colisión inelástica. *(Sam Sharpe/The Sharpe Image/Corbis.)*

COLISIONES EN UNA DIMENSIÓN

Las colisiones en las que los cuerpos que colisionan se mueven en línea recta antes, durante y después de la colisión, se denominan colisiones unidimensionales (figura 8.14).

Para movimientos sobre el eje x, v representa el módulo del vector velocidad y v_x representa el vector velocidad. Sin embargo, a partir de ahora, utilizaremos una nueva notación menos específica pero más concisa. Así, cada vez que aparezca v en este capítulo, el lector tendrá que determinar si se trata del vector velocidad o de su módulo, en función del contexto.

Consideremos un cuerpo de masa m_1 que se mueve con una velocidad inicial v_{1i} hacia un segundo cuerpo de masa m_2 que se mueve con una velocidad inicial v_{2i}. Si $v_{2i} < v_{1i}$, los cuerpos chocarán. Sean v_{1f} y v_{2f} las velocidades finales de los cuerpos después del choque. Los dos cuerpos forman un sistema aislado. El principio de conservación de la cantidad de movimiento nos da una relación entre las dos velocidades desconocidas, v_{1f} y v_{2f}:

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad 8.14$$

Para calcular v_{1f} y v_{2f}, es necesaria una segunda ecuación. Esta segunda ecuación, que ahora desarrollaremos, depende del tipo de colisión.

> **¡** El símbolo "v" puede representar, o bien el vector velocidad o bien su módulo.

Colisión perfectamente inelástica en una dimensión En las colisiones perfectamente inelásticas, las partículas tienen la misma velocidad después de la colisión, pues quedan unidas tras el impacto. Una colisión a baja velocidad entre dos vagones, uno parado y otro yendo hacia él, en la que los dos vagones quedan unidos (figura 8.15) es una colisión perfectamente inelástica. En una colisión perfectamente inelástica, las velocidades finales son iguales entre sí e iguales a la velocidad del centro de masas:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{cm}$$

Este resultado combinado con la ecuación 8.14 nos da

$$(m_1 + m_2)v_{cm} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad 8.15$$

Con frecuencia es útil expresar la energía cinética K de una partícula en función de su momento lineal p. Para una masa m que se mueve con velocidad v, tenemos

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m}$$

Como $p = mv$,

$$K = \frac{p^2}{2m} \qquad 8.16$$

FIGURA 8.15 La locomotora choca con el vagón para unirse; un ejemplo de colisión perfectamente inelástica. *(Gentileza de Dick Tinder.)*

Esta expresión puede aplicarse a un choque perfectamente inelástico cuando un objeto está inicialmente en reposo. El momento lineal del sistema es el del objeto incidente:

$$P_{\text{sist}} = p_{1\text{i}} = m_1 v_{1\text{i}}$$

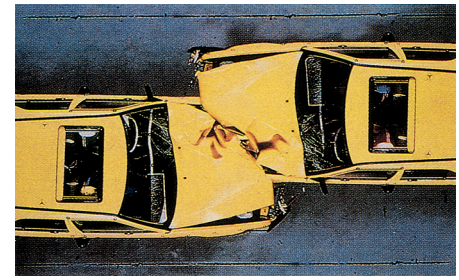
La energía cinética inicial es

$$K_{\text{i}} = \frac{P_{\text{sist}}^2}{2m_1} \qquad 8.17$$

Después del choque, los objetos se mueven unidos como una sola masa $m_1 + m_2$ con velocidad v_{cm}. El momento lineal se conserva, de modo que el momento lineal final es igual a P_{sist}. La energía cinética final es, por lo tanto,

$$K_{\text{f}} = \frac{P_{\text{sist}}^2}{2(m_1 + m_2)} \quad \text{(colisiones perfectamente inelásticas)} \qquad 8.18$$

Comparando las ecuaciones 8.17 y 8.18, vemos que la energía cinética final es menor que la inicial.



(Romilly Lockyer/ The Image Bank.)

Ejemplo 8.9 La captura de un libro durante un paseo espacial

Una astronauta de masa 60 kg da un paseo espacial para reparar un satélite de comunicaciones. De pronto necesita consultar el manual de reparaciones. Un compañero de equipo se lo lanza con una velocidad de 4 m/s relativa al vehículo espacial. Ella se encuentra en reposo relativo respecto al vehículo espacial justo antes de atrapar el libro, de masa 3,0 kg (figura 8.16). Determinar (*a*) la velocidad de la astronauta justo después de atrapar el libro, (*b*) la energía mecánica inicial y final del sistema libro-astronauta y (*c*) el impulso ejercido por el libro sobre la astronauta.

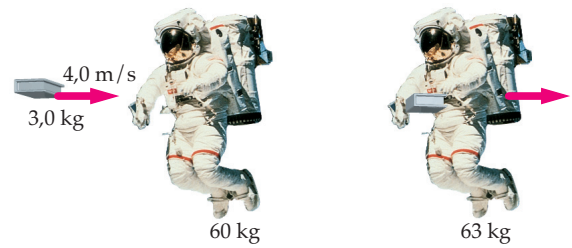


FIGURA 8.16

PLANTEAMIENTO Esta colisión es perfectamente inelástica. Así, después de atrapar el libro, éste y la astronauta se mueven con la misma velocidad. (*a*) Para calcular la velocidad, utilizamos la conservación del momento lineal, expresada por la ecuación 8.15. (*b*) Las energías mecánicas del libro y la astronauta se calculan directamente a partir de sus masas y velocidades. (*c*) El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual al cambio de momento lineal de la astronauta.

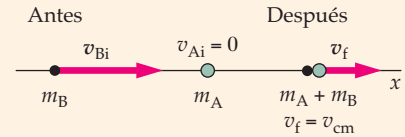


FIGURA 8.17

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Hacer un dibujo (figura 8.17) que muestre los objetos antes y después de la colisión. Sea $+x$ la dirección de lanzamiento:

2. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar la velocidad final del sistema, v_{f}, con las velocidades iniciales:

$$m_{\text{B}} v_{\text{Bi}} + m_{\text{A}} v_{\text{Ai}} = (m_{\text{A}} + m_{\text{B}}) v_{\text{f}}$$

3. Despejar v_{f}:

$$v_{\text{f}} = \frac{m_{\text{B}} v_{\text{B}} + m_{\text{A}} v_{\text{A}}}{m_{\text{B}} + m_{\text{A}}} = \frac{(3{,}0\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s}) + (60\ \text{kg})(0\ \text{m/s})}{3{,}0\ \text{kg} + 60\ \text{kg}}$$

$$= 0{,}190\ \text{m/s} = \boxed{0{,}19\ \text{m/s}}$$

(*b*) 1. Como la astronauta está inicialmente en reposo, la energía mecánica inicial del sistema libro-astronauta es la energía cinética del libro:

$$K_{\text{sist i}} = K_{\text{Bi}} = \tfrac{1}{2} m_{\text{B}} v_{\text{Bi}}^2 = \tfrac{1}{2}(3{,}0\ \text{kg})(4{,}0\ \text{m/s})^2 = \boxed{24\ \text{J}}$$

2. La energía cinética final es la energía cinética del libro y la astronauta moviéndose conjuntamente a v_{f}:

$$K_{\text{sist f}} = \tfrac{1}{2}(m_{\text{B}} + m_{\text{A}}) v_{\text{f}}^2 = 2(63\ \text{kg})(0{,}190\ \text{m/s})^2 = 1{,}14\ \text{J} = \boxed{1{,}1\ \text{J}}$$

(*c*) Igualar el impulso ejercido sobre la astronauta con la variación de su momento lineal:

$$I_{\text{de B sobre A}} = \Delta p_{\text{A}} = m_{\text{A}}\, \Delta v_{\text{A}} = (60\ \text{kg})(0{,}190\ \text{m/s} - 0)$$

$$= 11{,}4\ \text{kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{11\ \text{N} \cdot \text{s}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad final, resultado del paso 3 apartado (*a*), es igual a la velocidad del centro de masas. Antes de la colisión, el sistema libro-astronauta tenía energía cinética asociada al movimiento del centro de masas y energía cinética relativa al centro de masas. Después de la colisión, la energía cinética relativa al centro de masas es cero. Como era de esperar, la energía cinética total del sistema ha decrecido.

OBSERVACIÓN La mayor parte de la energía cinética inicial de este proceso se pierde en forma de calor. El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual y opuesto al ejercido por la astronauta sobre el libro, de tal modo que la variación total del momento lineal del sistema libro-astronauta es cero.

Ejemplo 8.10 El péndulo balístico

En una prueba pública de puntería, una persona dispara una bala sobre un bloque de madera suspendido (figura 8.18), que es un dispositivo llamado péndulo balístico. El bloque, con el proyectil en su seno, oscila como un péndulo hacia arriba. A partir de la altura alcanzada por este péndulo, se informa inmediatamente al público de la velocidad de la bala. ¿A qué velocidad iba la bala?

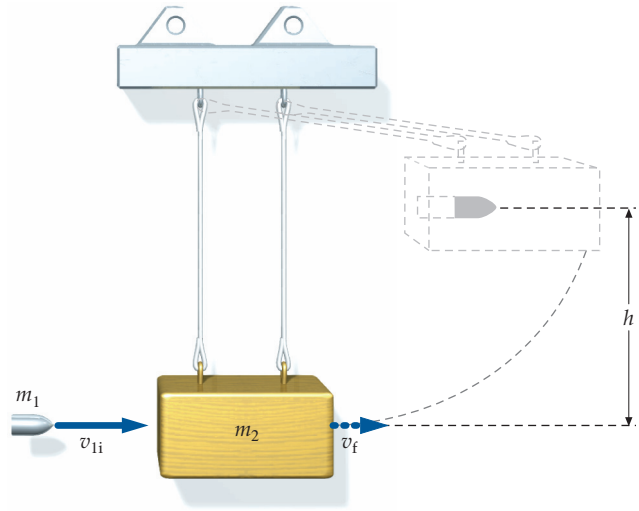


FIGURA 8.18

PLANTEAMIENTO Aunque el bloque se mueva hacia arriba tras la colisión, podemos considerar esta colisión como unidimensional, pues la dirección de la bala y del bloque justo después de la colisión está en la misma dirección que la velocidad inicial de la bala. La velocidad inicial de la bala v_{1i} está relacionada con la velocidad del sistema bala-bloque, v_f, justo después del choque inelástico, por la conservación del momento lineal. La velocidad v_f está relacionada con la altura h por la conservación de la energía mecánica. Sea m_1 la masa de la bala y m_2 la masa del blanco.

SOLUCIÓN

1. Utilizar la conservación de la energía mecánica *después* del choque para determinar v_f en función de la altura máxima h:
$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$
$$v_f = \sqrt{2gh}$$

2. Utilizar la conservación del momento lineal *durante* el choque para determinar v_{1i} en función de v_f:
$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)v_f$$
$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f$$

3. Despejar v_f de la ecuación del paso 1 y sustituirla en el resultado del paso 2 para determinar v_{1i}:
$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} v_f = \boxed{\frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}}$$

COMPROBACIÓN La masa de la bala es mucho menor que la del bloque. Por tanto, es de esperar que la velocidad de la bala sea mucho mayor que la del bloque después de la colisión. El resultado del paso 2 confirma este razonamiento.

OBSERVACIÓN Hemos supuesto que el tiempo de colisión es tan corto que el desplazamiento del bloque durante el choque es despreciable. Esto quiere decir que el bloque adquiere velocidad inmediatamente después de la colisión, cuando aún está en el punto más bajo del arco.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 8.1

¿Puede resolverse este ejemplo igualando la energía cinética inicial de la bala con la energía potencial del sistema compuesto bloque-bala, en su altura máxima? Es decir, ¿se conserva la energía mecánica tanto durante la colisión inelástica como durante el ascenso del péndulo?

Ejemplo 8.11 Colisión con una caja vacía

Inténtelo usted mismo

Repetir el ejemplo 8.10 utilizando una caja vacía como blanco. La bala choca contra el blanco y la atraviesa completamente. Un dispositivo láser indica que la bala emerge con una velocidad igual a la mitad del valor inicial. Con estos datos es posible deducir la altura alcanzada por el blanco. ¿Cuánto vale esta altura?

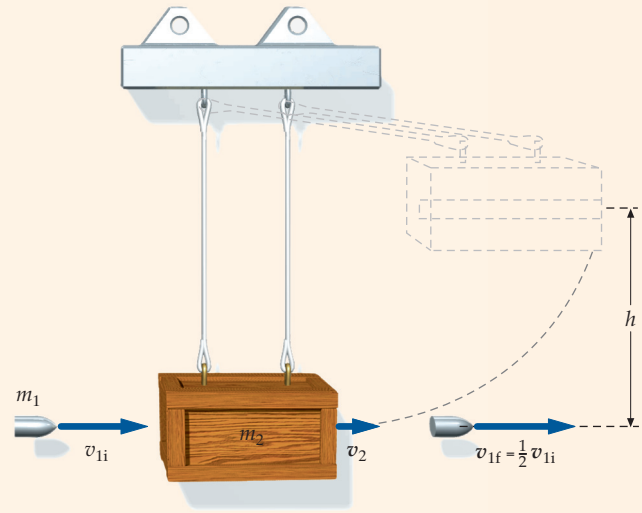


FIGURA 8.19

PLANTEAMIENTO La altura h está relacionada con la velocidad de la caja después del choque, v_2, por el principio de conservación de la energía mecánica (figura 8.19). Esta velocidad puede determinarse mediante el principio de conservación del momento lineal.

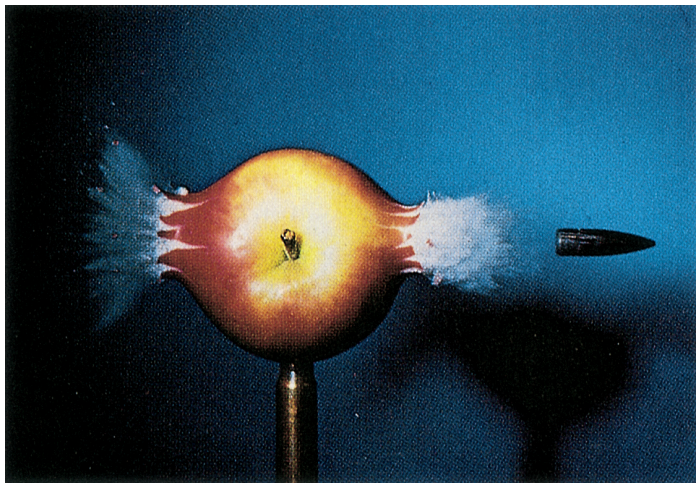
SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Mediante la conservación de la energía mecánica relacionar la altura final h con la velocidad v_2 de la caja después de la colisión.	$m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2$
2. Mediante la conservación del momento expresar una ecuación que relacione v_{1i} con la velocidad post-colisión v_2.	$m_1v_{1i} = m_2v_2 + m_1(\frac{1}{2}v_{1i})$
3. Eliminar v_2 de las dos ecuaciones y despejar h.	$h = \boxed{\dfrac{m_1^2v_{1i}^2}{8m_2^2g}}$

COMPROBACIÓN El cociente v^2/g tiene unidades de m^2/s^2 dividido por m/s^2 que simplificando da m. Así, el resultado del paso 3 tiene las unidades apropiadas.

OBSERVACIÓN El choque entre la bala y la caja es un choque inelástico, pero no un choque perfectamente inelástico porque después de la colisión los dos objetos no van a la misma velocidad. Las colisiones inelásticas también ocurren en sistemas microscópicos. Por ejemplo, cuando un electrón choca contra un átomo, a veces éste se excita pasando a un estado energético interno más elevado. En consecuencia, la energía cinética total del átomo y el electrón es menor después de la colisión.



Una bala a 850 m/s choca inelásticamente con una manzana, la cual instantes más tarde se desintegra completamente. El tiempo de exposición es menor que una millonésima de segundo. *(Estate of Harold E. Edgerton/ Palm Press Inc.)*

Ejemplo 8.12 Colisiones con masilla *Conceptual*

María tiene dos bolas de la misma masa, una bola de masilla y otra de goma. Lanza la bola de masilla contra un bloque suspendido por dos cuerdas como se muestra en la figura 8.20. La bola impacta contra el bloque y cae al suelo. Como consecuencia, el bloque asciende hasta una altura máxima h. Si hubiera lanzado la bola de goma con la misma velocidad, ¿el bloque habría ascendido a una altura mayor que h? La goma, a diferencia de la masilla, es elástica y hubiera rebotado contra el bloque.

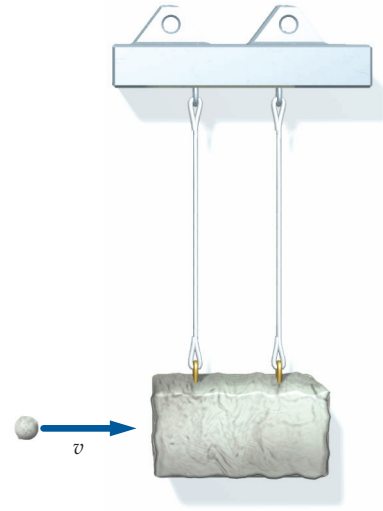


FIGURA 8.20

PLANTEAMIENTO Durante el impacto, el cambio de momento del sistema bola-bloque es cero. Cuanto mayor es el cambio de momento de la bola, mayor será el cambio de momento del bloque. ¿Aumenta más el cambio de momento de la bola si rebota en el bloque que si no lo hace?

SOLUCIÓN

La bola de masilla pierde una fracción importante de su momento inicial. La bola de goma perdería todo el momento inicial para ganar momento en la dirección opuesta. Por tanto, la bola de goma perdería mayor cantidad de momento que la bola de masilla.

El bloque ascendería hasta una mayor altura después de ser impactado con la bola de goma que si hubiese sido impactado por la bola de masilla.

COMPROBACIÓN El bloque ejerce un impulso hacia atrás sobre la bola de masilla hasta hacerla parar. El mismo impulso hace detener la bola de goma, pero además el bloque ejerce un impulso adicional que la hacer retroceder. Así, el bloque ejerce un mayor impulso sobre la bola de goma que sobre la de masilla. Según la tercera ley de Newton, el impulso de la bola sobre el bloque es igual y opuesto al impulso del bloque sobre la bola. Entonces, la bola de goma ejerce un impulso mayor sobre el bloque confiriéndole un mayor cambio de momento.

Colisiones elásticas En las colisiones elásticas, la energía cinética del sistema es la misma antes y después de la colisión. En el mundo macroscópico, las colisiones elásticas son un ideal al cual la realidad puede aproximarse, pero nunca pueden llegar a darse. Si una pelota cae sobre una superficie de cemento y rebota hasta su altura inicial, la colisión entre la bola y el cemento es elástica. Pero esto no se ha observado nunca. A escala microscópica, las colisiones elásticas son más comunes. Por ejemplo, las colisiones entre las moléculas de aire a temperaturas habituales en la superficie terrestre son casi siempre elásticas.

En la figura 8.21 se muestran dos objetos antes y después de que tengan una colisión frontal unidimensional. Dado que el momento se conserva durante la colisión, entonces

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \qquad 8.19$$

La colisión es elástica y, por tanto, la energía cinética es la misma, antes y después de la colisión. Entonces,

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 \qquad 8.20$$

Estas dos ecuaciones son suficientes para determinar las velocidades finales de los dos objetos. Sin embargo, la naturaleza cuadrática de la ecuación 8.20 complica frecuentemente la solución de un problema de colisión elástica. Tales problemas pueden tratarse más fácilmente si expresamos la velocidad relativa de las dos partículas

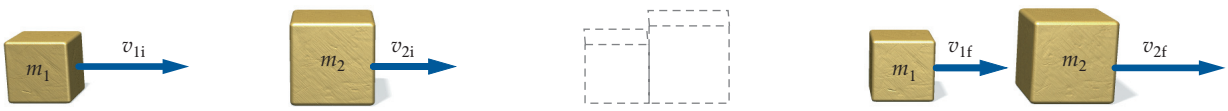


FIGURA 8.21 Aproximación y retroceso de una colisión elástica en una dimensión.

después del choque en función de la velocidad relativa antes del choque. Reajustando la ecuación 8.20, se obtiene

$$m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

Como $(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$ y $(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f})$, tenemos

$$m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) \qquad 8.21$$

De la conservación del momento lineal, ecuación 8.19, podemos escribir

$$m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_{1i} + m_2v_{2i}$$

Reagrupando la ecuación para la conservación del momento (ecuación 8.19), se obtiene

$$m_2(v_{2f} - v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f}) \qquad 8.22$$

Dividiendo ahora la ecuación 8.21 por la 8.22, resulta

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1i} + v_{1f}$$

de modo que

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f} \qquad 8.23$$

VELOCIDADES RELATIVAS EN UNA COLISIÓN ELÁSTICA

donde $v_{1i} - v_{2i}$ es la velocidad de aproximación de las dos partículas antes de la colisión y $v_{2f} - v_{1f}$ es la velocidad de separación después de la colisión (figura 8.22). La ecuación 8.23 establece que

> En las colisiones elásticas, el módulo de la velocidad de retroceso es igual a la velocidad de aproximación.

Normalmente, la resolución de problemas de choque elástico es más simple utilizando la ecuación 8.23 que las ecuaciones 8.19 y 8.20.

> **!** La ecuación 8.23 es válida únicamente si las energías cinéticas inicial y final son iguales, por lo que *sólo* es válida si las colisiones son elásticas.

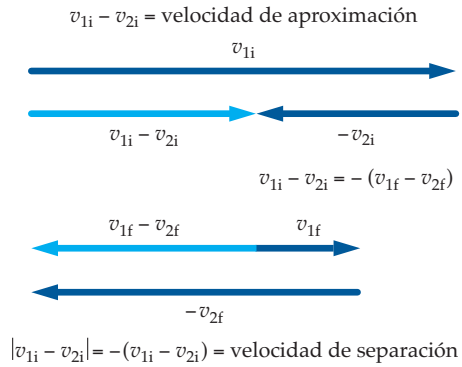


FIGURA 8.22

Ejemplo 8.13 Colisión elástica entre dos bloques

Un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que también se mueve hacia la derecha, pero cuya velocidad es de 3 m/s (figura 8.23). Calcular las velocidades finales.

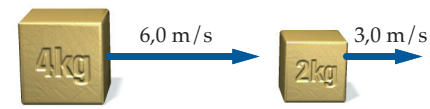


FIGURA 8.23

PLANTEAMIENTO La conservación del momento y la conservación de la energía (expresada como la inversa de las velocidades relativas), nos proporciona dos ecuaciones para las dos velocidades finales desconocidas. El subíndice 1 representa el bloque de 4 kg y el subíndice 2 el bloque de 2 kg.

SOLUCIÓN

1. Aplicar la conservación del momento y simplificar hasta encontrar una ecuación que relacione las dos velocidades finales:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$
$$(4{,}0\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s}) + (2{,}0\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s}) = (4{,}0\text{ kg})v_{1f} + (2{,}0\text{ kg})v_{2f}$$
$$\text{por lo tanto,}\quad 2v_{1f} + v_{2f} = 15\text{ m/s}$$

2. Como se trata de una colisión elástica frontal, podemos aplicar la ecuación 8.23:

$$v_{2f} - v_{1f} = v_{1i} - v_{2i}$$
$$= 6{,}0\text{ m/s} - 3{,}0\text{ m/s} = 3{,}0\text{ m/s}$$

3. Restar el resultado del paso 2 del resultado del paso 1 y despejar v_{1f}:

$$2v_{1f} + v_{1f} = 12\text{ m/s} \quad \text{por lo tanto,} \quad v_{1f} = \boxed{4{,}0\text{ m/s}}$$

4. Sustituir en el resultado del paso 2 y despejar v_{2f}:

$$v_{2f} - 4{,}0\text{ m/s} = 3{,}0\text{ m/s} \quad \text{de donde} \quad v_{2f} = \boxed{7{,}0\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Como comprobación, calculemos las energías cinéticas inicial y final:

$$K_i = \tfrac{1}{2}(4{,}0\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s})^2 = 72\text{ J} + 9{,}0\text{ J} = 81\text{ J}$$
$$K_f = \tfrac{1}{2}(4{,}0\text{ kg})(4{,}0\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(2{,}0\text{ kg})(7{,}0\text{ m/s})^2 = 32\text{ J} + 49\text{ J} = 81\text{ J}$$

Las energías cinéticas pre y post colisión son iguales, como se esperaba.

Ejemplo 8.14 Colisión elástica entre un neutrón y un núcleo

Un neutrón de masa m_n y velocidad v_{ni} choca elásticamente con un núcleo de carbono de masa m_C en reposo (figura 8.24). (*a*) ¿Cuáles son las velocidades finales de ambas partículas? (*b*) ¿Qué fracción *f* de su energía cinética pierde el neutrón?

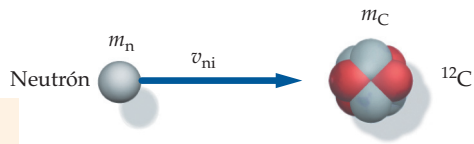


FIGURA 8.24

PLANTEAMIENTO La conservación del momento y conservación de la energía cinética nos permiten determinar las velocidades finales. Como la energía cinética inicial del núcleo de carbono es cero, su energía final es igual a la energía perdida por el neutrón.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La conservación del momento nos ofrece una relación para las velocidades finales:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C v_{Cf}$$

2. Utilizamos la ecuación 8.23:

$$v_{Cf} - v_{nf} = v_{ni} - v_{Ci}$$
$$= v_{ni} - 0$$

por lo tanto, $v_{Cf} = v_{ni} + v_{nf}$

3. Para eliminar v_{Cf}, despejar esta magnitud en el paso 2 y sustituirla en el paso 1:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C(v_{ni} + v_{nf})$$

4. Despejar v_{nf}:

$$v_{nf} = \boxed{-\frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{ni}}$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 2 y despejar v_{Cf}:

$$v_{Cf} = v_{ni} - \frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{ni} = \boxed{\frac{2m_n}{m_n + m_C} v_{ni}}$$

(*b*) 1. La colisión es elástica, por lo que la energía cinética perdida por el neutrón es la energía cinética final del núcleo de carbono:

$$f = \frac{-\Delta K_n}{K_{ni}} = \frac{K_{Cf}}{K_{ni}} = \frac{\frac{1}{2} m_C v_{Cf}^2}{\frac{1}{2} m_n v_{ni}^2} = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{v_{Cf}}{v_{ni}}\right)^2$$

2. Calcular con los resultados del paso 5 del apartado (*a*) el cociente de las velocidades y sustituir en el resultado del paso 1 del apartado (*b*), determinando la pérdida fraccional de energía del neutrón:

$$f = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{2m_n}{m_n + m_C}\right)^2 = \boxed{\frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}}$$

COMPROBACIÓN Obsérvese que el valor de v_{nf} es negativo. El neutrón m_n rebota tras colisionar con el núcleo de carbono de masa m_C. Este resultado es razonable cuando una partícula ligera colisiona con una partícula con gran masa inicialmente en reposo.

OBSERVACIÓN La pérdida de energía fraccional para colisiones frontales depende del cociente de las masas (ver figura 8.25).

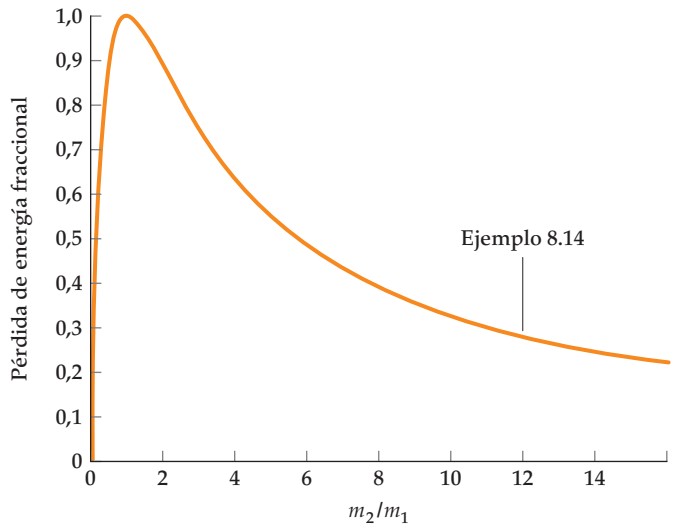


FIGURA 8.25 Pérdida de energía fraccional en función de la relación de las dos masas. La pérdida máxima de energía tiene lugar cuando $m_1 = m_2$.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.5 Considerar una colisión frontal entre dos objetos que se mueven con masas iguales. Utilizar las ecuaciones 8.19 y 8.23 para demostrar que los dos objetos se intercambian las velocidades. Es decir, la velocidad final del objeto 1 es la velocidad inicial del objeto 2 y viceversa.

La velocidad final de la partícula incidente v_{1f} y la de la partícula estacionaria v_{2f} están relacionadas con la velocidad inicial de la partícula incidente por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad 8.24a$$

y

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad 8.24b$$

Esas ecuaciones fueron deducidas en el ejemplo 8.14. Aquí demostramos que dan resultados razonables para valores extremos de las masas. Cuando un objeto muy macizo (por ejemplo, la bola de una bolera) choca con un objeto ligero en reposo (por ejemplo, una pelota de ping-pong), el objeto macizo no se ve afectado esencialmente por el choque. Antes de la colisión, la velocidad relativa de aproximación es v_{1i}. Si el objeto macizo continúa esencialmente con la misma velocidad v_{1i} después del choque, la velocidad del objeto pequeño debe ser $2\,v_{1i}$ para que la velocidad de retroceso sea igual a la velocidad de aproximación. Este resultado se obtiene también de las ecuaciones 8.24*a* y 8.24*b* si tenemos en cuenta que m_2 es mucho menor que m_1, en cuyo caso $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2\,v_{1i}$, como era de esperar.

Coeficiente de restitución En general, un choque es una situación intermedia entre los casos extremos de choque elástico, en el que las velocidades relativas se invierten, y choque perfectamente inelástico, en el que no existe velocidad relativa después del choque. El **coeficiente de restitución** e, que es la medida de la elasticidad de una colisión, se define como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$e = \frac{v_{ret}}{v_{ap}} = \frac{v_{1f} - v_{2f}}{v_{2i} - v_{1i}} \qquad 8.25$$

DEFINICIÓN: COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

En una colisión elástica, $e = 1$; en una colisión perfectamente inelástica, $e = 0$.

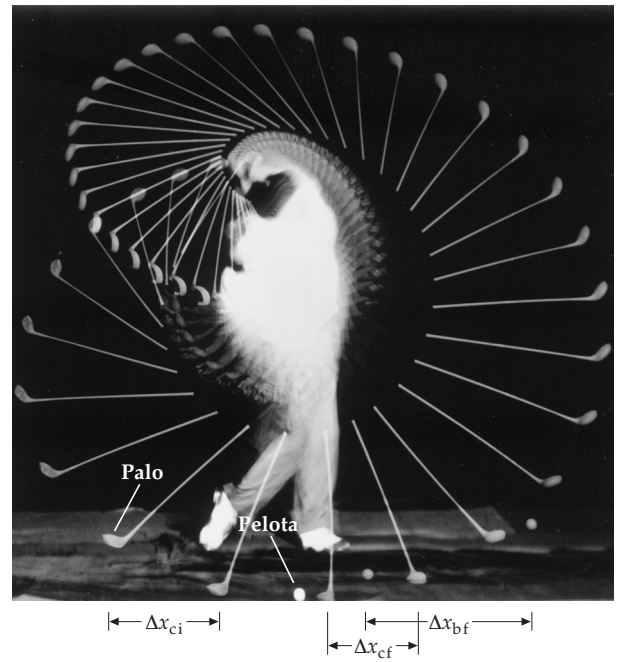


FIGURA 8.26
(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)

PROBLEMA PRÁCTICO 8.6
A partir de la figura 8.26 del palo de golf impactando contra la pelota, estimar el coeficiente de restitución de la interacción pelota-palo de golf.

COLISIONES EN DOS Y TRES DIMENSIONES

En colisiones unidimensionales, las direcciones de los vectores velocidad inicial y final se especifican simplemente mediante un + o un −. Ese no es el caso de las colisiones bi y tridimensionales. En este tipo de colisiones, el momento se conserva en cada una de las direcciones x, y y z.

Colisiones inelásticas En las colisiones de dos o tres dimensiones, el momento inicial total se obtiene sumando los vectores momento inicial de cada objeto implicado en la colisión. Como tras la colisión perfectamente inelástica los objetos tienen la misma velocidad final y el momento se conserva, tenemos $m_{1i}\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$. Por esta relación sabemos que los tres vectores velocidad, y la colisión, están en el mismo plano. También, a partir de la definición de centro de masas sabemos que $\vec{v}_f = \vec{v}_{cm}$.

Ejemplo 8.15 Colisión entre un coche y un camión

Un coche pequeño de 1200 kg circula hacia el este cuando choca en una intersección con un camión de 3000 kg que circula en dirección norte a 40 km/h, como indica la figura 8.27. El coche y el camión se acoplan como un solo cuerpo a consecuencia del choque. El conductor del camión esgrime que el conductor del coche es el culpable de la colisión, ya que iba a una velocidad superior a la permitida. El conductor del coche busca evidencias para desmontar el argumento del camionero. En primer lugar, no hay marcas de frenado, indicando que ninguno de los dos conductores se apercibió de la posibilidad de la colisión y frenó. En segundo lugar, hay una señal que limita la velocidad a 80 km/h. En tercer lugar, el velocímetro del camión después del choque se atrancó y la aguja marcaba 50 km/h. Y en cuarto lugar, los restos del choque se desparramaron en la dirección nordeste con un ángulo superior a 59°. ¿Estas evidencias, dan soporte al argumento de que el conductor del coche no iba a una velocidad superior a la permitida en el momento del choque?

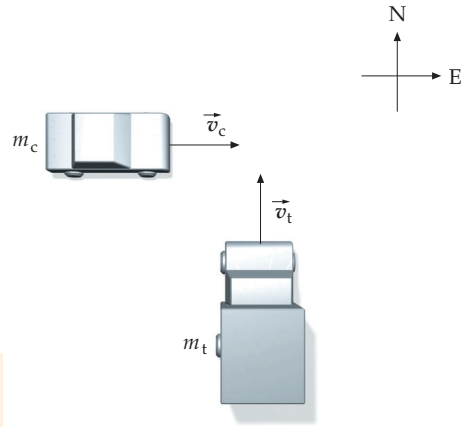


FIGURA 8.27

PLANTEAMIENTO Conocemos las masas de los vehículos y la velocidad del camión en el momento del impacto. Sabemos que la colisión es perfectamente inelástica, por lo que utilizaremos sólo la conservación del momento para determinar la velocidad inicial del coche.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo (figura 8.28) mostrando los dos vehículos justo antes y después de la colisión. Elegimos un sistema de coordenadas tal que inicialmente el coche se desplaza en la dirección $+x$ y el camión en la dirección $+y$:

2. Escribir las ecuaciones de la conservación del momento en forma vectorial en función de las masas y de las velocidades:
$$m_c\vec{v}_c + m_t\vec{v}_t = (m_c + m_t)\vec{v}_f$$

3. Igualar la componente x del momento inicial con la componente x del momento final:
$$m_c v_c + 0 = (m_c + m_t)v_f \cos\theta$$

4. Igualar la componente y del momento inicial con la componente y del momento final:
$$0 + m_t v_t = (m_c + m_t)v_f \operatorname{sen}\theta$$

5. Eliminar v_f dividiendo la ecuación para la componente y por la ecuación para la componente x, obtenidas en los pasos anteriores:
$$\frac{m_t v_t}{m_c v_c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$
$$\text{por lo tanto,}\quad v_c = \frac{m_t v_t}{m_c \operatorname{tg}\theta} = \frac{(3000\text{ kg})(50\text{ km/h})}{(1200\text{ kg})\operatorname{tg}59°} = \boxed{75\text{ km/h}}$$

6. ¿Se sustentan los argumentos del conductor del camión referentes a la velocidad del coche?
La velocidad de 75 km/h es inferior a los 80 km/h permitidos, por lo tanto después de aplicar argumentos de física vemos como el conductor del camión no esgrimía un argumento correcto.

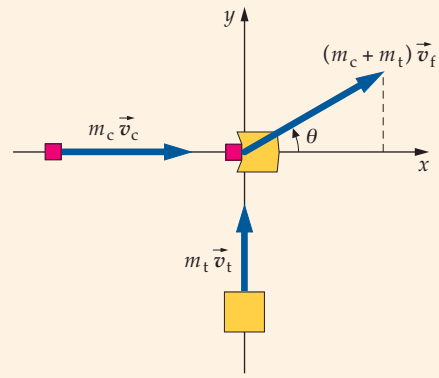


FIGURA 8.28

COMPROBACIÓN La masa del camión es 2,5 veces la masa del coche. Si el coche fuese a 80 km/h, la velocidad del camión sería 5/8 de la del coche y el cociente entre los módulos de los momentos del camión y del coche sería $2{,}5 \times 5/8 = 1{,}56$. Como arctg 1,56 = 57°, que es ligeramente inferior a 59°; el resultado del paso 6 parece ser correcto.

Consideremos ahora una colisión inelástica en tres dimensiones en la cual los objetos no comparten la misma velocidad.

Ejemplo 8.16 Una colisión no frontal

Un objeto de masa m_1 y velocidad inicial 20 m/s colisiona de refilón con un segundo objeto de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo. Después de la colisión, el primer objeto se mueve a 15 m/s con un ángulo de 25° respecto a la dirección inicial. ¿En qué dirección se moverá el segundo objeto?

PLANTEAMIENTO El momento se conserva durante la colisión. Como se trata de una colisión bidimensional, igualamos la suma vectorial de momentos iniciales y finales en cada dirección. (El problema no indica si se trata de una colisión elástica, por lo que supondremos que no lo es.)

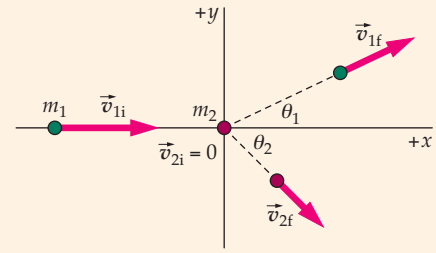


FIGURA 8.29

SOLUCIÓN

1. Dibujar las dos partículas antes y después de la colisión (figura 8.29). Elegimos la dirección $+x$ como la dirección de la velocidad inicial del objeto 1. Incluimos vectores velocidad y sus respectivos nombres:

2. Escribimos las relaciones para la conservación del momento, en forma vectorial y en forma de componentes:

$$m_1\vec{v}_{1i} + 0 = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$
$$\text{o} \quad m_1v_{1ix} = m_1v_{1fx} + m_2v_{2fx}$$
$$m_1v_{1iy} = m_1v_{1fy} + m_2v_{2fy}$$

3. Expresamos las ecuaciones de las componentes de los momentos en función de los módulos de las velocidades y los ángulos:

$$m_1v_{1i} = m_1v_{1f}\cos\theta_1 + m_2v_{2f}\cos\theta_2$$
$$0 = m_1v_{1f}\operatorname{sen}\theta_1 + m_2v_{2f}\operatorname{sen}\theta_2$$

4. Para despejar θ_2 utilizamos $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$. Primero despejamos $\operatorname{sen}\theta_2/\cos\theta_2$ de los resultados del paso 3:

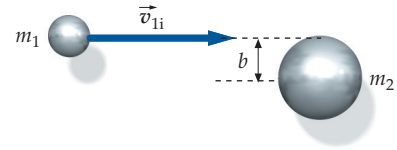
$$m_2v_{2f}\operatorname{sen}\theta_2 = -m_1v_{1f}\operatorname{sen}\theta_1$$
$$m_2v_{2f}\cos\theta_2 = m_1v_{1i} - m_1v_{1f}\cos\theta_1$$
$$\text{por lo tanto,} \quad \frac{m_2v_{2f}\operatorname{sen}\theta_2}{m_2v_{2f}\cos\theta_2} = \frac{-m_1v_{1f}\operatorname{sen}\theta_1}{m_1v_{1i} - m_1v_{1f}\cos\theta_1}$$
$$\text{y} \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-\operatorname{sen}\theta_1}{\dfrac{v_{1i}}{v_{1f}} - \cos\theta_1}$$

5. Sustituimos los valores numéricos y despejamos θ_2:

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-\operatorname{sen}25°}{\dfrac{20}{15} - \cos 25°} = -0{,}990$$
$$\therefore \theta_2 = \boxed{-45°}$$

COMPROBACIÓN En el paso 1 tomamos un eje de coordenadas en que $\theta_1 = +25°$. Es de esperar que θ_2 esté entre 0 y 90°. Nuestro resultado $\theta_2 = -45°$ lo confirma.

OBSERVACIÓN El problema no daba ni m_2 ni v_{2f}, por lo que puede resultar sorprendente que sea posible obtener θ_2. Esto ha sido posible gracias a que los dos vectores momentos iniciales y uno de los finales estaban completamente especificados en el enunciado, de forma que la conservación del momento (paso 2) especifica completamente el otro vector momento final. Una vez que conocemos los cuatro momentos puede calcularse la dirección pedida.



Colisiones elásticas Los choques elásticos en dos y tres dimensiones son más complejos que los estudiados previamente. La figura 8.30 muestra una colisión no frontal entre un objeto de masa m_1 que se mueve con velocidad $\vec{v}_{1i}$ paralelamente al eje x hacia un objeto de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo en el origen. Este tipo de colisiones se denominan colisiones no frontales (en contraposición a las colisiones frontales). La distancia b entre los centros medida perpendicularmente a la dirección de $\vec{v}_{1i}$ se denomina *parámetro de impacto*. Después del choque, el objeto 1 se aleja con velocidad $\vec{v}_{1f}$, formando un ángulo θ_1 con la velocidad inicial, y el objeto 2 se mueve con velocidad $\vec{v}_{2f}$, formando un ángulo θ_2 con $\vec{v}_{1i}$. Las velocidades finales dependen del parámetro de impacto y del tipo de fuerza que ejerce un objeto sobre el otro.

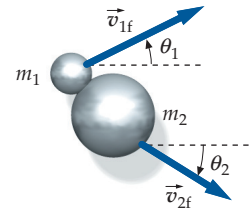


FIGURA 8.30 Choque no frontal. Las velocidades finales dependen del parámetro de impacto b y del tipo de fuerza ejercida por un objeto sobre otro.

La conservación del momento lineal nos da

$$\vec{P}_{\text{sist}} = m_1\vec{v}_{1\text{i}} = m_1\vec{v}_{1\text{f}} + m_2\vec{v}_{2\text{f}} \qquad 8.26$$

En esta ecuación vemos que el vector $\vec{v}_{2\text{f}}$ debe encontrarse en el plano formado por $\vec{v}_{1\text{i}}$ y $\vec{v}_{1\text{f}}$, que a partir de ahora denominaremos plano xy. Suponiendo conocida la velocidad inicial $\vec{v}_{1\text{i}}$, todavía quedan cuatro incógnitas: las componentes x e y de cada velocidad final; o alternativamente, los módulos de las dos velocidades finales y los dos ángulos de desviación. Podemos aplicar la ley de conservación del momento en forma de componentes para obtener dos de las ecuaciones que necesitamos entre esas cantidades:

$$m_1v_{1\text{i}} = m_1v_{1\text{f}}\cos\theta_1 + m_2v_{2\text{f}}\cos\theta_2 \qquad 8.27$$

$$0 = m_1v_{1\text{f}}\operatorname{sen}\theta_1 - m_2v_{2\text{f}}\operatorname{sen}\theta_2 \qquad 8.28$$

Como la colisión es elástica, podemos utilizar la conservación de la energía cinética para encontrar la tercera ecuación:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1\text{i}}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1\text{f}}^2 + m_2v_{2\text{f}}^2 \qquad 8.29$$

Para obtener el valor de las cuatro incógnitas, es necesario una cuarta relación. Esta cuarta relación depende del parámetro de impacto b y del tipo de fuerza de interacción ejercida por los cuerpos entre sí. En la práctica, la cuarta relación se obtiene normalmente midiendo el ángulo de desviación o el ángulo de retroceso. Esta medida puede proporcionarnos información respecto a la fuerza de interacción de los cuerpos.

Considérese el caso especial e interesante de un choque elástico no frontal entre dos objetos de igual masa cuando uno de ellos se encuentra inicialmente en reposo (figura 8.31*a*). Si $\vec{v}_{1\text{i}}$ y $\vec{v}_{1\text{f}}$ son las velocidades inicial y final del objeto 1, respectivamente, y $\vec{v}_{2\text{f}}$ es la velocidad final del objeto 2, la conservación de la cantidad de movimiento nos dice

$$m\vec{v}_{1\text{i}} = m\vec{v}_{1\text{f}} + m\vec{v}_{2\text{f}}$$

o

$$\vec{v}_{1\text{i}} = \vec{v}_{1\text{f}} + \vec{v}_{2\text{f}}$$

Los vectores velocidad final se suman formando el triángulo que se indica en la figura 8.31*b*. La conservación de la energía correspondiente a este choque es

$$\tfrac{1}{2}mv_{1\text{i}}^2 = \tfrac{1}{2}mv_{1\text{f}}^2 + \tfrac{1}{2}mv_{2\text{f}}^2$$

o

$$v_{1\text{i}}^2 = v_{1\text{f}}^2 + v_{2\text{f}}^2 \qquad 8.30$$

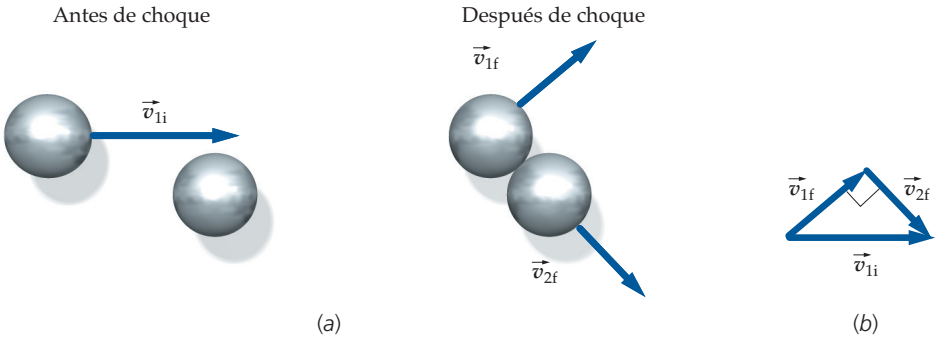
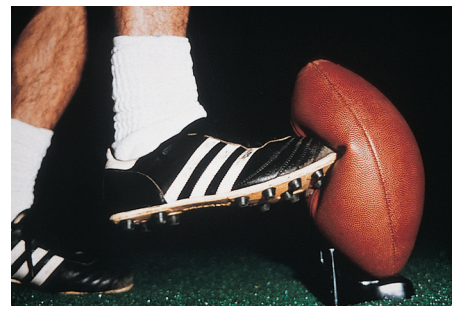
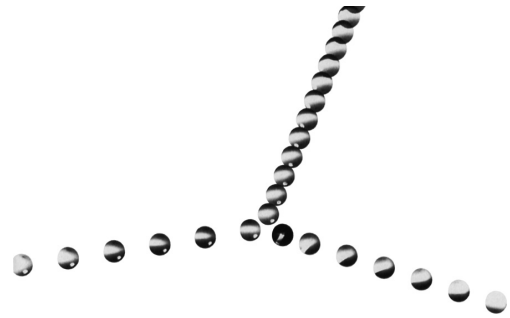


FIGURA 8.31 (*a*) Choque elástico no frontal entre dos esferas de igual masa cuando una de las esferas se encuentra inicialmente en reposo. Después del choque, las esferas se mueven formando entre sí un ángulo recto. (*b*) Los vectores velocidad correspondientes a este choque forman un triángulo rectángulo.



(Joe Strunk/Visuals Unlimited.)

! La relación $v_{1\text{i}} - v_{2\text{i}} = v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}}$ (ecuación 8.23) es muy útil para resolver problemas de colisiones elásticas unidimensionales. No se puede utilizar esta ecuación, ni ninguna forma vectorial de la misma, para colisiones en dos o tres dimensiones.



Fotografías con destellos múltiples de un choque elástico no frontal de dos bolas de masas iguales. La bola con un punto incide desde la izquierda y choca contra la bola con rayas que está inicialmente en reposo. Las velocidades finales de las dos bolas son perpendiculares entre sí. *(Berenice Abbot/Photo Researchers.)*

La ecuación 8.30 es el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo formado por los vectores $\vec{v}_{1f}$, $\vec{v}_{2f}$, y $\vec{v}_{1i}$, siendo $\vec{v}_{1i}$ la hipotenusa del triángulo. Por lo tanto, los vectores velocidad final son perpendiculares entre sí, como indica la figura 8.31*b*.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.7

En una partida amistosa de billar, la bola 1 con velocidad v_0 colisiona de forma no frontal con la bola 2 que está inicialmente quieta. La colisión es elástica y la bola 1 sale formando un ángulo de 30° respecto a la dirección inicial. ¿Cuál es la velocidad de la bola 2? (Ambas bolas tienen la misma masa.)

* 8.4 COLISIONES EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASAS

Como hemos visto, la velocidad del centro de masas permanece invariable cuando la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema es nula, en cualquier sistema de referencia inercial. A veces es conveniente hacer los cálculos en un sistema de referencia alternativo que se mueve con el centro de masas. Entonces, con respecto al sistema de coordenadas original, llamado sistema de referencia de laboratorio, este sistema de coordenadas se mueve con una velocidad constante $\vec{v}_{cm}$ relativa al sistema de referencia de laboratorio. Un sistema de referencia que se mueve a la misma velocidad que el centro de masas recibe el nombre de **sistema de referencia del centro de masas**. Si una partícula tiene la velocidad $\vec{v}$ en el sistema de referencia original, su velocidad relativa al centro de masas es $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_{cm}$. Como el momento total del sistema es igual a la masa total por la velocidad del centro de masas, el momento total también es cero en el sistema de referencia del centro de masas. Por ello, se llama también **sistema de referencia del momento lineal cero**.

El análisis matemático de las colisiones se simplifica enormemente cuando se consideran en el sistema de referencia del centro de masas. Las velocidades de las partículas en el sistema de referencia del centro de masas son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$. Los momentos lineales, $m_1\vec{u}_1$ y $m_2\vec{u}_2$, de los dos objetos incidentes son iguales y opuestos.

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = 0$$

Después de una colisión perfectamente inelástica, los objetos permanecen en reposo. Toda la energía original se pierde en forma de energía térmica. Una colisión perfectamente elástica en una dimensión invierte la velocidad de cada objeto, pero no cambia su módulo. Es decir,

$$\vec{u}_{1i} = -\vec{u}_{1f} \quad \text{y} \quad \vec{u}_{2i} = -\vec{u}_{2f} \quad \text{(colisión unidimensional)}$$

Consideremos, por ejemplo, un sistema simple de dos partículas en un sistema de referencia, en el cual una partícula de masa m_1 se mueve con una velocidad $\vec{v}_1$ y una segunda partícula de masa m_2 se mueve con una velocidad $\vec{v}_2$ (figura 8.32). En este sistema, la velocidad del centro de masas es

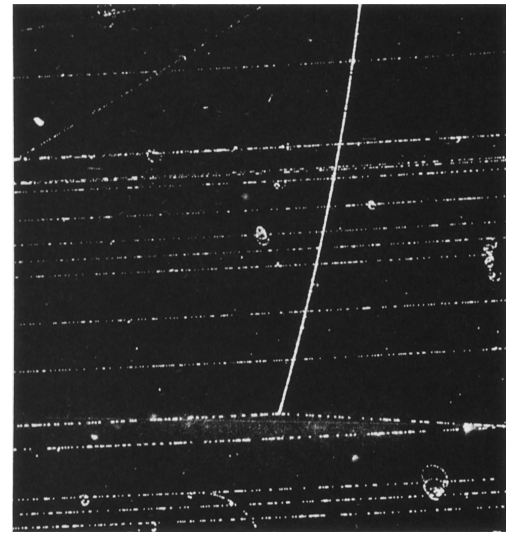
$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Para transformar las velocidades de las dos partículas a sus velocidades en el sistema de referencia del centro de masas, basta restar $\vec{v}_{cm}$. Las velocidades de las partículas en el sistema centro de masas son $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, dadas por

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} \qquad 8.31a$$

y

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{cm} \qquad 8.31b$$



Choque protón-protón en una cámara de burbujas con hidrógeno líquido. El protón incidente entra por la izquierda e interacciona con otro protón estacionario en la cámara. Las dos partículas se mueven formando un ángulo recto después del choque. La ligera curvatura de las trazas se debe a un campo magnético. *(Brookhaven National Laboratory.)*

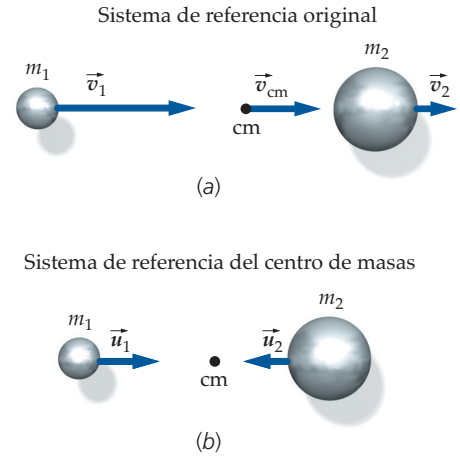


FIGURA 8.32 (*a*) Dos partículas se mueven en un sistema de referencia en el cual el centro de masas tiene una velocidad $\vec{v}_{cm}$. (*b*) Las dos partículas del apartado anterior vistas desde un sistema de referencia para el cual el centro de masas está en reposo.

Ejemplo 8.17 Colisión elástica de dos bloques

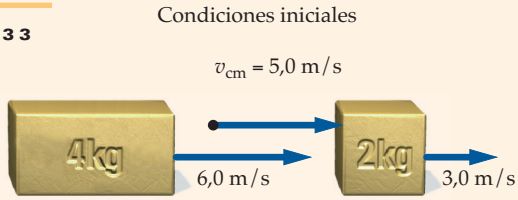
Determinar las velocidades finales de los bloques de la colisión elástica del ejemplo 8.13 (en donde un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha a 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que se mueve también hacia la derecha a 3 m/s) transformando previamente sus velocidades al sistema de referencia del centro de masas.

PLANTEAMIENTO Para pasar al sistema de referencia del centro de masas, determinamos en primer lugar v_{cm} y lo restamos de cada velocidad. Resolvemos a continuación el choque invirtiendo las velocidades y transformando de nuevo al sistema original.

SOLUCIÓN

1. Calcular la velocidad del centro de masas, v_{cm} (figura 8.33):

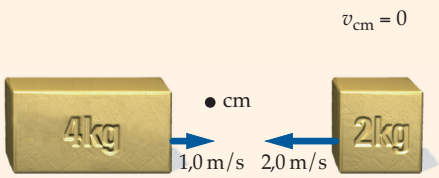
FIGURA 8.33



$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{(4{,}0\text{ kg})(6{,}0\text{ m/s}) + (2{,}0\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s})}{4{,}0\text{ kg} + 2{,}0\text{ kg}}$$
$$= 5{,}0\text{ m/s}$$

2. Transformar las velocidades iniciales al sistema de referencia del centro de masas, restando v_{cm} de las velocidades iniciales (figura 8.34):

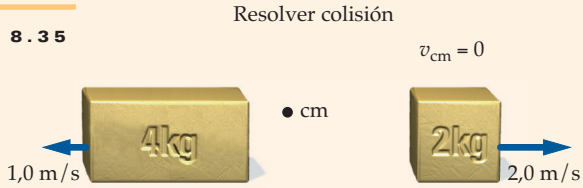
FIGURA 8.34



$$u_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$$
$$= 6{,}0\text{ m/s} - 5{,}0\text{ m/s} = 1{,}0\text{ m/s}$$
$$u_{2i} = v_{2i} - v_{cm}$$
$$= 3{,}0\text{ m/s} - 5{,}0\text{ m/s} = -2{,}0\text{ m/s}$$

3. Resolver la colisión en el sistema de referencia del centro de masas invirtiendo la velocidad de cada objeto (figura 8.35):

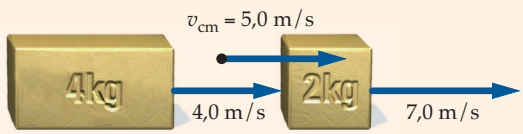
FIGURA 8.35



$$u_{1f} = -u_{1i} = -1{,}0\text{ m/s}$$
$$u_{2f} = -u_{2i} = +2{,}0\text{ m/s}$$

4. Para determinar las velocidades finales en el sistema original, sumar v_{cm} a cada velocidad final (figura 8.36):

FIGURA 8.36



$$v_{1f} = u_{1f} + v_{cm}$$
$$= -1{,}0\text{ m/s} + 5{,}0\text{ m/s} = \boxed{4{,}0\text{ m/s}}$$
$$v_{2f} = u_{2f} + v_{cm}$$
$$= 2{,}0\text{ m/s} + 5{,}0\text{ m/s} = \boxed{7{,}0\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 8.13.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.8 Verificar que el momento lineal total antes y después de la colisión es cero en el sistema de referencia del centro de masas.

8.5 SISTEMAS DE MASA VARIABLE: LA PROPULSIÓN DE LOS COHETES

Un aspecto muy importante y creativo en la resolución de problemas de física consiste en escoger adecuadamente el sistema. En esta sección, exploramos situaciones en que el sistema que consideramos cambia su masa continuamente. Un ejemplo de uno de estos sistemas es un cohete. En este caso se elige el sistema formado por el cohete más el combustible que aún está por usar. Cuando el combustible se utiliza, los gases se expelen fuera de la nave y la masa del sistema disminuye. Otro ejemplo es la arena que cae sobre la base de un reloj de arena (figura 8.37). Elegimos el sistema formado por la arena que en cada momento está sobre la base. La masa del sistema crece conforme la arena de la base continúa acumulándose.

FIGURA 8.37
(Brand-X Planteamientos/PunchStock.)

Sobre Io, una de las lunas de Júpiter, hay un gran volcán. Cuando el volcán se pone en erupción, la velocidad con que fluye el material ha de ser superior a la velocidad de escape de Io. Por consiguiente, un chorro de material se proyecta al espacio. El material colisiona con un asteroide que atraviesa el chorro y queda fijado a él. Consideremos el efecto del impacto de este material sobre el movimiento del asteroide. Para ello necesitamos una ecuación, que es la segunda ley de Newton para sistemas con masa variable.

Supongamos que un flujo de materia continuo que se mueve a velocidad $\vec{u}$ choca con un objeto de masa M que se mueve con velocidad $\vec{v}$ (figura 8.38). La masa de las partículas que chocan con el objeto y se enganchan a él durante el tiempo Δt aumentando su masa es ΔM. Durante este tiempo Δt, la velocidad $\vec{v}$ cambia $\Delta\vec{v}$. Aplicando el teorema impulso-momento a este sistema, se obtiene,

$$\vec{F}_{\text{neta ext}}\,\Delta t = \Delta\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = [(M + \Delta M)(\vec{v} + \Delta\vec{v})] - [M\vec{v} + \Delta M\vec{u}]$$

donde el primer término (en corchetes) es el momento en el tiempo $t + \Delta t$ y el segundo término en corchetes es el momento en el tiempo t. La reorganización de los términos de la ecuación anterior conduce a

$$\vec{F}_{\text{neta ext}}\,\Delta t = M\,\Delta\vec{v} + \Delta M\,(\vec{v} - \vec{u}) + \Delta M\,\Delta\vec{v} \qquad 8.32$$

Dividiendo la ecuación 8.32 por Δt, se llega a

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} = M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta\vec{v}$$

y si se toma el límite cuando $\Delta t \longrightarrow 0$ (que a su vez significa tanto $\Delta M \longrightarrow 0$ como $\Delta\vec{v} \longrightarrow 0$), se obtiene

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{dM}{dt}(0)$$

expresión que reordenando de nuevo, queda

$$\vec{F}_{\text{neta ext}} + \frac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{rel}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad 8.33$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON EN SISTEMAS DE MASA VARIABLE

donde $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{u} - \vec{v}$ es la velocidad del material que impacta relativa al objeto sobre el que impacta. Obsérvese que, excepto para el término $(dM/dt)\vec{v}_{\text{rel}}$, la ecuación 8.33 es precisamente la segunda ley de Newton para un sistema de masa constante.

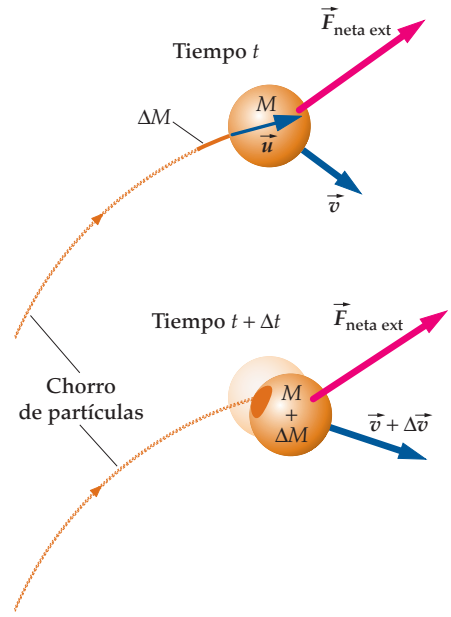


FIGURA 8.38 Un objeto de masa M que se mueve a velocidad $\vec{v}$ experimenta colisiones perfectamente ineslásticas con las partículas de un chorro continuo que se mueven a velocidad $\vec{u}$. Además, hay una fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta ext}}$ que actúa sobre el objeto. El sistema se muestra en el instante t y en el instante $t + \Delta t$.

Ejemplo 8.18 La cuerda que cae

Una cuerda uniforme de masa M y de longitud L se sujeta de manera que su extremo inferior está justo por encima del plato de una balanza. Se suelta la cuerda y ésta empieza a caer. Determinar la fuerza que ejerce la cuerda sobre el plato de la balanza cuando ha caído la mitad de la cuerda.

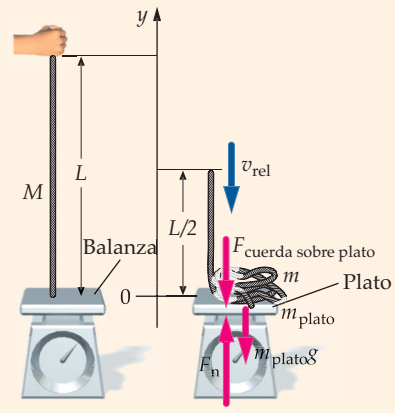


FIGURA 8.39 Una cuerda flexible uniforme de longitud L y masa M cae a partir del reposo sobre el plato de una balanza.

PLANTEAMIENTO Se aplica la ecuación 8.33 a la porción de cuerda que está en la balanza en el instante t y al plato de la balanza. Sobre el sistema se ejercen dos fuerzas externas, la fuerza de la gravedad y la fuerza normal ejercida por la balanza sobre el plato. Las velocidades con las que los diferentes puntos de la cuerda chocan con el plato de la balanza dependen de la altura desde donde caen. La fuerza normal ejercida por la balanza debe cambiar el momento de la cuerda que impacta sobre la balanza y soportar el peso del plato y la porción de cuerda que ya está sobre el plato.

SOLUCIÓN

1. Se dibuja un diagrama de la caída de la cuerda (véase la figura 8.39) junto con un eje de coordenadas. Se incluyen la configuración inicial y la configuración un tiempo arbitrario posterior:

2. Se expresa la ecuación 8.33 en sus componentes. Sea m la masa del sistema (la parte de la cuerda en la balanza). La velocidad del sistema es cero, por lo que $dv_y/dt = 0$:
$$F_{\text{neta ext}\,y} + \frac{dm}{dt}v_{\text{rel}\,y} = m\frac{dv_y}{dt}$$
$$F_n - mg + \frac{dm}{dt}v_{\text{rel}\,y} = 0$$

3. Sea dm la masa de un pequeño segmento de cuerda de longitud $d\ell$ que cae durante el tiempo dt sobre la balanza. La cuerda es uniforme, por lo que la relación entre dm y $d\ell$ es:
$$\frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L}$$

4. Multiplicando ambos términos del paso anterior por $d\ell/dt$ y despejando para dm/dt:
$$\frac{dm}{dt} = \frac{M}{L}\frac{d\ell}{dt}$$

5. $d\ell/dt$ es el módulo de la velocidad del impacto de un segmento, por lo que $v_{\text{rel}\,y} = -d\ell/dt$. ($v_{\text{rel}\,y}$ es negativa, ya que se ha elegido la dirección $+y$ hacia arriba, y la cuerda está cayendo.) Si se sustituye está relación en el resultado del paso 4 se obtiene:
$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M}{L}v_{\text{rel}\,y}$$

6. Sustituyendo el resultado del paso 5 en el paso 2 y despejando F_n, se obtiene:
$$F_n = mg + \frac{M}{L}v_{\text{rel}\,y}^2$$

7. Hasta que un punto de la cuerda toca la balanza, se mueve con aceleración constante $\vec{g}$. Usando $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y\,\Delta y$ (ecuación 2.23) con $\Delta y = -L/2$, se obtiene:
$$v_{\text{rel}\,y}^2 = v_{\text{rel}\,y0}^2 + 2a_y\,\Delta y = 0 + 2(-g)(-L/2) = gL$$

8. Sustituyendo el resultado del paso anterior en el resultado del paso 6 con $m = m_{\text{plato}} + \frac{1}{2}M$, resulta:
$$F_n = \left(m_{\text{plato}} + \frac{M}{2}\right)g + \frac{M}{L}gL = m_{\text{plato}}g + \frac{3}{2}Mg$$

9. La fuerza normal de la balanza sobre el plato es igual al peso del plato más la fuerza que ejerce la cuerda sobre el plato:
$$F_n = m_{\text{plato}}g + F_{\text{cuerda sobre plato}}$$
por tanto, $F_{\text{cuerda sobre plato}} = F_n - m_{\text{plato}}g$

10. Restando $m_{\text{plato}}g$ de ambos lados del resultado del paso 8 y sustituyendo en el resultado del paso 9:
$$F_{\text{cuerda sobre plato}} = \boxed{\frac{3}{2}Mg}$$

COMPROBACIÓN Cuando la mitad de la cuerda ha caído sobre el plato de la balanza, la fuerza que ejerce la cuerda que descansa sobre la balanza es mayor que $\frac{1}{2}Mg$ (el peso de la cuerda sobre el plato en ese instante) como era de esperar. La fuerza que ejerce la cuerda sobre el plato debe ser mayor que $\frac{1}{2}Mg$ debido a que el plato debe soportar el peso de la cuerda y, además, detener el momento del impacto de la cuerda.

PROBLEMA PRÁCTICO 8.9 Determinar la fuerza normal ejercida por el plato de la balanza sobre la cuerda (*a*) justo antes de que el extremo superior de la cuerda alcance el plato de la balanza y, (*b*) justo después de que el extremo superior llegue al plato.

La propulsión de cohetes es un ejemplo interesante de la conservación de la cantidad de movimiento. Ahora vamos a deducir la ecuación del cohete (un caso especial de la ecuación 8.33). La masa del cohete cambia continuamente a medida que el motor quema combustible y expele los gases resultantes. Consideremos un cohete que se mueve en línea recta con una velocidad $\vec{v}$ relativa a la Tierra, tal como se muestra en la figura 8.40. Suponiendo que el combustible se quema a ritmo constante, en el tiempo t la masa del cohete es:

$$M = M_0 - Rt \tag{8.34}$$

donde M_0 es la masa inicial del cohete. Los gases se separan del cohete a una velocidad $\vec{u}_{\text{ext}}$ relativa al cohete, y el ritmo con que el cohete consume combustible coincide con la velocidad con que disminuye su masa M. Elegimos como sistema el cohete y el combustible no utilizado. Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la fuerza de la gravedad. Con $\vec{F}_{\text{neta ext}} = M\vec{g}$ y $dM/dt = -R$, la ecuación 8.33 se convierte en la **ecuación del cohete**:

$$M\vec{g} - R\vec{u}_{\text{ext}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{8.35}$$

ECUACIÓN DE UN COHETE

La magnitud $-R\vec{u}_{\text{ext}}$ es la fuerza ejercida sobre el cohete por el gas que escapa y se denomina **empuje** (o fuerza de impulsión) $\vec{F}_{\text{e}}$:

$$\vec{F}_{\text{e}} = -R\vec{u}_{\text{ext}} = -\left|\frac{dM}{dt}\right|\vec{u}_{\text{ext}} \tag{8.36}$$

DEFINICIÓN: EMPUJE DE UN COHETE

El cohete se mueve hacia arriba, por lo que se elige esta dirección como la positiva del eje y, con lo cual la ecuación 8.35 se expresa como

$$-Mg - Ru_{\text{ex}\,y} = M\frac{dv_y}{dt}$$

en forma de componentes y teniendo en cuenta que $\vec{u}_{\text{ext}}$ va hacia abajo, $u_{\text{ext}\,y} = -u_{\text{ext}}$.

$$-Mg + Ru_{\text{ex}} = M\frac{dv_y}{dt} \tag{8.37}$$

Despejando dv_y/dt (la aceleración), se tiene

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{\text{ex}}}{M} - g$$

donde Ru_{ext}/M es la contribución del empuje a la aceleración y $-g$ es la contribución de la fuerza gravitacional a la aceleración. Sustituyendo M de la ecuación 8.34, se tiene

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{\text{ex}}}{M_0 - Rt} - g \tag{8.38}$$

La ecuación 8.38 se resuelve integrando a los dos lados del signo igual con respecto del tiempo. Para un cohete que inicia su movimiento del reposo en el tiempo $t = 0$, resulta:

$$v_y = \int_0^{t_{\text{f}}}\left(\frac{Ru_{\text{ext}}}{M_0 - Rt} - g\right)dt = u_{\text{ext}}\int_0^{t_{\text{f}}}\frac{dt}{b - t} - \int_0^{t_{\text{f}}} g\,dt = -u_{\text{ext}}\ln\frac{b - t_{\text{f}}}{b} - gt_{\text{f}}$$

donde $b = M_0/R$. Reagrupando y sustituyendo t por t_{f} y M_0/R por b, da

$$v_y = u_{\text{ext}}\ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Rt}\right) - gt \tag{8.39}$$

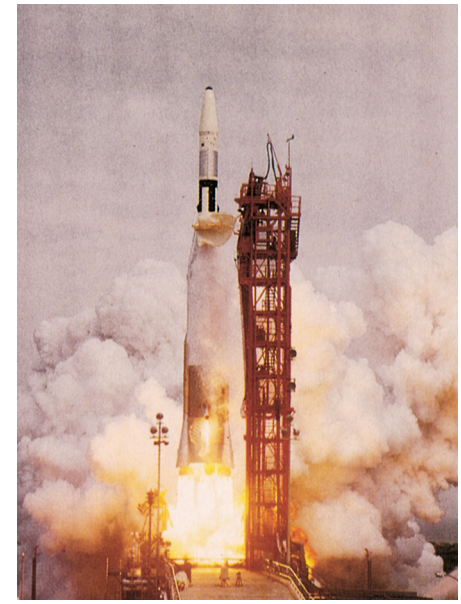


FIGURA 8.40 *(NASA/Superstock.)*

Ejemplo 8.19 Despegue

El cohete *Saturno V*, utilizado en el programa lunar *Apolo*, tenía una masa inicial M_0 de $2{,}85 \times 10^6$ kg, un 73% de combustible, un ritmo de combustión R de $13{,}84 \times 10^3$ kg/s, y una fuerza de impulsión F_e de 34×10^6 N. Determinar (*a*) la velocidad de expulsión de los gases, (*b*) el tiempo de combustión total t_b, (*c*) la aceleración inicial de despegue, (*d*) la aceleración en el tiempo t_b y (*e*) la velocidad final del cohete.

PLANTEAMIENTO (*a*) La velocidad de expulsión de los gases relativa al cohete se obtiene del empuje y del ritmo de combustión. (*b*) Para determinar el tiempo de combustión total, necesitamos conocer la masa total del combustible quemado, que es la masa inicial menos la carga útil. (*c*)y (*d*) La aceleración se determina mediante la ecuación 8.38. (*e*) La velocidad final viene dada por la ecuación 8.39.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular u_{ext} a partir del empuje y de la velocidad de combustión:

$$F_e = \left|\frac{dM}{dt}\right| u_{ext}$$

$$\text{por lo tanto,} \quad u_{ext} = \frac{F_e}{|dM/dt|} = \frac{34{,}0 \times 10^6\ \text{N}}{13{,}84 \times 10^3\ \text{kg/s}} = \boxed{2{,}46\ \text{km/s}}$$

(*b*) 1. Calcular la masa final M_b del cohete:

$$M_b = 0{,}270 M_0 = 7{,}70 \times 10^5\ \text{kg}$$

2. La masa de combustible es igual a la velocidad de combustión por el tiempo de combustión:

$$M_{fuel} = Rt_b$$

$$\text{luego,} \quad t_b = \frac{M_{fuel}}{R} = \frac{M_0 - M_b}{R} = \boxed{150\ \text{s}}$$

(*c*) Calcular dv_y/dt en $t = 0$ utilizando la ecuación 8.38:

Inicialmente,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{u_{ext}}{M_0}\left|\frac{dM}{dt}\right| - g = \frac{2{,}46\ \text{km/s}}{2{,}85 \times 10^6\ \text{kg}}(13{,}84 \times 10^3\ \text{kg/s}) - 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

$$= \boxed{2{,}14\ \text{m/s}^2}$$

(*d*) Calcular dv_y/dt para $t = t_b$ utilizando la ecuación 8.38:

Finalmente,

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{u_{ext}}{M_b}\left|\frac{dM}{dt}\right| - g = \frac{2{,}46\ \text{km/s}}{7{,}70 \times 10^5\ \text{kg}}(13{,}84 \times 10^3\ \text{kg/s}) - 9{,}81\ \text{m/s}^2$$

$$= \boxed{34{,}3\ \text{m/s}^2}$$

(*e*) Calcular la velocidad para $t = t_b$ a partir de la ecuación 8.39:

$$v_y = u_{ext} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Rt}\right) - gt = \boxed{1{,}75\ \text{km/s}}$$

COMPROBACIÓN En el momento de combustión total, la masa que se acelera es el 73% menor que la masa que se acelera en el instante del despegue. Por tanto, es de esperar que la aceleración en el instante de la combustión total sea mayor que la aceleración en el instante del despegue. Esto concuerda con los resultados de los apartados (*c*) y (*d*).

OBSERVACIÓN (1) La aceleración inicial es pequeña: sólo 0,21 g. Cuando ha transcurrido el tiempo de combustión total, la aceleración del cohete ha crecido a 3,5*g*. Inmediatamente después de que se acabe el combustible, la aceleración es $-g$. La velocidad del cohete entonces, después de dos minutos y medio de combustión, es aproximadamente 6300 km/h. (2) En los cálculos de los apartados (*d*) y (*e*) se supone que el cohete se movía verticalmente hacia arriba y que g no varía con la altura. En realidad, el cohete se movía inicialmente hacia arriba, pero luego giró gradualmente hacia el este.

Motores de detonación por pulsos: más rápidos (y más fuertes)

Los motores de propulsión de cohetes de combustible líquido necesitan bombas que son muy delicadas y caras para comprimir el combustible a altas presiones en la cámara de combustión. La mayoría de los motores de propulsión son motores de turbina de gas, que tienen muchas partes móviles con tolerancias limitadas y grandes costes de mantenimiento. Los ingenieros aeronáuticos prefieren un motor con mayor eficiencia, menos partes móviles y mayor capacidad de operar con amplio rango de velocidades.

Los *motores de detonación por pulso* (PDE) pueden satisfacer estas necesidades. Los PDE funcionan mediante *detonación* en lugar de *deflagración*.

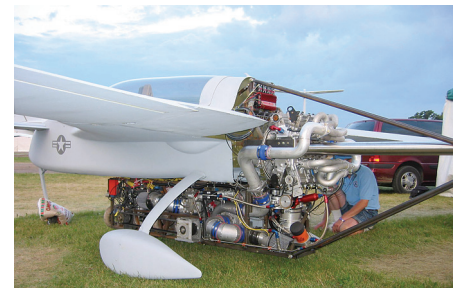
La detonación y la deflagración son tipos de combustión. La combustión por deflagración se propaga más lentamente que la velocidad del sonido calentando el aire que hay alrededor. Los fuegos artificiales, los motores de automóviles y las barbacoas de carbón vegetal son ejemplos de deflagraciones. Las detonaciones se propagan más rápido que la velocidad del sonido (a veces mucho más rápido) mediante una onda de choque que comprime y enciende el aire. Los explosivos que se utilizan en las minas y en las demoliciones experimentan detonación; algunos motores de coches con una mala puesta a punto también pueden tener detonaciones internas.

En un PDE, el tubo de detonación está cerrado por un extremo y abierto por el otro para la expulsión. El aire y el combustible acceden al extremo cerrado y son encendidos por una chispa. Esto inicia la deflagración. Conforme la deflagración se desplaza[1] por el tubo de detonación, se comprime rápidamente iniciándose así la detonación. Cuando la detonación se ha iniciado se propaga mucho más rápido que el sonido, llegándose a detectar en el laboratorio frentes de detonación de hasta Mach 5.[2] Los gases expulsados salen rápidamente por el extremo abierto del tubo. Como los gases expulsados tienen una velocidad tan elevada, su momento es mucho mayor que si hubiesen sido expulsados como fruto de la deflagración. Esto proporciona un empuje mayor a los cohetes con la misma cantidad de combustible. La detonación da el doble de impulso que la deflagración, utilizando el mismo combustible y el mismo cohete.[3]

Las únicas partes móviles de los PDE son las válvulas de admisión de la mezcla aire/combustible. La ignición se puede realizar mediante una bujía de automóvil y el resto del motor es sólo el tubo de detonación. Parece muy simple, a primera vista, pero la combustión es un proceso muy complejo, y en un PDE es además muy rápida. Para propulsar un cohete, los PDE necesitan de muchas detonaciones por segundo, al igual que los motores de explosión de los automóviles. Los PDE suelen producir unas 80 detonaciones por segundo durante varios minutos y horas, pero pueden llegar a alcanzar cientos de detonaciones por segundo.[4]

Pero las detonaciones son procesos muy violentos. Son extremadamente fuertes y causan vibraciones en los motores que pueden causar daños en los cohetes.[5] El ruido que producen los PDE no es recomendable para vehículos con pilotos o pasajeros humanos. Finalmente, para contener las detonaciones se utilizan tubos muy pesados, de un material que ha de ser muy fuerte pero a la vez ligero.

A principios del 2006 ningún avión volaba con PDE, pero la idea de motores de bajo coste, capaces de generar un amplio abanico de impulsos de diferentes intensidades y una mayor eficiencia hace que los PDE se sigan teniendo en cuenta.



Motor experimental de detonación por pulso en Rutan Vari-Eze. *(Tim Anderson.)*

[1] Paxson, D. E., Rosenthal, B. N., Sgondea, A., and Wilson, J.,"Parametric Investigation of Thrust Augmentation by Ejectors on a Pulsed Detonation Tube" Paper presented at the 41st Joint Propulsion Conference, 2005, Tuscon, AZ.

[2] Borisov, A.A., Frolov, S.M., Netzer, D. W., and Roy, G. D., "Pulse Detonation Propulsion: Challenges, Current Status, and Future Perspective." *Progress in Energy and Combustion Science* 30 (2004) 545-672.

[3] "Detonation Initiation and Impulse Measurement." Explosion Dynamics Laboratory: Pulse Detonation Engines, http://www.galcit.caltech.edu/EDL/projects/pde/pde.html May, 2006.

[4] Kandebo, Stanley W., "Taking the Pulse." *Aviation Week and Space Technology*, 160:10 Mar. 8, 2004, 32-33.

[5] Borisov et al. op. cit.

Resumen

La conservación del momento lineal en un sistema aislado es una ley fundamental de la naturaleza con aplicaciones en todas las áreas de la física.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Momento lineal		
Definición para una partícula	$\vec{p} = m\vec{v}$	**8.1**
Energía cinética de una partícula	$K = \dfrac{p^2}{2m}$	**8.16**
Momento de un sistema de partículas	$\vec{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{cm}}$	**8.3**
Segunda ley de Newton para sistemas	$\vec{F}_{\text{neta ext}} = \dfrac{d\vec{P}_{\text{sist}}}{dt}$	**8.4**
Ley de conservación del momento	Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema se conserva.	
2. Energía de un sistema		
Energía cinética	La energía cinética asociada al movimiento de las partículas de un sistema relativo al centro de masas es $K_{\text{rel}} = \Sigma\frac{1}{2}m_iu_i^2$, donde u_i es la velocidad de la partícula i relativa al centro de masas: $K = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + K_{\text{rel}}$	**8.7**
3. Colisiones		
Impulso	El impulso de una fuerza se define como la integral de la fuerza extendida al intervalo de tiempo durante el cual actúa. $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\,dt$	**8.9**
Teorema impulso-momento	$\vec{I}_{\text{neta}} = \int_{t_i}^{t_f}\vec{F}_{\text{neta}}dt = \Delta\vec{p}$	**8.10**
Fuerza media	$\vec{F}_{\text{m}} = \dfrac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f}\vec{F}\,dt = \dfrac{\vec{I}}{\Delta t}$ (por tanto, $\vec{I} = \vec{F}_{\text{m}}\,\Delta t$)	**8.13**
Colisiones elásticas	Se dice que un choque es elástico cuando la suma de las energías cinéticas de los dos objetos es la misma antes y después de la colisión.	
Velocidades relativas de aproximación y retroceso	En un choque elástico, la velocidad relativa de alejamiento de los cuerpos después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del choque: $v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}} = v_{1\text{i}} - v_{2\text{i}}$	**8.23**
Colisiones perfectamente inelásticas	En una colisión perfectamente inelástica, los cuerpos que chocan se acoplan y se mueven con la velocidad del centro de masas.	
*Coeficiente de restitución	El coeficiente de restitución e mide la elasticidad de un choque, y se define como el coeficiente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación: $e = \dfrac{v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}}}{v_{1\text{i}} - v_{2\text{i}}}$ Para un choque elástico, $e = 1$; para un choque perfectamente inelástico, $e = 0$.	**8.25**
* **4. Sistemas de masa variable**		
Segunda ley de Newton	$\vec{F}_{\text{neta ext}} + \dfrac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{rel}} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ donde $R = \lvert dM/dt\rvert$ es el ritmo de combustión.	**8.33**
Ecuación del cohete	$M\vec{g} - R\vec{u}_{\text{ext}} = M\dfrac{d\vec{v}}{dt}$	**8.35**
Empuje	$\vec{F}_{\text{e}} = -R\vec{u}_{\text{ext}} = -\left\lvert\dfrac{dM}{dt}\right\rvert\vec{u}_{\text{ext}}$	**8.36**

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

8.1 No

Respuestas a los problemas prácticos

8.1 8,4 J

8.2 140 s. El grano que escapa no transmite momento lineal alguno al resto del sistema. Si el suelo careciese de rozamiento y fuera plano, todo el grano inicialmente en el vagón llegaría al cambio de agujas al mismo tiempo que el vagón.

8.3 1,32 m/s. Ella gana más velocidad lanzándolos secuencialmente que simultáneamente.

8.4 (*a*) $v_{cm} = 0{,}50\ \text{m/s}$, $v_A = +0{,}50\ \text{m/s}$, y $v_B = -0{,}50\ \text{m/s}$,
(*b*) $K_{A\,rel} = K_{B\,rel} = 0{,}125\ \text{J}$,
(*c*) $K_{rel} = 0{,}25\ \text{J}$, (*d*) $K_{rel} = 0$

8.5 La conservación del momento implica $v_{1i} + v_{2i} = v_{1f} + v_{2f}$, las colisiones elásticas cumplen $v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$. Conjuntamente, $v_{2f} = v_{1i}$ y $v_{1f} = v_{2i}$.

8.6 0,73

8.7 $\frac{1}{2}v_0$

8.8 Antes: $P_{sist\,i} = (4{,}0\ \text{kg})(1{,}0\ \text{m/s}) + (2{,}0\ \text{kg})(-2{,}0\ \text{m/s}) = 0{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$
Después: $P_{sist\,f} = (4{,}0\ \text{kg})(-1{,}0\ \text{m/s}) + (2{,}0\ \text{kg})(2{,}0\ \text{m/s}) = 0{,}0\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$

8.9 (*a*) $3Mg$, (*b*) Mg

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Demostrar que si dos partículas tienen la misma energía cinética, los módulos de sus momentos son iguales sólo si tienen la misma masa. SSM

2 • Una partícula A tiene el doble de momento y cuatro veces más energía cinética que una partícula B. ¿Cuál es el cociente entre las masas de la partícula A y de la B? Explicar la respuesta.

3 • Utilizando el SI de unidades, demostrar que al dividir las unidades del cuadrado del momento por las unidades de masa se obtienen joules.

4 • Verdadero o falso:

(*a*) El momento lineal total de un sistema se conserva incluso cuando la energía mecánica no lo hace.
(*b*) Para que se conserve el momento lineal total de un sistema, no debe haber fuerzas externas actuando sobre el sistema.
(*c*) La velocidad del centro de masas de un sistema cambia sólo cuando actúa una fuerza externa neta sobre el sistema.

5 • Si se dispara una bala hacia el oeste, explicar cómo la conservación del momento lineal permite predecir qué el rifle retrocederá en dirección este. ¿Se conserva aquí la energía cinética?

6 • Una muchacha salta de un bote al muelle. ¿Por qué debe saltar con más energía de la que necesitaría si saltase la misma distancia de un muelle a otro?

7 •• Una gran parte de la investigación pionera sobre el movimiento de cohetes fue realizada por Robert Goddard, profesor de física en el Clark College de Worcester, Massachusetts. Un editorial de *New York Times*, publicado en 1920, ilustra la opinión pública de su trabajo: "El profesor Goddard con su cátedra en el Clark College y el apoyo de la Institución Smithsoniana desconoce la relación entre acción y reacción y la necesidad de tener algo mejor que el vacío frente a lo cual reaccionar —es decir, su idea es absurda. Naturalmente parece desconocer las enseñanzas impartidas diariamente en los centros de enseñanza media"*. La creencia de que un cohete necesitaba algún medio sobre el cual empujar, era un concepto erróneo predominante antes de que los cohetes en el espacio fueran algo común. Explicar por qué dicha creencia era errónea. SSM

* En la página 43 de la edición del 17 de julio de 1969 del *New York Times* se escribió una "corrección" al editorial de 1920. En dicha corrección, que se publicó 3 días antes de que el hombre pisara la Luna por primera vez, se decía que "ahora está totalmente demostrado que un cohete puede funcionar tanto en el vacío como en la atmósfera. *The Times* pide disculpas por su error".

8 • Dos bolas idénticas de una bolera se mueven con igual velocidad, pero una de ellas se desliza hacia abajo por la pista sin rodar, mientras la otra está rodando. ¿Cuál de las dos bolas tiene más energía cinética?

9 • Un filósofo dice: "Todo movimiento es imposible. Las fuerzas siempre actúan en pares iguales acción-reacción y, por lo tanto, se anulan. Como las fuerzas se cancelan, el momento de los objetos no puede cambiar." Responda a su argumento.

10 • Si dos objetos chocan estando uno de ellos inicialmente en reposo, ¿es posible que ambos queden quietos después del choque? (Supóngase que cualquier fuerza externa que actúe sobre el sistema de los dos objetos es muy pequeña, es decir, despreciable.) ¿Es posible que uno de los dos se quede parado? Explíquelo.

11 • Muchos investigadores en docencia de la física afirman que los errores conceptuales que tienen los estudiantes se deben, en parte, a los efectos especiales de los cómics y de las películas. A partir de la conservación del momento lineal, ¿cómo explicaría a una clase de secundaria cuál es el error conceptual de una escena en la que un superhéroe se mantiene estático suspendido en el aire mientras lanza un coche lleno de maleantes?

12 •• Un inquieto estudiante de física pregunta: "Si las fuerzas externas son las únicas fuerzas que hacen que el centro de masas de un sistema de partículas acelere, ¿cómo puede moverse un coche? ¿No es el motor de un coche el que proporciona la fuerza necesaria para acelerarlo? ¿De dónde viene la fuerza externa que acelera el coche?"

13 •• Cuando pisamos el pedal del freno para frenar un coche, las pastillas de los frenos presionan la rueda de modo que el rozamiento disminuye su velocidad de rotación. Sin embargo, el rozamiento de las pastillas no puede ser la fuerza que detiene el vehículo porque es una fuerza interna, ya que la rueda y las pastillas son elementos que forman el sistema. ¿Cuál es la fuerza externa que detiene el coche? Dé una explicación detallada de cómo funciona esta fuerza.

14 •• Explique por qué la red protectora puede salvar la vida de un artista de circo, mientras que si cae desde la misma altura pero sobre una superficie más rígida puede sufrir serias lesiones o incluso la muerte. Basar las explicaciones en el teorema impulso-momento.

15 •• Estimar el cociente entre el tiempo de colisión con la red de seguridad y el tiempo de colisión contra el suelo para el problema 14 cuando cae desde una altura de 25 m. *Ayuda: utilizar el procedimiento explicado en el paso 4 de la estrategia para la resolución de problemas de la sección 8.3.* SSM

16 •• (*a*) ¿Por qué un vaso de vidrio no se rompe cuando cae sobre una alfombra mientras que se rompe si cae sobre un suelo de hormigón? (*b*) En muchos circuitos de coches de carreras, en las curvas más peligrosas hay balas de paja. Explicar el motivo por el cual estas balas reducen la gravedad de los accidentes.

17 • Verdadero o falso:

(*a*) En un choque perfectamente inelástico, se pierde toda la energía cinética de las partículas en todos los sistemas de referencia inerciales.

(*b*) En un choque elástico frontal, la velocidad relativa de retroceso después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del mismo.

(*c*) En un choque frontal perfectamente inelástico con un objeto inicialmente en reposo, sólo una parte de la energía cinética se disipa.

(*d*) Después de una colisión perfectamente inelástica a lo largo de la dirección este-oeste, se observa que ambos objetos se mueven hacia el oeste. El momento inicial del sistema iba, en consecuencia, en dirección oeste.

18 •• ¿En qué condiciones puede perderse toda la energía cinética inicial en un choque? Explicar cómo puede darse este resultado incluso cuando se conserva el momento del sistema.

19 •• Considerar una colisión perfectamente inelástica de dos objetos de igual masa. (*a*) ¿En qué caso es mayor la pérdida de la energía cinética: si los dos objetos tienen velocidades opuestas y de igual magnitud $v/2$, o si uno de los objetos se encuentra inicialmente en reposo y el otro tiene una velocidad inicial v? (*b*) ¿En qué situación es mayor el porcentaje de pérdida de energía cinética?

20 •• Un niño se ha construido una arma de juguete que consiste de dos cañas horizontales huecas por donde se pueden lanzar guisantes (véase la figura 8.41). El niño sopla desde la izquierda cuando dos guisantes están en las posiciones de la figura. Si el juguete está en posición horizontal, ¿cuál de los dos guisantes, el A o el B, saldrá con mayor velocidad? ¿Por qué? Sugerencia: la respuesta tiene que ver con el teorema impulso-momento.

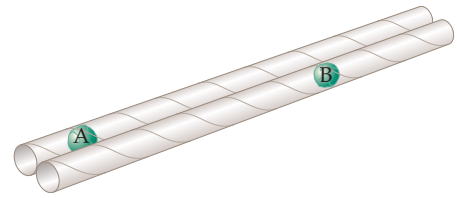


FIGURA 8.41 Problema 20

21 •• Una partícula cuya masa es m_1 que se mueve con velocidad v realiza un choque elástico frontal con una masa estacionaria m_2. ¿En qué condiciones será mayor la energía transmitida a m_2? (*a*) $m_2 << m_1$. (*b*) $m_2 = m_1$. (*c*) $m_2 >> m_1$. (*d*) Ninguna de las anteriores.

22 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supóngase que usted forma parte de un equipo de reconstrucción de accidentes que ha reconstruido un accidente en el que un coche colisionó con la parte de atrás de otro de forma que sus parachoques quedaron enganchados hasta pararse. Durante el juicio, usted es llamado a declarar como experto de la acusación y el abogado de la defensa dice que usted despreció el rozamiento y la fuerza de la gravedad durante la fracción de segundo que duró la colisión. Defienda su informe. ¿Por qué usted tiene razón al ignorar tales fuerzas? Usted no las ignoró en su análisis del derrape anterior y posterior a la colisión. ¿Puede explicar al jurado por qué usted no ignoró esas fuerzas antes y después del choque?

23 •• Las boquillas de las mangueras de jardín habitualmente tienen la forma que se indica en la figura 8.42, acabando en ángulo recto. Si se abre la válvula de la boquilla y sale el agua a presión, se nota que la boquilla ejerce sobre la mano una presión hacia atrás más fuerte de lo que sería de esperar si la boquilla no acabara en ángulo recto. ¿Por qué?

FIGURA 8.42 Problema 23

PROBLEMAS CONCEPTUALES DE LAS SECCIONES OPCIONALES

24 • Describir una colisión perfectamente inelástica considerada en el sistema de referencia del centro de masas.

25 •• Un disco de hockey está inicialmente en reposo. Otro disco idéntico colisiona con el primero no frontalmente. Suponer que la colisión es elástica y despreciar cualquier movimiento rotacional de los discos. Describir la colisión en el sistema del centro de masas de los discos.

26 •• Se lanza, con un cierto ángulo, un bastón al aire. El bastón tiene un extremo más grueso que el otro. (*a*) Describir la trayectoria del centro de masas del bastón desde el sistema de referencia del suelo. (*b*) Describir el movimiento de los dos extremos del bastón usando el sistema de referencia del centro de masas del bastón.

27 •• Describir las fuerzas que actúan sobre una sonda lunar cuando pone en marcha sus retrocohetes para preparar la maniobra de aterrizaje. (Suponer que la masa que pierde la sonda durante el aterrizaje no es despreciable.)

28 •• Un vagón de un tren pasa por debajo de un silo que deja caer grano a velocidad constante. (*a*) ¿La conservación del momento conlleva que el vagón del tren disminuya su velocidad a medida que le cae grano? Suponer que no hay rozamiento en la vía, que el terreno es perfectamente plano y que el grano cae verticalmente. (*b*) Si el vagón frena, esto implica que hay una fuerza externa que actúa sobre él de modo que disminuye su velocidad. ¿De dónde procede? (*c*) Pasado el silo, el grano cae al suelo a velocidad constante por un agujero vertical en el suelo del vagón. ¿A medida que pierde masa, el vagón se acelera?

29 •• Como evidencia de que incluso personas muy brillantes pueden equivocarse, considere el problema siguiente, que fue propuesto a un estudiante de primer curso en el Caltech (abreviatura del prestigioso instituto californiano: California Institute of Technology*): Un barco de vela estaba en el agua un día sin viento. Para hacer que el barco se moviera, un marinero, erróneamente, colocó un ventilador a popa de manera que enviaba viento hacia las velas para que empujara el barco hacia delante. Explicar por qué esto es imposible.* La idea de quien propuso el problema era que la fuerza neta del aire que empujaba las velas hacia adelante se contrarrestaba con la fuerza que ejercía el ventilador hacia atrás (tercera ley de Newton). Sin embargo, uno de los estudiantes señaló al profesor que, de hecho, el barco podía moverse hacia delante. ¿Por qué? SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

30 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de 2000 kg que viaja a 90 km/h choca contra una pared de hormigón que no cede. (*a*) Estimar el tiempo de choque suponiendo que el centro del coche recorre la mitad del camino hasta la pared con desaceleración constante. (Utilizar una longitud razonable para el coche.) (*b*) Estimar la fuerza media ejercida por la pared sobre el coche.

31 •• En una carrera de vagonetas de tracción manual sobre raíles, una de estas unidades de masa 350 kg se mueve a 32 km/h con un equipo de cuatro personas (cada una de ellas de 75 kg). La vagoneta se dirige hacia un río, cuando observan que el puente por el que han de pasar se ha derrumbado. Los cuatro componentes del equipo saltan simultáneamente hacia atrás con una velocidad de componente horizontal de 4 m/s relativa a la vagoneta después del salto. La vagoneta cae al agua a una distancia de 25,0 m de la orilla. (*a*) Estimar el tiempo de caída de la vagoneta. (*b*) ¿Qué ocurre con las cuatro personas?

32 •• Un bloque de madera y una pistola están firmemente sujetos a los extremos de una guía que se desliza sobre un carril de aire que no ofrece rozamiento (figura 8.43). El bloque y la pistola están separados una distancia L. El sistema está inicialmente en reposo. Se dispara la pistola y la bala sale con una velocidad v_b e impacta sobre el bloque incrustándose en él. La masa de la bala es m_b y la masa del sistema pistola-bloque-guía es m_p. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la guía inmediatamente después de salir la bala? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la guía inmediatamente después de que la bala se incruste completamente en el bloque? (*c*) ¿Qué distancia recorre la guía desde que sale la bala hasta que se incrusta en el bloque?

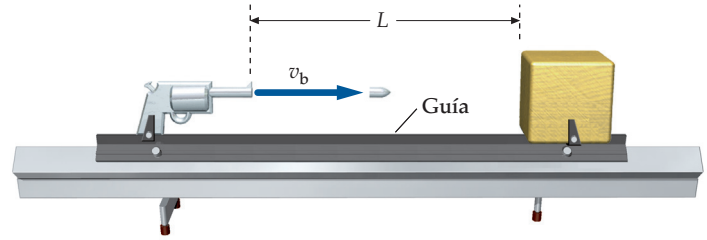


FIGURA 8.43 Problema 32

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

33 • Tyrone, un adolescente de 85 kg, corre por un embarcadero y cuando llega al final cae sobre una balsa de 150 kg que estaba inicialmente en reposo. Después de caer sobre la balsa, ésta, con Tyrone dentro, se aleja del embarcadero a 2 m/s. ¿Con qué velocidad corría Tyrone por el embarcadero? SSM

34 •• Una concursante de 55 kg de un concurso de televisión está en una balsa de 150 kg que flota sobre agua infestada de cocodrilos. Ella y la balsa están inicialmente en reposo. La concursante necesita saltar de la balsa a la plataforma que hay varios metros más allá. Para eelo corre sobre la balsa desde uno de sus extremos hasta el otro extremo más cercano a la plataforma. Cuando llega a ese extremo, su velocidad respecto de la balsa es de 5 m/s. En ese instante, ¿cuál es su velocidad respecto del agua?

35 • Dos masas de 5 kg y 10 kg situadas sobre una masa sin rozamiento están conectadas por un muelle comprimido. Cuando el muelle se libera, la masa menor posee una velocidad de 8 m/s hacia la izquierda. ¿Cuál es la velocidad de la masa mayor?

36 • La figura 8.44 muestra el aspecto de un proyectil un instante después de haber estallado en tres fragmentos. ¿Cuál era la velocidad del proyectil un instante antes de su explosión? (*a*) v_3, (*b*) $v_3/3$, (*c*) $v_3/4$, (*d*) $4v_3$, (*e*) $(v_1 + v_2 + v_3)/4$.

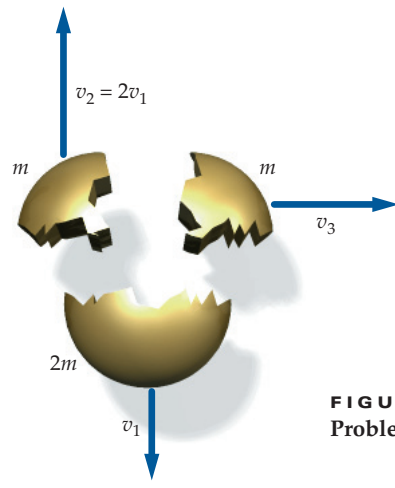


FIGURA 8.44
Problema 36

37 • Una granada de masa m y velocidad v explota en dos fragmentos idénticos. Si la granada se movía horizontalmente respecto a la Tierra y después de la explosión uno de los fragmentos se mueve verticalmente con el módulo de la velocidad v, determinar la velocidad $\vec{v}'$ del otro fragmento inmediatamente después de la explosión.

38 •• En una guía de aire se colocan dos piezas con imanes que se atraen uno a otro (véase la figura 8.45). La masa de la primera pieza es de 0,10 kg y la de la segunda de 0,20 kg (cada una incluye la masa propia de la pieza más la del imán). Se sitúa el origen en el extremo izquierdo, el centro de la pieza 1 está en $x = 0{,}1$ m y el centro de la pieza 2 está en $x = 1{,}60$ m. La pieza 1 mide 10 cm y la 2 mide 20 cm, y ambas piezas tienen el centro de masas en su centro. Cuando se sueltan las dos piezas se mueven una al encuentro de la otra y quedan enganchadas. (*a*) ¿Cuál es la posición de los centros de cada pieza cuando chocan por primera vez? (*b*) Determinar la velocidad de las dos piezas después de quedar unidas.

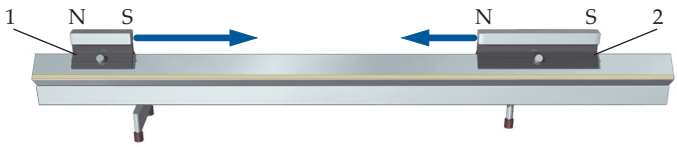


FIGURA 8.45 Problema 38

39 •• Un muchacho dispara su escopeta de perdigones hacia un taco de queso que descansa sobre un bloque de hielo. En uno de los disparos, el perdigón de 1,2 g se incrusta en el taco de queso y se deslizan juntos una distancia 25 cm sobre el hielo hasta pararse por completo. Si la velocidad con la que sale el perdigón es de 65 m/s y el taco de queso tiene una masa de 120 g, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento entre el queso y el hielo?

40 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Una cuña de masa M descansa sobre una superficie horizontal que no ofrece rozamiento. Sobre ella se coloca un bloque de masa m cuya superficie tampoco ejercerá rozamiento (figura 8.46). El centro de masas del bloque desciende una altura h cuando el bloque se desliza desde su posición original hasta que llega a la superficie horizontal. (*a*) ¿Cuáles son las velocidades del bloque y de la cuña cuando se separan el uno de la otra? (*b*) Comprobar el resultado considerando el caso límite cuando $M >> m$.

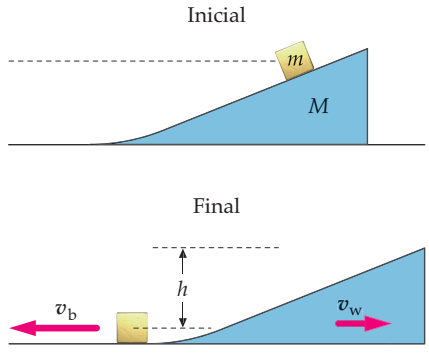


FIGURA 8.46 Problema 40

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

41 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un bloque de 3 kg se mueve hacia la derecha a 5 m/s y un segundo bloque de 3 kg se mueve hacia la izquierda a 2 m/s. (*a*) Hallar la energía cinética total de ambos bloques en este sistema. (*b*) Hallar la velocidad del centro de masas del sistema formado por los dos bloques. (*c*) Hallar las velocidades de los dos bloques respecto al centro de masas. (*d*) Hallar la energía cinética del movimiento respecto al centro de masas. (*e*) Demostrar que la respuesta del apartado (*a*) es mayor que la correspondiente al apartado (*d*) en una cantidad igual a la energía cinética del centro de masas. SSM

42 •• Repetir el problema 41 para un segundo bloque de masa 5 kg que reemplaza al de 3 kg y que se mueve hacia la derecha con velocidad de 3 m/s.

IMPULSO Y FUERZA MEDIA

43 • Un balón de rugby de masa 0,43 kg sale del pie del chutador con una velocidad inicial de 25 m/s. (*a*) ¿Cuál es el impulso impartido al balón por el chutador? (*b*) Si el pie del jugador está en contacto con el balón durante 0,008 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el pie sobre el balón? SSM

44 • Un ladrillo de 0,3 kg se deja caer desde una altura de 8 m. Choca contra el suelo y queda en reposo. (*a*) ¿Cuál es el impulso ejercido por el suelo sobre el ladrillo durante la colisión? (*b*) Si desde que el ladrillo toca el suelo hasta que queda en reposo transcurren 0,0013 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el suelo sobre el ladrillo en el impacto?

45 • En el Hayden Planetarium de Nueva York se exhibe un meteorito de 30,8 ton (1 ton = 1000 kg). Supongamos que la energía cinética del meteorito cuando chocó contra el suelo fue de 617 MJ. Determinar el impulso I experimentado por el meteorito en el momento en que su energía cinética se había reducido a la mitad (después de unos 3,0 s). Determinar también la fuerza media F ejercida sobre el meteorito durante este intervalo de tiempo.

46 •• Al golpear horizontalmente una pelota de béisbol de 0,15 kg, su velocidad cambia de + 20 m/s a – 20 m/s. (*a*) ¿Cuál es el módulo del impulso impartido por el bate a la pelota? (*b*) Si la pelota está en contacto con el bate durante 1,3 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el bate sobre la pelota?

47 •• Una pelota de frontón de 60 g choca contra la pared con una velocidad de 5,0 m/s con un ángulo de 40° y rebota con la misma velocidad y el mismo ángulo con la normal. Si está en contacto con la pared durante 2 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por la bola sobre la pared?

48 •• **ESTIMACIÓN** Se lanza una pelota de 150 g a una altura de 40 m. (*a*) Utilizar un valor razonable para la distancia que recorrerá la pelota de manera que mientras se encuentre en la mano de la persona que la lanza se pueda calcular la fuerza media ejercida y el tiempo que la pelota permanece en la mano durante el lanzamiento. (*b*) ¿Es posible despreciar el peso de la pelota mientras ésta es lanzada?

49 •• Una pelota de frontón de 0,06 g de masa se lanza perpendicularmente contra una pared con una velocidad de 10 m/s. Rebota con una velocidad de 8 m/s. (*a*) ¿Qué impulso se ha transmitido a la pared? (*b*) Si el contacto entre la pelota y la pared dura 0,003 s, ¿qué fuerza media se ejerce sobre la pared? (*c*) La pelota la recoge un jugador que la deja en reposo. En el proceso, sus manos retroceden 0,5 m. ¿Cuál es el impulso recibido por el jugador? (*d*) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el jugador por la pelota?

50 •• Una naranja esférica de 0,34 kg y 2 cm de radio se deja caer desde la cima de un edificio de 35 m de altura. Tras chocar contra el suelo, la naranja queda completamente aplastada con un grosor de 0,5 cm. Despreciar el rozamiento con el aire y suponer que la colisión es completamente inelástica. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda la naranja en deformarse completamente? (*b*) ¿Qué fuerza media hizo el pavimento sobre la naranja?

51 •• El colchón que se utiliza para el salto de altura en una competición olímpica, no es más que un cojín de aire que se comprime durante el proceso de frenado que tiene lugar cuando el saltador cae sobre él hasta pararlo completamente, pasando de un grosor de 1,2 m en reposo a 0,2 m tras el impacto. (*a*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo durante el cual, un saltador que cae después de saltar una altura de 6,4 m, es frenado por el colchón? (*b*) ¿Cuál sería el intervalo de tiempo si el colchón se comprime 5 cm en lugar de 20 cm? (*c*) Discutir cualitativamente la diferencia en la fuerza media que experimenta el saltador al comparar un colchón que se comprime dos distancias distintas. Es decir, ¿qué distancia se tendría que comprimir el colchón para que se ejerciera la mínima fuerza sobre el saltador?

52 ••• Las grandes cavernas de piedra caliza se formaron gracias al goteo constante de agua. (*a*) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el suelo de caliza por las gotas de agua de 0,03 mL que caen desde una altura de 5 m a razón de 10 gotas por minuto? (suponer que el agua no se acumula sobre el suelo) (*b*) Comparar esta fuerza con el peso de una gota de agua.

COLISIONES EN UNA DIMENSIÓN

53 • Un coche de 2000 kg se mueve hacia la derecha a 30 m/s en persecución de un segundo coche de igual masa que se mueve también hacia la derecha a 10 m/s. (*a*) Si los dos coches chocan y quedan acoplados, ¿cuál es su velocidad inmediatamente después de la colisión? (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de los coches se pierde durante esta colisión? ¿Adónde va a parar esta energía? SSM

54 • Un jugador de rugby de 85 kg que se mueve a la velocidad de 7 m/s realiza un choque perfectamente inelástico con un defensa de 105 kg que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la colisión?

55 • Un cuerpo de 5 kg con una velocidad de 4,0 m/s choca frontalmente con otro de 10 kg que se mueve hacia él con una velocidad de 3,0 m/s. Si el bloque de 10 kg queda inmóvil después del choque, (*a*) ¿cuál es la velocidad final del cuerpo de 5 kg? (*b*) ¿Es elástico el choque?

56 • Una bola de masa m se mueve con velocidad v hacia la derecha y choca contra un bate mucho más pesado que se mueve hacia la izquierda con velocidad v. Determinar la velocidad de la bola después del choque elástico con el bate.

57 •• Un protón de masa m experimenta un choque elástico frontal con un núcleo de carbono estacionario de masa $12m$. La velocidad del protón es de 300 m/s. (*a*) Determinar la velocidad del centro de masas del sistema. (*b*) Determinar la velocidad del protón y del núcleo de carbono después del choque.

58 •• Un cuerpo de 3 kg que se mueve con una velocidad de 4 m/s verifica un choque elástico contra un cuerpo estacionario de masa 2 kg. Utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento, y el hecho de que la velocidad relativa de separación es igual a la velocidad relativa de aproximación, determinar la velocidad de cada cuerpo después de la colisión. Comprobar la respuesta calculando las energías cinéticas inicial y final de cada cuerpo.

59 •• Un bloque de masa $m_1 = 2$ kg se desliza a lo largo de una mesa sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Directamente enfrente de este bloque y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 3 m/s hay otro bloque de masa $m_2 = 5$ kg, conectado a un muelle de masa despreciable y constante de fuerza $k = 1120$ N/m, como se muestra en la figura 8.47. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas del sistema? (*b*) Durante el choque, el muelle se comprime hasta un valor máximo Δx. ¿Cuál es el valor de Δx? (*c*) Los bloques finalmente se separan de nuevo. ¿Cuáles son las velocidades finales de los dos bloques medidas en el sistema de referencia de la mesa, después de separarse?

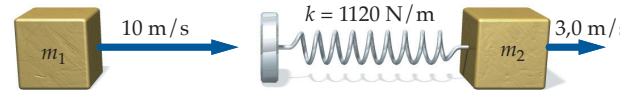


FIGURA 8.47 Problema 59

60 •• Una bala de masa m se dispara verticalmente desde abajo sobre una lámina delgada de madera contrachapada de masa M que está inicialmente en reposo, soportada por una lámina delgada de papel (figura 8.48). La bala perfora la lámina, la cual asciende hasta una altura H por encima de su posición inicial antes de volver a caer. La bala sigue ascendiendo hasta una altura h. (*a*) Expresar la velocidad ascendente de la bala y la lámina inmediatamente después de que la primera emerja de la lámina en función de h y H. (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la bala? (*c*) Obtener expresiones para las energías mecánicas del sistema antes y después de la colisión inelástica. (*d*) ¿Cuánta energía mecánica se disipa durante la colisión?

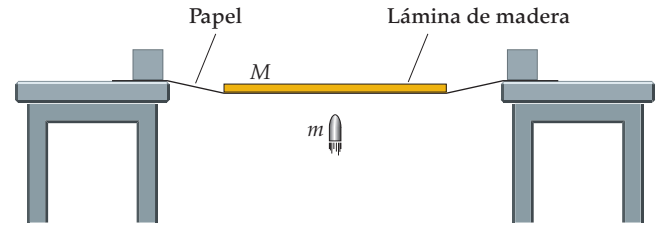


FIGURA 8.48 Problema 60

61 •• Un protón de masa m se mueve con velocidad inicial v_0 hacia una partícula α de masa $4m$ inicialmente en reposo. Como ambas partículas poseen carga eléctrica positiva, se repelen entre sí. (Las fuerzas repulsivas son suficiente para evitar que las partículas entren en contacto directo.) Determinar la velocidad v_α de la partícula α (*a*) cuando la distancia entre las dos partículas es mínima y (*b*) cuando las dos partículas están muy separadas.

62 •• Un electrón choca con un átomo de hidrógeno inicialmente en reposo. Todo el movimiento se da en una línea recta. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se transfiere al átomo? (Considere que la masa del átomo de hidrógeno es 1840 veces la masa de un electrón.)

63 •• Una bala de 16 g se dispara contra el bloque de madera de un péndulo balístico de masa 1,5 kg (figura 8.18). Cuando el bloque de madera está a su altura máxima, las cuerdas forman con la vertical un ángulo de 60°. La longitud del péndulo es de 2,3 m. Determinar la velocidad de la bala. SSM

64 •• Demostrar que en una colisión elástica en una dimensión, si la masa y la velocidad del objeto 1 son m_1 y v_{1i}, y si la masa y la velocidad del objeto 2 son m_2 y v_{2i}, entonces las velocidades finales v_{1f} y v_{2f} vienen dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

y

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

65 •• Usar los resultados del problema 64 para investigar las colisiones elásticas en una dimensión en los límites siguientes: (*a*) Cuando las dos masas son iguales, demostrar que las partículas "canjean" velocidades: $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$. (*b*) Si $m_2 >> m_1$, y $v_{2i} = 0$, demostrar que $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. (*c*) Si $m_1 >> m_2$, y $v_{2i} = 0$, demostrar que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$.

66 •• Se dispara horizontalmente un proyectil de masa m_1 con una velocidad v sobre un péndulo balístico, que tiene masa m_2. El péndulo está sujeto a una varilla muy ligera de longitud L que puede girar por su otro extremo. El proyectil se detiene en el péndulo. Hallar la velocidad mínima v para que el péndulo llegue a describir una circunferencia completa.

67 •• Se dispara horizontalmente un proyectil de masa m_1 con velocidad v sobre un péndulo balístico de masa m_2 (figura 18.19). Hallar la máxima altura h alcanzada por éste si el proyectil pasa a través del péndulo y sale con velocidad $v/3$.

68 •• Si colocamos un bloque de madera, como los que se usan habitualmente en un péndulo balístico, lo ponemos en una mesa plana, y disparamos una bala sobre él, ¿qué distancia recorrerá hasta pararse? Considerar que la bala tiene una masa de 10,5 g, que la masa del bloque de madera es de 10,5 kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,22. Suponer también que la bala no induce rotación sobre el bloque.

69 •• Una bola de 0,425 kg de masa y 1,3 m/s de velocidad rueda por una mesa hasta que entra en una caja vacía de 0,327 kg que descansa sobre la mesa. La caja con la bola dentro recorre por la mesa una distancia de 0,520 m. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa? SSM

70 •• Tarzán está frente a una estampida de elefantes cuando Jane le rescata colgada de una liana. La liana tiene una longitud de 25 m, y Jane ha iniciado su salto cuando la liana estaba en posición horizontal. Si la masa de Jane es de 54 kg y la de Tarzán de 82 kg, ¿hasta qué altura por encima del suelo podrá subir la pareja? (Suponer que la liana está en posición vertical cuando ella lo agarra a él.)

71 •• Los científicos estiman que el meteorito que produjo el cráter conocido como Barringer Meteorite Crater en Arizona tenía una masa de $2{,}72 \times 10^5$ toneladas y viajaba a 17,9 km/s. Considerar que la velocidad orbital de la Tierra es de 30 km/s. (*a*) ¿Cuál debería ser la dirección del impacto si la velocidad orbital de la Tierra sufre el máximo cambio? (*b*) Suponiendo la condición de colisión del apartado (*a*), estimar el máximo porcentaje en el cambio de la velocidad orbital de la Tierra como resultado de esta colisión. (*c*) ¿Cuál debería ser la masa del asteroide, si tuviera una velocidad igual a la velocidad orbital de la Tierra, necesaria para cambiar la velocidad orbital de la Tierra en un 1%? SSM

72 ••• Guillermo Tell dispara a la manzana que tiene su hijo sobre la cabeza. La velocidad de la flecha de 125 g justo antes del impacto es de 25 m/s, y tiene dirección horizontal. La flecha se clava en la manzana y el conjunto cae al suelo a 8,5 m detrás de la posición del niño. ¿Cuál es la masa de la manzana? Suponer que el hijo mide 1,85 m.

EXPLOSIONES Y DESINTEGRACIONES RADIACTIVAS

73 •• El isótopo del berilio ^{8}Be es inestable y se desintegra en dos partículas α (núcleos de helio de masa $m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg), liberándose una energía de $1{,}5 \times 10^{-14}$ J. Determinar las velocidades de las dos partículas alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de ^{8}Be en reposo. Suponer que toda la energía aparece como energía cinética. SSM

74 •• El isótopo ligero del litio ^{5}Li es inestable y se rompe espontáneamente en un protón (núcleo de hidrógeno) y una partícula α (núcleo de helio). En este proceso, se libera una energía total de $3{,}15 \times 10^{-13}$ J, que aparece en forma de energía cinética de los dos productos de reacción. Determinar las velocidades del protón y de la partícula alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de ^{5}Li en reposo. (*Nota*: las masas del protón y de la partícula alfa son $m_P = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg y $m_\alpha = 4\, m_P = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg.)

75 ••• Se lanza un proyectil de 3 kg con un ángulo de 30° sobre la horizontal y con una velocidad inicial de 120 m/s. En la parte superior de su trayectoria, explota en dos partes de 1 y 2 kg de masa. El fragmento de 2 kg cae al suelo directamente debajo del punto de explosión, 3,6 segundos después de que ésta se ha verificado. (*a*) Determinar la velocidad del fragmento de 1 kg inmediatamente después de la explosión. (*b*) Determinar la distancia entre el punto del disparo y el punto en el cual el fragmento de 1 kg choca contra el suelo. (*c*) Calcular la energía liberada en la explosión.

76 ••• El isótopo de boro ^{9}B es inestable y se desintegra en un protón y dos partículas alfa. La energía total liberada en forma de energía cinética de los productos de desintegración es $4{,}4 \times 10^{-14}$ J. En uno de estos procesos, con el núcleo de ^{9}B en reposo antes de la desintegración, la velocidad del protón medida experimentalmente es $6{,}0 \times 10^6$ m/s. Si las dos partículas alfa tienen energías iguales, determinar el módulo y dirección de sus velocidades respecto a la del protón.

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

77 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El coeficiente de restitución del acero sobre acero se mide dejando caer una bola de este material sobre una placa de acero rígidamente ligada a la Tierra. Si la bola se deja caer desde una altura de 3 m y rebota hasta 2,5 m, ¿cuál es el coeficiente de restitución? SSM

78 • De acuerdo con la normas oficiales de un juego de pelota con raqueta, una pelota aceptable para un torneo debe rebotar hasta una altura comprendida entre 173 y 183 cm cuando se deja caer libremente desde una altura de 254 cm a temperatura ambiente. ¿Cuál es el intervalo aceptable de valores del coeficiente de restitución para el sistema pelota-suelo?

79 • Una pelota rebota hasta el 80 por ciento de su altura original. (*a*) ¿Qué fracción de su energía mecánica se pierde en cada rebote? (*b*) ¿Cuál es el coeficiente de restitución del sistema pelota-suelo?

80 •• Un bloque de 2 kg se mueve con una velocidad de 6 m/s y choca frontalmente con un bloque de 4 kg inicialmente en reposo. Después del choque, el bloque de 2 kg retrocede con velocidad de 1 m/s. (*a*) Calcular la velocidad del bloque de 4 kg después del choque. (*b*) Calcular la energía perdida en el choque. (*c*) ¿Cuál es el coeficiente de restitución para este choque?

81 •• Un bloque de 2 kg que se mueve hacia la derecha con velocidad de 5 m/s choca con un bloque de 3 kg que se mueve en la misma dirección a 2 m/s, como indica la figura 8.49. Después del choque, el bloque de 3 kg se mueve a 4,2 m/s. Determinar (*a*) la velocidad del bloque de 2 kg después del choque y (*b*) el coeficiente de restitución de la colisión.

FIGURA 8.49 Problema 81

82 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Con el fin de poder comparar los récords logrados en las carreras y lanzamientos de béisbol de diferentes temporadas, la federación de béisbol mide aleatoriamente los coeficientes de restitución entre las pelotas y la madera de los bates. (*a*) En un test aleatorio se comprueba que cuando se deja caer la pelota desde 2 m de altura sobre la madera del bate rebota 0,25 m. ¿Cuál es coeficiente de restitución de la pelota? (*b*) ¿Cuál debería ser la distancia máxima lograda con

esa pelota, suponiendo que no hay rozamiento con el aire y estimando la velocidad del bate y la velocidad de lanzamiento del *pitcher*?

83 •• **CONCEPTUAL** Para que los discos de hockey sean más manejables, se congelan hasta justo antes del partido. (*a*) Explicar por qué a temperatura ambiente sería más difícil manejar los discos con los sticks que si estuvieran congelados. (Ayuda: los discos están hechos de goma.) (*b*) A temperatura ambiente el disco rebota 15 cm cuando se deja caer sobre una superficie de madera desde 1 m de altura. Si un disco congelado tiene sólo la mitad del coeficiente de restitución que uno a temperatura ambiente, predecir hasta qué altura rebotaría un disco congelado bajo las mismas condiciones. SSM

COLISIONES EN MÁS DE UNA DIMENSIÓN

84 •• En la sección 8.3 se probó, mediante argumentos geométricos, que cuando una partícula choca elásticamente con otra de igual masa que inicialmente está en reposo, las dos se separan formando un ángulo recto. En este problema examinamos otra forma de demostrar este resultado que ilustra la potencia de la notación vectorial. (*a*) Si $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$, elevar al cuadrado ambos lados (así se obtendrá el producto escalar de cada lado con él mismo) para demostrar que $A^2 = B^2 + C^2 + 2\vec{B}\cdot\vec{C}$. (*b*) Sea $\vec{P}$ el momento inicial de la primera partícula y sean $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ los momentos de las partículas tras la colisión elástica. Escribiendo la ecuación para la conservación del momento, realizando el producto escalar de cada término por él mismo, y comparando con la ecuación para la conservación de la energía, demostrar que $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0$.

85 •• En un juego de billar, la bola golpeada por el taco, con una velocidad inicial de 5 m/s, realiza un choque elástico con la bola ocho, que está inicialmente en reposo. Después del choque, la bola ocho se mueve formando un ángulo de 30° con la bola golpeada. Suponer que las bolas tienen la misma masa. (*a*) Determinar la dirección del movimiento de esta última después de la colisión. (*b*) Calcular la velocidad de cada bola inmediatamente después de la colisión.

86 •• Un objeto A de masa m choca con una velocidad $v_0\hat{i}$, contra un objeto B de masa $2m$ con velocidad $\frac{1}{2}v_0\hat{j}$. Después de la colisión, el objeto B posee una velocidad $\frac{1}{4}v_0\hat{i}$. (*a*) Determinar la velocidad del objeto A después de la colisión. (*b*) ¿Es esta una colisión elástica? Si no lo es, expresar la variación de energía cinética en función de m y v_0.

87 •• Un disco de masa 0,5 kg se aproxima a otro semejante que se encuentra estacionario sobre hielo sin rozamiento. La velocidad inicial del disco móvil es de 2 m/s. Después del choque, el primer disco sale con velocidad v_1 formando un ángulo de 30° con la línea original de movimiento; el segundo disco sale con velocidad v_2 a 60°, como indica la figura 8.50. (*a*) Calcular v_1 y v_2. (*b*) ¿Fue elástica la colisión? SSM

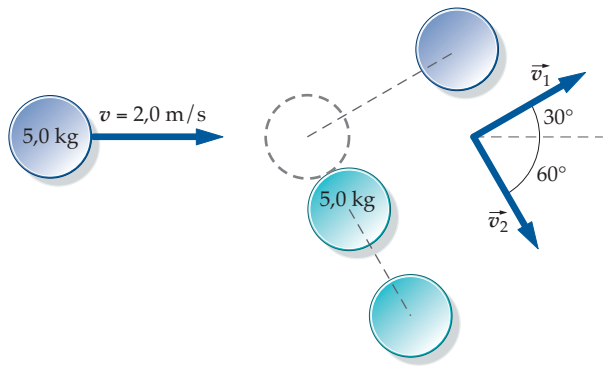


FIGURA 8.50 Problema 87

88 •• La figura 8.51 muestra el resultado de un choque entre dos objetos de distinta masa. (*a*) Calcular la velocidad v_2 de la masa mayor después del choque y el ángulo θ_2. (*b*) Demostrar que este choque es elástico.

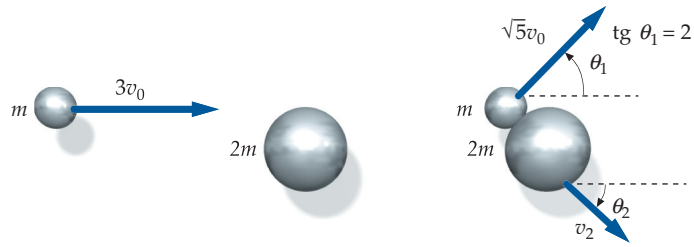


FIGURA 8.51 Problema 88

89 •• Una pelota de 2 kg que se desplaza con una velocidad de 10 m/s experimenta un choque elástico no frontal con otra pelota de 3 kg de masa inicialmente en reposo. La pelota de 2 kg es desviada 30° de su dirección original de movimiento mientras que la pelota de 3 kg se mueve a 4 m/s. Calcular la velocidad de la pelota de 2 kg y la dirección de la pelota de 3 kg después del choque.

90 •• Una partícula tiene inicialmente una velocidad v_0. Choca contra una segunda partícula de igual masa en reposo. Después del choque, la primera partícula se desvía un ángulo ϕ. Su velocidad después del choque es v. La segunda partícula retrocede, de tal forma que su velocidad forma un ángulo θ con la dirección inicial de la primera partícula. (*a*) Demostrar que $\text{tg}\,\theta = (v\,\text{sen}\,\phi)/\ [(v_0 - v\cos\phi)]$. (*b*) Demostrar que si la colisión es elástica, $v = v_0\cos\phi$.

*SISTEMA DE REFERENCIA CENTRO DE MASAS

91 •• Una partícula de momento lineal p_1 en una dimensión experimenta un choque elástico con una segunda partícula de momento lineal $p_2 = -p_1$, en el sistema de referencia del centro de masas. Tras el choque su momento lineal es p'_1. Expresar la energía total y la final en función de m_1, m_2 y p_1, y demostrar que $p'_1 = \pm p_1$. Si $p'_1 = -p_1$, la partícula invierte su sentido en la colisión y sale con el mismo módulo de velocidad que tenía inicialmente. ¿Cuál sería el significado del signo más en la solución?

92 •• **MÚLTIPLES PASOS** Un bloque de 3 kg se mueve en la dirección negativa de x a 5 m/s y otro bloque de 1 kg se mueve en la dirección positiva a 3 m/s. (*a*) Determinar la velocidad v_{cm} del centro de masas. (*b*) Restar v_{cm} de la velocidad de cada bloque para determinar la velocidad de cada bloque en el sistema del centro de masas. (*c*) Después de realizar una colisión elástica, la velocidad de cada bloque se invierte en el sistema de referencia del centro de masas. Determinar la velocidad de cada bloque después de una colisión elástica. (*d*) Transformar de nuevo al sistema original sumando v_{cm} a la velocidad de cada bloque. (*e*) Comprobar el resultado determinando las energías cinéticas inicial y final de los bloques en el sistema original.

93 •• Repetir el problema 92 con un segundo bloque de masa 5 kg que se mueve hacia la derecha a 3 m/s. SSM

*SISTEMAS DE MASA VARIABLE: LA PROPULSIÓN DE LOS COHETES

94 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un cohete quema combustible a un ritmo de 200 kg/s y expulsa los gases con una velocidad relativa de 6 km/s respecto al cohete. Calcular el empuje del cohete.

95 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un cohete tiene una masa inicial de 30 000 kg, de la cual un 80% es combustible. Quema combus-

tible a razón de 200 kg/s y expulsa los gases de combustión con una velocidad relativa de 1,8 km/s. Determinar (*a*) la fuerza de empuje del cohete, (*b*) el tiempo transcurrido hasta quemar todo el combustible y (*c*) su velocidad final, suponiendo que se mueve verticalmente hacia arriba en las proximidades de la superficie de la Tierra, donde el campo gravitatorio g es constante.

96 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El *impulso específico* del combustible de un cohete se define como $I_{es} = F_e/(Rg)$, donde F_e es el empuje producido por el combustible, g el módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y R la tasa a la que se quema el combustible que depende de las características de éste. (*a*) Demostrar que el impulso específico tiene dimensiones de tiempo. (*b*) Demostrar que $u_g = gI_{es}$, donde u_g es la velocidad de salida de los gases. (*c*) ¿Cuál es el impulso específico (expresado en segundos) del combustible usado en el cohete *Saturno V* del ejemplo 8.19?

97 ••• **HOJA DE CÁLCULO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La *relación inicial empuje-peso* τ_0 de un cohete es $\tau_0 = F_e/(m_0 g)$, donde F_e es el empuje del cohete y m_0 es la masa inicial del cohete más la del combustible. (*a*) En un cohete lanzado desde la superficie terrestre, demostrar que $\tau_0 = 1 + (a_0/g)$, donde a_0 es la aceleración inicial del cohete. En los vuelos tripulados, τ_0 no puede ser mayor de 4, atendiendo al confort y a la seguridad de los astronautas. (Los astronautas sentirán durante el ascenso del cohete que su peso es igual a τ_0 veces su peso normal.) (*b*) Demostrar que la velocidad final del cohete lanzado desde la superficie de la Tierra, en función de τ_0 y de I_{es} (véase el problema 96) se escribe como

$$v_f = gI_{es}\left[\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - \frac{1}{\tau_0}\left(1 - \frac{m_f}{m_0}\right)\right]$$

donde m_f es la masa del cohete (no se incluye el combustible utilizado). (*c*) Usando una **hoja de cálculo** o una **calculadora gráfica**, representar gráficamente v_f en función del cociente de masas m_0/m_f si $I_{es} = 250$ s y $\tau_0 = 2$ para valores del cociente de masas desde 2 hasta 10. (Obsérvese que el cociente de masas no puede ser inferior a 1.) (*d*) Para colocar un satélite en órbita se necesita una velocidad final $v_f = 7$ km/s. Calcular el cociente de masas necesario para un cohete de una única fase, usando los valores del impulso específico y del empuje dados en el apartado (*b*). Por razones de ingeniería, es difícil construir un cohete con un cociente de masas mayor de 10. ¿Por qué se utilizan cohetes de varias fases para poner satélites en órbita alrededor de la Tierra? SSM

98 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La altura que puede alcanzar un prototipo de cohete lanzado desde la Tierra se estima suponiendo que el tiempo durante el cual se quema el combustible es pequeño comparado con el tiempo total de vuelo, por lo que durante la mayor parte del vuelo el cohete se mueve en condiciones de caída libre. (Esta estimación en los cálculos del tiempo y del desplazamiento desprecia el tiempo durante el cual se quema combustible.) Para un prototipo de cohete con $I_{es} = 100$ s, $m_0/m_f = 1{,}2$ y $\tau_0 = 5$ (estos parámetros se definen en los problemas 96 y 97) estimar (*a*) la altura que puede alcanzar el cohete y (*b*) el tiempo total de vuelo. (*c*) Justificar la suposición según la cual el tiempo de vuelo es mucho mayor que el tiempo durante el cual se quema combustible comparando el tiempo de vuelo del apartado (*b*) con el tiempo que tarda en gastarse el combustible.

PROBLEMAS GENERALES

99 • Un vagón de tren de juguete que tiene una masa de 250 g y se mueve a razón de 0,50 m/s, se acopla a otro de masa 400 g que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de ambos vagones después de acoplados? Determinar la energía cinética inicial y final del sistema formado por los dos coches. SSM

100 • **MÚLTIPLES PASOS** Un modelo de vagón de tren de 250 g viaja a 0,5 m/s y se engancha a otro de 400 g que está inicialmente en reposo. (*a*) Calcular la energía cinética total del sistema de los dos vagones. (*b*) Determinar la velocidad de cada vagón en el sistema de referencia del centro de masas y utilizar esas velocidades para calcular la energía cinética del sistema de los dos coches en el sistema de referencia del centro de masas. (*c*) Calcular la energía cinética asociada al movimiento del centro de masas. (*d*) Comparar la respuesta del apartado (*a*) con la suma de los resultados de los apartados (*b*) y (*c*).

101 •• Un coche de 1500 kg que viaja hacia el norte a 70 km/h choca en un cruce con otro coche de 2000 kg que viaja hacia el oeste a 55 km/h. Después del choque ambos coches permanecen unidos. (*a*) ¿Cuál es el momento lineal total del sistema antes del choque? (*b*) Calcular el módulo, dirección y sentido de la velocidad del conjunto de chatarra después del choque.

102 •• Una mujer de 60 kg se encuentra de pie en la parte trasera de una balsa de 6 m de longitud y 120 kg que flota en reposo en aguas tranquilas. La balsa se encuentra a 0,5 m de un embarcadero fijo, (figura 8.52). (*a*) La mujer camina hasta la proa de la balsa y se detiene. ¿A qué distancia se encuentra ahora la balsa del embarcadero? (*b*) Mientras la mujer camina, mantiene una velocidad constante de 3 m/s relativa a la balsa. Determinar la energía cinética total del sistema (mujer más balsa) y comparar este valor con la energía cinética en el caso de que la mujer caminara a 3 m/s sobre una balsa atada al embarcadero. (*c*) ¿De dónde procede esta energía y adónde va cuando la mujer se detiene en la proa de la balsa? (*d*) En tierra firme, la mujer puede lanzar una bola de plomo a 6 m. Situada en la parte trasera de la balsa, apunta hacia delante y lanza la bola de modo que justo cuando sale de su mano, posee la misma velocidad respecto a ella que cuando la bola fue lanzada en tierra firme. ¿Dónde caerá la bola?

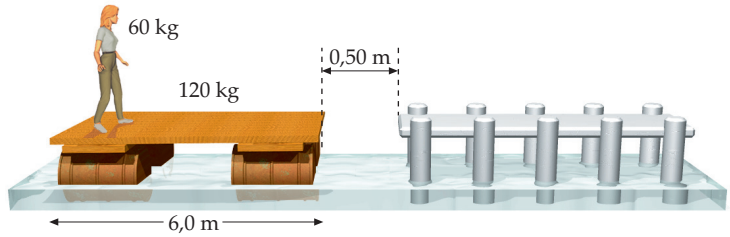


FIGURA 8.52 Problema 102

103 •• Una bola de acero de 1 kg y una cuerda de 2 m de masa despreciable forman un péndulo simple que puede oscilar sin rozamiento alrededor del punto O, como muestra la figura 8.53. Este péndulo se deja libre desde el reposo en una posición horizontal, y cuando la bola está en su punto más bajo choca contra un bloque de 1 kg que descansa sobre una plataforma. Suponiendo que el choque es perfectamente elástico y que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la plataforma es 0,1, determinar (*a*) la velocidad del bloque justo después del impulso, (*b*) la distancia recorrida por el bloque antes de detenerse.

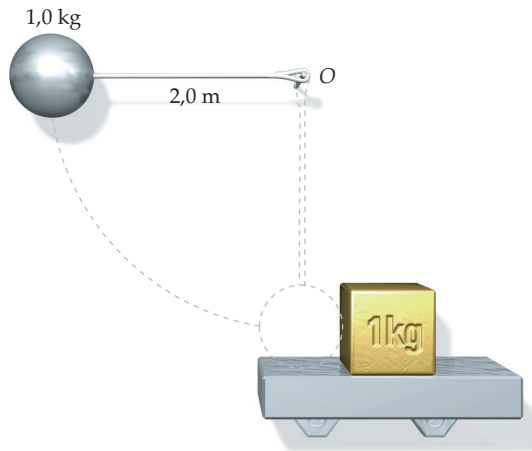


FIGURA 8.53 Problema 103

104 •• Durante la I Guerra Mundial, una de las armas de guerra más temibles eran los grandes cañones montados sobre vagones de ferrocarril. La figura 8.54 muestra este tipo de cañón, montado sobre un raíl sin rozamiento de modo que podía disparar una granada con un ángulo de 30°. Con el vagón inicialmente en reposo, el cañón dispara un proyectil de 200 kg a 125 m/s. (Todos los valores son relativos a la vía.) Consideremos un sistema formado por un cañón, una granada y un vagón que se mueve sobre una vía sin pérdidas por rozamiento. (*a*) El momento total del sistema vagón-cañón-proyectil, ¿será el mismo (es decir, "se conserva") antes y después de disparar la granada? Explicar la respuesta. (*b*) Si la masa de la plataforma más el cañón es 5000 kg, ¿cuál será la velocidad de retroceso del sistema a lo largo de la vía después del disparo? (*c*) La granada se eleva hasta una altura máxima de 180 m en su trayectoria. En dicho punto la velocidad es de 80 m/s. Con esta información, calcular la energía térmica (calor) producida por el rozamiento del aire sobre el proyectil desde su lanzamiento hasta que alcanza la altura máxima.

FIGURA 8.54 Problema 104

105 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Un experimento popular, y un tanto peligroso, consiste en aguantar una pelota de béisbol unos pocos centímetros por encima de una pelota de baloncesto, que a su vez sostenemos aproximadamente un metro por encima del suelo. Ambas pelotas se sueltan a la vez y chocan después que la pelota de baloncesto haya rebotado en el suelo. La pelota de béisbol sale disparada contra el techo, mientras que la de baloncesto llega hasta media altura. (*a*) Suponiendo que la colisión de la pelota de baloncesto con el suelo es elástica, ¿cuál es la relación entre las velocidades de las dos pelotas justo antes de que choquen? (*b*) Suponiendo que la colisión entre las dos pelotas sea elástica, use el resultado del apartado (*a*) y la conservación del momento y de la energía para demostrar que si la pelota de baloncesto pesa 3 veces más que la de béisbol, la velocidad final de la pelota de baloncesto será cero. (Esta es aproximadamente la verdadera relación entre las masas, que hace que el experimento sea tan especial.) (*c*) Si el módulo de la velocidad de la pelota que está arriba es v antes de la colisión, ¿cuál es el módulo de la velocidad inmediatamente después del choque? SSM

106 ••• (*a*) En el problema 105, si mantenemos una tercera pelota por encima de las otras dos y queremos que la pelota de baloncesto y la de béisbol se paren en medio de la habitación donde realizamos el experimento, ¿cuál debe ser el cociente de masas entre la bola de arriba y la bola de béisbol inmediatamente después de la colisión? (*b*) Si el módulo de la velocidad de la pelota que está arriba es v antes de la colisión, ¿cuál es el módulo de la velocidad inmediatamente después del choque?

107 ••• En el llamado "efecto de honda", la transferencia de energía en una colisión elástica se utiliza para incrementar la energía de una sonda espacial, de tal modo que ésta pueda escapar del sistema solar. Todas las velocidades se dan respecto a un sistema de referencia inercial en cuyo centro el Sol permanece en reposo. La figura 8.55 muestra una sonda espacial moviéndose a 10,4 km/s hacia Saturno, el cual se mueve a 9,6 km/s hacia la sonda. Debido a la atracción gravitatoria entre Saturno y la sonda, ésta se mueve alrededor de Saturno y escapa en dirección opuesta con velocidad v_f. (*a*) Suponiendo que esta colisión es elástica y unidimensional, siendo la masa de Saturno mucho mayor que la de la sonda, determinar v_f. (*b*) ¿En qué factor se incrementa la energía cinética de la sonda? ¿De dónde procede esta energía? SSM

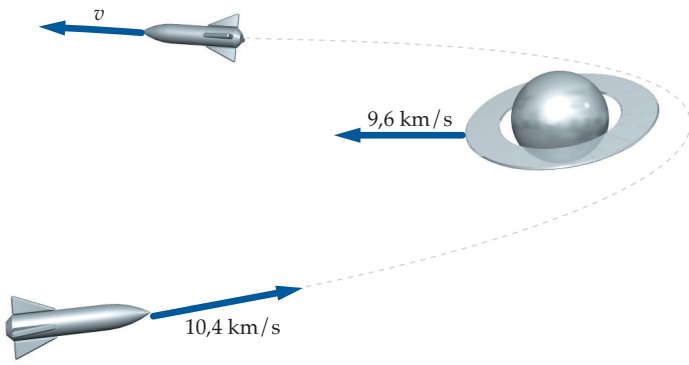


FIGURA 8.55 Problema 107

108 •• Un bloque de 13 kg se encuentra en reposo sobre un suelo horizontal. Se lanza sobre él un pegote de barro de 400 g de modo que su trayectoria sea horizontal, golpee el bloque, y se quede adherido a él. El bloque y el pegote se deslizan 15 cm por el suelo. Si el coeficiente de rozamiento es 0,4, ¿cuál es la velocidad original del pegote?

109 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un conductor descuidado choca por detrás contra un coche que está parado en una señal de tráfico. Justo antes del impacto, el conductor pisa el freno bloqueando las ruedas. El conductor del coche golpeado tiene también su pie apretando con fuerza el pedal del freno, bloqueando el sistema de frenado. La masa del coche golpeado es de 900 kg y la del vehículo culpable es de 1200 kg. En la colisión, los parachoques de los dos coches se enganchan entre sí. La policía determina, a partir de las marcas del deslizamiento sobre el suelo, que después del choque los dos vehículos se movieron juntos 0,76 m. Las pruebas revelan que el coeficiente de rozamiento deslizante entre los neumáticos y el pavimento es 0,92. El conductor del coche que provoca la colisión afirma que él se movía a una velocidad inferior a 15 km/h cuando se aproximaba al cruce. ¿Está diciendo la verdad? SSM

110 •• Un péndulo está formado por una lenteja de 0,4 kg atada a una cuerda de longitud 1,6 m. Un bloque de masa m descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. El péndulo se suelta desde el reposo con un ángulo de 53° con la vertical y la lenteja choca elásticamente contra el bloque. Después de la colisión, el ángulo máximo del péndulo con la vertical es 5,73°. Determinar la masa m.

111 ••• Inicialmente, la masa $m = 1{,}0$ kg y la masa M están ambas en reposo sobre un plano inclinado sin rozamiento (figura 8.56). La masa M se apoya en un muelle de constante 11 000 N/m. La distancia en el plano entre m y M es de 4,0 m. La masa m se deja libre, choca elásticamente con la masa M y rebota a una distancia de 2,56 m sobre el plano inclinado. La masa M se detiene momentáneamente a 4,0 cm de su posición inicial. Determinar la masa M. SSM

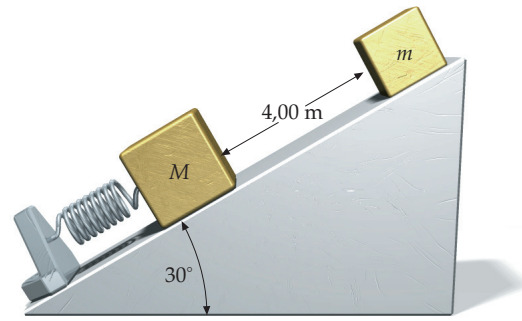


FIGURA 8.56 Problema 111

112 ••• Un neutrón de masa m choca elásticamente y frontalmente con un núcleo estacionario de masa M. (*a*) Demostrar que la energía del núcleo después de la colisión es $K_{\text{núcleo}} = [4mM/(m + M)^2]K_n$, siendo K_n igual a la energía cinética inicial del neutrón. (*b*) Demostrar que la fracción de energía perdida por el neutrón en este choque es

$$\frac{\Delta K_n}{K_n} = -\frac{4(m/M)}{(1 + [m/M])^2}$$

(*c*) Demostrar que esta expresión da resultados razonables cuando $m << M$ y $m = M$. ¿Cuál es el mejor núcleo estacionario para que un neutrón colisione contra él si el objetivo es que el neutrón pierda la máxima energía cinética?

113 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La masa de un núcleo de carbono es aproximadamente 12 veces la masa de un neutrón. (*a*) Utilizar los resultados del problema 112 para demostrar que después de N choques frontales de un neutrón con núcleos de carbono en reposo, la energía del neutrón es aproximadamente $0{,}716^N\ E_0$, siendo E_0 la energía original. (*b*) Los neutrones emitidos en la fisión de un núcleo de uranio poseen una energía de unos 2 MeV. Para que uno de estos neutrones origine la fisión de otro núcleo de uranio en un reactor, su energía debe reducirse aproximadamente a 0,02 eV. ¿Cuántas colisiones frontales son necesarias para reducir la energía de un neutrón de 2 MeV a 0,02 eV, suponiendo que son choques elásticos con núcleos de carbono estacionarios?

114 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Por término medio, un neutrón pierde el 63% de su energía en un choque elástico con un átomo de hidrógeno y un 11% de su energía en un choque idéntico con un átomo de carbono. (Estos valores son valores medios sobre todos los tipos de colisiones, no sólo las frontales. Así, los resultados son inferiores a los determinados en el problema 112, porque no todas las colisiones son frontales.) Calcular, por término medio, el número de choques necesario para reducir la energía de un neutrón de 2 MeV a 0,02 MeV (un resultado deseable por razones explicadas en el problema 129) si el neutrón choca con (*a*) átomos de hidrógeno estacionarios y (*b*) átomos de carbono estacionarios.

115 ••• Dos astronautas en reposo se encuentran uno frente al otro en el espacio. Uno, con masa m_1, lanza una bola de masa m_b al otro, cuya masa es m_2. Este recoge la bola y la lanza de nuevo al primer astronauta. Si cada uno lanza la bola con una velocidad v relativa a sí mismo, (*a*) ¿con qué velocidad se mueven después de que cada uno de ellos ha realizado un lanzamiento y una recogida? (*b*) ¿Cuál es el cambio de energía cinética del sistema de los dos astronautas y de dónde procede dicha energía? SSM

116 ••• Un chorro de 100 bolitas de vidrio sale de un tubo horizontal cada segundo y choca contra un platillo de una balanza como se ve en la figura 8.57. En su recorrido, caen a lo largo de una distancia de 0,5 m hasta la balanza y rebotan hasta la misma altura. Cada bolita tiene una masa de 0,5 g. ¿Qué valor debe tener la masa m colocada en el otro platillo de la balanza para hacer que la aguja permanezca en cero?

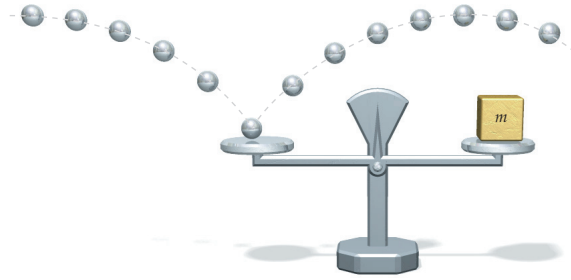


FIGURA 8.57 Problema 116

117 ••• Una pesa de gimnasia formada por dos bolas de masa m conectadas por una barra de 1 m de longitud y masa despreciable se apoya en un suelo sin rozamiento contra una pared sin rozamiento hasta que comienza a deslizarse por ésta como muestra la figura 8.58. Determinar la velocidad v de la bola que está junto al suelo en el momento que se hace igual a la velocidad de la otra bola.

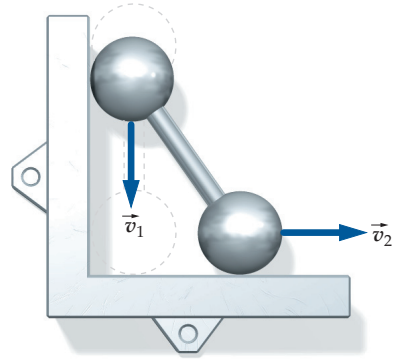


FIGURA 8.58 Problema 117

CAPÍTULO 9

EL *OJO DE LONDRES* ES UNA NORIA DE 135 M DE ALTURA QUE TRANSPORTA UN MÁXIMO DE 800 PASAJEROS. *(Ian Britton/FreeFoto.com.)*

Rotación

9.1 Cinemática de la rotación: velocidad angular y aceleración angular
9.2 Energía cinética de rotación
9.3 Cálculo del momento de inercia
9.4 La segunda ley de Newton en la rotación
9.5 Aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación
9.6 Objetos rodantes

? ¿Cuál debe ser el momento de fuerza necesario para detener la noria de forma que los pasajeros viajen 10 m antes de pararse? (Véase el ejemplo 9.15.)

En los capítulos 4 y 5, exploramos las leyes de Newton. En los capítulos 6 y 7, examinamos la conservación de la energía, y en el capítulo 8, estudiamos la conservación del momento lineal. En esos capítulos hemos descubierto herramientas (leyes y teoremas) que resultan útiles para analizar nuevas situaciones y resolver problemas nuevos. A continuación, utilizaremos estas herramientas a medida que exploremos el movimiento de rotación.

El movimiento de rotación está presente en todas partes. La Tierra gira alrededor de su eje. Las ruedas, los engranajes, las hélices, los motores, el eje de transmisión de un coche, los discos compactos, los patinadores sobre hielo cuando realizan sus piruetas, todo gira.

En este capítulo, vamos a considerar la rotación alrededor de un eje fijo en el espacio, como en el caso de un carrusel, o alrededor de un eje que se mueve paralelamente a sí mismo, como en el caso de una bola que rueda sobre una superficie. Otros ejemplos más generales del movimiento de rotación se analizarán en el capítulo 10.

9.1 CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN: VELOCIDAD ANGULAR Y ACELERACIÓN ANGULAR

Cada punto de un cuerpo que gira respecto de un eje fijo se mueve en un círculo cuyo centro está en el eje de rotación y cuyo radio es la distancia de este punto al eje de rotación. Cualquier línea trazada a partir de este eje que lo una con cualquier punto en rotación, barre el mismo ángulo en el mismo tiempo. Imaginemos un disco que gira alrededor de un eje fijo perpendicular a su superficie y que pasa por su centro (figura 9.1). Sea r_i la distancia desde el centro del disco a la partícula i (figura 9.2), y sea θ_i el ángulo medido en el sentido contrario al de la rotación de las agujas del reloj entre la línea radial que une la partícula con el eje de rotación y una línea de referencia fija en el espacio. Cuando el disco gira un ángulo $d\theta$, la partícula se mueve un arco circular de longitud ds_i, de tal manera que se cumple

$$ds_i = r_i\, d\theta \qquad 9.1$$

donde $d\theta$ se mide en radianes. Si el sentido positivo se define como el sentido opuesto al avance de las agujas de un reloj, entonces $d\theta$, θ_i y ds_i, mostrados en la figura 9.2, son todos positivos (si por el contrario, el sentido positivo es el del avance de las agujas del reloj, entonces todos son negativos). El ángulo θ_i, la longitud ds_i y la distancia r_i varían de una partícula a otra, pero el cociente ds_i/r_i, ángulo llamado **desplazamiento angular** $d\theta$, es el mismo para todas las partículas del disco. Para una revolución completa, la longitud del arco s_i es $2\pi r_i$ y el desplazamiento angular $\Delta\theta$ es

$$\Delta\theta = \frac{s_i}{r_i} = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi\ \text{rad} = 360^\circ = 1\ \text{rev}$$

La variación del ángulo respecto al tiempo es la misma para todas las partículas del disco y se denomina **velocidad angular** ω del disco. La velocidad angular instantánea ω es un desplazamiento angular de corta duración dividido por el tiempo. Es decir,

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad 9.2$$

DEFINICIÓN: VELOCIDAD ANGULAR

de forma que ω es positiva si $d\theta$ es positivo y ω es negativa si $d\theta$ es negativo. Todos los puntos del disco describen el mismo desplazamiento angular durante el mismo intervalo de tiempo, de forma que todos tendrán la misma velocidad angular. Como el radián es una unidad adimensional, las dimensiones de la velocidad angular son las de la inversa del tiempo, $[T]^{-1}$. Frecuentemente, la rotación se describe mediante revoluciones por minuto (rev/min o rpm). Para convertir entre sí revoluciones, radianes y grados, basta recordar que

$$1\ \text{rev} = 2\pi\ \text{rad} = 360^\circ$$

PROBLEMA PRÁCTICO 9.1
Un disco CD-ROM está girando a 3000 revoluciones por minuto. ¿Cuál es la velocidad angular en radianes por segundo?

La aceleración angular es el ritmo de cambio de la velocidad angular. Si el ritmo de rotación de un cuerpo crece, la velocidad angular $|\omega|$ crece. (Si $|\omega|$ crece y la velocidad angular ω va en el sentido de giro de las agujas del reloj, $\Delta\omega$ también irá en el sentido de giro de las agujas del reloj.) El vector aceleración angular media

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad 9.3$$

DEFINICIÓN: ACELERACIÓN ANGULAR MEDIA

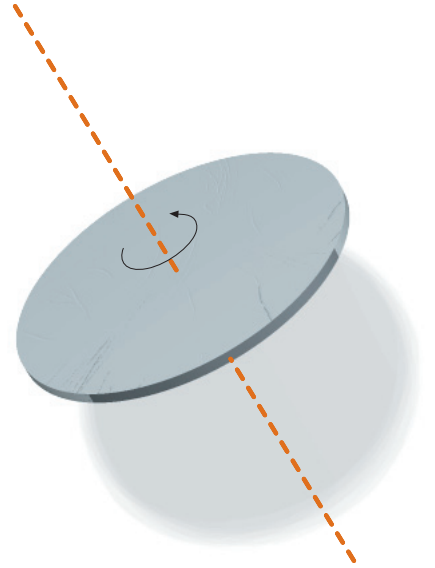


FIGURA 9.1

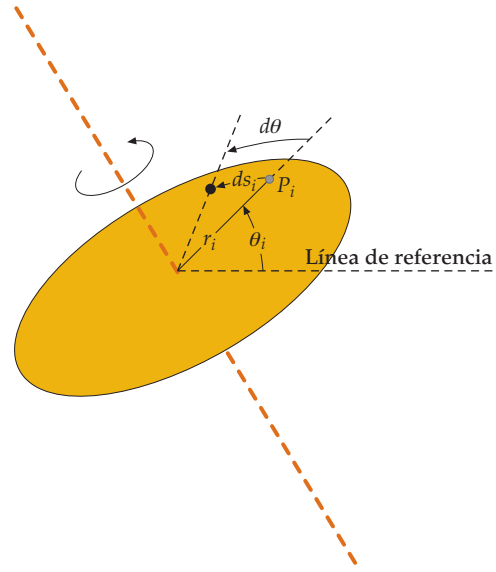


FIGURA 9.2

(Fred Habegger/Grant Heilman Photography, Inc.)

va siempre en la misma dirección que $\Delta\omega$. Si la tasa de rotación decrece, entonces tanto $\Delta\omega$ como α_m irán en la dirección contraria a ω.

La variación instantánea de la velocidad angular respecto al tiempo se denomina **aceleración angular** α

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad 9.4$$

DEFINICIÓN: ACELERACIÓN ANGULAR

Las unidades de la aceleración angular son radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2). La aceleración angular es positiva si la velocidad angular ω crece y negativa si ω decrece.

Las tres magnitudes angulares —desplazamiento angular θ, velocidad angular ω y aceleración angular α— son análogas a las magnitudes lineales —desplazamiento lineal x, velocidad lineal v_x y aceleración lineal a_x— que vimos al estudiar el movimiento unidimensional. Si la aceleración angular α es constante, podemos integrar ambos lados de $d\omega = \alpha\, dt$ (ecuación 9.4) para determinar ω:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad 9.5$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

donde la constante de integración ω_0 es la velocidad angular inicial. (La ecuación 9.5 es la ecuación de la cinemática de rotación análoga a la ecuación $v_x = v_{0x} + a_x t$.) Sustituyendo $d\theta/dt$ en la ecuación 9.5, obtenemos $d\theta = (\omega_0 + \alpha t)dt$. Integrando ambos lados de esta ecuación, resulta

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad 9.6$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

que es la ecuación análoga rotacional de $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$. De igual modo, eliminando t de las ecuaciones 9.5 y 9.6, se obtiene

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad 9.7$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

Las ecuaciones de cinemática de rotación con aceleración constante tienen la misma forma que las de aceleración lineal constante desarrolladas en el capítulo 2.

Trazas de estrellas en una foto de larga exposición del firmamento nocturno. *(David Malin/Anglo-Australian Telescope Board.)*

Ejemplo 9.1 Un reproductor de CD

Un disco compacto gira a partir del reposo a 500 rev/min en 5,5 s. (*a*) ¿Cuál es su aceleración angular, supuesta constante? (*b*) ¿Cuántas revoluciones da en 5,5 s? (*c*) ¿Qué distancia recorre un punto de la periferia del disco situado a 6 cm del centro durante los 5,5 s que tarda en alcanzar las 500 rev/min?

PLANTEAMIENTO El apartado (*a*) es análogo al problema lineal de determinar la aceleración cuando se conoce el tiempo y la velocidad final. El apartado (*b*) es análogo a la determinación del desplazamiento recorrido cuando se conoce el tiempo y la velocidad final. En el apartado (*c*), a diferencia de los apartados (*a*) y (*b*), intervienen tanto magnitudes de traslación (distancia recorrida) como de rotación (desplazamiento angular). Entonces, el apartado (*c*) no es análogo al problema unidimensional.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La aceleración angular está relacionada con las velocidades angulares inicial y final:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$$

2. Despejar α:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{500\ \text{rev/min}}{5{,}5\ \text{s}} \times \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}} \times \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}$$

$$= 9{,}52\ \text{rad/s}^2 = \boxed{9{,}5\ \text{rad/s}^2}$$

(*b*) 1. El desplazamiento angular está relacionado con el tiempo por la ecuación 9.6:

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}(9{,}52\ \text{rad/s}^2)(5{,}5\ \text{s})^2$$
$$= 144\ \text{rad}$$

2. Convertir radianes en revoluciones:

$$144\ \text{rad} \times \frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}} = 22{,}9\ \text{rev} = \boxed{23\ \text{rev}}$$

(*c*) La distancia recorrida Δs es igual al producto de r por el desplazamiento angular:

$$\Delta s = r\Delta\theta = (6{,}0\text{ cm})(144\text{ rad}) = 8{,}65\text{ m} = \boxed{8{,}7\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La velocidad angular media en revoluciones por minuto es 250 rev/min. En 5,5 s, el disco compacto gira (250 rev/60 s)(5,5) = 23 rev.

OBSERVACIÓN Un disco compacto es barrido por un láser que comienza en el radio más interno, de unos 2,4 cm, y se mueve hacia afuera hasta alcanzar el borde a 6,0 cm. A medida que el láser se mueve de este modo, la velocidad angular del disco disminuye de 500 rev/min a 200 rev/min, con lo cual la velocidad lineal (tangencial) del disco en el punto donde incide el rayo láser permanece constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.2 (*a*) Convertir 500 rev/min a rad/s. (*b*) Comprobar el resultado del apartado (*b*) del ejemplo utilizando la expresión $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$.

La velocidad lineal de una partícula sobre el disco es tangente a la trayectoria circular de la misma y su módulo es ds_i/dt. A partir de las ecuaciones 9.1 y 9.2 vemos que esta "velocidad tangencial" de la partícula está relacionada con la velocidad angular del disco por

$$v_t = \frac{ds_i}{dt} = \frac{r_i d\theta}{dt} = r_i\frac{d\theta}{dt}$$

de modo que

$$v_t = r_i\omega \qquad 9.8$$

De igual modo, la aceleración tangencial de una partícula sobre el disco es

$$a_t = \frac{dv_t}{dt} = r_i\frac{d\omega}{dt}$$

es decir

$$a_t = r\alpha \qquad 9.9$$

Cada partícula del disco tiene también una aceleración centrípeta que está dirigida hacia el interior a lo largo de la línea radial, y cuyo módulo es

$$a_c = \frac{v_t^2}{r_i} = \frac{(r_i\omega)^2}{r_i}$$

de modo que

$$a_c = r_i\omega^2 \qquad 9.10$$

! Las ecuaciones en las que aparecen tanto magnitudes de traslación como de rotación, tales como las ecuaciones 9.1, 9.8, 9.9 y 9.10 son válidas sólo si los valores de los ángulos están expresados en radianes.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.3

Un punto del borde de un disco compacto está a 6,0 cm del eje de rotación. Determinar la velocidad tangencial v_t, la aceleración tangencial a_t y la aceleración centrípeta a_c de dicho punto cuando el disco gira a la velocidad angular constante de 300 rev/min.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.4

Hallar la velocidad de traslación de un punto del CD del ejemplo 9.1 en (*a*) r = 2,4 cm cuando el disco gira a 500 rev/min y (*b*) r = 6 cm cuando el disco gira a 200 rev/min.

9.2 ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

La energía cinética de un objeto rígido que gira respecto a un eje fijo es la suma de la energía cinética de las partículas individuales que colectivamente constituyen el objeto. Así, la energía cinética de la partícula i, de masa m_i, es

$$K = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$$

Sumando la energía cinética de todas las partículas y teniendo en cuenta que $v_i = r_i\omega$, se obtiene

$$K = \sum(\tfrac{1}{2}m_i v_i^2) = \tfrac{1}{2}\sum_i(m_i r_i^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}(\sum_i m_i r_i^2)\omega^2$$

La suma del término de la derecha es el **momento de inercia** I del objeto respecto del eje de rotación

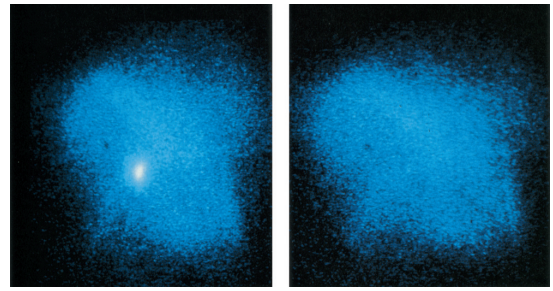
$$I = \sum_i m_i r_i^2 \qquad 9.11$$

DEFINICIÓN: MOMENTO DE INERCIA

Por lo tanto, la energía cinética resulta ser

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad 9.12$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN OBJETO EN ROTACIÓN



El pulsar del Cangrejo es una de las estrellas de neutrones que gira más rápido, aunque continuamente disminuye su velocidad de rotación. Da la impresión de encenderse (izquierda) y apagarse (derecha), de la misma forma que la luz de un faro, con la frecuencia de 30 destellos por segundo, aunque su periodo aumenta con la tasa de cambio de 10^{-5} s/año. La pérdida de la energía de rotación, que equivale a la potencia emitida por 100 000 soles, se muestra en forma de la luz emitida por los electrones acelerados en el campo magnético del pulsar. *(David Malin/ Anglo-Australian Telescope Board.)*

Ejemplo 9.2 Sistema de partículas en rotación

Un objeto consiste en cuatro partículas de masa m unidas mediante varillas ligeras sin masa que forman un rectángulo de lados $2a$ y $2b$, como se ve en la figura 9.3. El sistema gira alrededor de un eje situado en el plano de la figura, pasando por el centro. (*a*) Usando las ecuaciones 9.11 y 9.12, determinar la energía cinética de este objeto. (*b*) Comprobar el resultado calculando la energía cinética de cada partícula y sumándola hasta obtener la energía cinética total.

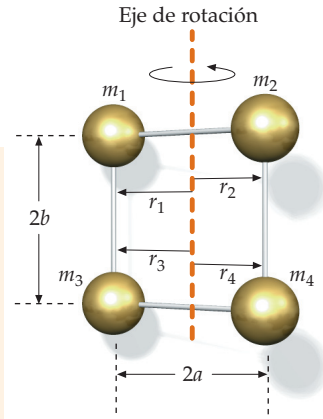


FIGURA 9.3

PLANTEAMIENTO Se sabe que el objeto está formado por partículas individuales; por lo tanto, se usa primero la ecuación 9.11 para calcular I y, posteriormente, la ecuación 9.12 para el cálculo de K.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Aplicar la definición de momento de inercia a las partículas discretas (ecuación 9.11): $I = \sum_i m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$

2. Las masas m_i y las distancias r_i son conocidas: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$; $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = a$

3. Aplicando estos valores se obtiene el momento de inercia: $I = ma^2 + ma^2 + ma^2 + ma^2 = 4ma^2$

4. Despejar la energía cinética usando la ecuación 9.12: $K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}4ma^2\omega^2 = \boxed{2ma^2\omega^2}$

(*b*) 1. Para determinar la energía cinética de la partícula i, primero tenemos que calcular su velocidad: $K_i = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2$

2. Las partículas se mueven en círculos de radio a. Determinar la velocidad de cada partícula: $v_i = r_i\omega = a\omega \quad (i = 1, \ldots, 4)$

3. Sustituir en el paso 1 del apartado (*b*): $K_i = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}ma^2\omega^2$

4. Cada partícula tiene la misma energía cinética. Para obtener la energía cinética total, se suman todas las energías: $K = \sum_{i=1}^{4} K_i = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 + \tfrac{1}{2}m_3 v_3^2 + \tfrac{1}{2}m_4 v_4^2 = 4(\tfrac{1}{2}ma^2\omega^2) = 2ma^2\omega^2$

5. Se compara con el resultado del apartado (*a*): Los dos cálculos dan el mismo resultado.

COMPROBACIÓN El hecho de que dos métodos den el mismo resultado es una muestra de que el resultado es correcto.

OBSERVACIÓN El momento de inercia I es independiente de la longitud b. El momento de inercia depende sólo de cómo de separadas del eje están las masas y no de en qué punto se encuentran a lo largo del eje.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.5 Determinar el momento de inercia de este sistema si la rotación se produce alrededor de un eje paralelo al del ejemplo anterior, pero que pasa a través de dos de las partículas, como se indica en la figura 9.4.

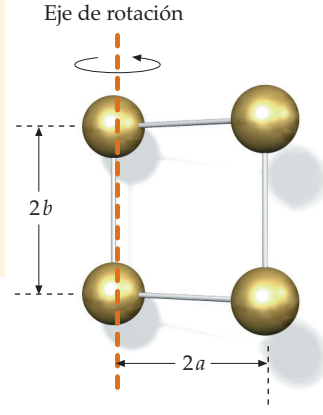


FIGURA 9.4

9.3 CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA

El momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a experimentar cambios en su movimiento de rotación respecto de un eje. Es el análogo rotacional de la masa. Cuanto más lejos está la masa del eje, mayor es el momento de inercia. Así, al contrario que la masa de un objeto, que es una propiedad del mismo objeto, su momento de inercia depende de la localización de su eje de rotación así como de la distribución de la masa del objeto.

! El momento de inercia depende de la distribución de la masa dentro del objeto respecto al eje de rotación.

SISTEMAS DE PARTÍCULAS DISCRETAS

El momento de inercia respecto a un eje determinado de aquellos sistemas formados por partículas discretas puede calcularse directamente mediante la ecuación 9.11. También podemos utilizar la ecuación 9.11 para obtener valores aproximados para el momento de inercia, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.3 Estimación del momento de inercia

Estimar el momento de inercia de una varilla uniforme delgada de longitud L y masa M respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de sus extremos. Realizar la estimación suponiendo que la varilla está constituida por tres masas puntuales, cada una de ellas con un tercio del total de su masa.

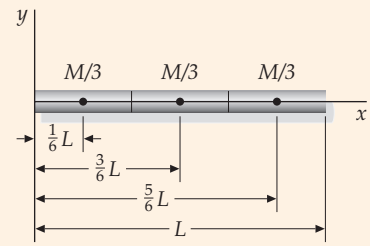


FIGURA 9.5

PLANTEAMIENTO Dividir la varilla en tres segmentos idénticos, cada uno de ellos con masa $\frac{1}{3}M$ y longitud $\frac{1}{3}L$, y aproximar cada segmento por una masa puntual localizada en su centro de masas. Aplicar $I = \Sigma m_i r_i^2$ (ecuación 9.11) para obtener el valor de I.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la varilla dividida en tres segmentos y superponer partículas puntuales en sus respectivos centros de masa (figura 9.5):

2. Aplicar la ecuación $I = \Sigma m_i r_i^2$ al sistema aproximado de tres partículas:
$$I = \Sigma m_i r_i^2 \approx m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

3. La masa de cada partícula es $\frac{1}{3}M$, y las distancias de cada una de ellas respecto al eje son $\frac{1}{6}L$, $\frac{3}{6}L$, y $\frac{5}{6}L$:
$$I \approx (\tfrac{1}{3}M)(\tfrac{1}{6}L)^2 + (\tfrac{1}{3}M)(\tfrac{3}{6}L)^2 + (\tfrac{1}{3}M)(\tfrac{5}{6}L)^2$$
$$= \frac{1}{3}M\left(\frac{1 + 3^2 + 5^2}{6^2}\right)L^2 = \boxed{\frac{35}{108}ML^2}$$

COMPROBACIÓN El valor exacto del momento de inercia de la varilla respecto a ese eje es $\frac{1}{3}ML^2$ (ver ejemplo 9.4). Un tercio es igual a 36/108, así que nuestro resultado difiere en sólo un 1% del exacto.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.6 La contribución al momento de inercia del tercio de varilla más alejado del eje es mayor que la contribución del tercio más cercano. ¿Cuántas veces mayor?

SISTEMAS CONTINUOS

Para calcular el momento de inercia en sistemas continuos, imaginemos que un objeto consiste en un continuo de elementos de masa muy pequeños. Así, la suma finita $\Sigma m_i r_i^2$ de la ecuación 9.11 se transforma en la integral

$$I = \int r^2 dm \qquad 9.13$$

donde r es la distancia al eje de rotación del elemento de masa dm. Para resolver esta integral, primero expresamos dm como una densidad por un elemento de longitud, área o volumen, como se realiza en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 9.4 Momento de inercia de una barra uniforme

Determinar el momento de inercia de una barra uniforme de longitud L y masa M alrededor de un eje perpendicular a la barra que pasa por uno de sus extremos.

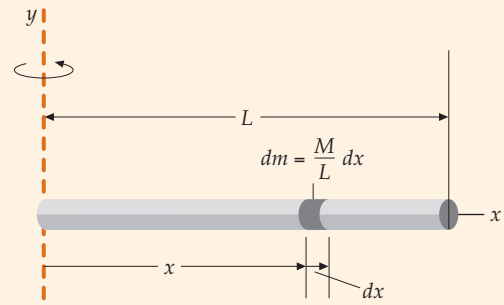


FIGURA 9.6

PLANTEAMIENTO Utilizar $I = \int r^2\,dm$ (ecuación 9.13) para calcular el momento de inercia respecto al eje especificado. Supongamos que la barra está orientada según el eje x con su extremo en el origen. Como la masa total M está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud L, la masa por unidad de longitud (densidad de masa lineal) es $\lambda = M/L$.

SOLUCIÓN

1. Hacer un dibujo donde se muestre la barra a lo largo del eje $+x$ con un extremo en el origen. Para calcular I respecto del eje y, escogemos un elemento diferencial de masa a una distancia x del eje y:
2. El momento de inercia viene dado por la integral: $$I = \int x^2\,dm$$
3. Para calcular la integral, relacionar primero dm con dx. Escribir dm en función de la densidad λ y dx: $$dm = \lambda\,dx = \frac{M}{L}dx$$
4. Sustituir y realizar la integración. Se eligen los límites de integración de tal forma que dm recorre la distribución de masa en la dirección creciente de x: $$I = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2\frac{M}{L}dx = \frac{M}{L}\int_0^L x^2\,dx$$ $$= \frac{M}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^L = \frac{M}{L}\frac{L^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3}ML^2}$$

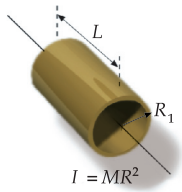
COMPROBACIÓN Este resultado es consistente con el resultado que hemos obtenido en el ejemplo 9.3.

OBSERVACIÓN El momento de inercia alrededor del eje z es también $\frac{1}{3}ML^2$, y el correspondiente al eje x es cero si suponemos que toda la masa está sobre el eje x.

Mediante el uso de la ecuación 9.13 se puede calcular I para objetos uniformes de formas diversas (véase la tabla 9.1). Algunos de esos cálculos los haremos aquí.

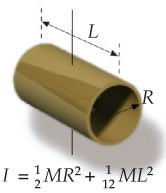
Tabla 9.1 Momentos de inercia de cuerpos uniformes de formas diversas

Cilindro hueco de pared delgada respecto a su eje



$I = MR^2$

Cilindro hueco respecto a un diámetro que pasa por su centro

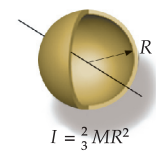


$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro

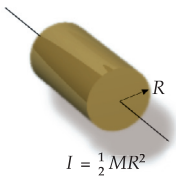
$I = \frac{1}{12}ML^2$

Esfera hueca respecto al diámetro (pared delgada)



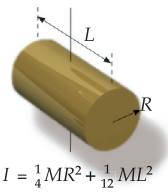
$I = \frac{2}{3}MR^2$

Cilindro sólido respecto a su eje



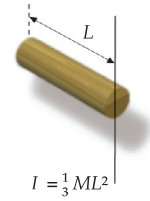
$I = \frac{1}{2}MR^2$

Cilindro sólido respecto a un diámetro que pasa por su centro



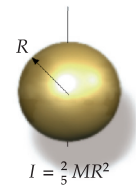
$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

Barra delgada respecto a un eje perpendicular que pasa por su extremo



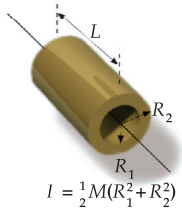
$I = \frac{1}{3}ML^2$

Esfera sólida respecto al diámetro



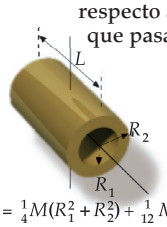
$I = \frac{2}{5}MR^2$

Cilindro hueco de pared gruesa respecto a su eje



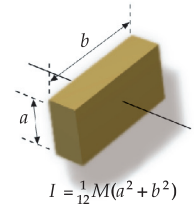
$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

Cilindro hueco de paredes gruesas respecto a un diámetro que pasa por su centro



$I = \frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{12}ML^2$

Paralepípedo sólido rectangular respecto a un eje que pasa por el centro perpendicular a la cara



$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

*Un disco es un cilindro cuya longitud L es despreciable. Poniendo $L = 0$, las fórmulas anteriores para cilindros sirven para los discos.

*** *Anillos respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro*** Consideremos un anillo de masa M y radio R (figura 9.7). El eje de rotación es el eje de simetría del anillo, perpendicular al plano del mismo, que atraviesa su centro. Toda la masa se encuentra a una distancia $r = R$ y el momento de inercia es

$$I = \int r^2\,dm = \int R^2\,dm = R^2\int dm = MR^2$$

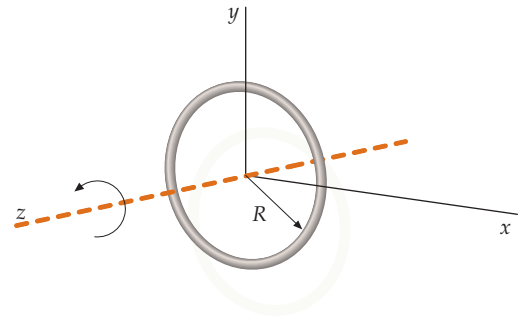


FIGURA 9.7

*** *Disco uniforme respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro*** En el caso de un disco uniforme de masa M y radio R es lógico que I deba ser menor que MR^2, ya que, a diferencia del anillo, prácticamente toda la masa está más cerca del eje que una distancia R. En la figura 9.8, cada elemento de masa es un anillo de radio r y espesor dr. El momento de inercia de cualquiera de estos elementos de masa es $r^2\,dm$. Como el disco es uniforme, la masa por unidad de área σ es constante, $\sigma = M/A$, donde $A = \pi R^2$ es el área del disco. Como el área de cada elemento es $dA = 2\,\pi r\,dr$, su masa será:

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{A}2\pi r\,dr$$

Así, tenemos,

$$I = \int r^2\,dm = \int_0^R r^2\sigma\,2\pi r\,dr = 2\pi\sigma\int_0^R r^3\,dr = 2\pi\,\frac{M}{A}\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^R$$
$$= \frac{2\pi M}{A}\,\frac{R^4}{4} = \frac{\pi M}{2\pi R^2}R^4 = \frac{1}{2}MR^2$$

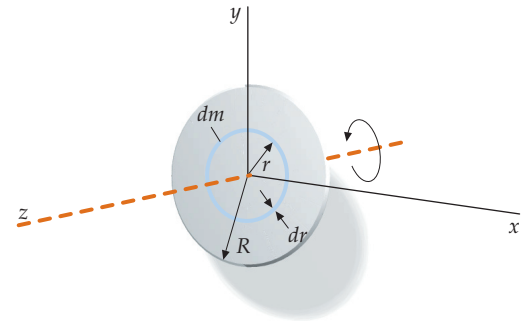


FIGURA 9.8

*** *Cilindro uniforme respecto al eje*** Consideremos que un cilindro está formado por una serie de discos, cada uno de masa dm y momento de inercia $dI = \frac{1}{2}(dm)R^2$ (figura 9.9). El momento de inercia del cilindro completo es, por lo tanto,

$$I = \int \frac{1}{2}dm\,R^2 = \frac{1}{2}R^2\int dm = \frac{1}{2}MR^2$$

donde M es la masa total del cilindro.

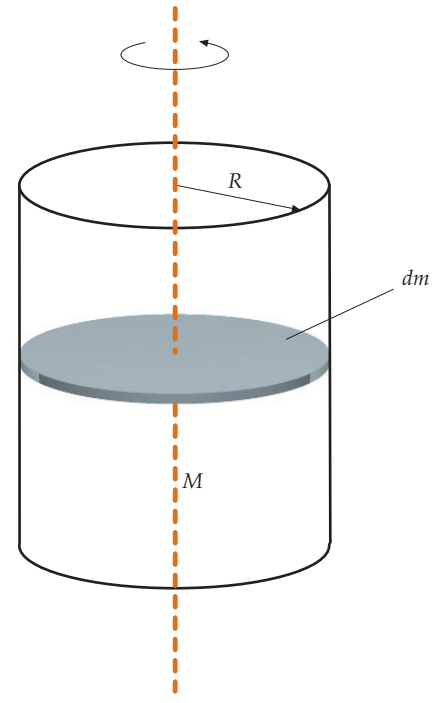


FIGURA 9.9

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 9.1

Considerar dos discos idénticos uniformes, A y B, de una pulgada de diámetro. Si se le hace un agujero de 1/4 de pulgada en el centro al disco B, ¿cuál de los dos tiene mayor momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del disco?

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 9.2

Considerar dos discos uniformes, A y B, de una pulgada de diámetro. Los discos son idénticos excepto que el B tiene una densidad ligeramente superior a la del A. Si se le hace un agujero de 1/4 de pulgada en el centro al disco B, se observa que ahora ambos discos tienen la misma masa. ¿Cuál de los dos tiene mayor momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del disco?

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Con frecuencia, es posible simplificar el cálculo de los momentos de inercia de diversos cuerpos utilizando el llamado **teorema de los ejes paralelos**, que relaciona el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masas de un objeto, con el momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero (figura 9.10). Sea I el momento de inercia y sea I_{cm} el momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de masas de un objeto de masa total M. Entonces, si h es la distancia entre ambos ejes, el teorema de los ejes paralelos establece que

$$I = I_{cm} + Mh^2 \qquad 9.14$$

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

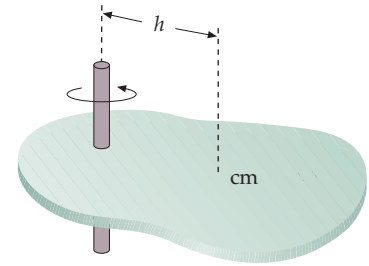


FIGURA 9.10 Un objeto gira alrededor de un eje paralelo a otro que pasa por el centro de masas y está a una distancia h del primero.

El ejemplo 9.2 y el ejercicio siguiente ilustran un caso especial de este teorema con $h = a$, $M = 4m$ e $I_{cm} = 4ma^2$.

Ejemplo 9.5 Aplicación del teorema de los ejes paralelos — *Inténtelo usted mismo*

Una barra uniforme de masa M y longitud L sobre el eje x (figura 9.11) tiene un extremo en el origen. Utilizando el teorema de los ejes paralelos, determinar el momento de inercia respecto del eje y', que es paralelo al eje y y que pasa por el centro de la barra.

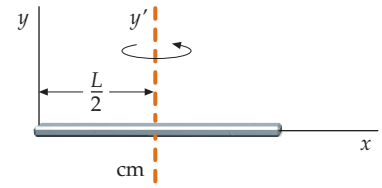


FIGURA 9.11

PLANTEAMIENTO Sabemos que $I = \frac{1}{3}ML^2$ respecto a un extremo y deseamos hallar I_{cm}. Utilizaremos el teorema de los ejes paralelos, siendo $h = \frac{1}{2}L$.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Aplicar el teorema de los ejes paralelos expresando I en función de I_{cm}.	$I = I_{cm} + Mh^2$ $I_y = I_{y'} + M(\frac{1}{2}L)^2$
2. Sustituir $\frac{1}{3}ML^2$ por I_y, I_{cm} por I_y, y despejar I_{cm}.	$I_{cm} = I_y - Mh^2 = \frac{1}{3}ML^2 - M(\frac{1}{2}L)^2 = \boxed{\frac{1}{12}ML^2}$

COMPROBACIÓN Determinar el momento de inercia mediante integración directa. Este cálculo es idéntico al del ejemplo 9.4 excepto que los límites de integración van ahora de $-\frac{1}{2}L$ a $+\frac{1}{2}L$. El resultado es

$$I = \int x^2\,dm = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\,dx = \frac{M}{L}\frac{1}{3}x^3\Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ML^2$$

que es el mismo que el resultado del paso 2.

OBSERVACIÓN Este resultado es el 25% del resultado del ejemplo 9.4, donde la barra uniforme gira alrededor de un eje que pasa por uno de sus extremos.

* DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Para demostrar el teorema de los ejes paralelos, consideraremos un objeto (figura 9.12) que está rotando alrededor de un eje fijo que no pasa por su centro de masas. La energía cinética K de dicho objeto será $\frac{1}{2}I\omega^2$ (ecuación 9.12), donde I es el momento de inercia respecto al eje fijo. Como vimos en el capítulo 8 (ecuación 8.7), la energía cinética de un sistema puede escribirse como la suma de su energía cinética traslacional ($\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$) más la energía relativa a su centro de masas. Para un objeto que está rotando, la energía relativa al centro de masas es $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, donde I_{cm} es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas (esto signi-

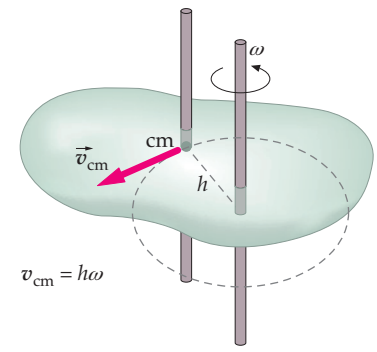


FIGURA 9.12

fica que es relativo a un sistema de referencia inercial en el cual el centro de masas está momentáneamente en reposo). Así, la energía cinética del objeto será

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

El centro de masas se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio h de forma que $v_{cm} = h\omega$. Sustituyendo $\frac{1}{2}I\omega^2$ por K y $h\omega$ por v_{cm}, tras simplificar, queda

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}Mh^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

Multiplicando ambos lados por $2/\omega^2$, se tiene

$$I = Mh^2 + I_{cm}$$

que completa la demostración del teorema de los ejes paralelos.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.7

Utilizando el teorema de los ejes paralelos demostrar que cuando comparamos los momentos de inercia de un objeto respecto a dos ejes paralelos, el momento de inercia es menor alrededor del eje más cercano al centro de masas.

Ejemplo 9.6 Un coche híbrido *Póngalo en su contexto*

Supongamos que usted conduce un coche híbrido experimental diseñado para ser utilizado en condiciones de tráfico denso en una ciudad. En un coche con frenos convencionales, cada vez que se accionan los frenos, la energía cinética del vehículo se disipa en forma de calor. En un vehículo híbrido, el mecanismo de freno transforma la energía cinética de traslación del movimiento del vehículo en energía de rotación de un volante inercial muy pesado. Cuando el coche recupera su velocidad de crucero, esta energía se transfiere de nuevo a energía cinética de traslación del vehículo. De hecho, el cilindro, de 100 kg, es un cilindro hueco que tiene un diámetro inferior R_1 de 25 cm, un diámetro exterior R_2 de 40 cm, y una velocidad máxima de rotación de 30 000 rev/min. Una noche oscura y desapacible, el coche agota su gasolina a 22,5 km de casa con el volante inercial girando a su velocidad máxima. ¿Tiene el vehículo suficiente energía almacenada para que usted y su nerviosa abuela lleguen a casa? (Cuando el coche se mueve a la velocidad mínima permitida en la autopista, 60 km/h, la resistencia del aire y el rozamiento por rodadura disipan energía a 10 kW.)

PLANTEAMIENTO La energía cinética se calcula directamente de la expresión $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

SOLUCIÓN

1. La energía cinética de rotación es:	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
2. Calcular el momento de inercia del cilindro hueco utilizando la tabla 9.1:	$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) = 11{,}1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$
3. Convertir ω en rad/s:	$\omega = 30\,000\ \text{rev/min} = 3142\ \text{rad/s}$
4. Aplicar estos valores para obtener la energía cinética:	$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = 54{,}9\ \text{MJ}$
5. La energía se disipa a 10 kW si se circula a la velocidad de 60 km/h. Para determinar la energía disipada durante los 22,5 km, primero tenemos que determinar el tiempo necesario para el viaje:	$\Delta x = v\,\Delta t$, por lo tanto, $\Delta t = 1350\ \text{s}$
6. La energía se disipa a 10 kW durante 1350 s. La energía disipada total es:	13,5 MJ
7. ¿Hay suficiente energía en el cilindro inercial?	54,9 MJ son aprovechables y 13,5 MJ se disipan. Sí, hay más que suficiente energía almacenada.

COMPROBACIÓN En un galón de gasolina (3,8 L) hay 130 MJ de energía. Si el motor tiene una eficiencia del 10%, para mover el vehículo sólo se aprovechan 13 MJ por galón de gasolina. Por lo tanto, a partir de los datos del ejercicio anterior se deduce que con un galón de gasolina se recorren 22,5 km.

Ejemplo 9.7 El pivote

Una barra delgada y uniforme de longitud L y masa M pivota por uno de sus extremos. Se coloca en posición horizontal y se deja en libertad (figura 9.13). Se supone que no hay rozamiento en el pivote. Determinar (*a*) la velocidad angular de la barra cuando alcanza su posición vertical, y (*b*) la fuerza que ejerce el pivote en ese instante. (*c*) ¿Qué velocidad angular inicial se necesita para que la barra alcance la posición vertical al final de su oscilación?

PLANTEAMIENTO El sistema está formado por todo lo que muestra la figura 9.13 más la Tierra. (*a*) Cuando la barra cae, su energía potencial disminuye y su energía cinética aumenta. Como el pivote no ejerce rozamiento, la energía mecánica permanece constante. La velocidad angular de la barra se determina a partir de la energía cinética de rotación. (*b*) Para determinar la fuerza sobre el pivote, se aplica la segunda ley de Newton al sistema. (*c*) Al igual que en el apartado (*a*), la energía mecánica permanece constante.

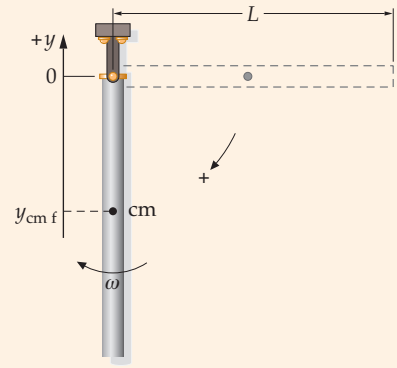


FIGURA 9.13

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de la barra que muestre sus configuraciones inicial y final (figura 9.13). Colocar un eje de coordenadas vertical de forma que la dirección hacia arriba sea positiva y con el origen en el eje de rotación:

2. Aplicar la conservación de la energía mecánica para relacionar las energías mecánicas inicial y final:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgy_{cm\,f} = \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgy_{cm\,i}$$

$$\frac{1}{2}I\omega_f^2 + Mg\left(-\frac{L}{2}\right) = 0 + 0$$

3. Despejar ω_f:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{I}}$$

4. Obtener I a partir de la tabla 9.1 y sustituir en el resultado del paso 3:

$$I = \tfrac{1}{3}ML^2 \quad \text{por tanto,} \quad \omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

(*b*) 1. Dibujar un diagrama de fuerzas en la barra cuando ésta pasa por la posición vertical (véase la figura 9.14):

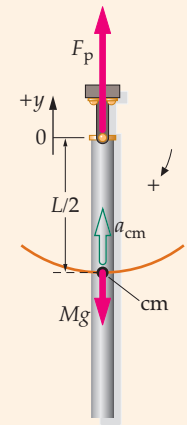


FIGURA 9.14

2. Aplicar la segunda ley de Newton a la barra y al pivote. Cuando la barra está en posición vertical por debajo del pivote, la aceleración del centro de masas va en la dirección centrípeta (positiva):

$$\Sigma F_{ext\,y} = Ma_{cm}$$

$$F_p - Mg = Ma_{cm}$$

3. Relacionar la aceleración del centro de masas con la velocidad angular usando $a_c = r\omega^2$. Sustituir el resultado del paso 4 del apartado (*a*) para ω y despejar a_{cm}:

$$a_{cm} = r\omega^2$$

$$a_{cm} = \frac{L}{2}\frac{3g}{L} = \frac{3}{2}g$$

4. Sustituir en el resultado del apartado 2 del apartado (*b*) y calcular F_p:

$$F_p = Mg + Ma_{cm} = Mg + M\tfrac{3}{2}g = \boxed{\tfrac{5}{2}Mg}$$

(*c*) 1. La velocidad angular inicial ω_i está relacionada con la energía cinética inicial:

$$E_{c\,i} = \tfrac{1}{2}I\omega_i^2$$

2. Dibujar un diagrama de la barra que muestre las configuraciones inicial y final (figura 9.15). Poner un eje de coordenadas vertical con el origen en el eje de rotación y la dirección positiva dirigida hacia arriba:

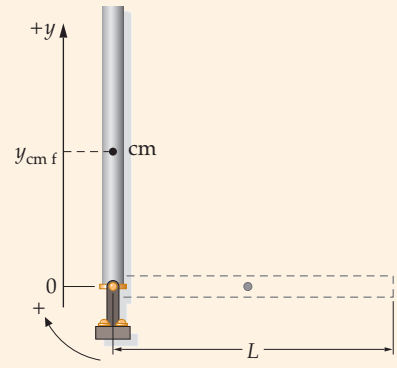


FIGURA 9.15

3. Aplicar la conservación de la energía mecánica para relacionar la energía cinética inicial con la posición final:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgy_{cm\,f} = \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgy_{cm\,i}$$

$$0 + Mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega_i^2 + 0$$

4. Despejar la velocidad angular inicial:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \boxed{\sqrt{\frac{3g}{L}}}$$

COMPROBACIÓN No es una coincidencia que las respuestas de los apartados (*a*) y (*c*) sean idénticas. La disminución de la energía potencial en el apartado (*a*) es igual al incremento de la energía potencial en el apartado (*c*). Así, el incremento de la energía cinética del apartado (*a*) es igual a la disminución de la energía cinética en el apartado (*c*).

Ejemplo 9.8 El torno y el cubo

(D. S. Kerr/ Visuals Unlimited.)

En la cubierta de un pozo hay un torno cuyo tambor tiene de masa m_w y radio R. Prácticamente toda la masa del tambor se concentra a una distancia R del eje. Alrededor del tambor se enrolla un cable de masa m_c y de longitud L, de donde cuelga un cubo de agua de masa m_b. Cuando el cubo está arriba, a usted le resbalan las manos y el cubo cae por el pozo, desenrollando el cable. ¿A qué velocidad se mueve el cubo cuando ha caído una distancia d ($d < L$)?

PLANTEAMIENTO Cuando el cubo con el agua cae, la energía mecánica del sistema tambor-cable-cubo-Tierra permanece constante. Se supone que la energía potencial inicial es cero. Cuando el cubo ha caído una distancia d, el centro de masas del cable ha bajado $d/2$. Y dado que la parte del cable que cuelga se mueve con velocidad v y el cable no se deforma, todo el cable debe moverse a velocidad v. Determinamos v a partir de la conservación de la energía mecánica.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un diagrama del sistema en sus configuraciones inicial y final, como se muestra en la figura 9.16. Incluir un eje y con su origen a la misma altura del eje del torno:

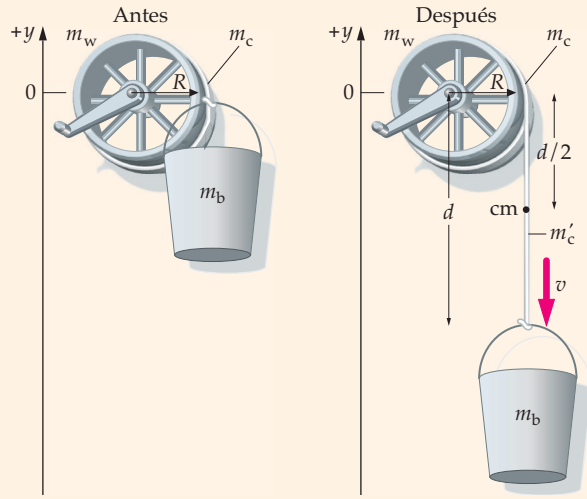


FIGURA 9.16

2. Aplicar el principio de conservación de la energía mecánica. Asignar el valor cero de energía potencial al instante en el que el cubo está a la máxima altura:

$$U_f + K_f = U_i + K_i$$
$$= 0 + 0 = 0$$

3. Escribir una expresión para la energía potencial total para el instante en que el cubo ha caído una distancia d. Sea m'_c la masa de cable que cuelga:

$$U_f = U_{bf} + U_{cf} + U_{wf}$$
$$= m_b g(-d) + m'_c g\left(-\frac{d}{2}\right) + 0$$
$$= -(m_b + \tfrac{1}{2}m'_c)gd$$

4. Expresar la energía cinética total para el instante en que el cubo está cayendo con velocidad v. Todo el cable y la masa del torno se mueven con la misma velocidad v:

$$K_f = K_{fc} + K_{fb} + K_{fw}$$
$$= \tfrac{1}{2}m_c v^2 + \tfrac{1}{2}m_b v^2 + \tfrac{1}{2}m_w v^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(m_c + m_b + m_w)v^2$$

5. Sustituir en la ecuación de conservación de la energía (paso 2) y despejar v:

$$-(m_b + \tfrac{1}{2}m'_c)gd + \tfrac{1}{2}(m_c + m_b + m_w)v^2 = 0$$
$$\text{por lo tanto,} \quad v = \sqrt{\frac{(2m_b + m'_c)gd}{(m_c + m_b + m_w)}}$$

6. Suponer que el cable es uniforme y expresar m'_c en función de m_c, d, y L:

$$\frac{m'_c}{d} = \frac{m_c}{L} \Rightarrow m'_c = \frac{d}{L}m_c$$

7. Sustituir el resultado del paso 6 en el resultado del paso 5:

$$v = \boxed{\sqrt{\frac{(2m_b L + m_c d)gd}{(m_c + m_b + m_w)L}}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 7 tiene las dimensiones correctas de velocidad, ya que aceleración por longitud tiene dimensiones de longitud al cuadrado dividido por tiempo al cuadrado.

OBSERVACIÓN Todo el torno se mueve a velocidad v. La energía cinética se puede expresar entonces como $\frac{1}{2}m_w v^2$. Sin embargo, se puede expresar también como $\frac{1}{2}I_w\omega^2$, donde $I_w = m_w R^2$ y $\omega = v/R$. Con estas sustituciones, $K_w = \frac{1}{2}I_w\omega^2 = \frac{1}{2}m_w R^2(v^2/R^2) = \frac{1}{2}m_w v^2$.

9.4 LA SEGUNDA LEY DE NEWTON EN LA ROTACIÓN

Para hacer que una tapa dé vueltas, hay que hacerla girar. En la figura 9.17 se muestra cómo se hace girar un disco mediante la aplicación de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ ejercidas en los bordes del disco y en la dirección tangencial. La dirección y sentido de las fuerzas y sus puntos de aplicación son importantes. Si las mismas fuerzas se aplican en la dirección radial (figura 9.18*a*), el disco no gira. Además, si las mismas fuerzas se aplican en la dirección tangencial, pero en puntos cercanos al centro del disco (figura 9.18*b*), el disco no ganará velocidad angular tan rápidamente.

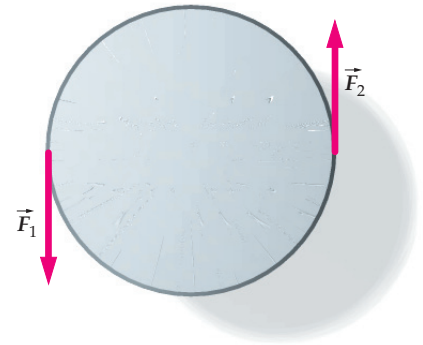


FIGURA 9.17

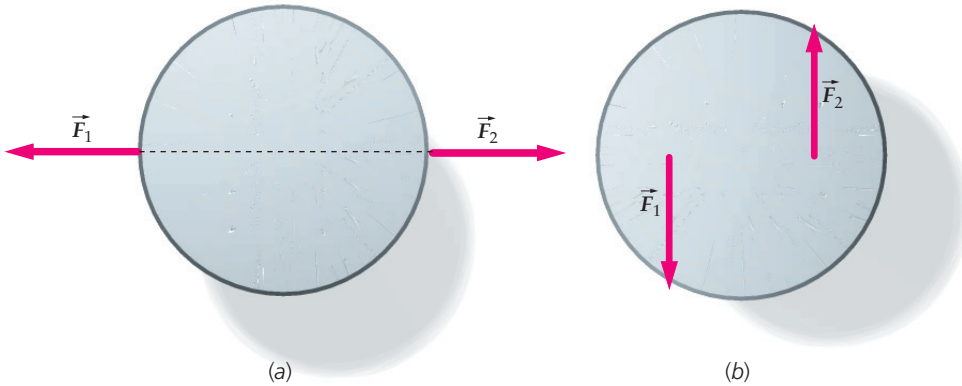


FIGURA 9.18

La figura 9.19 muestra una partícula de masa m atada a un extremo de una barra sin masa y rígida, de longitud r. Hay un eje perpendicular a la barra y que pasa por su extremo, alrededor del cual la barra puede girar libremente. En consecuencia, la partícula sólo se mueve en un círculo de radio r. Asimismo, se aplica sobre la partícula una fuerza $\vec{F}$. Si se aplica la segunda ley de Newton a la partícula y se toman componentes en la dirección tangencial, se obtiene

$$F_t = ma_t$$

donde $F_t = F \operatorname{sen} \phi$ es la componente tangencial de $\vec{F}$ y a_t la componente tangencial de la aceleración. Deseamos obtener una ecuación que incorpore las magnitudes angulares. Sustituyendo $r\alpha$ por a_t (ecuación 9.9) y multiplicando los dos términos por r, se obtiene

$$rF_t = mr^2\alpha \qquad 9.15$$

El producto rF_t es el **momento (o torque) τ** de la fuerza respecto al eje de rotación, es decir,

$$\tau = F_t r \qquad 9.16$$

(El momento respecto a un punto se define, como magnitud vectorial, en el capítulo 10. Cuando nos referimos a momento de una fuerza respecto a un eje, queremos decir la componente del momento paralela al eje.)

Sustituyendo en la ecuación 9.15, se obtiene

$$\tau = mr^2\alpha \qquad 9.17$$

Un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo es simplemente un conjunto de partículas individuales, cada una de las cuales está obligada a moverse en una trayectoria circular con la misma velocidad angular ω y aceleración α. Aplicando la ecuación 9.17 a la partícula i de ese conjunto, queda

$$\tau_{i\,\text{neta}} = m_i r_i^2 \alpha$$

donde $\tau_{i\,\text{neta}}$ es el momento debido a la fuerza neta sobre la partícula i. Sumando para todas las partículas los dos términos de las expresiones anteriores, nos da

$$\sum \tau_{i\,\text{neta}} = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha = I\alpha \qquad 9.18$$

En el capítulo 8, vimos que la fuerza resultante que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema, ya que las fuer-

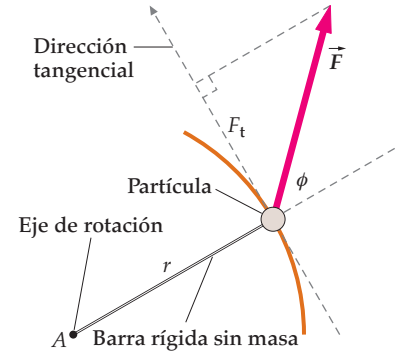


FIGURA 9.19

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Trigonometría

zas internas (las que se ejercen mutamente las partículas del sistema) se anulan por pares. El tratamiento de los momentos internos que se ejercen las partículas entre sí dentro de un sistema conduce a un resultado semejante, es decir, el momento resultante que actúa sobre un sistema es igual al momento externo neto que actúa sobre el sistema. Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 9.17 en la forma

$$\tau_{\text{neta ext}} = \sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \qquad 9.19$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN

Esta es la segunda ley de Newton aplicada a la rotación, análoga a la aplicada al movimiento lineal ($\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$).

CÁLCULO DE MOMENTOS

La figura 9.20 muestra una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un objeto que está obligado a girar respecto a un eje fijo A, que no se muestra, y es perpendicular al papel. La dirección tangencial positiva se muestra en el punto de aplicación de la fuerza, siendo r la distancia radial desde este punto de aplicación hasta A. El momento τ debido a esta fuerza respecto del eje A es $\tau = F_t r$ (ecuación 9.16). En principio, la expresión $F_t r$ es todo lo que se necesita para calcular el momento. Sin embargo, muchas veces los cálculos son más simples si se usan expresiones alternativas para el momento, como la que podemos extraer de la figura:

$$F_t = F \operatorname{sen}\phi$$

donde ϕ es el ángulo entre la dirección radial y la dirección de la fuerza. Así, podemos expresar el momento como $\tau = F_t r = (F \operatorname{sen}\phi) r$. La línea de acción de una fuerza es la línea paralela a la fuerza que pasa por el punto de aplicación de la fuerza. De la figura 9.21 podemos ver que $r \operatorname{sen}\phi = \ell$, donde el **brazo de palanca** ℓ es la distancia perpendicular entre A y la línea de acción. En consecuencia, el momento viene dado también por $\tau = F\ell$. Poniendo las tres expresiones juntas, se obtiene

$$\tau = F_t r = F \operatorname{sen}\phi\, r = F\ell \qquad 9.20$$

EXPRESIONES EQUIVALENTES DEL MOMENTO

MOMENTO DEBIDO A LA GRAVEDAD

Como ya se ha dicho, se puede considerar que un objeto macroscópico es un conjunto de partículas microscópicas puntuales, de tal forma que sobre cada una de ellas actúa una fuerza gravitatoria microscópica. Cada una de estas fuerzas ejerce un momento microscópico respecto a un eje determinado, y el momento gravitatorio neto sobre el objeto es la suma de estos momentos microscópicos. El momento gravitatorio neto se calcula considerando que el peso total del objeto (la suma de todas las fuerzas gravitatorias) actúa sobre un único punto: el **centro de gravedad**. Consideremos un objeto (figura 9.22) obligado a girar respecto de un eje horizontal A que va en la dirección perpendicular al papel. Elegimos, tal como se muestra en la figura 9.22, el eje z del sistema de coordenadas de modo que coin-

(Richard Menga/ Fundamental Photographs.)

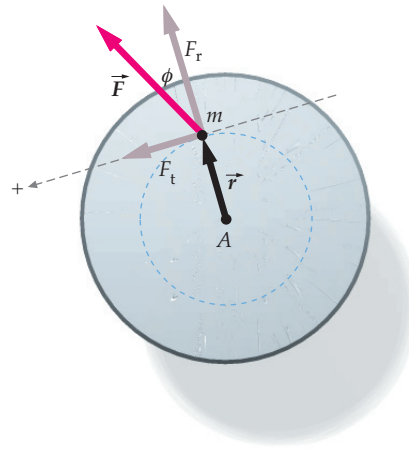


FIGURA 9.20 La fuerza $\vec{F}$ produce un momento $F_t r$ respecto del eje que pasa por el centro.

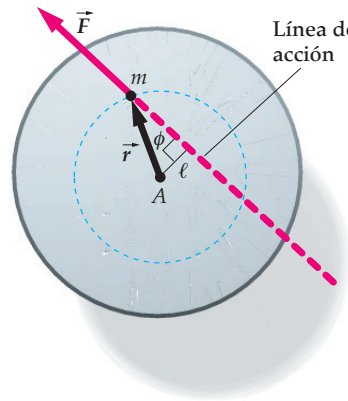
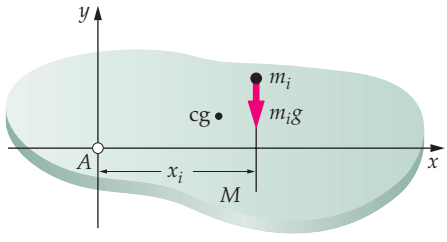
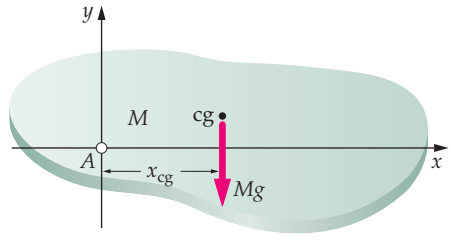


FIGURA 9.21 La fuerza $\vec{F}$ produce un momento $F\ell$, alrededor del centro.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 9.22 El centro de gravedad coincide con el centro de masas si el objeto está en un campo gravitatorio uniforme.

cida con el eje A, y elegimos el eje x según la dirección horizontal del papel y el eje y según la dirección vertical. El momento de una partícula de masa m_i debido a la gravedad es $m_i g x_i$, donde x_i es el brazo de palanca de la fuerza $m_i\vec{g}$. El momento gravitatorio neto de un objeto es la suma de los momentos gravitatorios de las partículas que lo forman, es decir, $\tau_{\text{grav neto}} = \Sigma m_i g x_i$. Si $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todo el objeto, g puede sacarse como factor común fuera de la suma, lo cual nos lleva a $\tau_{\text{grav neto}} = (\Sigma m_i x_i)g$. La suma entre paréntesis es Mx_{cg} (véase la ecuación 5.13). Sustituyendo, se obtiene

$$\tau_{\text{grav neto}} = Mgx_{\text{cg}} \qquad 9.21$$

MOMENTO DE LA GRAVEDAD

El momento debido a un campo gravitatorio uniforme se calcula como si la fuerza gravitatoria actuara globalmente en el centro de gravedad.

! El centro de gravedad coincide con el centro de masas si el objeto está en un campo gravitatorio uniforme.

9.5 APLICACIONES DE LA SEGUNDA LEY DE NEWTON A LA ROTACIÓN

En esta sección veremos algunas aplicaciones de la segunda ley de Newton a la rotación, expresada por la ecuación 9.19.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Aplicación de la segunda ley de Newton para la dinámica de la rotación

PLANTEAMIENTO Las aceleraciones angulares para cuerpos rígidos se pueden determinar mediante los diagramas de fuerzas y la segunda ley de Newton de la rotación: $\tau_{\text{neto ext}} = \Sigma\tau_{\text{ext}} = I\alpha$. Si $\tau_{\text{neto ext}}$ es constante, entonces la aceleración angular será constante. Los intervalos de tiempo y posiciones angulares, velocidades y aceleraciones angulares también pueden ser determinados a partir de esas ecuaciones.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas mostrando el objeto tal y como es, no como un punto.
2. Dibujar cada vector fuerza a lo largo de la línea de acción de dicha fuerza.
3. Indicar la dirección positiva sobre el diagrama (sentido horario o antihorario) para las rotaciones.

COMPROBACIÓN Asegurarse de que los signos de los resultados son consistentes con la dirección elegida para la rotación en sentido positivo.

Ejemplo 9.9 Una bicicleta estática

Una forma práctica de hacer ejercicio sin desplazarse del lugar puede conseguirse mediante una bicicleta situada en un soporte, de tal modo que la rueda trasera gira libremente. Al pedalear, la cadena aplica al piñón una fuerza de 18 N a una distancia de $r_s = 7$ cm del eje de la rueda. Consideremos la rueda como un anillo ($I = MR^2$) de radio $R = 35$ cm y masa 2,4 kg. ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda al cabo de 5 s?

PLANTEAMIENTO La velocidad angular puede determinarse a partir de la aceleración angular, y ésta se deduce a partir de la segunda ley de Newton de la rotación. Como las fuerzas son constantes, los momentos de las fuerzas también lo serán y podemos aplicar las ecuaciones de la aceleración angular constante. Obsérvese que $\vec{F}$ actúa en la dirección de la cadena y que, por lo tanto, la línea de fuerza es tangente al piñon, y el brazo de palanca será el radio r_s del piñón (véase figura 9.23).

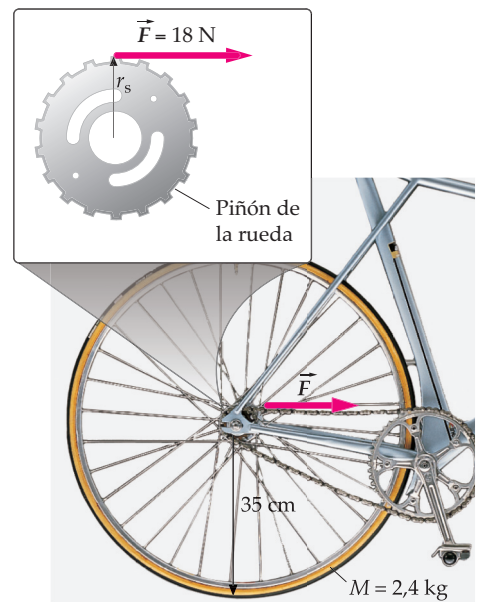


FIGURA 9.23

SOLUCIÓN

1. La velocidad angular está relacionada con la aceleración angular y el tiempo: $\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t$
2. Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de rotación para relacionar α con el momento neto de las fuerzas y el momento de inercia: $\tau_{\text{neto}} = I\alpha$
3. El único momento de fuerza que actúa sobre el sistema es la fuerza aplicada F con el brazo de palanca r_s: $\tau_{\text{neto}} = Fr_s$
4. Sustituir el momento de la fuerza por este valor, y el momento de inercia por MR^2: $\alpha = \dfrac{\tau_{\text{neto}}}{I} = \dfrac{Fr_s}{MR^2}$
5. Sustituir en el resultado del paso 1 y despejar y calcular ω pasados 5 s: $\omega = \alpha t = \dfrac{Fr_s}{MR^2}t = \dfrac{(18\text{ N})(0{,}070\text{ m})}{(2{,}4\text{ kg})(0{,}35\text{ m})^2}5{,}0\text{ s} = 21{,}4\text{ rad/s} = \boxed{21\text{ rad/s}}$

COMPROBACIÓN La velocidad tangencial de la llanta es $R\omega = (0{,}36\text{ m})(21\text{ rad/s}) = 7{,}6\text{ m/s}$, que es un resultado lógico. (Un atleta de 100 metros lisos puede llegar a los 10 m/s.)

Ejemplo 9.10 Una barra uniforme con un pivote en un extremo

Una barra delgada y uniforme de longitud L y masa M pivota sobre un extremo. Se coloca en posición horizontal y se deja en libertad. Se supone que no hay rozamiento en el pivote. Determinar (*a*) la aceleración angular de la barra inmediatamente después de dejarla en libertad, y (*b*) la fuerza F_A ejercida por el pivote sobre la barra en ese instante.

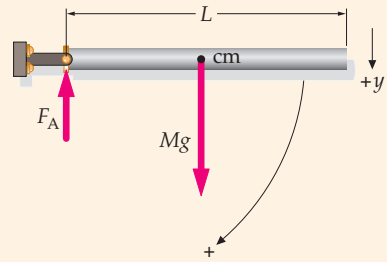


FIGURA 9.24

PLANTEAMIENTO Se determina la aceleración angular a partir de la segunda ley de Newton para la rotación (ecuación 9.19). A continuación, se determina la fuerza F_A a partir de la segunda ley de Newton para sistemas de partículas (ecuación 5.23). La aceleración tangencial del centro de masas está relacionada con la aceleración angular (ecuación 9.6) y la aceleración centrípeta del centro de masas está relacionada con la velocidad angular (ecuación 9.7).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la barra (figura 9.24):

2. Escribir la segunda ley de Newton para la rotación: $\Sigma\tau_{\text{ext}} = I\alpha$
3. Calcular el momento debido a la gravedad alrededor del eje dado. La barra es uniforme, por lo que su centro de masas está en su centro, es decir, a una distancia $L/2$ de su eje: $\tau_{\text{grav}} = Mg\dfrac{L}{2}$
4. Buscar el momento de inercia respecto al extremo de la barra en la tabla 9.1: $I = \frac{1}{3}ML^2$
5. Para calcular α, sustituir estos valores en la ecuación del paso 2: $\alpha = \dfrac{\tau_{\text{grav}}}{I} = \dfrac{Mg(L/2)}{(1/3)ML^2} = \boxed{\dfrac{3g}{2L}}$

(*b*) 1. Escribir la segunda ley de Newton para la barra:
$$\Sigma F_{\text{ext}\,y} = Ma_{\text{cm}\,y}$$
$$Mg - F_A = Ma_{\text{cm}\,y}$$

2. Usar la relación $a_c = r\omega^2$ para determinar $a_{\text{cm c}}$. Inmediatamente después de soltar la barra, $\omega = 0$: $a_{\text{cm c}} = r_{\text{cm}}\omega^2 = \dfrac{L}{2}\omega^2 = 0$
3. Ahora tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas, α, $a_{\text{cm}\,y}$, y F_A. Usar la relación $a_t = r\alpha$ para obtener una ecuación que relacione $a_{\text{cm}\,y}$ con α:
$$a_t = r\alpha$$
$$a_{\text{cm}\,y} = a_{\text{cm t}} = r_{\text{cm}}\alpha = \frac{L}{2}\frac{3g}{2L} = \frac{3}{4}g$$
4. Sustituir los resultados del paso 5 apartado (*a*) y del paso 1 apartado (*b*) en el resultado del paso 3 apartado (*b*) y despejar F_A:
$$Mg - F_A = M\tfrac{3}{4}g$$
$$\text{por lo tanto,}\quad F_A = \boxed{\tfrac{1}{4}Mg}$$

COMPROBACIÓN El eje ejerce una fuerza hacia arriba sobre la barra. En consecuencia, cabe esperar que después de dejarla caer, la aceleración del centro de masas sea algo infeior a g. El resultado del paso 3 del apartado (b) confirma este rozamiento.

OBSERVACIÓN Inmediatamente después de soltar la barra, la aceleración del centro de masas apunta verticalmente hacia abajo. Dado que la fuerza externa neta y la aceleración deben ir en la misma dirección, se deduce que $\vec{F}_A$ en ese instante no puede tener una componente horizontal.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.8 Una pequeña moneda de masa $m << M$ se sitúa en la parte alta de la barra en su centro. Determinar (a) la aceleración de la moneda y (b) la fuerza que ejerce sobre la barra justamente después de dejar la barra en libertad.

ROTACIÓN SIN DESLIZAMIENTO

Hay muchas situaciones físicas en las cuales una cuerda se enrolla a una rueda o cilindro en rotación. Si la cuerda está tensa y no se desliza, su velocidad lineal debe ser igual a la velocidad tangencial v_t de los puntos de la periferia de la rueda:

$$v_t = R\omega \qquad 9.22$$

CONDICIÓN PARA v_t Y ω SIN DESLIZAMIENTO

donde v_t es la velocidad tangencial de la cuerda y $R\omega$ la velocidad tangencial de la periferia de la rueda. La rueda tiene un radio R y gira con velocidad angular ω. Derivando la condición de rotación sin deslizamiento respecto al tiempo, tenemos

$$a_t = R\alpha \qquad 9.23$$

CONDICIÓN PARA a_t Y α SIN DESLIZAMIENTO

donde a_t es la aceleración tangencial de la cuerda y α es la aceleración angular de la rueda.

(*Fundamental Photographs.*)

Ejemplo 9.11 Tensión en una cuerda

Se sujeta un objeto de masa m a una cuerda ligera enrollada alrededor de una rueda de polea de momento de inercia I y radio R. La rueda puede girar sin rozamiento y la cuerda no se desliza por su garganta. La polea parte del reposo. Empieza a rotar cuando el objeto desciende y la cuerda se desenrolla. Hallar la tensión de la cuerda y la aceleración del cuerpo.

PLANTEAMIENTO En este sistema, el objeto desciende con una aceleración hacia abajo constante a, mientras la rueda gira con aceleración angular constante, α (figura 9.25). Para calcular α, se aplica la segunda ley de Newton para la rotación a la rueda, y para obtener a, se aplica la segunda ley de Newton al objeto. Usando la condición de ausencia de deslizamiento se relacionan a_t y α.

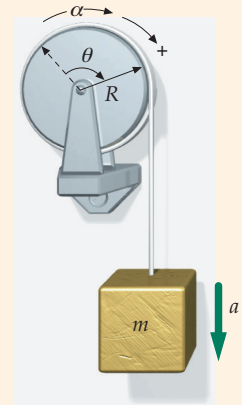


FIGURA 9.25

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la rueda de la polea, representando cada vector fuerza con su extremo en el punto de aplicación de la fuerza. Poner los símbolos en todas las fuerzas dibujadas e indicar la dirección positiva de la rotación (figura 9.26):

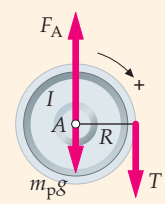


FIGURA 9.26

2. La única fuerza que ejerce un momento sobre la rueda es la tensión T, cuyo brazo de palanca es R. Aplicar la ley de Newton al movimiento de rotación, que relaciona T con la aceleración angular α:

$$\Sigma\tau_{ext} = I\alpha$$
$$TR = I\alpha$$

3. Dibujar un diagrama de fuerzas para el objeto suspendido (figura 9.27) y, a continuación aplicar la segunda ley de Newton para relacionar T con la aceleración lineal a_t:

$$\Sigma F_{ext\,y} = ma_y$$
$$mg - T = ma_t$$

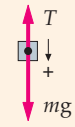


FIGURA 9.27

4. Tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas T, a_t y α. Una tercera ecuación es la condición no deslizante que relaciona a_t y α:

$$a_t = R\alpha$$

5. Tenemos ahora tres ecuaciones que nos permiten determinar T, a_t y α. Para despejar T, se usa el resultado del paso 2 con el objetivo de obtener una expresión para α, y usamos el resultado del paso 3 para obtener una expresión para a_t. Sustituir estas expresiones en el resultado del paso 4 y despejar T:

$$\frac{mg - T}{m} = R\frac{TR}{I}$$
$$\text{con lo que } T = \boxed{\frac{mg}{1 + (mR^2/I)}}$$

6. Sustituir este resultado para T en el resultado del paso 3 y despejar a_t:

$$mg - \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} = ma_t$$
$$\text{por lo tanto, } a_t = \boxed{\frac{1}{1 + (I/mR^2)}g}$$

COMPROBACIÓN Veamos un par de situaciones límites. Si $I = 0$, el objeto caería libremente y la cuerda estaría floja; nuestros resultados dan $T = 0$, $a_t = g$. ¿Qué ocurre si $I \to \infty$? Para $I >> mR^2$, nuestras ecuaciones dan $T \approx mg$ y $a_t \approx 0$.

Ejemplo 9.12 Dos bloques y una polea I — *Conceptual*

El sistema mostrado en la figura 9.28 parte del reposo. La masa de la polea no es despreciable, pero sí lo es su rozamiento. La cuerda no se desliza por la garganta de la polea. Si $m_1 > m_2$, ¿qué puede decirse de las tensiones T_1 y T_2?

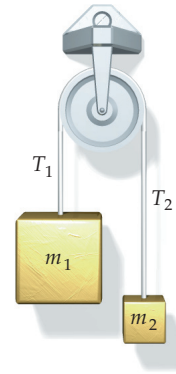


FIGURA 9.28

PLANTEAMIENTO Después de dejar libre el sistema, la masa m_1 se acelerará hacia abajo, mientras que m_2 lo hará hacia arriba y la polea se acelerará angularmente en sentido contrario a las agujas del reloj. Aplicar la segunda ley de Newton para cada masa y para las rotaciones de la polea.

SOLUCIÓN

1. Como m_1 se acelera hacia abajo, la fuerza neta sobre ella debe apuntar hacia abajo:

$$m_1g > T_1$$

2. Como m_2 se acelera hacia arriba, la fuerza neta sobre ella debe apuntar hacia arriba:

$$T_2 > m_2g$$

3. Como la aceleración angular de la polea va en sentido contrario a las agujas del reloj, el momento neto debe tener la misma dirección. Como los brazos de palanca son iguales, a mayor momento mayor tensión:

$$\tau_1 > \tau_2 \quad \text{por lo tanto,} \quad T_1 > T_2$$

4. Combinando los resultados, se tiene:

$$\boxed{m_1g > T_1 > T_2 > m_2g}$$

COMPROBACIÓN Si T_1 no fuera mayor que T_2, la aceleración angular de la polea no iría en sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejemplo 9.13 Dos bloques y una polea II — *Inténtelo usted mismo*

Dos bloques están conectados por una cuerda que pasa por una polea de radio R y momento de inercia I. El bloque de masa m_1 se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento; el bloque de masa m_2 está suspendido de la cuerda (figura 9.29). Determinar la aceleración a de los bloques y las tensiones T_1 y T_2, suponiendo que la cuerda no se desliza por la polea.

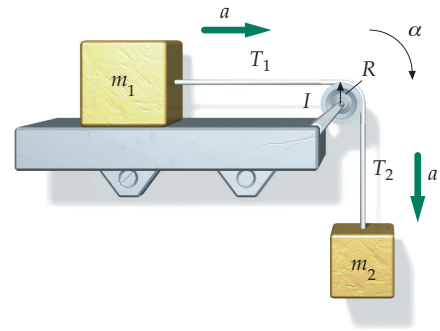


FIGURA 9.29

PLANTEAMIENTO En este problema, las tensiones T_1 y T_2 no son iguales, porque existe rozamiento entre la cuerda y la polea (figura 9.29). (De otro modo la polea no giraría.) Obsérvese que T_2 ejerce un momento en sentido horario y T_1 un momento antihorario sobre la polea. Utilizar la segunda ley de Newton para el movimiento de cada bloque y para el movimiento de rotación de la polea. A continuación, relacionar a y α por la condición de ausencia de deslizamiento.

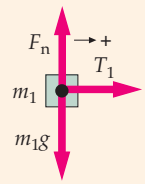
SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para cada bloque y para la polea por separado (figura 9.30). Observar que el centro de masas de la polea no acelera, de modo que el soporte debe ejercer una fuerza sobre el eje F_s que equilibre la resultante de la fuerza de la gravedad y las fuerzas ejercidas por la cuerda.
2. Aplicar la segunda ley de Newton a cada bloque.
3. Aplicar la segunda ley de Newton al movimiento de rotación de la rueda de la polea.
4. Tenemos tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Para obtener la cuarta ecuación, usar la condición de ausencia de deslizamiento de forma que se pueda relacionar a y α. La aceleración de los bloques ha de ser igual a la aceleración tangencial de la cuerda y a la de la garganta de la polea.
5. Ahora tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que todo lo que queda es álgebra. Realizar los pasos necesarios para obtener a, T_1 y T_2. *(Sugerencia: Para determinar* a, *buscar las expresiones para T_1 y T_2 a partir de los resultados del paso 2. Sustituirlas en el resultado del paso 3 hasta encontrar una ecuación con las incógnitas* a *y* α. *Usar el resultado del paso 4 para eliminar* α *y calcular* a.*)*

Respuestas



$T_1 = m_1 a; \quad m_2 g - T_2 = m_2 a;$

$T_2 R - T_1 R = I\alpha$

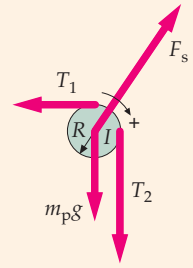
$a_t = R\alpha$

$a = a_t = R\alpha$

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + (I/R)^2} g$$

$$T_1 = m_1 a = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + (I/R)^2} m_1 g$$

$$T_2 = m_2(g - a) = \frac{m_1 + (I/R)^2}{m_1 + m_2 + (I/R)^2} m_2 g$$



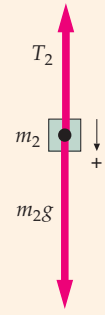


FIGURA 9.30

COMPROBACIÓN Si $I = 0, T_1 = T_2$, y la aceleración es $a = m_2 g/(m_1 + m_2)$, como era de esperar. Si I es muy grande, $I/R^2 >> (m_1 + m_2)$, será $T_1 \approx 0$, $T_2 \approx m_2 g$, y $a \approx 0$.

¡ No suponga que la tensión de una cuerda que pasa por la garganta de una polea es la misma a cada lado de la polea. Si así fuera, la cuerda no haría momento y la polea no cambiaría su ritmo de rotación. Utilice dos símbolos distintos, como T_1 y T_2, para las tensiones en cada lado.

POTENCIA

Cuando hacemos girar un objeto realizamos trabajo sobre él, incrementando su energía cinética. Consideremos una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un objeto en rotación. Cuando el objeto gira un ángulo $d\theta$, el punto de aplicación de la fuerza recorre una distancia $ds_i = r_i\, d\theta$, y la fuerza realiza un trabajo:

$$dW = F_t\, ds = F_t r\, d\theta = \tau\, d\theta$$

donde τ es el momento ejercido por la fuerza $\vec{F}$, y F_t es la componente tangencial de $\vec{F}$. En general, el trabajo realizado por un momento τ cuando el objeto gira un ángulo pequeño $d\theta$ es

$$dW = \tau\, d\theta \qquad 9.24$$

TRABAJO

El ritmo al que el momento realiza trabajo es la potencia de entrada del momento

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

o sea,

$$P = \tau\omega \qquad 9.25$$

POTENCIA DE ROTACIÓN

Las ecuaciones 9.24 y 9.25 son análogas a las expresiones $dW = F_{\parallel}\, d\ell$ y $P = F_{\parallel} v$ del movimiento lineal.

Ejemplo 9.14 Momento ejercido por el motor de un automóvil

A 4500 rev/min, el momento máximo que produce el motor 5,4L V8 de un Ford GT 2005 es de 678 N · m. Determinar la potencia de salida del motor si opera en estas condiciones de momento máximo.

PLANTEAMIENTO La potencia es igual al producto del momento por la velocidad angular, datos que nos proporciona el enunciado del problema. Debe expresarse ω en rad/s para obtener la potencia en watts.

SOLUCIÓN

1. Escribir la potencia en función de τ y ω: $P = \tau\omega$
2. Convertir las rev/min en rad/s: $\omega = 4500\ \text{rev/min} = 471\ \text{rad/s}$
3. Calcular la potencia: $P = (678\ \text{N}\cdot\text{m})\cdot(471\ \text{rad/s}) = \boxed{320\ \text{kW}}$

COMPROBACIÓN Esta potencia de salida equivale aproximadamente a 429 caballos de vapor, lo que resulta razonable para este tipo de motores.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.9 La potencia máxima producida por el motor Ford GT es de 500 caballos de vapor a 6000 rev/min. ¿Cuál es el momento cuando el motor opera a su potencia máxima?

Existen muchos paralelismos entre el movimiento lineal en una dirección y el movimiento rotacional alrededor de un eje fijo. Las similitudes entre las fórmulas pueden encontrarse en la tabla 9.2. Las fórmulas son las mismas, pero los símbolos cambian.

Ejemplo 9.15 Deteniendo una rueda

Las especificaciones de la noria *El ojo de Londres* afirman que es capaz de detenerse sin que los compartimentos de los pasajeros recorran un arco mayor de 10 m durante el frenado. La velocidad de operación de la noria de 1600 toneladas y 135 m de diámetro es de 2 rev/h. (*a*) Estimar el momento necesario para parar la noria. (*b*) Determinar la magnitud de la fuerza de frenado si se aplica directamente sobre la llanta.

PLANTEAMIENTO El trabajo realizado sobre la noria es igual a su cambio de energía cinética. Utilizamos la ecuación 9.24 para calcular el trabajo en términos del momento. Casi toda la masa está cerca del perímetro de la noria. Esto sugiere una forma sencilla de hallar el momento de inercia de la noria. La fuerza de rozamiento se puede calcular a partir del momento.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Igualamos el trabajo al cambio de energía cinética: $W = \Delta K$

2. Utilizando $dW = \tau d\theta$ (ecuación 9.24), relacionamos el trabajo con el momento y el desplazamiento angular:

$$W = \tau\,\Delta\theta$$

3. Utilizando $ds = rd\theta$ (ecuación 9.2), relacionamos el desplazamiento angular con el arco recorrido s:

$$s = r\,\Delta\theta \;\Rightarrow\; \Delta\theta = \frac{s}{r} = \frac{10\text{ m}}{67{,}5\text{ m}} = 0{,}148\text{ rad}$$

4. La masa está concentrada cerca del perímetro de la noria; así $I \approx mr^2$:

$$I = mr^2 = (1{,}6 \times 10^6\text{ kg})(67{,}5\text{ m})^2$$
$$= 7{,}29 \times 10^9\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

5. Sustituimos en el paso 1 y despejamos el momento; la velocidad angular es 2 rev/h = $3{,}49 \times 10^{-3}$ rad/s:

$$\tau\,\Delta\theta = 0 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2$$

$$\text{por tanto, } \tau = -\frac{I\omega_0^2}{2\,\Delta\theta} = -\frac{(7{,}29 \times 10^9\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(3{,}49 \times 10^{-3}\text{ rad/s})^2}{2\,(0{,}148\text{ rad})}$$

$$= \boxed{-3{,}0 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m}}$$

(*b*) 1. La línea de acción de la fuerza de rozamiento es tangente al perímetro de la noria; así, el brazo de palanca es igual al radio de la noria.

$$|\tau| = FR$$

$$F = \frac{|\tau|}{R} = \frac{3{,}0 \times 10^5\text{ N}\cdot\text{m}}{67{,}5\text{ m}} = \boxed{4{,}4 \times 10^3\text{ N}}$$

COMPROBACIÓN A partir de la expresión del momento del apartado 5a se observa que el momento y el desplazamiento angular tienen signos opuestos. Este resultado es lógico: el momento en este caso debe oponerse al movimiento de la noria durante el frenado.

OBSERVACIÓN La fuerza de frenado de $1{,}3 \times 10^5$ N es aproximadamente igual al peso de media tonelada.

Tabla 9.2 Analogías de los movimientos rotacional y lineal

Movimiento rotacional		Movimiento lineal	
Desplazamiento angular	$\Delta\theta$	Desplazamiento	Δx
Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Velocidad	$v_x = \frac{dx}{dt}$
Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Aceleración	$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Ecuaciones de aceleración angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	Ecuaciones de aceleración constante	$v_x = v_{0x} + a_x t$
	$\Delta\theta = \omega_m\,\Delta t$		$\Delta x = v_{mx}\,\Delta t$
	$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$		$v_{mx} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)$
	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$		$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$		$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x$
Momento de una fuerza	τ	Fuerza	F_x
Momento de inercia	I	Masa	m
Trabajo	$dW = \tau\,d\theta$	Trabajo	$dW = F_x\,dx$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia	$P = \tau\omega$	Potencia	$P = F_x v_x$
Momento angular*	$L = I\omega$	Momento lineal	$p_x = mv_x$
Segunda ley de Newton	$\tau_{neto} = I\alpha = \frac{dL}{dt}$	Segunda ley de Newton	$F_{neta\,x} = ma_x = \frac{dp_x}{dt}$

*El momento angular se introduce en el capítulo 10.

9.6 OBJETOS RODANTES

RODAMIENTO SIN DESLIZAMIENTO

Cuando un carrete como el de la figura 9.31 rueda sin deslizamiento por la superficie inclinada de la figura, sus puntos de contacto con la superficie están instantáneamente en reposo y el carrete gira respecto a un eje de rotación que pasa a través del punto de contacto. Esto se puede apreciar en la figura, ya que las zonas con movimiento rápido aparecen borrosas, mientras que aquellas zonas con movimiento más lento aparecen un poco más definidas. En la figura 9.32 se representa cómo una rueda de radio R gira sin deslizarse por una superficie plana. El punto P de la rueda, tal como se muestra, se mueve con una velocidad

$$v = r\omega \qquad 9.26$$

CONDICIÓN DE NO DESLIZAMIENTO PARA LA VELOCIDAD

donde r es la distancia perpendicular desde P al eje de rotación. El centro de masas de la rueda se mueve con velocidad

$$v_{cm} = R\omega \qquad 9.27$$

CONDICIÓN DE NO DESLIZAMIENTO PARA v_{cm}

Obsérvese que para un punto en el extremo superior de la rueda, $r = 2R$, de forma que ese punto se mueve al doble de velocidad que su centro de masas.

Derivando a ambos lados de la ecuación 9.27, se obtiene

$$a_{cm} = R\alpha \qquad 9.28$$

CONDICIÓN DE NO DESLIZAMIENTO PARA LA ACELERACIÓN DEL CENTRO DE MASAS

Cuando la cuerda a la que está atado un yo-yo se desenrolla, se dan las mismas condiciones de ausencia de deslizamiento que en el ejemplo de la rueda.

Consideremos una rueda de radio R que rueda sobre una superficie plana sin rozamiento. Cuando la rueda gira el ángulo ϕ (figura 9.33), el punto de contacto entre la rueda y el plano se mueve una distancia s, relacionada con ϕ por la expresión

$$s = R\phi \qquad 9.29$$

CONDICIÓN DE NO DESLIZAMIENTO PARA EL DESPLAZAMIENTO

Si la rueda está rodando en una superficie horizontal, el centro de masas de la rueda siempre queda sobre el punto de contacto, por lo que se mueve también una distancia $R\phi$.

En el capítulo 8, vimos (ecuación 8.7) que la energía cinética de un sistema puede expresarse como la suma de la energía cinética de traslación del movimiento del centro de masas ($\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$) más la energía cinética relativa al centro de masas. Para un objeto que gira, la energía cinética relativa vale $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Entonces, la energía cinética total será

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \qquad 9.30$$

ENERGÍA CINÉTICA TOTAL DE UN OBJETO RODANTE

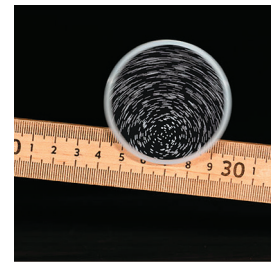


FIGURA 9.31 Un carrete con puntos marcados rueda sin deslizamiento sobre una regla inclinada. La garganta del carrete está en contacto con la regla. El tiempo de exposición de esta fotografía fue lo suficientemente grande como para que los puntos aparecieran como rayas, cuyas longitudes crecen con la distancia al eje de rotación. *(Loren Winters/Visuals Unlimited.)*

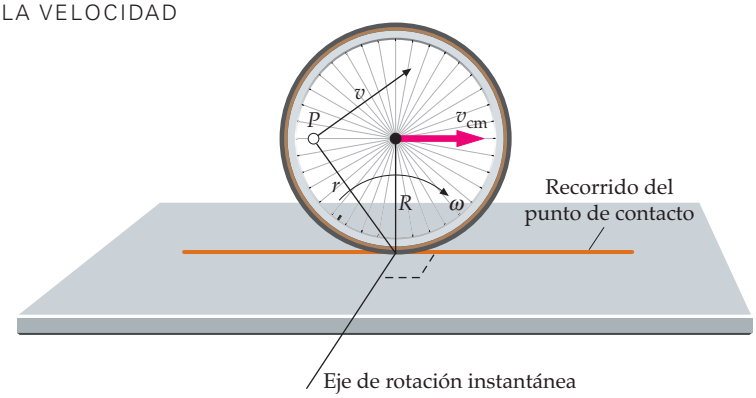


FIGURA 9.32 Conforme la rueda de bicicleta rueda hacia la derecha, el punto P se mueve hacia arriba y hacia la derecha. El punto alcanza la altura máxima cuando pasa por encima del centro de la rueda.

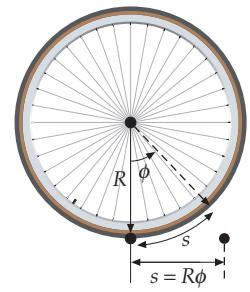


FIGURA 9.33

¡ Recordar que los cuerpos rodantes tienen tanto energía cinética de traslación como de rotación.

Ejemplo 9.16 Una bola de bolera

Una bola de bolera de radio 11 cm y masa $M = 7{,}2$ kg rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal a 2 m/s. Después, sube por una pendiente sin deslizamiento hasta una altura h antes de alcanzar momentáneamente el reposo y volver rodando hacia atrás. Considérese la bola como una esfera uniforme. Determinar h.

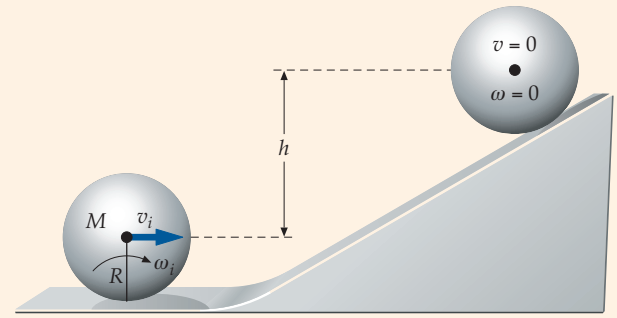


FIGURA 9.34

PLANTEAMIENTO Como no hay deslizamiento en la rodadura, no hay energía disipada en forma de rozamiento cinético. No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema Tierra-bola-superficie. La energía mecánica se conserva. La energía cinética inicial, que es la energía cinética de traslación del centro de masas, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, más la energía cinética de rotación respecto al centro de masas, $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, se convierte en energía potencial Mgh. Como la esfera rueda sin deslizamiento, las velocidades lineal y angular están relacionadas por $v_{cm} = R\omega$.

SOLUCIÓN

1. Hacer un esquema que muestre la bola en sus posiciones inicial y final (figura 9.34):

2. No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema, luego el trabajo por las fuerzas externas es cero y, como no hay deslizamiento, tampoco se disipa energía cinética por rozamiento. Entonces, la energía mecánica es constante:

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$
$$0 = \Delta E_{mec} + 0$$

3. Aplicar la conservación de la energía mecánica:

$$U_f + K_f = U_i + K_i$$
$$Mgh + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}Mv_{cm\,i}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega_i^2$$

4. A partir de $\omega_i = v_{cm\,i}/R$ e $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ sustituir ω e I_{cm}, y despejar h:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm\,i}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\frac{v_{cm\,i}^2}{R^2} = \frac{7}{10}Mv_{cm\,i}^2$$

$$\text{por lo tanto,}\quad h = \frac{7v_{cm\,i}^2}{10g} = 0{,}2854\text{ m} = \boxed{29\text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN La altura alcanzada es independiente de la masa. Este resultado es lógico porque tanto la energía cinética como la potencial son proporcionales a la masa.

OBSERVACIÓN La altura h también es independiente del radio R de la bola. Este resultado se debe a que $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$ y $\omega_i = v_{cm\,i}/R$, de forma que en el producto $I_{cm}\omega_i^2$, se cancelan los radios.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.10 Determinar la energía cinética inicial de la bola.

Ejemplo 9.17 Jugando al billar

Un taco de billar golpea la bola horizontalmente a una distancia d por encima del centro de la bola (figura 9.35). Determinar el valor de d para el cual la bola de billar rodará sin deslizamiento desde el comienzo. Expresar la respuesta en función del radio R de la bola.

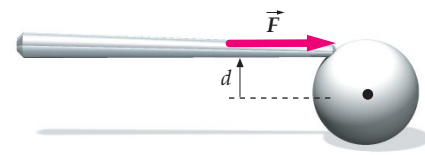


FIGURA 9.35

PLANTEAMIENTO Las líneas de acción de las fuerzas del peso y normal pasan por el centro de masas, por lo que no ejercen momento respecto al centro de masas. La fuerza de rozamiento es mucho más pequeña que la del golpe del palo y puede despreciarse. Si el taco golpea contra la bola al nivel del centro, ésta comenzará inicialmente a moverse sin rotación. Si el golpe se verifica por debajo del centro, comenzará con rotación hacia atrás. Sin embargo, si se impacta a una distancia d del nivel del centro de la bola, ésta el gira hacia delante, con la aceleración hacia delante adecuada, para rodar sin deslizarse desde el comienzo, es decir, se cumple la condición no deslizante. El valor de d determina la relación entre el momento y la fuerza ejercidos sobre la bola y, por lo tanto, la relación entre su aceleración angular α y la aceleración lineal a_{cm}. La aceleración lineal a_{cm} es F/m, independiente de d. Para que la bola ruede sin deslizamiento desde el principio, determinaremos α y a_{cm}; después, teniendo en cuenta que $a_{cm} = R\alpha$ (condición no deslizante), calcularemos d.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la bola de billar (figura 9.36). Se supone que el rozamiento entre la bola y la mesa es despreciable, por lo que no se incluye la fuerza de rozamiento:

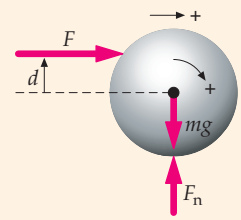


FIGURA 9.36

2. El momento de la fuerza respecto al centro de la bola es igual al producto de F por d: $\tau = Fd$
3. Aplicar la segunda ley de Newton para sistemas y la correspondiente análoga para rotación respecto al centro de la bola: $F = ma_{cm}$ y $\tau = I_{cm}\alpha$
4. La condición no deslizante relaciona a_{cm} y α: $a_{cm} = R\alpha$
5. Sustituir en la relación obtenida en el paso 4 las expresiones de α y a_{cm} obtenidas en los pasos 2 y 3: $\frac{F}{m} = R\frac{Fd}{I_{cm}}$
6. Determinar el momento de inercia a partir de la tabla 9.1 y despejar y calcular d: $d = \frac{I_{cm}}{mR} = \frac{\frac{2}{5}mR^2}{mR} = \boxed{\frac{2}{5}R}$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 6 es razonable, pues el valor obtenido para d es mayor que cero pero menor que R, como era de esperar.

OBSERVACIÓN Si se golpea en un punto más alto que $2R/5$ o más bajo que $2R/5$, la bola rodará y se deslizará. En el juego de billar a veces se desea que la bola se deslice. El rodamiento con deslizamiento se trata en la siguiente subsección.

(Scott Goldsmith/ Stone/Getty.)

Cuando un objeto rueda por un plano inclinado hacia abajo, su centro de masas se acelera. El análisis de este problema se simplifica gracias a un importante teorema concerniente al centro de masas:

> La segunda ley de Newton del movimiento de rotación es válida en cualquier sistema inercial de referencia. También será válida en sistemas de referencia relacionados con el centro de masas, incluso cuando éste se mueve con aceleración, si el momento de inercia y todos los momentos de fuerzas se calculan con respecto al eje que pase por el centro de masas. Es decir:
>
> $$\tau_{\text{neto cm}} = I_{cm}\alpha \qquad 9.31$$

Esta ecuación es la misma que la 9.19 con la salvedad de que aquí el momento y el momento de inercia se calculan respecto de un sistema de referencia que se mueve con el centro de masas. Cuando el centro de masas acelera (caso de una bola que desciende por un plano inclinado), el sistema de referencia centro de masas no es inercial y, por lo tanto, no podemos esperar necesariamente que la segunda ley de Newton aplicada a la rotación se cumpla. Sin embargo, se cumple en este caso especial.

Ejemplo 9.18 Aceleración de una bola que rueda sin deslizarse

Una bola maciza uniforme de masa m y radio R, rueda hacia abajo sin deslizarse por un plano inclinado un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Determinar la aceleración del centro de masas y la fuerza de rozamiento.

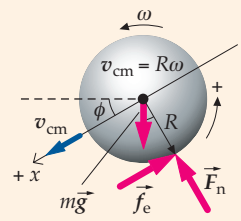


FIGURA 9.37

PLANTEAMIENTO Según la segunda ley de Newton, la aceleración del centro de masas es igual a la fuerza neta dividida por la masa. Las fuerzas que actúan son el peso $m\vec{g}$ hacia abajo, la fuerza normal $\vec{F}_n$ que equilibra la componente normal del peso, y la fuerza de rozamiento $\vec{f}_e$ que actúa hacia arriba sobre el plano inclinado (figura 9.37). Cuando el objeto acelera por el plano inclinado, para mantener la condición de ausencia de deslizamiento, su velocidad angular tiene que aumentar. Esta aceleración angular requiere un momento ex-

terno neto alrededor del eje que pasa por su centro de masas. Para determinar α, se utiliza la segunda ley de Newton para la rotación. La condición de ausencia de deslizamiento relaciona α y a_{cm}.

SOLUCIÓN

1. Aplicar la segunda ley de Newton para un sistema a lo largo del eje x:
$$\Sigma F_x = ma_{cm\,x}$$
$$mg \operatorname{sen}\phi - f_e = ma_{cm}$$

2. Aplicar la segunda ley de Newton para un movimiento de rotación, considerando rotaciones alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro de masas y es perpendicular a $\vec{v}_{cm}$. Los brazos de palanca de las fuerzas gravitacional y normal son cero, por lo que no producirán momentos sobre las bola:
$$\Sigma\tau_i = I_{cm}\alpha$$
$$f_e R + 0 + 0 = I_{cm}\alpha$$

3. Relacionar a_{cm} y α usando la condición de ausencia de deslizamiento:
$$a_{cm} = R\alpha$$

4. Se tiene tres ecuaciones con tres incógnitas. Despejar f_e en el paso 1 y α en el paso 3, sustituir el resultado en el resultado del paso 2 y despejar a_{cm}:
$$(mg \operatorname{sen}\phi - ma_{cm})R = I_{cm}\frac{a_{cm}}{R}$$
$$\text{por lo tanto,}\quad a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\phi}{1 + \dfrac{I_{cm}}{mR^2}}$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 1 y despejar f_e:
$$f_e = mg \operatorname{sen}\phi - ma_{cm} = mg \operatorname{sen}\phi - \frac{mg \operatorname{sen}\phi}{1 + \dfrac{I_{cm}}{mR^2}} = \frac{mg \operatorname{sen}\phi}{1 + \dfrac{mR^2}{I_{cm}}}$$

6. Para una esfera sólida, $I_{cm} = \frac{2}{5}mR^2$ (véase la tabla 9.1). Sustituir el resultado en los resultados de los pasos 4 y 5:
$$a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\phi}{1 + \frac{2}{5}} = \boxed{\frac{5}{7}g \operatorname{sen}\phi}$$
$$f_e = \frac{mg \operatorname{sen}\phi}{1 + \frac{5}{2}} = \boxed{\frac{2}{7}mg \operatorname{sen}\phi}$$

COMPROBACIÓN Si el plano inclinado no ejerciera rozamiento sobre la bola, ésta se deslizaría sobre él, sin rotar, descendiendo con una aceleración $g \operatorname{sen}\phi$. Con rozamiento, cabe esperar que la aceleración sea inferior a $g \operatorname{sen}\phi$, lo que se muestra en el resultado del paso 6.

OBSERVACIÓN Como la bola rueda sin deslizamiento, el rozamiento es estático. Obsérvese que el resultado es independiente del coeficiente de rozamiento estático, en tanto sea lo suficientemente grande para que la bola no se deslice.

Los resultados de los pasos 5 y 6 del ejemplo 9.18 se aplican a cualquier objeto que esté rodando sin deslizamiento con el centro de masas en el centro geométrico. En estos objetos, $I_{cm} = \beta mR^2$, donde $\beta = \frac{2}{5}$ para una esfera, $\frac{1}{2}$ para un cilindro sólido, 1 para un cilindro hueco, etc. (los valores de beta se obtienen de las expresiones para I de la tabla 9.1). Para estos objetos, los resultados de los pasos 5 y 6 pueden escribirse como

$$f_e = \frac{mg \operatorname{sen}\phi}{1 + \beta^{-1}} \qquad 9.32$$

$$a_{cm} = \frac{g \operatorname{sen}\phi}{1 + \beta} \qquad 9.33$$

La aceleración lineal de cualquier objeto que rueda hacia abajo por un plano inclinado es menor que $g \operatorname{sen}\theta$, debido a la fuerza de rozamiento dirigida en sentido ascendente. Obsérvese que estas aceleraciones son independientes de la masa y del radio de los objetos. Es decir, todas las esferas sólidas que ruedan sin deslizarse al bajar por el mismo plano inclinado tienen la misma aceleración. Sin embargo, si dejamos en libertad simultáneamente una esfera, un cilindro y un anillo en la parte superior de un plano inclinado, y todos ellos ruedan sin deslizamiento, la esfera llegará en primer lugar a la base porque posee la mayor aceleración; en segundo lugar llegará el cilindro y el último será el anillo (figura 9.38). Si un bloque se desliza sin rozamiento por el mismo plano inclinado, alcanzará el fondo antes que los tres objetos rodantes. Sorprendentemente, una lata de gaseosa que ruede sin desli-

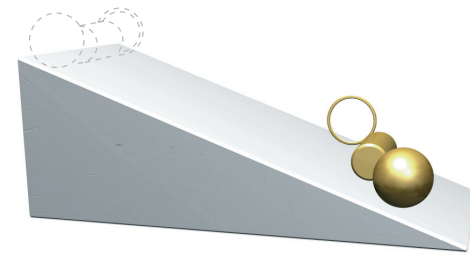


FIGURA 9.38

zarse llegará al final del plano inclinado por lo menos tan rápido como el bloque sin rozamiento. Esto se debe a que el líquido de la lata no rota con la lata, de forma que el momento de inercia efectivo se debe sólo a la lata y no al líquido.

Como el rozamiento es estático, no produce trabajo y no hay disipación de energía mecánica. Por tanto, puede utilizarse el principio de conservación de la energía mecánica para determinar la velocidad de un objeto rodante sin deslizamiento a lo largo de un plano inclinado en sentido descendente. En la parte superior del plano inclinado, la energía total es la energía potencial mgh. En la parte más baja, la energía total es energía cinética. La conservación de la energía mecánica nos dice que

$$\tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = mgh$$

Podemos utilizar la condición no deslizante para eliminar v_{cm} o ω. Sustituyendo $I_{cm} = \beta mR^2$ y $\omega = v_{cm}/R$, se obtiene $\tfrac{1}{2}mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\beta mR^2(v_{cm}^2/R^2) = mgh$. Despejando v_{cm}^2, se obtiene

$$v_{cm}^2 = \frac{2gh}{1+\beta} \qquad 9.34$$

Para un cilindro, con $\beta = \tfrac{1}{2}$, se obtiene $v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gh}$. Obsérvese que la velocidad es independiente de la masa y del radio del cilindro y es menor que $\sqrt{2gh}$ (la velocidad de un objeto que se desliza sin rozamiento a lo largo de un plano inclinado).

La fuerza de rozamiento f_e en un objeto que rueda sin deslizarse por un plano inclinado es menor o igual a su valor máximo; es decir, $f_e \leq \mu_e F_n$, donde $F_n = mg\cos\phi$. Sustituyendo en la ecuación 9.32 la expresión para la fuerza de rozamiento, se tiene

$$\frac{mg\,\text{sen}\,\phi}{1+\beta^{-1}} \leq \mu_e mg\cos\phi$$

o

$$\text{tg}\,\phi \leq (1+\beta^{-1})\mu_e \qquad 9.35$$

En un cilindro uniforme, $\beta = \tfrac{1}{2}$, y la ecuación 9.35 se convierte en $\text{tg}\,\phi = 3\mu_e$. Si la tangente del ángulo del plano inclinado es mayor que $(1+\beta^{-1})\mu_e$, el objeto se deslizará por la pendiente.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.11 Un cilindro rueda hacia abajo por un plano inclinado $\theta = 50°$. ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático para el cual el cilindro rodará sin deslizamiento?

PROBLEMA PRÁCTICO 9.12 Determinar (*a*) la fuerza de rozamiento para un anillo que rueda hacia abajo por un plano inclinado y (*b*) el valor máximo de tg θ para el cual el anillo rueda sin deslizamiento.

* RODAMIENTO CON DESLIZAMIENTO

Cuando un objeto se desliza mientras rueda, la condición no deslizante $v_{cm} = R\omega$ deja de cumplirse. Supongamos que una bola de bolera se lanza sin rotación inicial. Cuando la bola se desliza a lo largo de la pista, $v_{cm} > R\omega$. Sin embargo, la fuerza de rozamiento reduce su velocidad lineal v_{cm} (figura 9.39) al mismo tiempo que aumenta su velocidad angular ω, hasta que se cumple la condición de ausencia de deslizamiento $v_{cm} = R\omega$. Entonces, la bola rueda sin deslizamiento.

Otro ejemplo de rodamiento con deslizamiento es el de una bola que gira sobre sí misma, como ocurre cuando el taco del billar golpea a la bola en un punto que está por encima de $\tfrac{2}{5}R$ sobre el centro (véase ejemplo 9.17) de modo que $v_{cm} < R\omega$. En este caso, la fuerza de rozamiento incrementa v y reduce ω hasta que se alcanza la condición no deslizante $v_{cm} = R\omega$ (figura 9.40).

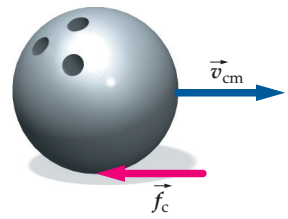


FIGURA 9.39 Una bola se mueve sin rotación inicial. La fuerza de rozamiento $\vec{f}_c$ ejercida por el suelo reduce la velocidad del centro de masas v_{cm} e incrementa la velocidad angular ω hasta que se alcanza la condición de rodadura $v_{cm} = R\omega$.

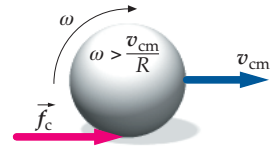


FIGURA 9.40 Una bola gira sobre sí misma. La fuerza de rozamiento acelera la bola en la dirección del movimiento.

Ejemplo 9.19 Una bola de bolera que se desliza

Una bola de masa M y radio R se lanza de tal modo que cuando toca el suelo se mueve horizontalmente con velocidad $v_0 = 5$ m/s y avanza sin rodar. El coeficiente de rozamiento cinético entre la bola y el suelo es $\mu_c = 0{,}08$. Determinar (*a*) el tiempo durante el cual la bola se desliza y (*b*) la distancia recorrida deslizándose, antes de que ruede sin deslizamiento.

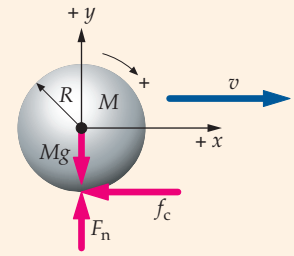


FIGURA 9.41

PLANTEAMIENTO Durante el deslizamiento $v_{cm} > R\omega$. Calculamos v_{cm} y ω en función del tiempo, hacemos $v_{cm} = R\omega$ y deducimos t. Las aceleraciones lineal y angular se determinan a partir $\Sigma F = ma$ y $\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\alpha$. La dirección del movimiento se toma como positiva. Hay deslizamiento y rozamiento cinético, por lo que se disipa energía mecánica. Por lo tanto, no se puede usar el principio de conservación de la energía mecánica.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un diagrama de las fuerzas que actúan sobre la bola (figura 9.41):

2. La fuerza neta que actúa sobre la bola es la fuerza de rozamiento cinético, f_c, que actúa en la dirección negativa del eje x. Aplicar la segunda ley de Newton:

$$\Sigma F_x = Ma_{cm\,x}$$
$$-f_c = Ma_{cm\,x}$$

3. La aceleración va en la dirección negativa de x y $a_{cm\,y} = 0$. Determinar primero F_n y después f_c:

$$\Sigma F_y = Ma_{cm\,y} = 0 \Rightarrow F_n = Mg$$
$$\text{por lo tanto,}\quad f_c = \mu_c F_n = \mu_c Mg$$

4. Determinar la aceleración usando los resultados de los pasos 2 y 3:

$$-\mu_c Mg = Ma_{cm\,x} \Rightarrow a_{cm\,x} = -\mu_c g$$

5. Relacionar la velocidad lineal con la aceleración y con el tiempo utilizando la ecuación cinemática:

$$v_{cm\,x} = v_0 + a_{cm\,x}t = v_0 - \mu_c g t$$

6. Para determinar α, aplicar la segunda ley de Newton para la rotación. Calcular los momentos alrededor de un eje que pase por el centro de masas. Obsérvese que en el diagrama de fuerzas el sentido positivo va en la dirección de las agujas del reloj:

$$\Sigma\tau = I_{cm}\alpha$$
$$\mu_c MgR + 0 + 0 = \tfrac{2}{5}MR^2\alpha$$
$$\text{por lo tanto,}\quad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}$$

7. Relacionar la velocidad angular con la aceleración angular y el tiempo usando la ecuación cinemática:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}t$$

8. Despejar el tiempo t cuando se cumple $v_{cm} = R\omega$:

$$v_{cm} = R\omega$$
$$(v_0 - \mu_c g t) = R\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_c g}{R}t\right)$$
$$\text{por lo tanto,}\quad t = \frac{2v_0}{7\mu_c g} = \frac{2(5{,}0\text{ m/s})}{7(0{,}080)(9{,}81\text{ m/s}^2)} = \boxed{1{,}8\text{ s}}$$

(*b*) La distancia recorrida en 1,82 s es:

$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2}a_{cm}t^2 = v_0\left(\frac{2v_0}{7\mu_c g}\right) + \frac{1}{2}(-\mu_c g)\left(\frac{2v_0}{7\mu_c g}\right)^2 = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_c g}$$
$$= \frac{12}{49}\frac{(5{,}0\text{ m/s})^2}{(0{,}080)(9{,}81\text{ m/s}^2)} = \boxed{7{,}8\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN La pista de la calle de una bolera mide unos 18 m de largo. Parece razonable que la bola se deslice 7,8 m a lo largo de la pista, pues representa casi la mitad de la pista.

OBSERVACIÓN En una buena bolera, la pista está ligeramente engrasada de forma que la bola se desliza una cierta distancia, proporcionando al jugador mayor control sobre su lanzamiento.

PROBLEMA PRÁCTICO 9.13 Hallar la velocidad de la bola de bolera cuando comienza a rodar sin deslizamiento. ¿Depende este resultado del coeficiente de rozamiento cinético μ_c?

PROBLEMA PRÁCTICO 9.14 Determinar la energía cinética total de la bola después de que comience a rodar sin deslizamiento.

Temas de actualidad en Física

Ultracentrifugadoras

Un equipo de investigación estudia cambios en la grasa de la sangre cuando las personas cambian su dieta.[1] Otro equipo investiga la estabilidad de proteínas de origen vírico.[2] Todos estos investigadores utilizan la ultracentrifugadora analítica de won Theodor Svedberg (premio Nobel de química en 1926).[3]

Tubos de ensayo colocados en una ultracentrifugadora. *(Atherotech.)*

Cuando una centrifugadora gira, cada partícula suspendida en la muestra experimenta una fuerza, ejercida sobre ella por su entorno, en dirección radial hacia dentro. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la partícula ejercerá una fuerza en dirección radial hacia fuera. Como consecuencia de ello, las partículas sedimentan hacia la parte más exterior del tubo de ensayo que las contiene. Las partículas más densas o más grandes se mueven más rápido hacia el final del tubo, lo más alejado posible del eje de rotación. Este movimiento depende de varias variables como la masa, densidad y coeficientes de rozamiento de las partículas en la solución. El resultado final, llamado *equilibrio de sedimentación*, consiste de varias capas de partículas organizadas en función de los valores de esas variables. Con una ultracentrifugadora se pueden analizar moléculas complejas. Las ultracentrifugadoras analíticas tienen unas ventanas en las cámaras donde se colocan los tubos que permiten medir los cambios de absorción de la luz ultravioleta. Estos cambios pueden proporcionar el valor de la *velocidad de sedimentación* de la muestra, es decir, la velocidad a la que la muestra estratifica. A partir de este dato, se puede determinar la pureza, masa, forma y composición de moléculas complejas.

Para analizar esas moléculas, las ultracentrifugadoras deben girar muy rápido. La primera ultracentrifugadora, construida por Svedberg en 1924 con un rotor de turbina de aceite, giraba a 12 000 rev/min y generaba una aceleración de 7000g. En 1935 se diseñó una ultracentrifugadora que rotaba en el vacío. Esto evitaba el calentamiento de las muestras por el rozamiento de los tubos con el aire.[4] Esta ultracentrifugadora era capaz de generar una aceleración de 150 000g. Hoy en día, las ultracentrifugadoras analíticas giran a 60 000 rev/min y generan una aceleración de 250 000g. Otros tipos de ultracentrifugadoras son capaces de llegar a 810 000g.[5]

Las enormes aceleraciones y fuerzas que generan estas ultracentrifugadoras producen grandes tensiones sobre los rotores. A velocidad máxima, un solo gramo de material, en una ultracentrifugadora, se convierte en un peso aparente de 2446 N. De hecho, la velocidad de los rotores está limitada por la tensión que tienen que soportar los materiales de los que están fabricados.[6] Con el tiempo, estas tensiones causan fatiga en la ultracentrifugadora. Las soluciones cáusticas también pueden producir tensiones debidas a la corrosión, principalmente en rotores de aluminio. El fallo de un rotor puede resultar catastrófico[7]: se han llegado a agrietar paredes de cemento, romper ventanas y esparcir los pedazos del rotor por todo el laboratorio a grandes velocidades.

Afortunadamente, los rotores no suelen fallar. Los de las ultracentrifugadoras analíticas están fabricados de materiales muy resistentes como el titanio, aluminio o fibras de carbono. Las ventanas de las ultracentrifugadoras analíticas están fabricadas de cuarzo o zafiro. Los rotores se reemplazan por otros nuevos tras un determinado número de horas de funcionamiento.

Un antiguo usuario de ultracentrifugadoras estaba contento porque "gracias a la ultracentrifugadoras se pueden obtener fuerzas mucho mayores que la gravedad, que de no ser así sólo las podríamos encontrar en planetas muy grandes".[8] Hoy en día, las ultracentrifugadoras producen fuerzas 1000 veces superiores a la fuerza de la gravedad en la superficie del Sol.

---

[1] Dragsted, L. O., Finne´ Nielsen, I.-L., Grønbæk, M., Hansen, A. S., Marckmann, P., and Nielsen, S. E., "Effect of Red Wine and Red Grape Extract on Blood Lipids, Haemostatic Factors, and Other Risk Factors for Cardiovascular Disease," *European Journal of Clinical Nutrition*, 2005 Vol. 59, 449–455.

[2] Chang, G.-G., Chang, H.-C., Chou, C.-Y., Hsu, W.-C., Lin, C.-H., and Lin, T.-Z., "Quaternary Structure of the Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS) Coronavirus Main Protease." *Biochemistry*, Nov. 30, 2004, Vol. 43 No. 47, 14958–14970.

[3] Svedberg, Theodor, "The Ultracentrifuge," *1926 Nobel Lectures*. http://nobelprize.org/chemistry/laureates/1926/svedberg-lecture.pdf May 2006.

[4] Beams, H. W., "The Air Turbine Ultracentrifuge, Together with Some Results upon Ultracentrifuging the Eggs of *Fucus serratus*," *Journal of the Marine Biological Association*, Mar., 1937, Vol XXI, No. 2, 571–588.

[5] *Introduction to Analytical Ultracentrifugation*. http://www.beckman.com/literature/Bioresearch/361847.pdf May 2006.

[6] "Rotor Safety Guide." Beckman Coulter. http://www.beckman.com/resourcecenter/labresources/centrifuges/pdf/rotor.pdf May, 2006.

[7] "Urgent Corrective Action Notice." http://www.ehs.cornell.edu/lrs/Centrifuge/letter.pdf May 2006; "Laboratory Safety Incidents—Explosions." American Industrial Hygiene Association. http://www2.umdnj.edu/eohssweb/aiha/accidents/explosion.htm May 2006.

[8] Beams, op. cit., p. 571.

Resumen

1. El desplazamiento angular, la velocidad angular y la aceleración angular son magnitudes fundamentales definidas en la cinemática de rotación.
2. El momento de una fuerza y el momento de inercia son importantes conceptos dinámicos derivados. El momento (o torque) de una fuerza es una medida de la capacidad de una fuerza para que un objeto cambie su ritmo de rotación. El momento de inercia es una medida de la resistencia inercial de un objeto a las aceleraciones angulares. Depende de la distribución de la masa respecto al eje de rotación.
3. El teorema de los ejes paralelos, que resulta de la definición del momento de inercia, simplifica frecuentemente el cálculo de I.
4. La segunda ley de Newton para la rotación, $\Sigma\tau_{ext} = I\alpha$, se deduce de la segunda ley de Newton y de las definiciones de τ, I y α. Es una relación importante para resolver problemas que implican la rotación de un objeto rígido alrededor de un eje de dirección fija.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Velocidad angular y aceleración angular		
Velocidad angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ (Definición)	9.2
Aceleración angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ (Definición)	9.4
Velocidad tangencial	$v_t = r\omega$	9.8
Aceleración tangencial	$a_t = r\alpha$	9.9
Aceleración centrípeta	$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$	9.10
2. Ecuaciones para la rotación con aceleración angular constante	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	9.5
	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	9.6
	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	9.7
3. Momento de inercia		
Sistema de partículas	$I = \Sigma m_i r_i^2$ (Definición)	9.11
Sistema continuo	$I = \int r^2 dm$	9.13
Teorema de los ejes paralelos	El momento de inercia respecto a un eje situado a la distancia h de otro eje paralelo que pasa por el centro de masas es $I = I_{cm} + Mh^2$ donde I_{cm} es el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas y M es la masa total del objeto.	9.14
4. Energía		
Energía cinética de un objeto en rotación alrededor de un eje fijo	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	9.12
Energía cinética de un objeto rodante	$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$	9.30
Potencia	$P = \tau\omega$	9.25

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
5. Momento de una fuerza	El momento producido por una fuerza es igual al producto de la componente tangencial de la fuerza por la distancia radial al eje. $\tau = F_t r = Fr \operatorname{sen}\phi = F\ell$ (9.20)
6. Segunda ley de Newton aplicada a la rotación	$\tau_{\text{neto ext}} = \sum_i \tau_{i\,\text{ext}} = I\alpha$ (9.19) La segunda ley de Newton para la rotación es válida incluso si el sistema de referencia no es inercial, siempre y cuando los momentos de las fuerzas y el momento de inercia se calculen respecto de un eje que pase por el centro de masas.
7. Condiciones no deslizantes	Cuando una cuerda enrollada a un polea o disco no se desliza, las magnitudes lineales y angulares están relacionadas por $v_t = R\omega$ (9.22) $a_t = R\alpha$ (9.23)
8. Objetos rodantes	
Rodadura sin deslizamiento	$v_{cm} = R\omega$ (9.27)
*Rodadura con deslizamiento	Cuando un objeto rueda y se desliza, $v_{cm} \neq R\omega$. El rozamiento cinético ejerce una fuerza que tiende a modificar v_{cm} y un momento que cambia ω, hasta que $v_{cm} = R\omega$ y el objeto solamente rueda.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

9.1 El disco A tiene mayor momento de inercia. Dividir mentalmente el disco A en dos partes, la parte que dista del eje menos de un octavo de pulgada es la parte 1, mientras que la parte 2 es la que está más allá de un octavo de pulgada. Sólo la parte 2 tiene la misma masa y momento de inercia que el disco B; por tanto, el momento de inercia adicional de la parte 1 hace que el disco A tenga mayor momento de inercia.

9.2 El disco B tiene mayor momento de inercia. Ambos discos tienen la misma masa, pero la masa del disco B se distribuye más alejada del eje en comparación con la del disco A.

Respuestas a los problemas prácticos

9.1 314 rad/s

9.2 (*a*) 500 rev/min = 52,4 rad/s

9.3 $v_t = 1{,}88$ m/s, $a_t = 0$, $a_c = 59{,}2$ m/s^2

9.4 (*a*) 1,26 m/s, (*b*) 1,26 m/s

9.5 $I = 8ma^2$

9.6 Aproximadamente, 25 veces mayor.

9.8 $a = 3g/4$ hacia abajo, (*b*) $F = mg/4$ hacia abajo

9.9 594 N · m

9.10 20 J

9.11 0,40

9.12 (*a*) $f = \frac{1}{2}mg \operatorname{sen}\phi$, (*b*) $\operatorname{tg}\phi \leq 2\mu_e$

9.13 $v_{cm} = \frac{5}{7}v_0$. No.

9.14 $K = \frac{5}{14}mv_0^2$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s^2 para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Dos puntos se encuentran sobre un disco que gira, en torno a un eje perpendicular al disco y pasa a través de su centro, con velocidad angular creciente: uno de ellos está en el borde del disco y el otro a mitad de distancia entre el borde y el eje. (*a*) ¿Cuál de los dos puntos recorre una mayor distancia en un tiempo determinado? (*b*) ¿Cuál gira un ángulo mayor? (*c*) ¿Cuál posee mayor velocidad? (*d*) ¿Y mayor velocidad angular? (*e*) ¿Cuál tiene mayor aceleración tangencial? (*f*) ¿Y mayor aceleración angular? (*g*) ¿Y mayor aceleración centrípeta?

2 • Verdadero o falso: (*a*) La velocidad angular y la velocidad lineal tienen las mismas dimensiones. (*b*) Todas las partes de una rueda que gira alrededor de un eje fijo deben tener la misma velocidad angular. (*c*) Todas las partes de una rueda que gira alrededor de un eje fijo deben tener la misma aceleración angular. *(d)* Todas las partes de una rueda que gira alrededor de un eje fijo deben tener la misma aceleración centrípeta.

3 • Partiendo del reposo, un disco realiza 10 revoluciones hasta alcanzar la velocidad angular ω. Con aceleración angular constante, ¿cuántas revoluciones adicionales debe realizar para alcanzar una velocidad angular 2 ω? (*a*) 10 rev. (*b*) 20 rev. (*c*) 30 rev. (*d*) 40 rev. (*e*) 50 rev.

4 • Una persona observa un tiovivo desde arriba y ve que gira en sentido antihorario y que la tasa de rotación disminuye. Si designamos como positivo el sentido de giro antihorario, ¿cuál será el signo de la aceleración angular?

5 • Chad y Tara se dan una vuelta en un tiovivo. Chad se sienta sobre un pony que se halla a 2 m del eje de rotación mientras que Tara se sienta en otro pony a 4 m del eje. El tiovivo gira acelerando en sentido antihorario. (*a*) ¿Quién tiene mayor velocidad lineal? (*b*) ¿Quién tiene mayor aceleración centrípeta? (*c*) ¿Quién tiene mayor aceleración tangencial?

6 • Los discos A y B eran idénticos salvo cuando al disco B le hicieron un taladro en el centro. ¿Cuál de los dos tiene mayor momento de inercia respecto al eje de simetría? Explicar la respuesta.

7 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El *pitcher* de un partido de béisbol tiene un magnífico lanzamiento. Usted no ha sido capaz de golpear la pelota con el bate; el bate pesa mucho y usted decide agarrarlo un poco más arriba, en lugar de hacerlo por el extremo. Este cambio aumentaría la velocidad con la que se golpearía la pelota y aumentarían las posibilidades de obtener un buen golpe. Explicar cómo funciona esta teoría en términos del momento de inercia, aceleración angular y momento de fuerza. SSM

8 • (*a*) La dirección de la velocidad angular de un objeto, ¿debe ser siempre la misma que la dirección del momento de fuerzas neto que actúa sobre él? (*b*) Si las direcciones de la velocidad angular y del momento neto son opuestas, ¿qué se puede decir de la velocidad angular? (*c*) ¿Puede ser cero la velocidad angular incluso si el momento neto no es cero? Si la respuesta es afirmativa, dar un ejemplo.

9 • Un disco gira libremente alrededor de un eje. Una fuerza aplicada a una distancia d del eje le ocasiona una aceleración angular α. ¿Qué aceleración angular se produce si la misma fuerza se aplica a una distancia $2d$ del eje? (*a*) α. (*b*) 2α. (*c*) $\alpha/2$. (*d*) 4α. (*e*) $\alpha/4$.

10 • El momento de inercia de un objeto alrededor de un eje que no pasa por su centro de masas es _____ el momento de inercia respecto a un eje paralelo que pasa por su centro de masas. (*a*) Siempre menor que. (*b*) Algunas veces menor que. (*c*) A veces igual que. (*d*) Siempre mayor que.

11 • El motor de un tiovivo ejerce sobre él un momento constante. Conforme gana velocidad partiendo del reposo, la potencia desarrollada por el motor (*a*) es constante, (*b*) aumenta linealmente con la velocidad angular del tiovivo, (*c*) es cero, (*d*) ninguna de las anteriores. SSM

12 • Un momento constante actúa sobre un tiovivo desde el reposo hasta que alcanza una determinada velocidad. Durante este tiempo, la energía cinética del tiovivo es (*a*) constante, (*b*) proporcional a la velocidad angular del tiovivo, (*c*) crece cuadráticamente con la velocidad angular, (*d*) ninguna de las anteriores.

13 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La mayoría de los pomos de las puertas se colocan en el extremo opuesto a la bisagra, en lugar de colocarlo en el centro de la puerta, por ejemplo. Explicar por qué esto hace que las puertas se abran más fácilmente.

14 • Una rueda de radio R y velocidad angular ω rueda sin deslizamiento por una superficie estacionaria plana. La velocidad del punto de la periferia que está (momentáneamente) en contacto con la superficie, relativa a la superficie, es (*a*) igual a $R\omega$ y dirigida al norte, (*b*) igual a $R\omega$ y hacia el sur, (*c*) cero, (*d*) igual a la velocidad del centro de masas dirigida hacia el norte, (*e*) igual a la velocidad del centro de masas y dirigida hacia el sur.

15 • Un cilindro sólido uniforme y una esfera sólida uniforme tienen masas iguales. Ambos cuerpos ruedan sin deslizamiento sobre una superficie horizontal. Si sus energías cinéticas son iguales, entonces: (*a*) La velocidad de traslación del cilindro es mayor que la de la esfera. (*b*) La velocidad de traslación del cilindro es menor que la de la esfera. (*c*) Las velocidades de traslación de los dos objetos son iguales. (*d*) La respuesta puede ser la (*a*), (*b*) o (*c*), dependiendo de los radios de los objetos.

16 • Dos tubos de aspecto idéntico de 1 m de longitud contienen piezas de plomo de 10 kg de masa total (mucho mayor que la masa de los tubos). En el primer tubo, el plomo está concentrado en el centro, mientras que en el segundo, el plomo está dividido en dos masas iguales colocadas en los dos extremos del tubo. Sin abrir los tubos, ¿cómo puede determinarse cuál es el tubo que tiene las masas en sus extremos?

17 •• Partiendo del reposo al mismo tiempo, una moneda y un anillo ruedan por un plano inclinado sin deslizamiento. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (*a*) El anillo llega primero a la base del plano. (*b*) La moneda llega en primer lugar. (*c*) El anillo y la moneda llegan simultáneamente. (*d*) El resultado de la carrera depende de sus masas relativas. (*e*) El resultado de la carrera depende de sus diámetros relativos.

18 •• Un arco de masa M y radio R rueda sin deslizamiento. ¿Es mayor su energía cinética de traslación o su energía cinética de rotación respecto al centro de masas? (*a*) La energía cinética de traslación es mayor. (*b*) La energía cinética de rotación respecto al centro de masas es mayor. (*c*) Ambas son iguales. (*d*) La respuesta depende del radio. (*e*) La respuesta depende de la masa.

19 •• Un disco de masa M y radio R rueda sin deslizamiento. ¿Es mayor su energía cinética de traslación o su energía cinética de rotación respecto al centro de masas? (*a*) La energía cinética de traslación es mayor. (*b*) La energía cinética de rotación respecto al centro de masas es mayor. (*c*) Ambas son iguales. (*d*) La respuesta depende del radio. (*e*) La respuesta depende de la masa.

20 •• Una bola rueda sin deslizamiento a lo largo de un plano horizontal. Demostrar que la fuerza de rozamiento que actúa sobre la bola debe ser cero. *Sugerencia: considerar una dirección posible para la acción de la fuerza de rozamiento y los efectos que esta fuerza ejercería sobre la velocidad del centro de masas y sobre la velocidad angular.*

21 •• Un carrete puede rotar libremente respecto a un eje. Una cuerda enrollada en su garganta hace que rote en antihorario (figura 9.42*a*). Sin embargo, cuando se coloca el carrete encima de una mesa (si el rozamiento entre el carrete y la mesa es lo suficientemente grande)

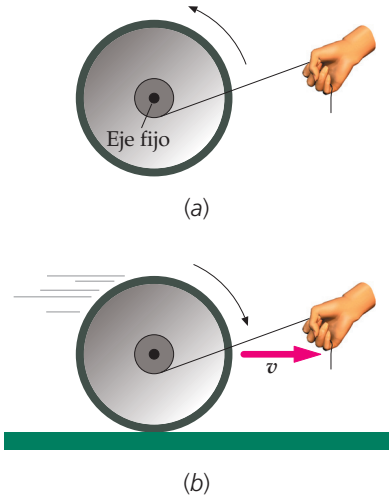


FIGURA 9.42 Problema 21

rota en sentido horario y rueda hacia la derecha. Considerando el momento respecto a los ejes apropiados, mostrar que esas conclusiones son compatibles con la segunda ley de Newton de la rotación. SSM

22 •• Usted quiere determinar el centro de gravedad de un cuerpo plano de forma irregular. Para ello le dicen que tiene que suspender el cuerpo por un punto y suspender una plomada en el mismo punto. Luego se tiene que dibujar la línea de la plomada sobre el cuerpo. Se toma otro punto del cuerpo y se repite el procedimiento. El lugar donde se corten las líneas de las dos plomadas indicará la posición del centro de gravedad. Explicar los principios que hay detrás de este procedimiento.

APROXIMACIONES Y ESTIMACIONES

23 • Una pelota de béisbol se lanza a 88 mi/h y con una velocidad de giro de 1500 rev/min. Si la distancia entre el punto de lanzamiento del *pitcher* y el receptor es de 61 pies, estimar cuántas revoluciones realiza la pelota desde que se lanza hasta que se captura. Despreciar los efectos del rozamiento.

24 •• Considerar el pulsar del Cangrejo discutido en la sección 9.2. Justificar el hecho de que la pérdida de energía cinética rotacional equivale a la potencia que sale de 100 000 estrellas. La potencia radiada por el Sol es de 4×10^{26} W. Suponer que la masa del pulsar es de 2×10^{30} kg, que tiene un radio de 20 km, que rota a 30 rev/s con un periodo rotacional que aumenta en 10^{-5} s/año.

25 •• Una bicicleta de masa 14 kg lleva ruedas de 1,2 m de diámetro, cada una de masa 3 kg. La masa del ciclista es 38 kg. Estimar la fracción de la energía cinética total de la bicicleta y el ciclista asociada a la rotación de las ruedas.

26 •• ¿Por qué cuando cae al suelo una tostada siempre lo hace por el lado que tiene mantequilla o mermelada? La pregunta puede parecer tonta, pero ha sido objeto de debate científico serio. El análisis es demasiado complicado para reproducirlo aquí, pero R.D. Edge y Darryl Steinert demostraron que una tostada a la cual se la empuja suavemente hasta el borde de una mesa, cae cuando se inclina un ángulo de 30° con la horizontal (véase la figura 9.43) y tiene una velocidad angular de $\omega = 0{,}956\sqrt{g/\ell}$, donde ℓ es la longitud del lado de la tostada (supuesta de forma cuadrada).* Suponiendo que una tostada empieza a caer con la mermelada o la mantequilla hacia arriba, ¿de qué lado caerá si cae desde una mesa de 0,5 m de altura? ¿Qué ocurre si la mesa tiene 1 m de altura? Suponer que la tostada tiene 0,1 m de lado. Ignórense las fuerzas debidas a la resistencia del aire.

* Para los lectores interesados en este problema y muchos otros se recomienda el maravilloso libro de Robert Erlich, *Why Toast Lands Jelly-Side Down: Zen and the Art of Physics Demonstrations*.

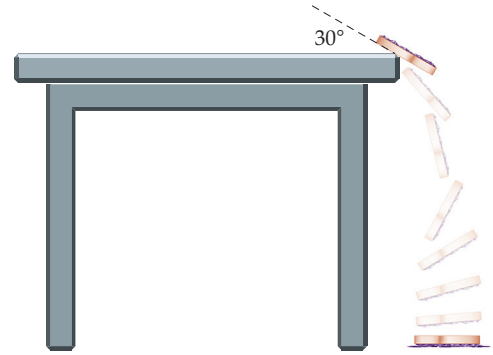


FIGURA 9.43 Problema 26

27 •• Consideremos el momento de inercia de un hombre adulto alrededor de un eje que pasa verticalmente por el centro de su cuerpo. Cuando esta persona está de pie con sus brazos pegados al cuerpo o cuando está con sus brazos extendidos tiene momentos de inercia distintos. Estimar el cociente entre ambos momentos de inercia.

VELOCIDAD ANGULAR Y ACELERACIÓN ANGULAR

28 • Una partícula se mueve en una circunferencia de radio 90 m con una velocidad de módulo constante de 25 m/s. (*a*) ¿Cuál es su velocidad angular en radianes por segundo alrededor del centro de la circunferencia? (*b*) ¿Cuántas revoluciones realiza en 30 s?

29 • Una rueda parte del reposo y tiene aceleración angular constante de 2,6 rad/s^2. (*a*) ¿Cuál es su velocidad angular después de 6 s? (*b*) ¿Qué ángulo habrá girado? (*c*) ¿Cuántas revoluciones habrá realizado? (*d*) ¿Cuál es la velocidad y la aceleración de un punto situado a 0,3 m del eje de rotación? SSM

30 • **MÚLTIPLES PASOS** Un tocadiscos que gira a 33 rev/min se desconecta. Se frena con aceleración angular constante y queda parado al cabo de 26 s. (*a*) Hallar la aceleración angular. (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular media del tocadiscos? (*c*) ¿Cuántas revoluciones realiza antes de detenerse?

31 • Un disco de 12 cm de radio empieza a girar alrededor de su eje partiendo del reposo con aceleración angular constante de 8 rad/s^2. Al cabo de $t = 5$ s, (*a*) ¿cuál es la velocidad angular del disco? (*b*) ¿Y cuáles son las aceleraciones tangencial a_t y centrípeta a_c de un punto del borde del disco?

32 • Una noria de radio 12 m da una vuelta cada 27 s. (*a*) ¿Cuál es su velocidad angular en radianes por segundo? (*b*) ¿Cuál es la velocidad lineal de un pasajero? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de un pasajero?

33 • Un ciclista parte del reposo. Al cabo de 8 s las ruedas han verificado 3 rev. (*a*) ¿Cuál es la aceleración angular de las ruedas? (*b*) ¿Cuál es su velocidad angular al cabo de 8 s?

34 • ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra en rad/s al girar alrededor de su eje?

35 • Una rueda giratoria describe 5 rad en 2,8 s antes de detenerse con aceleración angular constante. Determinar la velocidad angular inicial de la rueda antes de iniciar su frenado.

36 • Una bicicleta tiene ruedas de 0,75 m de diámetro. El ciclista acelera desde el reposo con aceleración constante hasta alcanzar la velocidad de 24 km/h en 14,0 segundos. ¿Cuál es la aceleración angular de las ruedas?

37 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La cinta de una *cassette* de vídeo VHS estándar tiene una longitud $L = 246$ m; su duración en funcionamiento es de 2,0 horas (figura 9.44). Al comienzo, el carrete que contiene la cinta tiene un radio externo de, aproximadamente, $R = 45$ mm, mientras que su radio interno es $r = 12$ mm, aproximadamente. En cierto punto de su recorrido, ambos carretes tienen la misma velocidad angular. Calcular esta velocidad angular en radianes por segundo y revoluciones por minuto. *Ayuda: la cinta de la* cassette, *entre los dos carretes, se mueve a velocidad constante.* SSM

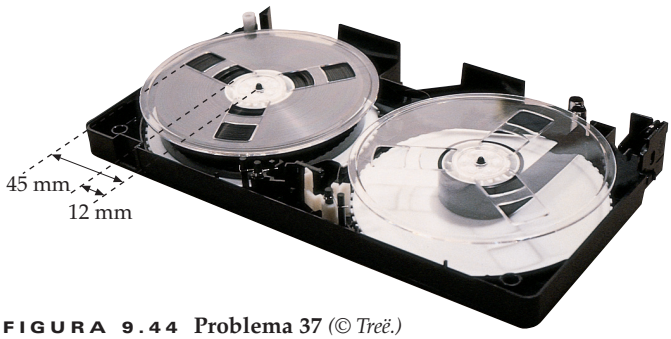


FIGURA 9.44 **Problema 37** *(© Treë.)*

38 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Para arrancar el cortacésped se deber tirar de una cuerda enrollada en un pequeño volante. Después de tirar de la cuerda durante 0,95 s, el volante rota a 4,5 rev/s, justo cuando la cuerda se desengancha del volante (arranque). Este primer intento no hace arrancar el cortacésped y el volante vuelve al reposo tras 0,24 s (parada). (*a*) Determinar la aceleración angular media durante los 4,5 s de arranque y durante los 0,24 s de parada. (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular máxima alcanzada por el volante? (*c*) Determinar el cociente entre el número de revoluciones realizadas entre el arranque y la parada.

39 ••• Marte orbita alrededor del Sol con un radio orbital medio de 228 Gm (1 Gm = 10^9 m) y tiene un periodo orbital de 687 días. La Tierra orbita alrededor del Sol con un radio medio de 149,6 Gm. (*a*) Si la línea Tierra-Sol barre un ángulo de 360º durante un año terrestre, aproximadamente, ¿qué ángulo barre la línea Marte-Sol durante un año terrestre? (*b*) ¿Con qué frecuencia están Marte y el Sol en lados diametralmente opuestos de la Tierra?

CÁLCULO DEL MOMENTO DE INERCIA

40 • Una pelota de tenis tiene una masa de 57 g y un diámetro de 7 cm. Determinar el momento de inercia alrededor de su diámetro. Suponer que la pelota es una esfera hueca de paredes delgadas.

41 • Cuatro partículas están en los vértices de un cuadrado unidas por varillas sin masa, de modo que $m_1 = m_4 = 3$ kg y $m_2 = m_3 = 4$ kg. La longitud del lado del cuadrado es $L = 2$ m (figura 9.45). Hallar el momento de inercia respecto al eje z. SSM

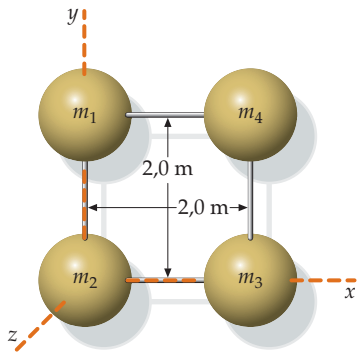


FIGURA 9.45 **Problema 41**

42 •• Utilizar el teorema de los ejes paralelos y los resultados del problema 41 para hallar el momento de inercia del sistema de cuatro partículas de la figura 9.45 alrededor de un eje que pasa por el centro de masas y que es paralelo al eje z. Comprobar el resultado mediante cálculo directo.

43 • Para el sistema de cuatro partículas de la figura 9.45, (*a*) hallar el momento de inercia I_x alrededor del eje x que pasa por m_3 y m_4, (*b*) hallar I_y alrededor del eje y que pasa por m_1 y m_3.

44 • Hallar el momento de inercia de una esfera maciza de masa M y radio R alrededor de un eje tangente a la esfera (figura 9.46).

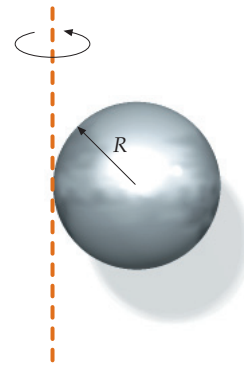


FIGURA 9.46 **Problema 44**

45 •• Una rueda de vagón de 1,0 m de diámetro está formada por una llanta delgada de masa 8 kg, y seis radios, cada uno de los cuales tiene una masa de 1,2 kg. Determinar el momento de inercia de la rueda respecto a su eje de rotación.

46 •• **MÚLTIPLES PASOS** Dos masas puntuales, m_1 y m_2, están separadas por una barra sin masa de longitud L. (*a*) Deducir una expresión para el momento de inercia de este sistema respecto a un eje perpendicular a la barra que pasa a través de ésta por un punto situado a la distancia x_1 de la masa m_1. (*b*) Calcular dI/dx y demostrar que I es mínimo cuando el eje pasa por el centro de masas del sistema.

47 •• Una placa rectangular uniforme tiene una masa m y sus lados valen a y b. (*a*) Demostrar por integración que su momento de inercia respecto a un eje perpendicular a la placa y que pasa por uno de sus vértices es $\frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$. (*b*) ¿Cuál es el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de masas y que sea perpendicular a la placa?

48 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Dos jóvenes, A y B, están realizando un trabajo de investigación intensiva sobre el "bastón acrobático giratorio teórico". Ambos utilizan el mismo modelo de bastón: dos esferas uniformes, cada una de masa 500 g y radio 5 cm, montadas en los extremos de una varilla uniforme de 30 cm de longitud y masa 60 g (figura 9.47). A y B desean calcular el momento de inercia del bastón modelo respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro. A utiliza la aproximación de que las dos esferas pueden considerarse como partículas puntuales que distan 20 cm del eje de rotación y que la masa de la varilla es despreciable. B, sin embargo, hace los cálculos sin aproximaciones. (*a*) Comparar los dos resultados. (*b*) Si las esferas tuvieran la misma masa, pero fueran huecas, ¿aumentaría o disminuiría la inercia rotacional? Justificar la respuesta brevemente. No es necesario calcular el nuevo valor de I.

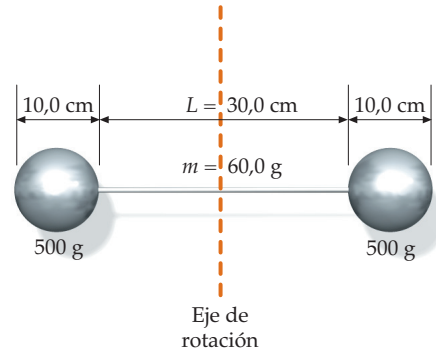


FIGURA 9.47 **Problema 48**

49 •• La molécula de metano (CH_4) tiene cuatro átomos de hidrógeno localizados en los vértices de un tetraedro regular de lado 0,18 nm, con el átomo de carbono en el centro (figura 9.48). Determinar el momento de inercia de esta molécula respecto a un eje de rotación que pase a través del átomo de carbono y uno de los átomos de hidrógeno.

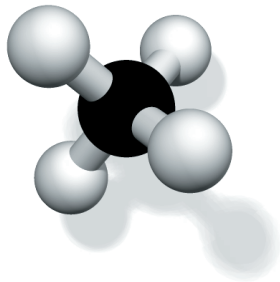


FIGURA 9.48 Problema 49

50 •• Un cilindro hueco de masa m tiene un radio exterior R_2 y un radio interior R_1. Demostrar que su momento de inercia respecto a su eje de simetría es $I = \frac{1}{2}m(R_2^2 + R_1^2)$. *Ayuda. En la sección 9.3 se determinó el momento de inercia para un cilindro sólido integrando directamente, primero calculando el momento de inercia para un disco. Este cálculo es el mismo que aquél excepto para el valor de uno de los límites de integración y la expresión para el área de la sección transversal.*

51 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Un castor golpea la superficie del agua con su cola en señal de peligro. Supongamos que el extremo de la cola es un rectángulo de grosor y densidad uniformes (figura 9.49). Estimar el momento de inercia respecto al eje que pasa por el extremo (línea de puntos). Suponer que la cola mide 15 por 30 cm y que tiene un grosor de 1 cm. La densidad se puede suponer igual a la del agua.

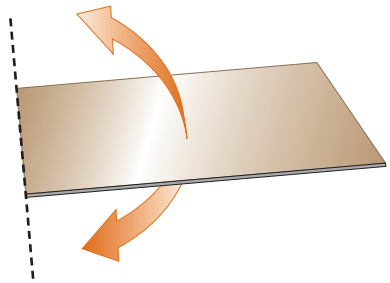


FIGURA 9.49 Problema 51

52 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Para evitar daños en su espalda, su anciana abuela quiere adquirir un atizador (figura 9.50) con el menor momento de inercia posible respecto a su mango. Como sabe que usted estudia física, le pide consejo. Hay dos modelos para elegir. El modelo A tiene un mango de 1 m enganchado a un cuadrado de 40 cm de lado. Las masas del mango y del cuadrado son 1 y 0,5 kg. El modelo B tiene un mango de 0,75 m y un cuadrado de 30 cm de lado con unas masas de 1,5 y 0,6 kg para el mango y el cuadrado, respectivamente. ¿Qué modelo recomendaría? Determine el mejor modelo para ser utilizado, si se sujeta por su extremo, calculando el momento de inercia para ambos modelos.

FIGURA 9.50
Problema 52

53 ••• Demostrar que el momento de inercia de una corteza esférica de radio R y masa m es $2mR^2/3$. SSM

54 ••• La densidad de la Tierra no es uniforme. Varía con la distancia r al centro de la Tierra en la forma $\rho = C\,(1{,}22 - r/R)$, donde R es el radio de la Tierra y C una constante. (*a*) Determinar C en función de la masa total M y el radio R. (*b*) Determinar el momento de inercia de la Tierra (véase el problema 53).

55 ••• Utilizar el cálculo integral para determinar el momento de inercia de un cono sólido homogéneo circular recto de altura H, radio de la base R y masa M.

56 ••• Utilizar el cálculo integral para determinar el momento de inercia de un disco delgado uniforme de masa M y radio R respecto a un diámetro como eje de rotación. Comprobar la respuesta en la tabla 9.1.

57 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un vendedor de helados junto a la carretera utiliza conos rotatorios para llamar la atención de los viajeros. Cada cono gira alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría que pasa por el vértice. Los tamaños de los conos son variables y el propietario piensa si sería más rentable energéticamente utilizar varios conos más pequeños o unos pocos muy grandes. Para obtener una respuesta, debe calcular el momento de inercia de un cono circular recto homogéneo de altura H, radio de la base R y densidad ρ. ¿Cuál es el resultado?

MOMENTO DE UNA FUERZA, MOMENTO DE INERCIA Y SEGUNDA LEY DE NEWTON APLICADA A LA ROTACIÓN

58 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una muela de afilar en forma de disco tiene una masa de 1,7 kg y un radio de 8 cm y está girando a 730 rev/min. Cuando se desconecta el motor, una mujer continúa afilando su hacha manteniéndola contra la muela durante 31,2 s hasta que ésta se detiene. (*a*) Hallar la aceleración angular de la muela de afilar. (*b*) ¿Cuál es el momento que ejerce el hacha sobre la muela? Suponer constante la aceleración angular y que no existen otros momentos de fuerzas de rozamiento.

59 • Un cilindro de 2,5 kg y radio 11 cm, inicialmente en reposo, puede girar alrededor de su eje. Sobre él, se enrrolla una cuerda de masa despreciable que tira con una fuerza de 17 N. Suponiendo que la cuerda no se desliza, hallar (*a*) el momento ejercido por la cuerda, (*b*) la aceleración angular del cilindro y (*c*) la velocidad angular del cilindro al cabo de $t = 5$ s. SSM

60 •• Una rueda montada sobre un eje con rozamiento se encuentra inicialmente en reposo. Durante 20 s se aplica a la rueda un momento externo de 50 N · m, con lo cual la rueda adquiere una velocidad angular de 600 rev/min. Se retira entonces el momento externo y la rueda alcanza el reposo 120 s más tarde. Determinar (*a*) el momento de inercia de la rueda y (*b*) el momento de rozamiento, supuesto constante.

61 •• Un péndulo formado por una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m oscila en un plano vertical. Cuando la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, (*a*) ¿cuál es la componente tangencial de la aceleración de la lenteja? (*b*) ¿Cuál es el momento ejercido respecto al punto pivote? (*c*) Demostrar que $\Sigma\tau = I\alpha$ con $a_t = L\alpha$ da lugar a la misma aceleración tangencial deducida en el apartado (*a*).

62 ••• Una barra uniforme de masa M y longitud L pivota sobre un extremo y cuelga como se muestra en la figura 9.51, de modo que puede oscilar sin rozamiento alrededor del pivote. Una fuerza horizontal F_0 golpea la barra durante un corto tiempo Δt a una distancia x por debajo del pivote, como indica la figura. (*a*) Demostrar que la velocidad del centro de masas de la barra inmediatamente después del golpe es $v_0 = 3xF_0\,\Delta t/2ML$. (*b*) Determinar la componente horizontal de la fuerza suministrada por el pivote y demostrar que esta componente de la fuerza es cero si $x = \frac{2}{3}L$. Este punto (el punto de impacto donde la componente horizontal de la fuerza del pivote es cero) se denomina *centro de percusión* del sistema barra-pivote.

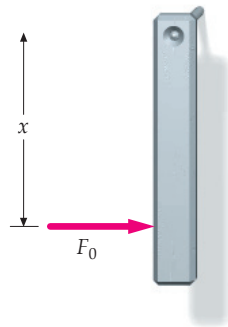


FIGURA 9.51 Problema 62

63 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Un disco horizontal uniforme de masa M y radio R gira alrededor del eje vertical que pasa por su centro con una velocidad angular ω. Cuando se sitúa sobre una superficie horizontal, el coeficiente de rozamiento cinético entre el disco y la superficie es μ_c. (*a*) Determinar el momento $d\tau$ ejercido por la fuerza de rozamiento sobre un elemento circular de radio r y anchura dr. (*b*) Hallar el momento resultante ejercido por el rozamiento sobre el disco. (*c*) Determinar el tiempo necesario para que el disco se detenga.

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA, INCLUYENDO ENERGÍA CINÉTICA DEBIDA A LA ROTACIÓN

64 • Las partículas de la figura 9.52 se unen mediante una varilla muy ligera cuyo momento de inercia puede despreciarse. Giran alrededor del eje y con velocidad angular $\omega = 2$ rad/s. (*a*) Hallar la velocidad de cada partícula y utilizarla para calcular la energía cinética de este sistema directamente a partir de $\Sigma\frac{1}{2}m_i v_i^2$. (*b*) Hallar el momento de inercia alrededor del eje y, calcular la energía cinética a partir de $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, y comparar el resultado con el obtenido en el apartado (*a*).

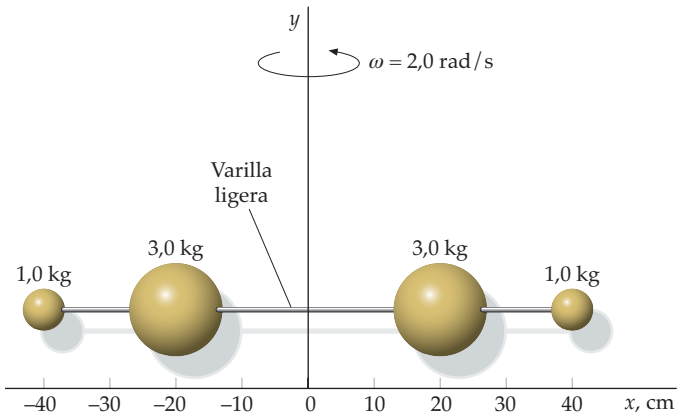


FIGURA 9.52 Problema 64

65 • Una bola sólida de masa 1,4 kg y diámetro 15 cm gira alrededor de su diámetro a 70 rev/min. (*a*) ¿Cuál es su energía cinética? (*b*) Si se suministran 5,0 mJ de energía a su energía de rotación, ¿cuál será la nueva velocidad angular de la bola? SSM

66 •• Calcular la energía cinética de rotación de la Tierra alrededor de su eje y compararla con la energía cinética del movimiento del centro de masas de la Tierra en su órbita alrededor del Sol. Suponer que la Tierra es una esfera homogénea de masa $6{,}0 \times 10^{24}$ kg cuyo radio mide $6{,}4 \times 10^{6}$ m. El radio de la órbita terrestre es $1{,}5 \times 10^{11}$ m.

67 •• Un bloque de 2000 kg asciende a una velocidad constante de 8 cm/s mediante un cable de acero que pasa por una polea de masa despreciable y se enrolla en el tambor de un torno impulsado por un motor (figura 9.53). El radio del tambor es de 30 cm. (*a*) ¿Qué fuerza ejerce el cable? (*b*) ¿Qué momento ejerce la tensión del cable sobre el tambor? (*c*) ¿Cuál es la velocidad angular del tambor? (*d*) ¿Qué potencia debe desarrollar el motor para hacer girar el tambor del torno? SSM

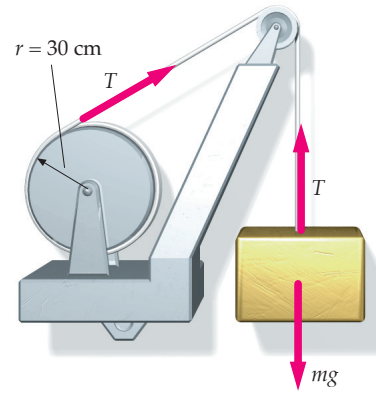


FIGURA 9.53 Problema 67

68 •• Un disco uniforme de masa M y radio R puede girar libremente respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano del disco. Se sujeta una pequeña partícula de masa m al borde del disco y en su parte superior, directamente encima del eje de rotación. El sistema se hace girar inicialmente con suavidad. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular del disco cuando la partícula se encuentra en el punto más bajo de su trayectoria? (*b*) En este punto, ¿cuál es la fuerza ejercida por el disco sobre la partícula para que ésta permanezca en el disco?

69 •• Un anillo de 1,5 m de diámetro pivota sobre un punto de su circunferencia de modo que gira alrededor de un eje horizontal que es perpendicular al plano del anillo. El anillo se deja caer de forma que inicialmente su centro está a la misma altura que el eje (figura 9.54). (*a*) Si se deja oscilar libremente desde el reposo, ¿cuál es su velocidad angular máxima? (*b*) ¿Qué velocidad angular debe imprimirse inicialmente para que dé justamente una revolución completa (360°)?

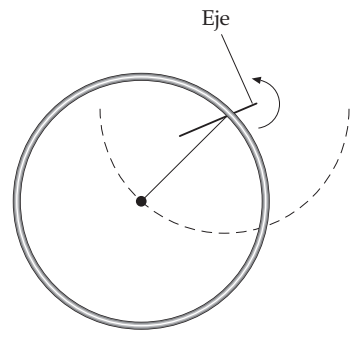


FIGURA 9.54 Problema 69

70 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Queremos diseñar un coche que utilice la energía almacenada en un volante formado por un cilindro de 100 kg uniforme y de radio R. El volante inercial debe suministrar una media de 2 MJ/km de energía mecánica, con una velocidad angular máxima de 400 rev/s. Determinar el valor mínimo de R, tal que el coche pueda recorrer 300 km sin que el volante inercial necesite ser recargado.

POLEAS, YO-YOS Y OBJETOS COLGANTES

71 •• Un bloque de 4 kg que descansa sobre una plataforma horizontal sin rozamiento está conectado a otro bloque colgante de 2 kg mediante una cuerda que pasa por una polea (figura 9.55). Esta polea está formada por un disco uniforme de radio 8 cm y una masa de 0,6 kg. Determinar la aceleración lineal de cada bloque y la tensión de la cuerda. SSM

FIGURA 9.55
Problemas 71–74

72 •• En el sistema del problema 71, (*a*) Determinar la velocidad del bloque de 2 kg después de haber descendido desde el reposo una distancia de 2,5 m. (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular de la polea en ese momento?

73 •• Considerar el problema 71, para el caso en que el coeficiente de rozamiento entre el bloque de 4 kg y la plataforma sea 0,25. Determinar la aceleración lineal de cada bloque y la tensión de la cuerda.

74 •• En el sistema de la figura 9.55, hay un bloque en reposo sobre un tablero horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético entre el tablero y el bloque es 0,25. El bloque está unido a una cuerda que pasa por una polea y de cuyo extremo cuelga otro bloque de 2 kg. La polea es un disco uniforme de 8 cm de radio y 0,6 kg de masa. Hallar la aceleración de cada bloque y las tensiones de los segmentos de la cuerda entre cada bloque y la polea.

75 •• Mediante un torno de engranaje se está procediendo a levantar un coche de 1200 kg del modo que se indica en la figura 9.56. El coche está a 5,0 m sobre la superficie del agua. En ese instante, se rompen los engranajes del torno y el coche cae desde el reposo. Durante la caída del coche no hay deslizamiento entre la cuerda (sin masa), la polea y el tambor. El momento de inercia del tambor del torno es igual a 320 kg · m^2 y el de la polea 4 kg · m^2; el radio del tambor es de 0,80 m y el de la polea de 0,30 m. Calcular la velocidad con la que el coche golpea la superficie del agua.

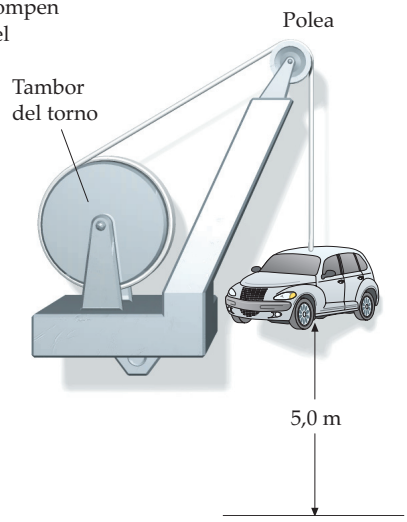


FIGURA 9.56
Problema 75

76 •• El sistema de la figura 9.57 se deja libre desde el reposo. El cuerpo de 30 kg se encuentra a 2 m de la plataforma. La polea es un disco uniforme de 10 cm de radio y 5 kg de masa. Calcular (*a*) la velocidad del cuerpo de 30 kg justo antes de que llegue a tocar la plataforma, (*b*) la velocidad angular de la polea en ese instante, (*c*) las tensiones de las cuerdas y (*d*) el tiempo que invierte el cuerpo de 30 kg en alcanzar la plataforma. Suponer que la cuerda no se desliza sobre la polea.

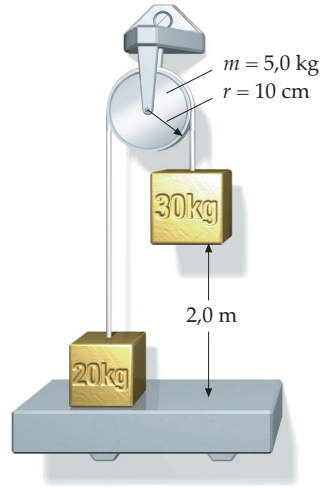


FIGURA 9.57
Problema 76

77 •• Una esfera uniforme de masa M y radio R puede girar libremente respecto a un eje horizontal que pasa por su centro. Se enrolla una cuerda alrededor de la esfera y se une a un cuerpo de masa m como se indica en la figura 9.58. Suponer que la cuerda no se desliza sobre la esfera. Calcular (*a*) la aceleración del cuerpo y (*b*) la tensión en la cuerda.

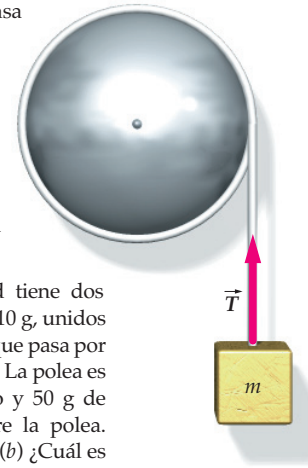


FIGURA 9.58
Problema 77

78 •• Una máquina de Atwood tiene dos cuerpos de masas m_1 = 500 g y m_2 = 510 g, unidos por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento (figura 9.59). La polea es un disco uniforme de 4 cm de radio y 50 g de masa. La cuerda no se desliza sobre la polea. (*a*) Hallar la aceleración de las masas. (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda que soporta a m_1? ¿Y la de la cuerda que soporta a m_2? ¿En cuánto difieren? (*c*) ¿Cuáles serías las respuestas dadas si se hubiese despreciado la masa de la polea?

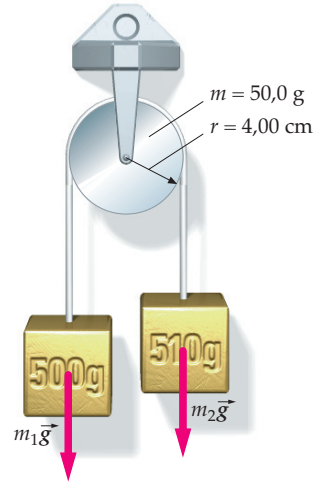


FIGURA 9.59
Problema 78

79 •• Dos objetos cuelgan de dos cuerdas unidas a dos ruedas capaces de girar respecto a un mismo eje, del modo que se indica en la figura 9.60. El momento de inercia total de las dos ruedas es de 40 kg · m^2. Los radios son R_1 = 1,2 m y R_2 = 0,4 m. (*a*) Si m_1 = 24 kg, hallar el valor de m_2 para que sea nula la aceleración angular de las ruedas. (*b*) Si se colocan con suavidad 12 kg sobre la parte superior de m_1, calcular la aceleración angular de las ruedas y la tensión en las cuerdas. SSM

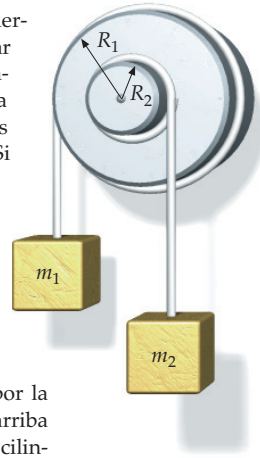


FIGURA 9.60
Problema 79

80 •• La cuerda que envuelve el cilindro de la figura 9.61 está sostenida por la mano de una persona que acelera hacia arriba sin que se mueva el centro de masas del cilindro. Determinar (*a*) la tensión de la cuerda, (*b*) la aceleración angular, y (*c*) la aceleración de la mano.

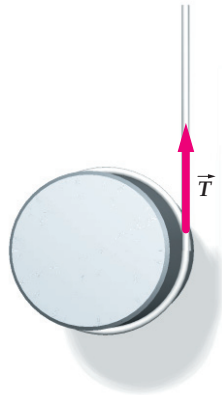


FIGURA 9.61
Problemas 80 y 86

81 •• Un cilindro uniforme de masa m_1 y radio R gira sobre un eje sin rozamiento. Se enrolla una cuerda alrededor del mismo conectada a un bloque de masa m_2, el cual está apoyado en un plano inclinado sin rozamiento de ángulo θ, como se ve en la figura 9.62. El sistema se deja en libertad desde el reposo con m_2 a una altura h sobre la base del plano inclinado. (*a*) ¿Cuál es la aceleración del bloque? (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*c*) ¿Cuál es la velocidad del bloque cuando llega al final del plano? (*d*) Analizar las respuestas para los casos extremos de $\theta = 0°$, $\theta = 90°$ y $m_1 = 0$. SSM

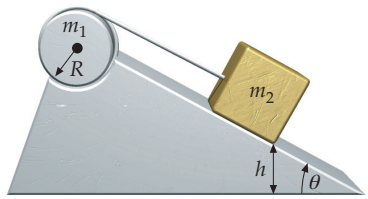


FIGURA 9.62
Problema 81

82 •• En la figura 9.63 se muestra un dispositivo para medir el momento de inercia de un objeto. Una plataforma circular posee un tambor concéntrico de radio R alrededor del cual se enrolla una cuerda. Esta cuerda pasa por una polea sin rozamiento y de su extremo cuelga un peso de masa M. El peso se deja caer desde el reposo y se mide el tiempo que transcurre cuando cae una distancia D. El sistema entonces se rebobina, el objeto cuyo momento de inercia

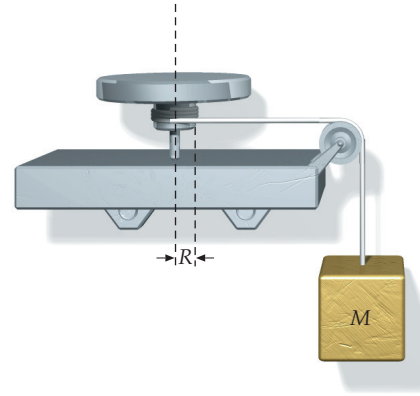


FIGURA 9.63 **Problema 82**

I se desea medir se sitúa sobre la plataforma y el sistema se deja libre de nuevo desde el reposo. El tiempo t_2 requerido ahora para que el peso descienda la misma distancia D proporciona los datos necesarios para el cálculo de I. Con R = 10 cm, M = 2,5 kg y D = 1,8 m, el t_1 = 4,2 s y t_2 = 6,8 s. (*a*) Determinar el momento de inercia combinado de la plataforma y el tambor. (*b*) Tomando t_2 = 6,9 s hallar el momento de inercia de la combinación plataforma-tambor-objeto. (*c*) Utilizar los resultados de los apartados anteriores para obtener el momento de inercia del objeto.

OBJETOS RODANTES SIN DESLIZAMIENTO

83 • Un cilindro homogéneo de 60 kg y 18 cm de radio rueda sin deslizarse sobre un suelo horizontal a 15 m/s. ¿Qué cantidad mínima de trabajo se necesita para producir este movimiento?

84 • Un objeto rueda sin deslizamiento. ¿Qué porcentaje de su energía cinética total representa su energía cinética de traslación si el objeto es (*a*) una esfera uniforme, (*b*) un cilindro uniforme o (*c*) un anillo?

85 •• En 1993, un yo-yo gigante de masa 400 kg y unos 1,5 m de radio se dejó caer desde una grúa de 57 m de altura. Uno de los extremos de la cuerda estaba atada a la grúa, de manera que el yo-yo se desenrollaba al descender. Suponiendo que el eje del yo-yo tenía un radio de r = 0,1 m, determinar la velocidad de descenso en el punto más bajo de su recorrido. SSM

86 •• Un cilindro uniforme de masa M y radio R tiene enrollada una cuerda. Esta cuerda está fuertemente sujeta, y el cilindro cae verticalmente, tal como se indica en la figura 9.61. (*a*) Demostrar que la aceleración del cilindro está dirigida hacia abajo y que su módulo es $a = 2g/3$. (*b*) Calcular la tensión de la cuerda.

87 •• Un yo-yo de 0,1 kg está formado por dos discos sólidos de radio 10 cm unidos entre sí por una barra sin masa de radio 1 cm y una cuerda enrollada a la barra. Un extremo de la cuerda se mantiene fijo y está bajo la tensión constante T cuando se suelta el yo-yo. Determinar la aceleración del yo-yo y la tensión T.

88 •• Una esfera sólida uniforme rueda sobre un plano inclinado sin deslizamiento. Si la aceleración del centro de masas es $20g$, ¿qué ángulo forma el plano inclinado?

89 •• Una corteza esférica fina rueda sin deslizamiento sobre un plano inclinado. Si la aceleración del centro de masas es $20g$, ¿qué ángulo forma el plano inclinado?

90 •• Una pelota rueda sin deslizarse por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Considerar que la pelota es una esfera hueca. Calcular, en función del coeficiente de rozamiento μ_e, (*a*) la

aceleración de la pelota, (*b*) la fuerza de rozamiento, y (*c*) el máximo ángulo de inclinación para que la pelota pueda rodar sin deslizarse.

91 •• Un cilindro macizo uniforme de madera rueda sin deslizarse sobre un plano inclinado de ángulo θ. El coeficiente de rozamiento estático es μ_e. Calcular (*a*) la aceleración del centro de masas del cilindro (*b*) la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cilindro y (*c*) el valor máximo del ángulo de inclinación del plano para el cual el cilindro rueda sin deslizamiento.

92 •• Una esfera hueca y otra sólida (y uniforme) de la misma masa m e igual radio R ruedan sin deslizamiento por un plano inclinado desde la misma altura H (figura 9.64). Ambas se mueven horizontalmente al salir de la rampa. Cuando las esferas chocan contra el suelo, el alcance de la esfera hueca es L. Determinar el alcance L' de la esfera uniforme sólida y hallar el cociente L'/L.

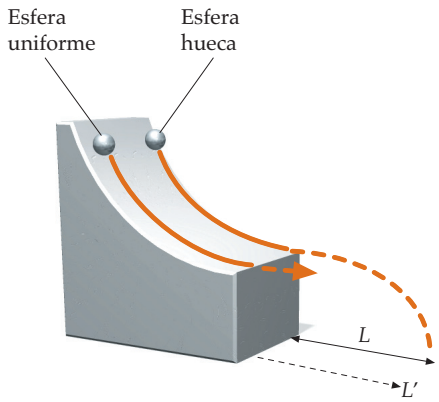


FIGURA 9.64 Problema 92

93 •• Un cilindro hueco de paredes delgadas y otro cilindro sólido uniforme ruedan horizontalmente sin desplazamiento. La velocidad del cilindro hueco es v. Ambos cilindros encuentran un plano inclinado por el que suben sin deslizarse. Si la altura máxima que alcanzan es la misma, determinar la velocidad v' del cilindro sólido. SSM

94 •• Un cilindro hueco, de paredes delgadas, y una esfera sólida parten del reposo y ruedan sin deslizamiento por un plano inclinado de longitud 3 m. El cilindro llega a la base del plano 2,4 s después de la esfera. Determinar el ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal.

95 •• Una rueda posee una delgada llanta de 3,0 kg y cuatro radios, cada uno de masa 1,2 kg. Determinar la energía cinética de la rueda al rodar sobre una superficie horizontal a la velocidad de 6,0 m/s.

96 ••• Un cilindro uniforme de masa M y radio R descansa sobre un bloque de masa m, el cual a su vez se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal sin rozamiento (figura 9.65). Si aplicamos al bloque una fuerza horizontal $\vec{F}$ éste acelera y el cilindro rueda sin deslizamiento. Determinar la aceleración del bloque.

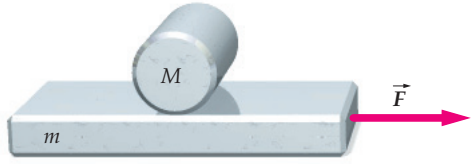


FIGURA 9.65 Problemas 96–98

97 ••• (*a*) Determinar la aceleración angular del cilindro en el problema 96. ¿Es horaria o antihoraria la rotación del cilindro? (*b*) ¿Cuál es la aceleración lineal del cilindro respecto a la mesa? (módulo y dirección) (*c*) ¿Cuál es el módulo y la dirección de la aceleración lineal del centro de masas del cilindro respecto al bloque?

98 ••• **MÚLTIPLES PASOS** Si la fuerza del problema 96 actúa a lo largo de una distancia d, determinar (*a*) la energía cinética del bloque y (*b*) la energía cinética del cilindro. (*c*) Demostrar que la energía cinética total del sistema bloque-cilindro es igual al trabajo realizado sobre el sistema por la fuerza.

99 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En la figura 9.66 se muestran dos grandes engranajes, cada uno de los cuales puede girar alrededor de un eje que pasa por su centro. Uno tiene un radio $R_1 = 0{,}5$ m y el otro $R_2 = 1$ m. El momento de inercia del engranaje 1 es $I_1 = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y el del engranaje 2 es $I_2 = 16\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. La palanca fija al engranaje 1 tiene una longitud de 1 m y masa despreciable. (*a*) Si se aplica una fuerza de 2 N al extremo de la palanca, tal como se ve en la figura, ¿cuál será la aceleración angular de los engranajes 1 y 2? (*b*) ¿Qué fuerza ha de aplicarse tangencialmente al extremo del engranaje 2 para evitar que el engranaje gire? SSM

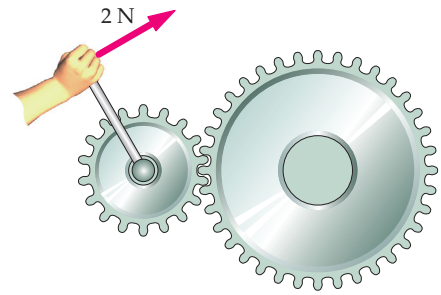


FIGURA 9.66 Problema 99

100 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Como ingeniero jefe de diseño de una compañía de juguetes, usted se encarga de diseñar un bucle para niños. La idea, como se muestra en la figura 9.67, consiste en que la bola de radio r y masa m ruede sin deslizarse por el carril inclinado y el bucle. La bola parte del reposo a una altura h. El radio del bucle es R. Determinar la altura mínima h, en función de R y r, para que la bola permanezca siempre en contacto con el carril a lo largo de todo el bucle. (No desprecie el tamaño de la bola.)

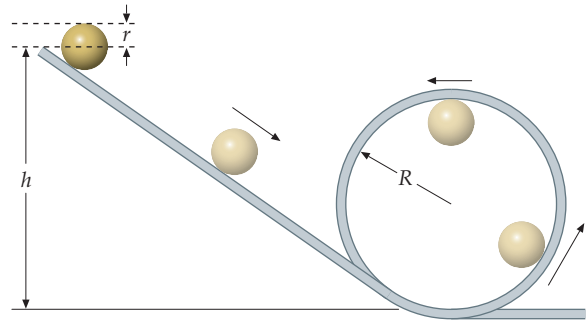


FIGURA 9.67 Problema 100

RODADURA CON DESLIZAMIENTO

101 •• En una bolera se lanza una bola de masa M y radio R de tal modo que en el instante en que toca el suelo se está moviendo horizontalmente con una velocidad v_0 sin rodar. La bola se desliza durante un tiempo t_1 a lo largo de una distancia s_1 antes de empezar a rodar sin deslizamiento. (*a*) Si μ_c es el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre la bola y el suelo, calcular s_1, t_1 y la velocidad final v_1 de la bola. (*b*) Determinar la relación entre la energía cinética final e inicial de la bola. (*c*) Hallar estas magnitudes para $v_0 = 8$ m/s y $\mu_c = 0{,}06$.

102 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una bola de billar de radio r se encuentra inicialmente en reposo sobre una mesa de billar horizontal (figura 9.68). Se la golpea mediante un taco que desarrolla una fuerza de módulo F_0 durante un tiempo muy corto Δt. El taco golpea la bola en un punto situado a una distancia h del punto de contacto con la mesa. Demostrar que la velocidad angular ω_0 está relacionada con la velocidad lineal inicial del centro de masas v_{cm} por $v_{cm} = (5/2)\, v_{cm}(h - r)/r^2$. Utilizando valores razonables para h, r y v_{cm} estimar el ritmo de rotación de la bola justo después del golpe.

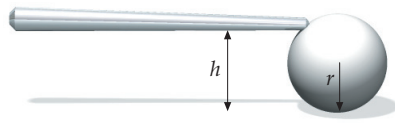


FIGURA 9.68 Problema 102

103 •• Una pelota esférica uniforme se pone en rotación respecto a un eje horizontal con una velocidad angular ω_0 y se deja en reposo sobre el suelo. Si el coeficiente de rozamiento por deslizamiento entre el suelo y la pelota es μ_c, calcular la velocidad del centro de masas de la pelota cuando ésta comienza a rodar sin deslizamiento.

104 •• Una pelota sólida homogénea con una masa de 20 g y un radio de 5 cm descansa sobre una superficie horizontal. En dirección horizontal y a una distancia de 9 cm sobre la superficie se aplica a la bola una fuerza instantánea. La fuerza crece linealmente desde 0 hasta un valor máximo de 40 000 N en 10^{-4} s, y después decrece linealmente a 0 en 10^{-4} s. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después del impacto? (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular de la pelota después del impacto? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando comienza a rodar sin deslizamiento? (*d*) ¿Durante cuánto tiempo la pelota se ha deslizado sobre la superficie? Supóngase que $\mu_c = 0{,}5$.

105 •• Una bola de billar de 0,16 kg y radio 3 cm es golpeada por el taco mediante un impulso horizontal que pasa por su centro. La velocidad inicial de la bola es de 4 m/s. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,6. (*a*) ¿Durante cuántos segundos se desliza la bola antes de que comience a rodar sin deslizamiento? (*b*) ¿Qué distancia recorre deslizándose? (*c*) ¿Cuál es su velocidad cuando comienza a rodar sin deslizamiento? SSM

106 •• Una bola de billar inicialmente en reposo recibe un golpe instantáneo mediante un taco. El impulso es horizontal y se aplica a una distancia $2R/3$ por debajo de la línea central (figura 9.69). La velocidad inicial de la bola es v_0 y el coeficiente de rozamiento cinético μ_c. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular inicial ω_0? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la bola una vez que comienza a rodar sin deslizamiento? (*c*) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la bola justo después del golpe?

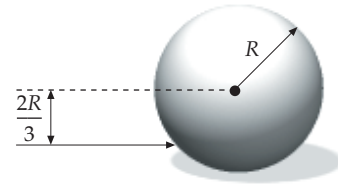


FIGURA 9.69 Problema 106

107 •• Se lanza por la pista de una bolera una bola de radio R con una velocidad inicial v_0 y una velocidad angular de rotación $\omega_0 = 3v_0/R$ hacia adelante. El coeficiente de rozamiento cinético es μ_c. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la bola cuando comienza a rodar sin deslizamiento? (*b*) ¿Durante cuánto tiempo se ha deslizado la bola antes de que empiece a rodar sin deslizamiento? (*c*) ¿Qué distancia ha recorrido la bola por la pista antes de que comience a rodar sin deslizamiento?

PROBLEMAS GENERALES

108 •• Con objeto de poner en marcha un tiovivo, se enrolla una cuerda alrededor de él y se tira de la misma. Se ejerce durante 12 s una fuerza de 260 N sobre la cuerda. Durante este tiempo, el tiovivo, que tiene un radio de 2,2 m, realiza una rotación completa. (*a*) Hallar la aceleración angular del tiovivo suponiendo que es constante. (*b*) ¿Qué momento ejerce la cuerda sobre el tiovivo? (*c*) ¿Cuál es el momento de inercia del tiovivo?

109 •• Un bastón uniforme de 2 m de longitud se apoya sobre el hielo formando un ángulo de 30° con la superficie horizontal. El bastón cae desde el reposo, manteniendo en todo momento su extremo inferior en contacto con la superficie del hielo. ¿Qué distancia se ha movido este extremo del bastón mientras el bastón cae completamente sobre la superficie helada? Supóngase que el hielo no ejerce rozamiento.

110 •• Un disco uniforme de radio 0,12 m y masa 5 kg tiene un eje central de modo que puede girar libremente a su alrededor. Se enrolla una cuerda alrededor del disco y se tira de ella con una fuerza de 20 N (figura 9.70). (*a*) ¿Cuál es el momento ejercido sobre el disco respecto al eje de rotación? (*b*) ¿Cuál es la aceleración angular del disco? (*c*) Si el disco parte del reposo, ¿cuál es su velocidad angular después de 5 s? (*d*) ¿Cuál es su energía cinética después de 5 s? (*e*) Hallar el ángulo total θ que gira el disco en 5 s. (*f*) Demostrar que el trabajo realizado por el momento, $\tau\,\Delta\theta$, es igual a la energía cinética.

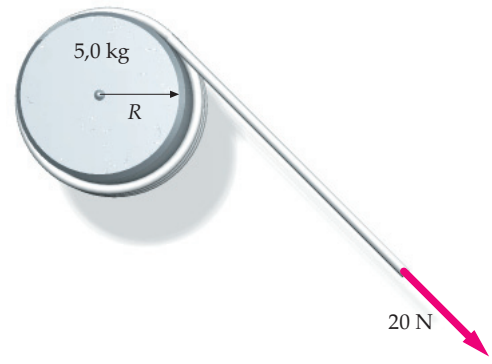


FIGURA 9.70 Problema 110

111 •• Una barra de 0,25 kg y longitud 80 cm está suspendida de un pivote por uno de sus extremos. Se considera que el pivote no tiene rozamiento. La barra se mantiene horizontal y se deja caer. Inmediatamente después de su liberación, (*a*) ¿cuál es la aceleración del centro de la barra? (*b*) ¿Y la aceleración inicial de un punto del extremo de la barra? (*c*) Determinar la velocidad lineal del centro de masas de la barra cuando está en posición vertical.

112 •• Una bolita de masa M y radio R rueda sin deslizamiento hacia abajo por la pista de la izquierda desde la altura h_1, como indica la figura 9.71. La bolita sube entonces por la pista sin rozamiento de la derecha hasta una altura h_2. Determinar h_2.

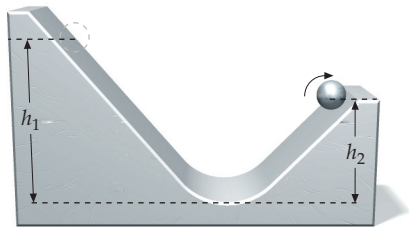


FIGURA 9.71 Problema 112

113 •• Un disco uniforme con una masa de 120 kg y un radio de 1,4 m rueda inicialmente con una velocidad angular de 1100 rev/min. (*a*) A una distancia radial de 0,6 m del eje se aplica una fuerza tangencial. (*a*) ¿Qué trabajo debe realizar esta fuerza para detener el disco? (*b*) Si la rueda se detiene en 2,5 min, ¿qué momento produce la fuerza? ¿Cuál es el módulo de la fuerza? (*c*) ¿Cuántas revoluciones da la rueda en estos 2,5 min? SSM

114 •• Un tiovivo de un parque tiene una plataforma circular de 4,00 m de diámetro y una masa de 240 kg. Cuatro niños que corren a su alrededor empujan tangencialmente la plataforma hasta que el tiovivo, partiendo del reposo, alcanza una velocidad estacionaria de 2,14 rev/min. (*a*) Si cada niño ejerce una fuerza de 26 N, ¿qué distancia han recorrido? (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular del tiovivo? (*c*) ¿Cuánto trabajo ha realizado cada niño? (*d*) ¿Cuál es la energía cinética del tiovivo?

115 •• Un aro de masa 1,5 kg y radio 65 cm tiene una cuerda enrollada a su circunferencia y está apoyado en posición plana sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Se tira de la cuerda con una fuerza de 5 N y la cuerda no se desliza sobre el aro. (*a*) ¿Qué distancia recorrerá el centro del aro en 3 s? (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular del aro respecto a su centro de masas al cabo de 3 s?

116 •• Una rueda vertical de molino está constituida por un disco uniforme de masa 60 kg y 45 cm de radio. Posee un manubrio de 65 cm de radio y de masa despreciable. Se une un peso de 25 kg al manubrio cuando éste se encuentra en posición horizontal. Despreciando el rozamiento, calcular (*a*) la aceleración angular inicial de la rueda y (*b*) su velocidad angular máxima.

117 •• Un disco uniforme de radio R y masa M pivota alrededor de un eje horizontal que pasa por su borde, paralelamente al eje de simetría, de tal manera que puede oscilar libremente en un plano vertical (figura 9.72). Desde una posición de reposo, con su centro de masas a la misma altura que el pivote, se deja caer. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular del disco cuando su centro de masas está directamente por debajo del pivote? (*b*) ¿Qué fuerza ejerce el pivote en ese momento?

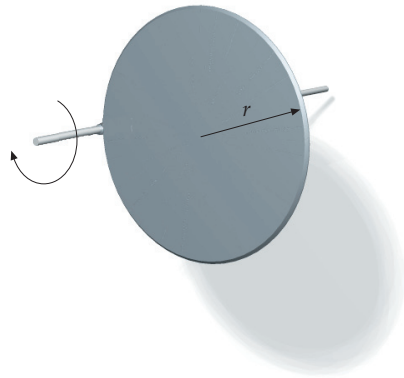


FIGURA 9.72 Problema 117

118 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El techo del comedor de la residencia de estudiantes del colegio St. Mary se sostiene gracias a vigas de madera reforzadas que tienen la forma que se muestra en la figura 9.73. Cada viga vertical tiene una longitud de 365 cm y una anchura de 61 cm. Cada viga horizontal tiene una longitud de 183 cm y una anchura de 61 cm. Las vigas verticales tienen una masa de 350 kg y las vigas horizontales de 175 kg. Cuando se estaban instalando, una de las estructuras empezó a caer antes de que fuera anclada (afortunadamente los trabajadores consiguieron sujetarla antes de que cayera del todo). (*a*) Si empezó a caer desde una posición vertical, ¿cuál fue la aceleración angular inicial de la estructura? Supongamos que el pie no resbaló y que la caída ocurría en el plano vertical definido por las vigas vertical y horizontal de la figura. (*b*) ¿Cuál fue la aceleración lineal inicial de la viga horizontal en el extremo derecho de la misma cuando la estructura empezaba a caer? (*c*) ¿Cuál fue la componente horizontal de esta aceleración? (*d*) Suponiendo que los trabajadores agarraron la viga antes de que cayera, estimar la velocidad de rotación cuando la agarraron.

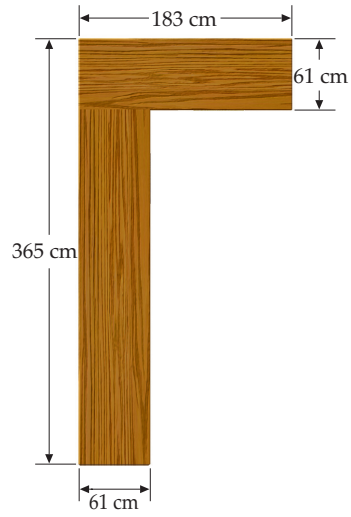


FIGURA 9.73 Problema 118

119 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted participa en una liga de bolos con sus amigos. De vez en cuando, observa que su bola rueda sin deslizamiento de nuevo hacia usted sobre la parte plana del carril. En el movimiento de vuelta, justo cuando la bola empieza a subir por la parte inclinada del carril, su velocidad es de 3,7 m/s. La longitud de esta parte inclinada es 2,5 m. El radio de la bola es 11,5 cm. (*a*) ¿Cuánto vale

la velocidad angular de la bola justo antes de subir por la parte inclinada del carril? (*b*) Si la velocidad con la que la bola llega al extremo superior del carril inclinado es de 0,4 m/s, ¿cuál es el ángulo que forma con la horizontal la parte inclinada del carril? SSM

120 •• La figura 9.74 muestra un cilindro hueco de longitud 1,8 m, masa 0,8 kg y radio 0,2 m. El cilindro puede girar libremente alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y es perpendicular al eje del cilindro. Dentro del cilindro existen dos masas de 0,2 kg cada una, conectadas a sendos muelles, de constante k y longitudes naturales 0,4 m. Las paredes interiores del cilindro carecen de rozamiento. (*a*) Determinar el valor de la constante elástica del muelle sabiendo que las masas están localizadas a 0,8 m del centro del cilindro cuando éste gira a 24 rad/s. (*b*) ¿Qué trabajo es necesario para que el sistema pase de $\omega = 0$ a $\omega = 24$ rad/s?

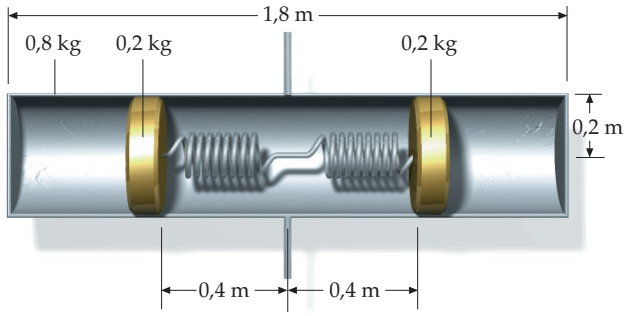


FIGURA 9.74 **Problemas 120 y 123**

121 •• Un experimento de clase muy común consiste en mantener una regla de un metro de longitud en posición horizontal agarrándola con la mano por uno de sus extremos con unas monedas repartidas uniformemente a lo largo de toda su longitud. A medida que pasa el tiempo, la persona que sostiene la regla se cansa y, poco a poco, la mano va relajandose, de forma que la regla empieza a rotar lentamente entorno al punto de agarre. Suponiendo que este proceso se haga de forma regular, se observa que las monedas que están más allá de una cierta distancia del eje de rotación caen y las que están más cerca no. Supongamos que la demostración se repite sin monedas. (*a*) ¿Cuál es la aceleración inicial del extremo libre de la regla?, (*b*) ¿A qué distancia del extremo de la regla la aceleración inicial es mayor que g? SSM

122 •• Una barra metálica sólida de 1,5 m de longitud puede girar libremente sin rozamiento alrededor de un eje horizontal fijo, perpendicular a la barra y que pasa por un extremo. El otro extremo se mantiene en posición horizontal. Una serie de pequeñas monedas de masa m se sitúan sobre la barra a 25 cm, 50 cm, 76 cm, 1 m, 1,25 m y 1,50 m desde el soporte. Se deja ahora caer el extremo libre. Calcular la fuerza inicial ejercida sobre cada moneda por la barra. La masa de las monedas es despreciable en comparación con la masa de la barra.

123 •• Supongamos que en el sistema descrito en el problema 120, las constantes elásticas de los muelles son, para cada uno, $k = 60$ N/m. El sistema parte del reposo y, lentamente, acelera hasta que las masas se encuentran a 0,8 m del centro del cilindro. ¿Qué trabajo se ha realizado en este proceso?

124 ••• Una cuerda se enrolla alrededor de un cilindro uniforme de radio R y masa M que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se tira horizontalmente de la cuerda desde la parte superior con una fuerza F. (*a*) Demostrar que la aceleración angular del cilindro es el doble que la necesaria para rodar sin deslizamiento, de modo que el cilindro se desliza hacia atrás contra la mesa. (*b*) Determinar el módulo y dirección de la fuerza de rozamiento entre la masa y el cilindro necesaria para que el cilindro ruede sin deslizamiento. ¿Cuál es la aceleración del cilindro en este caso?

125 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Calculemos la posición y de la carga atada al extremo del torno del ejemplo 9.8 en función del tiempo mediante una integración numérica. Para llevarlo a cabo, obsérvese que $v(y) = dy/dt$, o bien

$$t = \int_0^y \frac{1}{v(y')}dy' \approx \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{v(y'_i)}\Delta y'$$

donde $\Delta y'$ es un incremento pequeño, y', y $y' = N\Delta y'$. Por consiguiente, se puede calcular t en función de y sumando numéricamente. Representar gráficamente y frente a t entre los valores de 0 y 2 s. Suponga $M = 10$ kg, $R = 0{,}5$ m, $m_b = 5$ kg, $L = 10$ m y $m_c = 3{,}5$ kg. Use $\Delta y' = 0{,}1$ m. Comparar este resultado con el que se obtendría si el cubo con el agua cayera en caída libre. SSM

126 ••• En la figura 9.75 se muestra un cilindro macizo de masa M y radio R al cual se sujeta un segundo cilindro hueco de radio r y masa m. Alrededor del cilindro hueco se enrolla una cuerda. El cilindro macizo descansa sobre una superficie horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre el cilindro y la superficie es μ_e. Si se aplica una ligera tensión a la cuerda en dirección vertical, el cilindro rueda hacia la izquierda; si la tensión se aplica con la cuerda extendida horizontalmente, el cilindro rueda hacia la derecha. Determinar el ángulo que debe formar la cuerda con la horizontal para que el cilindro permanezca estacionario al aplicar una pequeña tensión a la cuerda.

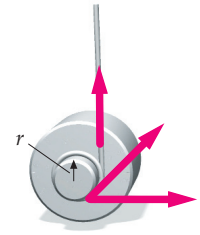


FIGURA 9.75 **Problema 126**

127 ••• En los problemas donde intervienen poleas con momentos de inercia distintos de cero, los módulos de las tensiones de la cuerda a ambos lados de la polea no son iguales. El valor distinto de la tensión se debe a la fuerza de rozamiento estático entre la cuerda y la polea. Sin embargo, la fuerza de rozamiento estática no puede ser arbitrariamente grande. Si se considera una cuerda sin masa enrollada parcialmente alrededor de un cilindro un ángulo $\Delta\theta$ (medido en radianes), se puede demostrar que si la tensión a un lado de la polea es T y al otro lado es T' ($T' > T$), el valor máximo de T' en relación a T que se puede dar sin que la cuerda resbale es $T'_{máx} = Te^{\mu_e \Delta\theta}$, donde μ_e es el coeficiente de rozamiento estático. Consideremos la máquina de Atwood de la figura 9.76, donde la polea tiene un radio $R = 0{,}15$ m, un momento de inercia $I = 0{,}35$ kg · m^2 y un coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0{,}30$. (*a*) Si la tensión en un lado de la polea es de 10 N, ¿cuál es la tensión máxima al otro lado de la polea para evitar que la cuerda resbale sobre ella? (*b*) ¿Cuál es la aceleración de los bloques en este caso? (*c*) Si la masa de uno de los bloques es de 1 kg y ambos bloques se dejan libres, ¿cuál es la masa del otro bloque para que la polea gire sin que se produzca deslizamiento de la cuerda? (*d*) ¿Cuál es la aceleración de los bloques en este caso? SSM

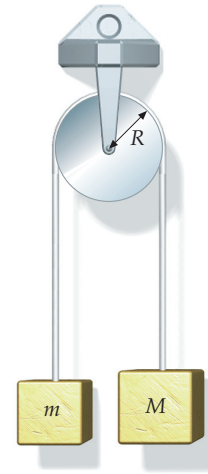


FIGURA 9.76 **Problema 127**

128 ••• Un cilindro homogéneo pesado tiene una masa m y un radio R. Se va acelerado por una fuerza $\vec{T}$ que se aplica mediante una cuerda enrollada a lo largo de un tambor ligero de radio r unido al cilindro (figura 9.77). El coeficiente de rozamiento estático es suficiente para que el cilindro ruede sin deslizamiento. (*a*) Hallar la fuerza de rozamiento. (*b*) Hallar la aceleración a del centro del cilindro. (*c*) Demostrar que es posible escoger un valor de r tal que a sea mayor que T/m. (*d*) ¿Cuál es el sentido de la fuerza de rozamiento en las circunstancias descritas en el apartado (*c*)?

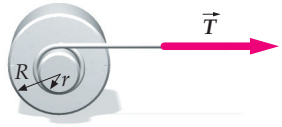


FIGURA 9.77 Problema 128

129 ••• Una barra uniforme de longitud L y masa M puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos, como se muestra en la figura 9.78. La barra se deja caer desde el reposo cuando forma un ángulo $\theta = \theta_0$ con la vertical. Demostrar que la fuerza que ejerce sobre la barra viene dada por $F_{\parallel} = \frac{1}{2}Mg(5\cos\theta - 3\cos\theta_0)$ y $F_{\perp} = \frac{1}{4}Mg\,\text{sen}\,\theta$, donde $F_{\parallel}$ es la componente de la fuerza paralela a la barra y $F_{\perp}$ es la componente perpendicular.

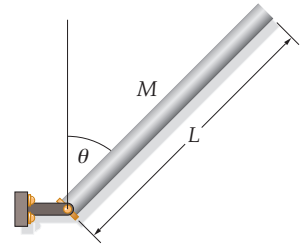


FIGURA 9.78 Problema 129

CAPÍTULO 10

El telescopio espacial *Hubble* fue puesto en órbita y en funcionamiento en 1990. Casi de forma inmediata se detectó un fallo en el espejo primario. En 1993 fue visitado por una aeronave de mantenimiento y reparado. Desde entonces, el *Hubble* nos ha enviado imágenes espectaculares del universo. El impacto de esas imágenes ha hecho enriquecer y extender nuestro conocimiento del universo. El telescopio *Hubble* es un instrumento científico extraordinario. *(NASA.)*

Momento angular

10.1 Naturaleza vectorial de la rotación
10.2 Momento de una fuerza y momento angular
10.3 Conservación del momento angular
*10.4 Cuantización del momento angular

Como sucede con la conservación de la energía y del momento lineal, la conservación del momento angular es uno de los principios básicos de la Física. La evidencia experimental muestra que el momento angular ni se crea ni se destruye.

En este capítulo, extendemos nuestro estudio del movimiento de rotación a situaciones en las que la dirección del eje de giro puede variar. La velocidad angular, la aceleración angular y el momento de una fuerza se trataron en el capítulo 9. Aquí, comenzamos introduciendo la naturaleza vectorial de esas magnitudes y del momento angular, que es el análogo rotacional del momento lineal. A continuación, demostraremos que el momento resultante que actúa sobre un sistema es equivalente a la tasa de cambio de su momento angular, resultado equivalente a la segunda ley de Newton aplicada al movimiento de rotación. Por lo tanto, el momento angular se conserva en los sistemas con momento resultante externo nulo. Lo mismo que la conservación del momento lineal, el principio de conservación del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza relacionada con los átomos, las moléculas, partículas subatómicas y fotones.

? Para apuntar el telescopio *Hubble* en una nueva dirección el telescopio ha de rotar. ¿Como se puede conseguir? (Véase el ejemplo 10.7.)

10.1 NATURALEZA VECTORIAL DE LA ROTACIÓN

En el capítulo 9, señalábamos el sentido de rotación respecto a un eje fijo asignando signos más o menos para indicar el sentido de la velocidad angular, de un modo análogo al utilizado en el capítulo 2 para indicar el sentido de la velocidad en el movimiento lineal en una dimensión. Pero cuando la dirección del eje de rotación no está fija en el espacio, los signos más o menos no son suficientes para describir el sentido de la velocidad angular. Esta insuficiencia se supera tratando la velocidad angular como un vector $\vec{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Consideremos, por ejemplo, el disco rotatorio de la figura 10.1. Determinaremos el sentido de $\vec{\omega}$ por una convención conocida como la regla de la mano derecha. Se puede obtener la dirección de $\vec{\omega}$ arrollando los dedos de la mano derecha en la dirección de rotación (figura 10.2); el dedo pulgar apunta entonces en la dirección del eje de rotación en la dirección de $\vec{\omega}$.

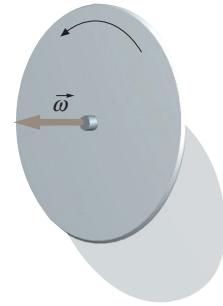


FIGURA 10.1

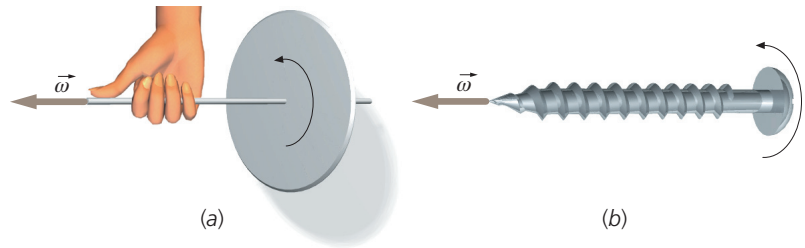


FIGURA 10.2 (*a*) Cuando los dedos de la mano derecha siguen el sentido de la rotación, el pulgar extendido apunta en la dirección de $\vec{\omega}$. (*b*) Esta dirección coincide también con el avance de un tornillo ordinario.

En el capítulo 9, indicábamos la dirección del momento de fuerza respecto a un eje asignándole un signo positivo o negativo para indicar la dirección del giro que producía. En este capítulo, definimos el momento de una fuerza $\vec{\tau}$ respecto a un punto como una magnitud vectorial y, como sucede con $\vec{\omega}$, la dirección de $\vec{\tau}$ se especifica mediante la regla de la mano derecha. La figura 10.3 muestra una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre una partícula en cierta posición $\vec{r}$ relativa al origen O. El momento $\vec{\tau}$ ejercido por esta fuerza respecto al origen O se define como un vector perpendicular al plano formado por $\vec{F}$ y $\vec{r}$, de módulo Fr sen ϕ, donde ϕ es el ángulo formado por las direcciones de $\vec{F}$ y de $\vec{r}$. Si $\vec{F}$ y $\vec{r}$ están en el plano xy, como en la figura 10.3, el vector momento tiene la dirección del eje z. Si $\vec{F}$ está aplicada en el borde de un disco de radio r, como muestra la figura 10.4, el momento tiene la magnitud Fr, y está dirigido a lo largo del eje de rotación como se indica.

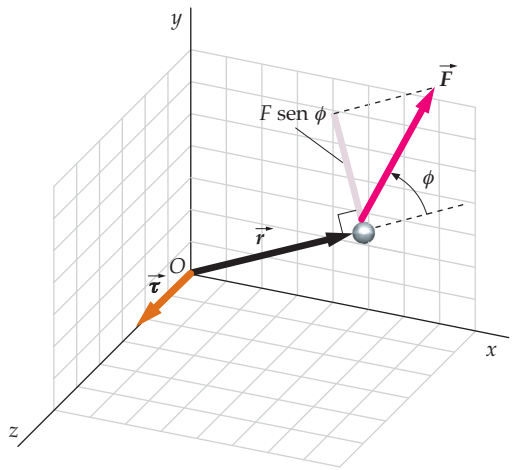


FIGURA 10.3 Si $\vec{F}$ y $\vec{r}$ son perpendiculares al eje z, entonces $\vec{\tau}$ es paralelo al eje z.

PRODUCTO VECTORIAL

El momento de una fuerza se expresa matemáticamente como el **producto vectorial** de $\vec{r}$ y $\vec{F}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad 10.1$$

El producto vectorial de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, se define como un vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ cuyo módulo es igual al área del paralelogramo formado por los dos vectores (figura 10.5), y cuya dirección es perpendicular al plano que contiene $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con el sentido dado por la regla de la mano derecha cuando $\vec{A}$ gira hacia $\vec{B}$ recorriendo el ángulo más pequeño que forman ambos vectores (figura 10.6). Si ϕ es el ángulo entre los dos vectores y $\hat{n}$ un vector unitario perpendicular a cada uno de ellos en el sentido de $\vec{C}$, el producto vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen}\phi\, \hat{n} \qquad 10.2$$

DEFINICIÓN: PRODUCTO VECTORIAL

A partir de la definición del producto vectorial, se deduce que

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0 \qquad 10.3$$

y

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad 10.4$$

Debe señalarse especialmente que es importante el orden en que se multiplican los dos vectores. A continuación, mencionaremos algunas de la propiedades del producto vectorial de dos vectores.

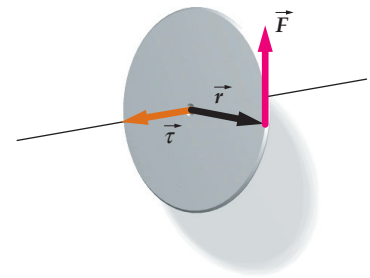


FIGURA 10.4

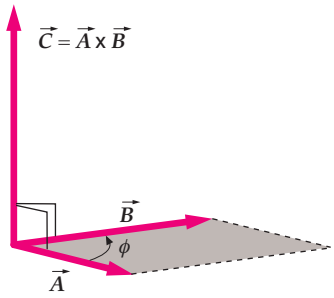


FIGURA 10.5 El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector $\vec{C}$ perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$, y de módulo AB sen ϕ, que es igual al área del paralelogramo indicado.

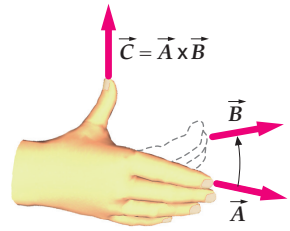


FIGURA 10.6 La dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ viene dada por la regla de la mano derecha cuando los dedos giran desde $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ a lo largo del ángulo ϕ.

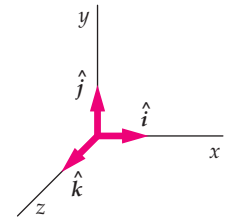


FIGURA 10.7

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Calcular el producto vectorial de dos vectores

PLANTEAMIENTO A veces es más fácil calcular el producto vectorial de dos vectores utilizando $\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen}\phi\, \hat{n}$. Otras veces es preferible calcularlo utilizando las componentes cartesianas de los vectores.

SOLUCIÓN

1. El producto vectorial satisface la propiedad distributiva de la suma:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \qquad 10.5$$

2. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son funciones de t, la derivada del producto vectorial sigue la regla típica para la derivada del producto de dos funciones:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}\right) \qquad 10.6$$

3. Los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ (figura 10.7) son mutuamente perpendiculares y los productos vectoriales entre ellos son:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \text{y}\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \qquad 10.7a$$

(invirtiendo el orden de los productos da $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$ y $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$, de acuerdo con la ecuación 10.4. Una herramienta para recordar esto se da en la figura 10.8). Además,

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \qquad 10.7b$$

COMPROBACIÓN Asegúrese de que los resultados obtenidos tienen sentido. Por ejemplo, el resultado del producto vectorial de dos vectores es un vector que es perpendicular a cada uno de ellos. Además, es conveniente comprobar que no se ha invertido el orden del producto, pues ello podría dar lugar a un cambio de signo en el vector resultante y, por tanto, a un cambio de dirección.

OBSERVACIÓN Cualquier sistema de coordenadas para el cual las ecuaciones 10.7*a* y 10.7*b* son válidas se denomina sistema de coordenadas de la mano derecha (figura 10.9). En este libro sólo se utiliza el sistema de coordenadas de la mano derecha.

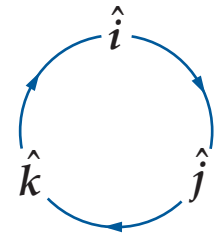
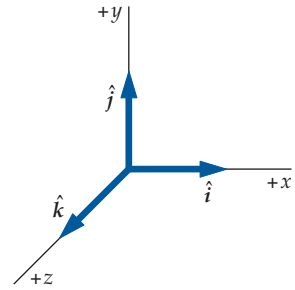
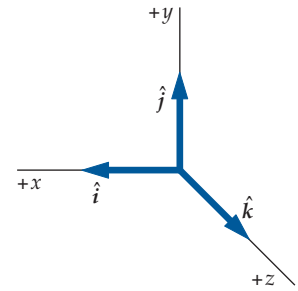


FIGURA 10.8 Se puede calcular el producto vectorial entre los vectores unitarios cartesianos siguiendo el orden de esta figura en el sentido de las flechas (horario) ($\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$). Si lo seguimos en sentido contrario, el producto tendrá un signo negativo ($\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$).



Sistema de la mano derecha ($\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$)



Sistema de la mano izquierda ($\hat{i} \times \hat{j} \neq \hat{k}$)

FIGURA 10.9 Sistema de coordenadas de la mano derecha y de la mano izquierda. En este libro sólo utilizaremos el de la mano derecha.

Ejemplo 10.1 Producto escalar y vectorial

Si $\vec{A} = 3\hat{j}$, $\vec{A} \times \vec{B} = 9\hat{i}$, y $\vec{A} \cdot \vec{B} = 12$, determinar $\vec{B}$.

PLANTEAMIENTO Expresar $\vec{B}$ en sus componentes cartesianas y despejar cada una de ellas a partir de la información anterior.

SOLUCIÓN

1. Expresar $\vec{B}$ en sus componentes. El trabajo consiste en despejar cada una de ellas:
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
2. Nos dan $\vec{A} \cdot \vec{B} = 12$. Calculamos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ utilizando la ecuación 6.15 y simplificamos:
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3\hat{j} \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = 3B_x\hat{j} \cdot \hat{i} + 3B_y\hat{j} \cdot \hat{j} + 3B_z\hat{j} \cdot \hat{k}$$
$$= 0 + 3B_y + 0 = 3B_y$$
3. Igualamos el resultado anterior a 12 y despejamos B_y:
$$3B_y = 12, \quad \text{por lo tanto,} \quad B_y = 4$$
4. Nos dan $\vec{A} \times \vec{B} = 9\hat{i}$. Calculamos $\vec{A} \times \vec{B}$ utilizando las ecuaciones 10.7*a* y 10.7*b*, y simplificamos:
$$\vec{A} \times \vec{B} = 3\hat{j} \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = 3B_x\hat{j} \times \hat{i} + 3B_y\hat{j} \times \hat{j} + 3B_z\hat{j} \times \hat{k}$$
$$= 3B_x(-\hat{k}) + 3B_y(0) + 3B_z(\hat{i}) = 3B_z\hat{i} - 3B_x\hat{k}$$
5. Igualamos el resultado anterior a $9\hat{i}$ y despejamos las componentes de $\vec{B}$:
$$\vec{A} \times \vec{B} = 9\hat{i}$$
$$3B_z\hat{i} - 3B_x\hat{k} = 9\hat{i} \quad \text{por lo tanto,}$$
$$B_z = 3 \text{ y } B_x = 0$$
$$\therefore \vec{B} = 0\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k} = \boxed{4\hat{j} + 3\hat{k}}$$

COMPROBACIÓN El producto vectorial de dos vectores cualesquiera es un vector perpendicular a ambos (excepto cuando el resultado del producto es cero). Puesto que $\vec{A} \times \vec{B} = 9\hat{i}$, es de esperar que $\vec{B}$ sea perpendicular a $\hat{i}$, lo que significa que la componente x de $\vec{B}$ debería ser cero. El valor obtenido de $\vec{B}$ concuerda con lo esperado.

10.2 MOMENTO DE UNA FUERZA Y MOMENTO ANGULAR

La figura 10.10 muestra una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en una posición $\vec{r}$ relativa al origen O. El momento lineal de las partículas es $\vec{p} = m\vec{v}$. El **momento angular** $\vec{L}$ de la partícula respecto al origen O se define como el producto vectorial de $\vec{r}$ y $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad 10.8$$

DEFINICIÓN: MOMENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

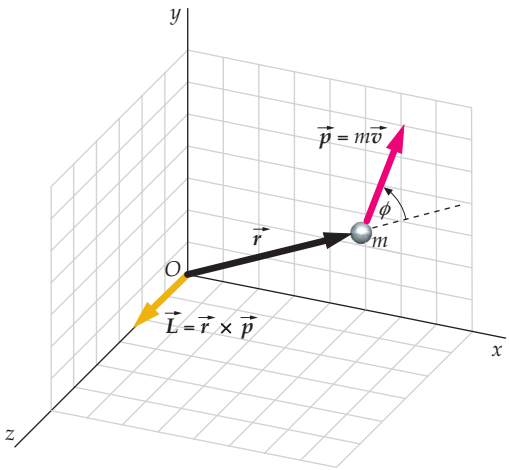


FIGURA 10.10

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Trigonometría**

Si $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son ambos perpendiculares al eje z, como en la figura 10.10, entonces $\vec{L}$ es paralelo al eje z y viene dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mvr \operatorname{sen}\phi\, \hat{k}$. Lo mismo que el momento de una fuerza, el momento angular se define *respecto a un punto del espacio*; en este caso el momento angular se define respecto al origen.

La figura 10.11 muestra una partícula de masa m ligada a un disco circular de masa despreciable que está en el plano xy con su centro en el origen. El disco gira alrededor del eje z con velocidad angular ω. La velocidad v de la partícula y el módulo de su velocidad angular ω vienen relacionados por la expresión $v = r\omega$. El momento angular de la partícula respecto al centro del disco es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = rmv \operatorname{sen} 90° \, \hat{k} = rmv\hat{k} = mr^2\omega\hat{k} = mr^2\vec{\omega}$$

Nota: en este ejemplo el vector momento angular tiene la misma dirección y sentido que la velocidad angular.

Como mr^2 es el momento de inercia de una sola partícula respecto al eje z, resulta:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

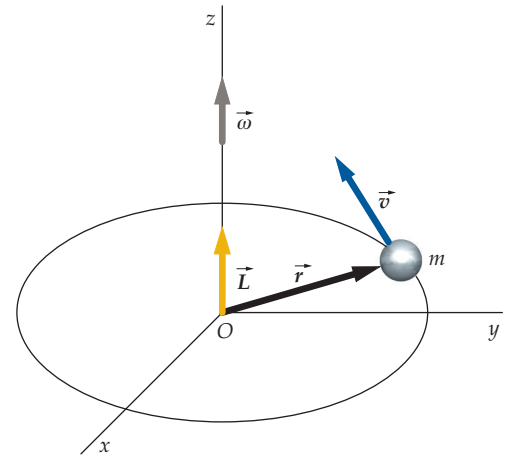


FIGURA 10.11

Este resultado no es válido para el momento angular alrededor de un punto cualquiera del eje z. La figura 10.12 muestra el vector momento angular $\vec{L}'$ para la misma partícula ligada en el mismo disco, pero referido a un punto del eje z que no coincide con el centro del círculo. En este caso, el momento angular no es paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$, la cual está dirigida a lo largo del eje z.

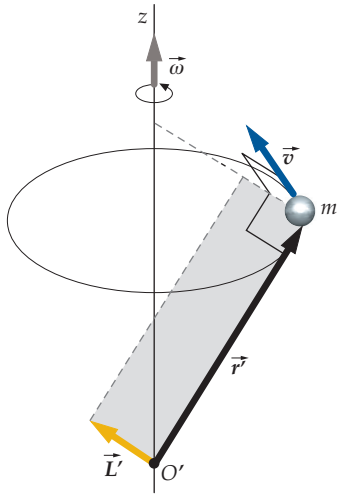


FIGURA 10.12

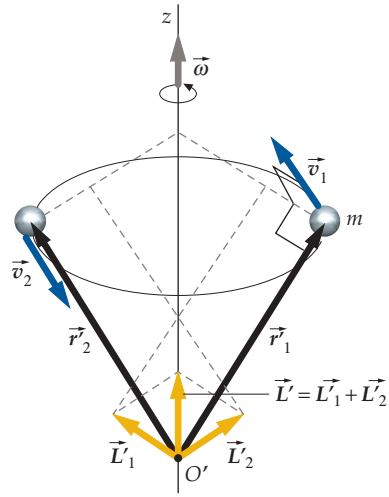


FIGURA 10.13

En la figura 10.13, hemos añadido una segunda partícula de igual masa que se mueve en el mismo disco. Los vectores momento angular, $\vec{L}'_1$ y $\vec{L}'_2$, están representados respecto al mismo punto O'. El momento angular total $\vec{L}' = \vec{L}'_1 + \vec{L}'_2$ del sistema formado por las dos partículas es de nuevo paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$. En este caso, el eje de rotación, el eje z, pasa a través del centro de masas del sistema de las dos partículas, y la distribución de masa es simétrica respecto a este eje, que se denomina eje de simetría. Para cualquier sistema de partículas que gira alrededor de un eje de simetría, el momento angular total (que es la suma de los momentos angulares de las partículas individuales) es paralelo a la velocidad angular y viene dado por

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad 10.9$$

MOMENTO ANGULAR DE UN SISTEMA QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE DE SIMETRÍA

donde I es un escalar.*

* En tratamientos más avanzados, la ecuación 10.9 es válida respecto a cualquier eje, pero I es un tensor de orden 3.

Ejemplo 10.2 Momento angular respecto al origen

Determinar el momento angular respecto al origen en las siguientes situaciones. (*a*) Un coche de masa 1200 kg se mueve en un círculo de 20 m de radio con velocidad de 15 m/s. El círculo se halla en el plano *xy*, centrado en el origen. Visto desde un punto situado en la parte positiva del eje *z*, el coche se mueve en sentido antihorario. (*b*) El mismo coche se mueve con velocidad $\vec{v} = -(15\ \text{m/s})\hat{i}$ a lo largo de la línea $y = y_0 = 20$ m, en el plano *xy*, paralela al eje *x*. (*c*) Un disco en el plano *xy* de radio 20 m y masa 1200 kg gira con la velocidad angular de 0,75 rad/s alrededor de su eje, que es el eje *z*. Visto desde un punto situado en la parte positiva del eje *z*, el disco se mueve en sentido antihorario.

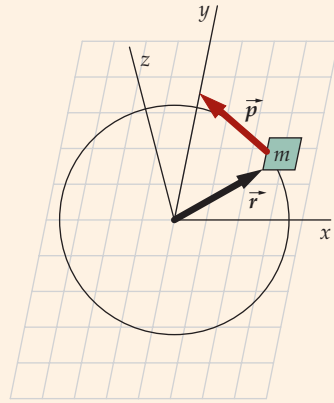


FIGURA 10.14

PLANTEAMIENTO En los apartados (*a*) y (*b*) úsese la relación $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, pues consideramos el coche como una partícula puntual. En el apartado (*c*) úsese $\vec{L} = I\vec{\omega}$, pues describimos el disco como un cuerpo rígido no puntual. Para determinar la dirección de $\vec{L}$, representar gráficamente los vectores $\vec{p}$ y $\vec{r}$, y aplicar la regla de la mano derecha.

SOLUCIÓN

(*a*) $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares y $\vec{r} \times \vec{p}$ tiene la dirección *z* positiva (figura 10.14):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = rmv\,\text{sen}\,90°\hat{k} \\ &= (20\ \text{m})(1200\ \text{kg})(15\ \text{m/s})\hat{k} \\ &= \boxed{3{,}6 \times 10^5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ \hat{k}}\end{aligned}$$

(*b*) 1. El mismo coche se mueve en el sentido decreciente de *x* a lo largo de la línea $y = 20$ m. Expresamos $\vec{r}$ y $\vec{p}$ en función de los valores unitarios:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{i} + y\hat{j} = x\hat{i} + y_0\hat{j} \\ \vec{p} &= m\vec{v} = -mv\hat{i}\end{aligned}$$

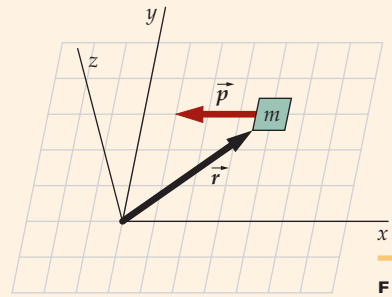


FIGURA 10.15

2. Calcular $\vec{r} \times \vec{p}$ (figura 10.15):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = (x\hat{i} + y_0\hat{j}) \times (-mv\hat{i}) \\ &= -xmv(\hat{i} \times \hat{i}) - y_0 mv(\hat{j} \times \hat{i}) \\ &= 0 - y_0 mv(-\hat{k}) = y_0 mv\hat{k} \\ &= (20\ \text{m})(1200\ \text{kg})(15\ \text{m/s})\hat{k} \\ &= \boxed{3{,}6 \times 10^5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ \hat{k}}\end{aligned}$$

(*c*) Utilizar $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (figura 10.16):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= I\vec{\omega} = I\omega\hat{k} = \tfrac{1}{2}mR^2\omega\hat{k} \\ &= \tfrac{1}{2}(1200\ \text{kg})(20\ \text{m})^2(0{,}75\ \text{rad/s})\hat{k} \\ &= \boxed{1{,}8 \times 10^5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\ \hat{k}}\end{aligned}$$

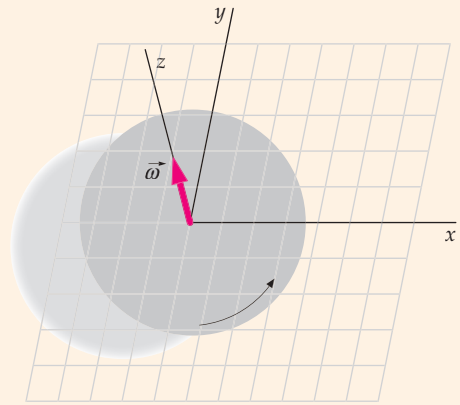


FIGURA 10.16

COMPROBACIÓN En el apartado (*c*), la velocidad de un punto situado en el borde del disco es $v = R\omega = 15$ m/s, la misma velocidad que el coche en los apartados (*a*) y (*b*). El momento angular del disco que rota es menor que el del coche, pues virtualmente toda la masa del disco está distribuida a menos de 20 m del eje de rotación.

OBSERVACIÓN El momento angular del coche que se mueve circularmente en el apartado (*a*) es el mismo que el del coche que se mueve en línea recta en el apartado (*b*).

Hay varios resultados adicionales que se refieren al momento y al momento angular de un sistema de partículas. El primero de ellos es

$$\vec{\tau}_{\text{neto ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{sist}}}{dt} \qquad 10.10$$

El momento externo neto respecto a un punto fijo que actúa sobre un sistema es igual a la tasa de cambio del momento angular del sistema respecto al mismo punto.

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

En la ecuación 10.10, el momento externo neto respecto a un punto es el vector suma de los momentos externos respecto a ese punto que actúan sobre el sistema. Si se integran los dos términos de esta ecuación con respecto del tiempo, se obtiene

$$\Delta\vec{L}_{\text{sist}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau}_{\text{neto ext}}\, dt \qquad 10.11$$

ECUACIÓN IMPULSO ANGULAR: MOMENTO ANGULAR

La ecuación 10.11 es el análogo rotacional de la ecuación 8.11, $\Delta\vec{P}_{\text{sist}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{neta ext}}\, dt$

Con frecuencia resulta útil dividir el momento angular total de un sistema alrededor de un punto arbitrario O en el momento angular orbital y el momento angular de espín:

$$\vec{L}_{\text{sist}} = \vec{L}_{\text{orbital}} + \vec{L}_{\text{espín}} \qquad 10.12$$

MOMENTO ANGULAR DE ESPÍN Y ORBITAL

La Tierra tiene un momento angular de espín debido al movimiento de rotación alrededor de su eje y un momento angular orbital respecto del centro del Sol debido a su movimiento orbital alrededor de éste (figura 10.17). El momento angular total de la Tierra relativo al Sol es el vector suma del momento angular de espín y del momento angular orbital. $\vec{L}_{\text{espín}}$ es el momento angular de un sistema alrededor de su centro de masas y $\vec{L}_{\text{orbital}}$ es el momento angular de una partícula puntual de masa M localizada en el centro de masas del objeto y que se mueve a la velocidad que tendría el centro de masas. Es decir

$$\vec{L}_{\text{orbital}} = \vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{v}_{\text{cm}} \qquad 10.13$$

DEFINICIÓN: MOMENTO ANGULAR ORBITAL

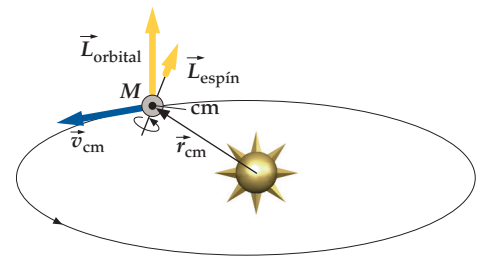


FIGURA 10.17 El momento angular total de la Tierra respecto al centro del Sol es la suma del momento angular de espín y el momento angular orbital.

En el capítulo 9, los momentos no se calcularon respecto a puntos sino respecto a ejes. La relación entre el momento respecto a un eje y el momento respecto a un punto es directa. Si el punto O es el origen y una fuerza $\vec{F}$ ejerce un momento $\vec{\tau}$ respecto de O, entonces τ_z (la componente z de $\vec{\tau}$) es el momento de fuerza de $\vec{F}$ respecto al eje z.

Tratar con las componentes de un producto vectorial requiere un cuidado especial. Si $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$, entonces

$$\vec{\tau}_z = \vec{r}_{\text{rad}} \times \vec{F}_{xy} \qquad 10.14$$

MOMENTO RESPECTO DEL EJE z

donde $\vec{\tau}_z$, $\vec{r}_{\text{rad}}$ y $\vec{F}_{xy}$ (véase la figura 10.18) son las componentes de los vectores de $\vec{\tau}$, $\vec{r}$, y $\vec{F}$. (La componente en una dirección determinada es la componente escalar en esa dirección por el vector unitario en la misma dirección. Por ejemplo, $\vec{\tau}_z = \tau_z\hat{k}$.) $\vec{r}_{\text{rad}}$ es la componente de $\vec{r}$ en la dirección radial positiva desde el eje z hacia el punto donde está la masa y $\vec{F}_{xy}$ es la componente de $\vec{F}$ en el plano xy (el plano perpendicular al eje z). ($\vec{F}_{xy} = \vec{F} - F_z\hat{k}$). La relación entre el momento angular respecto a un eje y el momento angular respecto a un punto es también directa. Si el momento angular de una partícula puntual respecto al origen es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, entonces el momento angular de la partícula respecto al eje z es

$$\vec{L}_z = \vec{r}_{\text{rad}} \times \vec{p}_{xy} \qquad 10.15$$

MOMENTO ANGULAR RESPECTO DEL EJE z

> ! No confundir momento de una fuerza respecto a un punto con momento respecto a un eje. El momento de una fuerza respecto al eje z es la componente z del momento de la fuerza respecto a cualquier punto del eje z.

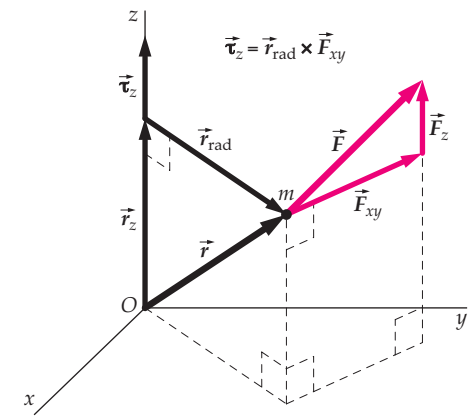


FIGURA 10.18

donde $\vec{p}_{xy}$ es la componente del momento lineal $\vec{p}$ perpendicular al eje z ($\vec{p}_{xy} = \vec{p} - p_z\hat{k}$). Tomando las componentes z en ambos términos de la ecuación 10.10, nos da

$$\vec{\tau}_{\text{neto ext } z} = \frac{d\vec{L}_{\text{sist } z}}{dt} \qquad 10.16$$

Si un objeto simétrico rígido gira alrededor del eje z, $\vec{L}_{\text{sist } z} = I_z\vec{\omega}$, donde I_z es el momento de inercia alrededor del eje z. Sustituyendo esta relación en la ecuación 10.16, da

$$\vec{\tau}_{\text{neto ext } z} = \frac{d\vec{L}_{\text{sist } z}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\vec{\omega}) = I_z\vec{\alpha} \qquad 10.17$$

donde el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$ se define como $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$. (La ecuación 10.17 es la forma vectorial de la ecuación 9.18.)

En un sistema de partículas, el momento angular total respecto al eje z es igual a la suma de los momentos angulares respecto al eje z de las partículas individuales. Asimismo, el momento total respecto al eje z es la suma de los momentos respecto al eje z que actúan sobre el sistema.

(Dick Luria/Science Source/Photo Researchers.)

Ejemplo 10.3 La máquina de Atwood revisada

Una máquina de Atwood consta de dos bloques de masa m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$) conectados por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea que carece de rozamiento. La polea es un disco uniforme de masa M y radio R. La cuerda no se desliza por la polea. Aplicar la ecuación 10.16 al sistema formado por los dos bloques, la cuerda y la polea para determinar la aceleración angular de ésta, así como la aceleración lineal de los bloques.

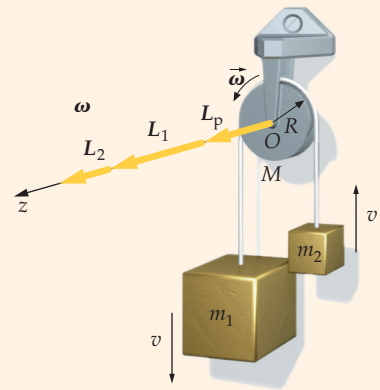


FIGURA 10.19

PLANTEAMIENTO Consideramos la polea y los bloques en el plano xy, con el eje z hacia fuera de la página y pasando por el centro de la polea en el punto O, como se muestra en la figura 10.19. Calculamos los momentos de las fuerzas y los momentos angulares respecto al eje z y aplicamos la segunda ley de Newton para el movimiento angular (ecuación 10.10). Como m_1 es mayor que m_2, el disco girará en sentido contrario a las agujas del reloj, lo que corresponde a un sentido de $\vec{\omega}$ en la dirección z positiva hacia fuera de la página. Todas las fuerzas están en el plano xy, de modo que todos los momentos están dirigidos a lo largo del eje z. También las velocidades se hallan en el plano xy, por lo que todos los vectores momento angular también tienen la dirección de z. Como los momentos de las fuerzas, la velocidad angular y los momentos angulares son todos ellos vectores dirigidos a lo largo del eje z, podemos olvidar su naturaleza vectorial y tratar el problema como si fuera unidimensional, con valor positivo asignado al movimiento antihorario y negativo al movimiento horario. La aceleración a de los bloques está relacionada con la aceleración angular α de la polea por la condición no deslizante $a = R\alpha$.

SOLUCIÓN

1. Sea nuestro sistema todo aquello que se mueve. Dibujar un esquema de las fuerzas que actúan sobre el sistema (figura 10.20). Los cojinetes de la polea son los únicos elementos externos que están en contacto con el sistema. Las fuerzas externas sobre el sistema son, por lo tanto, la fuerza normal de los cojinetes de la polea en la polea y la fuerza de la gravedad sobre los dos bloques y la polea:

2. Expresar la segunda ley de Newton de la rotación, para la componente z (ecuación 10.16):
$$\sum \tau_{\text{ext } z} = \frac{dL_z}{dt}$$

3. El momento externo total respecto del eje z es la suma de los momentos ejercidos por las fuerzas externas. Cada uno de los brazos de palanca de F_{g1} y de F_{g2} coinciden con R. (Los brazos de palanca de las otras dos fuerzas son cero.) $F_{g1} = m_1 g$ y $F_{g2} = m_2 g$:
$$\begin{aligned}\sum \tau_{i\,\text{ext } z} &= \tau_n + \tau_{gp} + \tau_{g1} + \tau_{g2} \\ &= 0 + 0 + m_1 gR - m_2 gR\end{aligned}$$

4. El momento angular total respecto del eje z es igual al momento angular de la polea $\vec{L}_p$, más el momento angular del bloque 1, $\vec{L}_1$, y del bloque 2, $\vec{L}_2$, ambos en la dirección positiva del eje z. La polea tiene momento angular de espín, pero no tiene momento angular orbital porque su centro de masas está en reposo, mientras que cada bloque tiene momento angular orbital, pero no tiene momento angular de espín.
$$\begin{aligned}L_z &= L_1 + L_2 + L_p \\ &= m_1 vR + m_2 vR + I\omega\end{aligned}$$

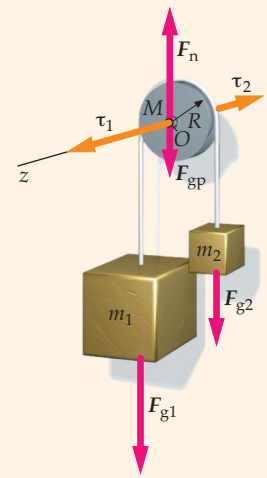


FIGURA 10.20

5. Sustituir estos resultados en la segunda ley de Newton para la rotación del paso 2:

$$\sum \tau_{\text{ext } z} = \frac{dL_z}{dt}$$

$$m_1 gR - m_2 gR = \frac{d}{dt}(m_1 vR + m_2 vR + I\omega)$$

$$m_1 gR - m_2 gR = (m_1 + m_2)Ra + I\alpha$$

6. Relacionar I con M y R, y usar la condición de ausencia de rozamiento para relacionar α con a, y despejar a y α:

$$m_1 gR - m_2 gR = (m_1 + m_2)Ra + \tfrac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}$$

por tanto,
$$a = \boxed{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}g}$$

y
$$\alpha = \frac{a}{R} = \boxed{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}\frac{g}{R}}$$

COMPROBACIÓN Las respuestas son dimensionalmente correctas. Tanto los numeradores como los denominadores contienen factores que tienen dimensiones de masa de forma que no contribuyen a las dimensiones de los cocientes. Para la primera respuesta, a y g tienen dimensiones de L/T^2, y para la segunda, α y g/R tienen dimensiones de T^{-2}.

OBSERVACIÓN (1) Este problema puede resolverse también escribiendo las tensiones T_1 a la izquierda y T_2 a la derecha y utilizando $\tau = I\alpha$ para la polea (ecuación 10.17), así como $\Sigma F_y = ma_y$ en cada bloque. Sin embargo, el uso del momento angular (ecuación 10.16) es más fácil, ya que una vez se ha despejado la aceleración, la obtención de las dos tensiones es directa. (2) Como $\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2$ (figura 10.21), la dirección de $\vec{L}_2$ se obtiene aplicando la regla de la mano derecha (figura 10.6). Además, como $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{g2}$ (figura 10.21), la dirección de $\vec{\tau}_2$ se obtiene también a partir de la regla de la mano derecha.

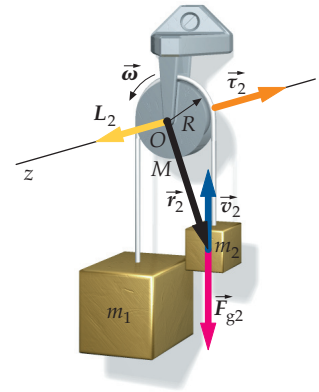


FIGURA 10.21

En muchos problemas, las fuerzas, vectores posición y velocidades son todos perpendiculares a un eje fijo, de modo que los momentos, velocidades angulares y momentos angulares son todas magnitudes vectoriales paralelas a un eje de rotación que permanece fijo en el espacio. En tales casos, podemos asignar valores positivos y negativos a las rotaciones antihorarias y horarias, respectivamente, como hicimos en el ejemplo 10.3, y tratar el caso como un problema unidimensional. Sin embargo, hay otras situaciones, como el movimiento de un giroscopio, en donde las naturalezas vectoriales (multidimensionales) del momento, velocidad angular y momento angular son importantes.

EL GIROSCOPIO

Un giroscopio (o giróscopo) es un ejemplo común de movimiento en el cual el eje de rotación cambia de dirección. La figura 10.22 muestra un giroscopio que consiste en una rueda de bicicleta libre de girar alrededor de su eje. Este eje pivota en un punto situado a una distancia D del centro de la rueda y es libre de girar en cualquier dirección. Para poder entender cuantitativamente el complicado movimiento de este sistema, utilizaremos la segunda ley de Newton para la rotación,

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (\text{o } \Delta\vec{L} \approx \vec{\tau}_{\text{neto}}\,\Delta t) \qquad 10.18$$

junto con las relaciones

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{g}$$

y

$$\vec{L} = I_s\vec{\omega}_s$$

donde M es la masa del sistema rueda-eje, $\vec{r}_{\text{cm}}$ es el vector de posición del centro de masas respecto a O, y I_s y ω_s son, respectivamente, el momento de inercia y la velocidad angular de la rueda respecto a su eje de espín. (El momento de fuerza respecto a O sobre el sistema debido a la fuerza normal ejercida por el soporte es cero; así, el momento neto respecto a O será igual al momento de la fuerza gravitacional respecto a O.)

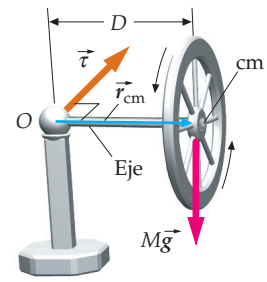


FIGURA 10.22

De acuerdo con la ecuación 10.18, el *cambio* del momento angular del sistema va en la misma dirección que el momento de fuerza neto que actúa sobre el sistema. Queremos describir el movimiento del sistema rueda-eje después de que haya partido del reposo en la posición horizontal mostrada en la figura 10.22, y lo haremos primero sin la rotación de la rueda y luego con la rotación rápida de la rueda. Si la rueda no rota en torno a su eje, la ecuación 10.18 predice que tras partir del reposo, el sistema rueda-eje se inclinará hacia abajo rotando en torno al eje horizontal que pasa a través de O y que es perpendicular al eje. Esta predicción se basa en el siguiente razonamiento. El vector momento de fuerza es horizontal, perpendicular al eje y va en la dirección mostrada en la figura 10.22. Tanto la rueda como el eje están inicialmente en reposo, de forma que el momento angular inicial $\vec{L}_i$ es cero. En consecuencia, el cambio en el momento angular $\Delta\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i$ es igual al momento angular final $\vec{L}_f$, el cual, de acuerdo con la ecuación 10.18, va en la dirección del momento de fuerza. El vector velocidad angular final $\vec{\omega}_f$ va en la misma dirección que $\vec{L}_f$. Si se coloca el dedo pulgar derecho en la dirección de $\vec{\omega}_f$, los dedos rotarán en la dirección del movimiento del sistema.

Si la rueda rota rápidamente en torno a su eje, la ecuación 10.18 predice que tras partir del reposo, el sistema rueda-eje rotará lentamente en torno al eje vertical que pasa por O. Esta predicción se basa en el siguiente razonamiento. El vector momento de fuerza es horizontal, perpendicular al eje y hacia el interior de la página, como antes. La rueda gira en sentido horario según se ve desde O, de forma que el momento angular va en la dirección del eje, pero apuntando en la dirección opuesta a O (la dirección de $\vec{L}_i$ se obtiene mediante la regla de la mano derecha). Además, de acuerdo con la ecuación 10.18, $\Delta\vec{L}$ va en la misma dirección que el momento de fuerza neto, el cual inicialmente va dirigido al interior de la página (figura 10.23a). El momento angular final $\vec{L}_f$ es igual al momento angular inicial más el cambio de momento angular. Esto es,

$$\vec{L}_f = \vec{L}_i + \Delta\vec{L}$$

La dirección de $\vec{L}_f$ se muestra en el diagrama de la figura 10.23*b*. Como la rueda gira muy rápido y como contiene gran parte de la masa del sistema, el momento angular del sistema rueda-eje está dominado por la contribución del momento angular de espín de la rueda. Entonces, la ecuación 10.18 predice que el centro de masas del sistema rotará en torno al eje vertical que pasa por O y en la dirección horizontal en la que se mueve el momento angular total, que es la dirección del momento de fuerza. Este movimiento, sorprendente cuando se observa por primera vez, se llama **precesión**. La velocidad angular de precesión ω_p puede calcularse del modo siguiente. En un pequeño intervalo de tiempo dt, el cambio experimentado por el momento angular tiene el módulo dL:

$$dL = \tau\, dt = MgD\, dt$$

donde MgD es el módulo del momento respecto al punto donde pivota. Según la figura 10.23*b*, el ángulo $d\phi$ barrido por el eje en su movimiento es

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\tau\, dt}{L} = \frac{MgD\, dt}{L}$$

La velocidad angular de la precesión es, por lo tanto,

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{MgD}{L} = \frac{MgD}{I_s\omega_s} \qquad 10.19$$

Si la velocidad angular de espín de la rueda es muy grande, la precesión será muy lenta.

Si mediante la mano impedimos la precesión de un giróscopo que gira, al dejarlo libre éste iniciará el movimiento de precesión con un movimiento de rebote hacia arriba y hacia abajo llamado nutación. Este movimiento puede evitarse proporcionando al eje de rotación del giroscopio una velocidad angular igual a ω_p (ver ecuación 10.19).

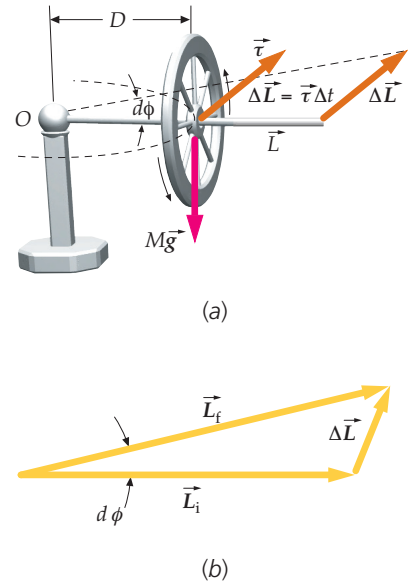


FIGURA 10.23

10.3 CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Si el momento externo resultante que actúa sobre el sistema es cero, resulta:

$$\vec{\tau}_{\text{neto ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{sist}}}{dt} = 0$$

o sea,

$$\vec{L}_{\text{sist}} = \text{constante} \qquad 10.20$$

Esta ecuación es un enunciado del **principio de conservación del momento angular.**

> Si el momento externo resultante respecto a un punto que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema respecto de ese punto es constante.
>
> CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Este principio es análogo al de conservación del momento lineal. Si un sistema está aislado de sus alrededores, de modo que sobre él no actúan fuerzas o momentos externos, se conservan tres magnitudes: energía, momento lineal y momento angular. La ley de conservación del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza. Incluso a la escala microscópica de la física atómica y nuclear, donde la mecánica newtoniana no se cumple, el momento angular de un sistema aislado permanece constante en el tiempo.

A pesar de que la conservación del momento angular es una ley, independiente de la tercera Ley de Newton, el hecho de que la suma de los momentos internos debe ser cero es sugerido por la tercera ley. Consideremos las dos partículas de la figura 10.26. Sea $\vec{F}_{12}$ la fuerza ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2, y $\vec{F}_{21}$ la ejercida por la partícula 2 sobre la 1. Por la tercera ley de Newton $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. La suma de los momentos ejercidos por estas fuerzas respecto al origen O es

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{21}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21}$$

El vector $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ está dirigido a lo largo de la línea que une las dos partículas. Si $\vec{F}_{21}$ actúa paralelamente a la línea que une m_1 y m_2, $\vec{F}_{21}$ y $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ son paralelos o antiparalelos y, por lo tanto,

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{21} = 0$$

Si esto es cierto para todas las fuerzas internas, los momentos internos se anulan por pares.*

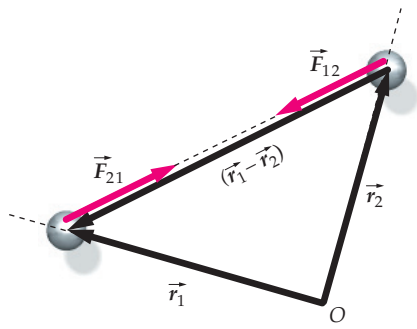


FIGURA 10.26

* No todas las fuerzas se presentan por pares de fuerzas iguales de dirección opuesta. Un ejemplo son las fuerzas magnéticas que las partículas cargadas en movimiento ejercen unas sobre otras.

FIGURA 10.24 Fotografía múltiple de un saltador de trampolín. El centro de masas del deportista se mueve a lo largo de una trayectoria parabólica después de abandonar la tabla. El momento angular está suministrado por el momento inicial externo ejercido por la fuerza de la tabla. Esta fuerza no pasa por el centro de masas del saltador si éste se inclina hacia delante al saltar. Si el saltador desea dar una o más revoluciones en el aire, encogerá sus brazos y piernas para disminuir su momento de inercia e incrementar, por lo tanto, su velocidad angular. (© *The Harold E. Edgerton 1992 Trust.*)

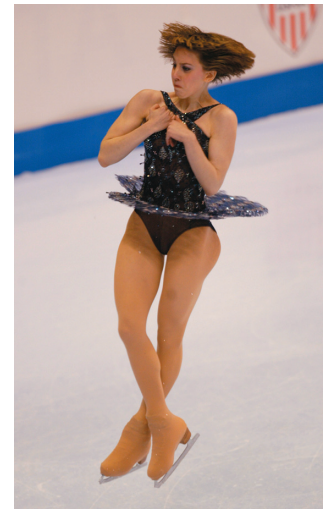


FIGURA 10.25 Patinadora girando sobre sí misma. Como el momento ejercido por el hielo es pequeño, el momento angular de la patinadora es, aproximadamente, constante. Cuando reduce su momento de inercia acercando sus brazos al cuerpo, su velocidad angular aumenta. *(Mike Powell/ Getty.)*

Ejemplo 10.4 Un disco girando

Un disco con momento de inercia I_1 está girando libremente con velocidad angular inicial ω_i alrededor de un eje vertical que coincide con su eje de simetría como se muestra en la figura 10.27. Entonces, cae encima de otro disco con momento de inercia I_2 que está inicialmente en reposo en el mismo eje. Debido al rozamiento superficial, los dos discos finalmente adquieren una velocidad angular común ω_f. Determinar ω_f.

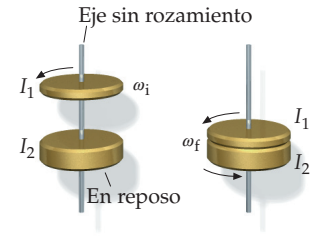


FIGURA 10.27

PLANTEAMIENTO Determinamos la velocidad angular final a partir del momento angular final, que es igual al momento angular inicial, ya que no existen fuerzas exteriores que actúen sobre el sistema. La velocidad angular del disco superior se reduce, mientras que la del disco inferior se incrementa por la fuerza de rozamiento cinético que actúa entre las superficies. Como el rozamiento cinético disipa energía mecánica, es de esperar que la energía mecánica total disminuya.

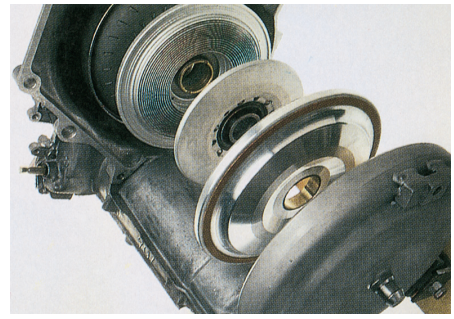
SOLUCIÓN

1. La velocidad angular final está relacionada con la inicial por el principio de conservación del momento angular:
$$L_f = L_i$$
$$(I_1 + I_2)\omega_f = I_1\omega_i$$

2. Despejar la velocidad angular final:
$$\omega_f = \boxed{\frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i = \frac{1}{1 + (I_2/I_1)}\omega_i}$$

COMPROBACIÓN Si $I_2 << I_1$, la colisión tendría poco efecto sobre el disco 1. De nuestros resultados se obtiene, efectivamente, que si $(I_2/I_1) \to 0$, $\omega_f \to \omega_i$. Si $I_2 >> I_1$, entonces el disco 1 llegaría a detenerse sin que el disco 2 se moviera apenas. Por lo tanto, si $(I_2/I_1) \to \infty$, $\omega_f \to 0$, como se deduce de nuestros resultados.

OBSERVACIÓN En el sistema de transmisión de camiones y coches se utilizan discos que giran a diferentes velocidades, como muestra la fotografía.



Las placas rotatorias de la transmisión de un camión experimentan choques inelásticos durante el embrague. *(Dick Luria/FPG International.)*

En el choque de los dos discos del ejemplo 10.4, la energía mecánica no se conserva. Para comprobarlo escribamos la energía en función del momento angular. En general, si un sistema con momento de inercia I gira con velocidad angular ω, su energía cinética es

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I}$$

Sustituyendo L por $I\omega$, se obtiene

$$K = \frac{L^2}{2I} \qquad 10.21$$

Este resultado es análogo al de la energía cinética del movimiento lineal, $K = p^2/2m$ (ecuación 8.25). La energía cinética inicial en el ejemplo 10.4 es

$$K_i = \frac{L_i^2}{2I_1}$$

y la energía cinética final

$$K_f = \frac{L_f^2}{2(I_1 + I_2)}$$

Como $L_f = L_i$, la relación entre las energías cinéticas final e inicial es

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

que es menor que uno. Esta interacción de los discos es análoga a una colisión inelástica unidimensional de dos objetos.

Ejemplo 10.5 Fango en tu ojo — *Póngalo en su contexto*

Beny, un estudiante de Física en una escuela de secundaria, es uno de los chicos más pendencieros de la escuela durante las horas de recreo, y cuatro de sus compañeros de curso deciden darle una escarmiento usando la conservación del momento angular. Su plan consiste en darle un susto mediante el tiovivo que hay en el patio de la escuela (figura 10.28), y con el que Beny se divierte tanto. El tiovivo es un disco de 3 m de diámetro que gira y que tiene un momento de inercia de 130 kg · m². Los cuatro amigos planean subir al tiovivo todos a la vez, junto con Beny, situándose en el borde del tiovivo cuando éste gira a 20 rev/min. Cuando uno de los cuatro dé una señal, los cuatro se moverán hacia el centro de modo que el tiovivo acelere. Ellos esperan que la aceleración centrípeta despida hacia fuera a Beny antes de que se dé cuenta, y que el muchacho caiga en el fango que se ha formado debido a las intensas lluvias recientes. Beny es fuerte y rápido, por lo que la aceleración necesaria ha de ser $4g$. ¿Funcionará su plan? (Suponer que cada estudiante tiene una masa de 60 kg.)

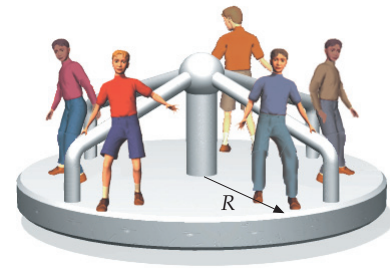


FIGURA 10.28

PLANTEAMIENTO Los cuatro estudiantes, al moverse hacia el centro del tiovivo, disminuyen el momento de inercia del sistema tiovivo-estudiantes. No actúan momentos externos respecto al eje sobre el sistema, por lo que el momento angular respecto del eje de rotación es constante, es decir, el producto del momento de inercia por la velocidad angular también es constante, por lo que la disminución del momento de inercia significa un aumento de la velocidad angular. Se usa la velocidad angular para determinar la aceleración centrípeta en el borde. Como la dirección del eje de rotación es fija, la dirección del movimiento de rotación se puede especificar por un signo + o −.

SOLUCIÓN

1. La aceleración centrípeta depende de la velocidad angular ω y del radio R:
$$a_c = \omega^2 R$$

2. El momento angular se conserva. Si se dan rotaciones respecto a un eje fijo, $L = I\omega$:
$$L_f = L_i$$
$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

3. El momento de inercia del sistema es la suma de los momentos de inercia de los estudiantes más el momento de inercia del tiovivo. Cada estudiante tiene una masa $m = 60$ kg:
$$I_i = 5mR^2 + I_{mgr} = 5(60\text{ kg})(1{,}5\text{ m})^2 + 130\text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 805\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

4. Para determinar el momento de inercia final, suponemos que los cuatro estudiantes se sitúan a una distancia de 30 cm del centro de rotación:
$$I_f = mR^2 + 4mr^2 + I_{mgr} = (60\text{ kg})(1{,}5\text{ m})^2 + 4(60\text{ kg})(0{,}3\text{ m})^2 + 130\text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 287\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

5. Usando la conservación del momento angular de rotación, se despeja la velocidad angular final:
$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{805\text{ kg}\cdot\text{m}^2}{287\text{ kg}\cdot\text{m}^2}20\text{ rev/min} = 56{,}2\text{ rev/min} = 5{,}88\text{ rad/s}$$

6. A partir de ω se obtiene la aceleración centrípeta:
$$a_c = \omega^2 R = (5{,}88\text{ rad/s})^2(1{,}5\text{ m}) = 51{,}9\text{ m/s}^2$$

7. Si se expresa en función de g:
$$a_c = 51{,}9\text{ m/s}^2 \times \frac{1g}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 5{,}29g = \boxed{5{,}3g}$$

8. ¿Acaba Beny cayendo al barro?

Definitivamente, Beny estará sometido a una aceleración mayor que $4{,}0g$, por lo que caerá y se precipitará sobre el barro.

COMPROBACIÓN En el borde del tiovivo, los cuatro estudiantes están cinco veces más lejos del eje de lo que están cuando caminan hacia el centro. Por tanto, su contribución al momento de inercia final del sistema es 1/25 veces su contribución al momento de inercia inicial. Para conservar el momento angular, esta gran reducción en el momento de inercia será compensada por un importante aumento en la velocidad angular. En el paso 5 se ve como se pasa de 20 a 56 rev/min.

OBSERVACIÓN La velocidad lineal del tiovivo es mayor en el borde que en el centro, haciéndose cero en el mismo eje de rotación. En el borde, los estudiantes se mueven en un círculo. A medida que se mueven hacia el centro acceden a zonas que se mueven más despacio que ellos, por lo que ejercen una fuerza sobre el tiovivo que tiende a acelerarlo, mientras que el tiovivo ejerce sobre ellos una fuerza que tiende a frenarlos. Las fuerzas de rozamiento es-

táticas ejercidas por sus pies ejercen un momento neto sobre el tiovivo, incrementando su momento angular respecto el eje de rotación. Igualmente, el tiovivo ejerce unas fuerzas de rozamiento estático de igual módulo y de signo contrario sobre los pies de los estudiantes, de modo que el momento de estas fuerzas disminuye su momento angular. Los dos momentos son de igual módulo y de signo contrario, como también lo son los cambios del momento asociados. Así, el momento angular del sistema tiovivo-estudiantes permanece constante.

El momento de inercia del sistema tiovivo-estudiantes disminuye a medida que éstos se desplazan hacia el centro. Por lo tanto, el momento de inercia del sistema disminuye, mientras que el momento angular es constante y, en consecuencia, a partir de la ecuación 10.21 se ve que la energía cinética del sistema tiovivo-estudiantes aumenta. En este caso, el aumento de la energía proviene de la energía interna de los estudiantes. Caminar radialmente hacia dentro, así como subir una cuesta, requiere un consumo de energía interna.

Ejemplo 10.6 Más tiovivos — *Inténtelo usted mismo*

Un niño de 25 kg de masa corre por un jardín con una velocidad de 2,5 m/s, de forma que su trayectoria es tangente al borde de un tiovivo de 2 m de radio y de 500 kg · m² de momento de inercia, que está inicialmente parado. El niño salta sobre el tiovivo y lo pone en movimiento (figura 10.29). Determinar la velocidad angular final del niño y del tiovivo cuando se mueven juntos.

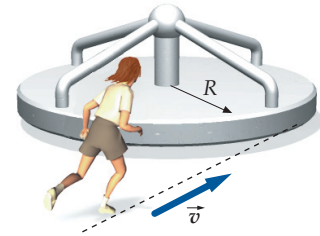


FIGURA 10.29

PLANTEAMIENTO Desde el momento en que el niño salta sobre el tiovivo, no hay ningún momento que actúe sobre el sistema tiovivo-niño, por lo que el momento angular total del sistema respecto al eje de rotación del tiovivo se conserva. La velocidad inicial del tiovivo es cero. Como la dirección del eje de rotación está fija, la dirección del movimiento de rotación se puede especificar por un signo + o −.

SOLUCIÓN

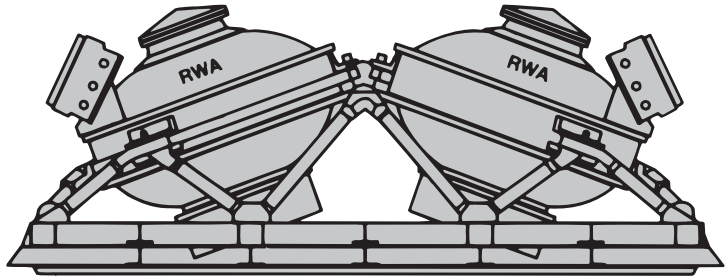
Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Escribir una expresión para el momento angular inicial del sistema niño-tiovivo. La velocidad angular del tiovivo es cero. El niño tiene una masa m y velocidad v_i en la dirección tangencial justo en el momento de entrar en contacto con el tiovivo. El niño se describe como una partícula puntual.	$L_i = \lvert\vec{r}_{niño} \times m\vec{v}_i\rvert = Rmv_i$
2. Expresar el momento angular total del sistema niño-tiovivo en función de su velocidad angular final ω_f.	$L_f = I_{sist}\omega_f = (mR^2 + I_m)\omega_f$
3. Igualar las expresiones de los pasos 1 y 2, y despejar ω_f.	$\omega_f = \dfrac{mvR}{mR^2 + I_m} = \boxed{0{,}21 \text{ rad/s}}$

COMPROBACIÓN La velocidad final del niño, al entrar en contacto con el tiovivo, es $R\,\omega_f$ = 0,42 m/s, inferior a la que tenía inicialmente, 2,5 m/s.

PROBLEMA PRÁCTICO 10.1 Calcular las energías cinéticas inicial y final del sistema niño-tiovivo.

Un astronauta examina el volante mecánico del telescopio espacial *Hubble*. *(NASA/Goddard Space Flight Center.)*



El telescopio espacial *Hubble* se apunta a un blanco determinado regulando las velocidades de giro de dos volantes de 45 kg de ejes distintos que pueden alcanzar las 3000 rpm. Estas variaciones de velocidad de rotación que genera el momento angular que hace virar el telescopio espacial a nuevas posiciones están controladas mediante programas de ordenador. Este mecanismo de puntería puede alcanzar y mantener un blanco en unos 0,005 segundos de arco, lo cual equivale a la precisión que tendría un haz luminoso emitido en Los Angeles que incidiera y se mantuviese sobre una moneda situada en San Francisco.

Ejemplo 10.7 Girando la rueda — *Conceptual*

Una muchacha está sentada sobre un taburete que está sobre una plataforma giratoria sin rozamiento. La muchacha sostiene una rueda de bicicleta (figura 10.30). Inicialmente, la rueda y la plataforma están en reposo. Siguiendo las instrucciones del profesor, la muchacha mantiene el eje de rotación de la rueda en posición vertical con una mano, mientras que con la otra hace girar la rueda en sentido antihorario (visto desde arriba). ¡Sorpresa! En cuanto la rueda empieza a girar, la muchacha, el taburete y el eje con la rueda, empiezan a girar en sentido contrario. Unos segundos más tarde, la muchacha acciona una palanca de freno que tiene la rueda y observa sorprendida como ella, el taburete y el eje con la rueda, dejan de girar conforme la rueda se va frenando. Explicar este hecho.

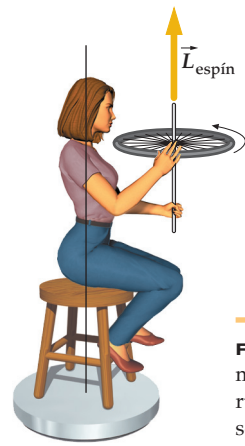


FIGURA 10.30 Cuando la muchacha empieza a girar la rueda en sentido horario, ¿en qué sentido empieza ella a girar?

PLANTEAMIENTO Como la plataforma rota sin rozamiento no hay momento de fuerza externo sobre el sistema plataforma-muchacha-rueda-taburete. Por tanto, el momento angular de dicho sistema se conserva.

SOLUCIÓN

Inicialmente, el sistema está en reposo, de forma que el momento angular inicial es cero. Cuando la rueda empieza a girar, adquiere un momento angular de espín dirigido verticalmente hacia arriba. El momento angular del sistema debe ser cero.

Entonces, el momento angular del resto del sistema debe tener el mismo módulo pero dirección opuesta. Por tanto, el momento angular de la muchacha-taburete-plataforma deberá apuntar hacia abajo, lo que significa que la rotación deberá ser en sentido horario, es decir, en sentido contrario al giro de la rueda. Cuando la muchacha acciona el freno, el momento angular de la rueda disminuye hasta cero. Para mantener el momento angular del sistema igual a cero, la rotación de muchacha-taburete-plataforma deberá disminuir de velocidad angular hasta pararse.

COMPROBACIÓN Una situación análoga se da cuando una muchacha anda sobre una plataforma que tiene unas ruedas que ruedan sin rozamiento. Cuando la muchacha camina, la plataforma avanza en dirección opuesta, pero cuando la muchacha deja de caminar, la plataforma se para como consecuencia de la conservación del momento angular.

OBSERVACIÓN El telescopio espacial *Hubble* se puede orientar hacia diferentes objetivos, en diferentes direcciones, debido a las cuatro ruedas que tiene montadas. Las ruedas giran en sentido horario o antihorario gracias a unos motores eléctricos controlados por ordenador. El telescopio se orienta en la dirección especificada en las instrucciones dadas por los ordenadores.

Ejemplo 10.8 Tirando por un agujero

Una partícula de masa m se mueve con velocidad v_0 en una circunferencia de radio r_0 sobre la superficie de una mesa sin rozamiento. La partícula está atada a una cuerda que pasa a través de un agujero de la mesa, como indica la figura 10.31. Tirando de la cuerda lentamente hacia abajo, la partícula se mueve en una circunferencia de menor radio r_f. (*a*) Determinar la velocidad final en función de r_0, v_0 y r_f. (*b*) Determinar la tensión de la cuerda cuando la partícula se mueve en una circunferencia de radio r en función de m, r y el momento angular $\vec{L}$. (*c*) Calcular el trabajo realizado sobre la partícula por la tensión $\vec{T}$ integrando $\vec{T} \cdot d\vec{\ell}$ desde r_0 a r_f. Expresar la respuesta en función de r y L_0.

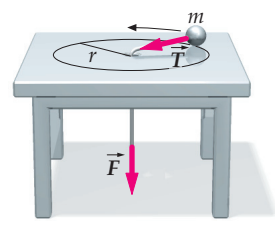


FIGURA 10.31

PLANTEAMIENTO La velocidad de la partícula está relacionada con su momento angular. El momento neto es igual a la tasa de cambio del momento angular. La fuerza neta que actúa sobre la partícula es la fuerza de tensión $\vec{T}$ ejercida por la cuerda, la cual siempre está orientada hacia el agujero. Por lo tanto, el momento respecto al agujero es cero. Así, el momento angular respecto a este eje es constante.

SOLUCIÓN

(*a*) La conservación del momento angular relaciona la velocidad final con la inicial y los radios inicial y final:

$$L_f = L_0$$
$$mv_f r_f = mv_0 r_0$$
$$\text{por lo tanto,} \quad v_f = \boxed{\frac{r_0}{r_f} v_0}$$

(*b*) 1. Se aplica la segunda ley de Newton para relacionar T con v y r. Como se tira muy lentamente de la partícula, su aceleración es virtualmente la misma que si se moviera en círculo:

$$T \approx m\frac{v^2}{r}$$

2. A partir de la definición del momento angular, se obtiene una relación entre L, r y v. Como se tira muy lentamente de la partícula $|\beta| \ll 1$ (figura 10.32*a*):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$L = rmv \cos\beta \approx rmv \quad (|\beta| \ll 1, \text{ así } \cos\beta \approx 1)$$

3. Se despeja v del resultado del paso 2 del apartado (*b*) y se sustituye en el paso 1 del apartado (*b*) obteniendo una expresión para T:

$$T = m\frac{v^2}{r} = \frac{m}{r}\left(\frac{L}{mr}\right)^2 = \boxed{\frac{L^2}{mr^3}}$$

(*c*) 1. Dibujar la partícula cuando se mueve cerca del agujero (figura 10.32*b*). Cuando la partícula experimenta un desplazamiento $d\vec{\ell}$ su distancia r respecto del eje cambia una cantidad infinitesimal dr. Como r disminuye, dr es negativa y se cumple:

$$dr = -|dr|$$

2. Usando el paso 1 escribir $dW = \vec{T} \cdot d\vec{\ell}$ en función de T y dr:

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{\ell} = T\, d\ell \cos\phi$$
$$\text{Ya que} \quad |dr| = d\ell \cos\phi,$$
$$dW = T|dr| = -T\, dr$$

3. Integrar desde r_0 hasta r_f después de sustituir T por el resultado obtenido en el paso 3 del apartado (*b*):

$$W = -\int_{r_0}^{r_f} T\, dr = -\int_{r_0}^{r_f} \frac{L^2}{mr^3}\, dr$$
$$= -\frac{L^2}{m}\int_{r_0}^{r_f} r^{-3}\, dr = -\frac{L^2}{m}\left.\frac{r^{-2}}{-2}\right|_{r_0}^{r_f}$$
$$= \boxed{\frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_f^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)}$$

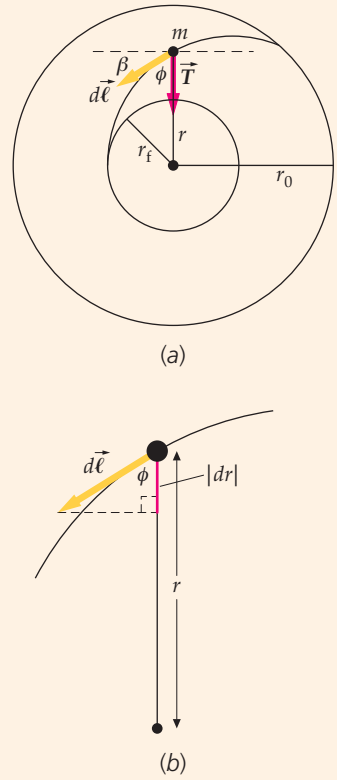


FIGURA 10.32

COMPROBACIÓN Obsérvese que para tirar de la cuerda hacia abajo debe realizarse un trabajo. Como r_f es menor que r_0, el trabajo es positivo. Este trabajo se invierte en incrementar la energía cinética. La variación de energía cinética puede calcularse también directamente. En efecto, $K = L^2/2I$, haciendo $L_0 = L_f = L$ e $I = mr^2$, la variación de la energía cinética es $K_f - K_i = (L^2/2mr_f^2) - (L^2/2mr_0^2) = (L^2/2m)(r_f^{-2} - r_0^{-2})$, que es el mismo resultado obtenido por integración.

OBSERVACIÓN El aumento de trabajo dW también puede obtenerse expresando el desplazamiento $d\vec{\ell}$ como $d\vec{r}$, el cambio en el vector posición $\vec{r}$. El producto escalar $\vec{T} \cdot d\vec{r}$ se expresa en componentes de forma que queda $dW = \vec{T} \cdot d\vec{r} = T_r\, dr = -T\, dr$. En este desarrollo $T_r = -T$ es la componente radial de T, y dr es la componente radial de $d\vec{r}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 10.2 ¿Para qué radio r_N la tensión es N veces la tensión correspondiente al radio r_0?

Sobre un plano sin rozamiento (figura 10.33) descansa un disco al que se da una velocidad inicial v_0. El disco está atado a una cuerda que se enrolla alrededor de un cilindro vertical fijo. Esta situación parece semejante al ejemplo 10.8, pero no es lo mismo. Aquí no hay un agente que realice trabajo sobre el disco, ni ningún mecanismo que produzca una disipación energética. Por lo tanto, la energía mecánica debe conservarse. Como $K = L^2/2I$ es constante e I decrece al disminuir r_0, $\vec{L}$ también debe decrecer. Obsérvese que la tensión no actúa hacia el centro del cilindro. La tensión produce un momento respecto al centro del cilindro en dirección hacia abajo, el cual reduce el momento angular del disco, dirigido hacia arriba.

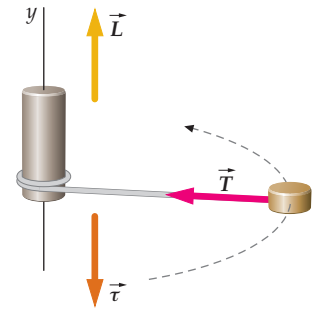


FIGURA 10.33

Ejemplo 10.9 Un nuevo péndulo balístico

Una barra delgada de masa M y longitud d cuelga de un pivote en su parte superior. Un fragmento de arcilla de masa m y velocidad v choca contra la barra a una distancia x del pivote y se adhiere a ella (figura 10.34). Determinar la razón entre la energía cinética del sistema inmediatamente después e inmediatamente antes de la colisión.

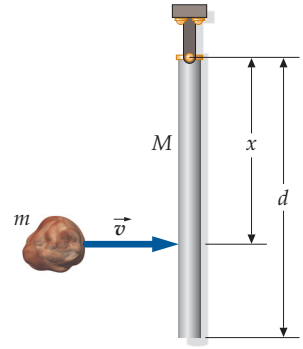


FIGURA 10.34

PLANTEAMIENTO La colisión es inelástica y, por lo tanto, no es de esperar que la energía mecánica se conserve. Durante el choque, el pivote ejerce una gran fuerza sobre la barra, de forma que el momento lineal no se conserva. Sin embargo, no existen momentos externos que actúen en el punto de pivotamiento sobre el sistema barra-arcilla y, por lo tanto, el momento angular se conserva. La energía cinética después de la colisión inelástica puede expresarse en función del momento angular L_{sist} y del momento de inercia I' del sistema combinado barra-arcilla. La conservación del momento angular nos permite relacionar L_{sist} con la masa m y la velocidad v de la arcilla.

SOLUCIÓN

1. Antes de la colisión, la energía cinética del sistema es la energía cinética del fragmento de arcilla:
$$K_i = \tfrac{1}{2}mv^2$$

2. Después de la colisión, la energía cinética es la energía cinética del sistema barra-arcilla. Escribir la energía cinética después de la colisión en función del momento angular L_{sist} y del momento de inercia I_f del sistema barra-arcilla:
$$K_f = \frac{L_{sist}^2}{2I_f}$$

3. Durante la colisión, se conserva el momento angular. Escribir el momento angular L_{sist} en función de m, v, y x:
$$L_{sist} = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mvx$$
donde $\vec{r}$ es el vector que va del eje a la arcilla y $\vec{v}$ es la velocidad de la arcilla antes del impacto.

4. Expresar I_f en función de m, x, M y d:
$$I_f = mx^2 + \tfrac{1}{3}Md^2$$

5. Sustituir estas expresiones de L_{sist} e I_f en la ecuación de K_f:
$$K_f = \frac{L_{sist}^2}{2I_f} = \frac{(mvx)^2}{2(mx^2 + \frac{1}{3}Md^2)} = \frac{3}{2}\frac{m^2x^2v^2}{(3mx^2 + Md^2)}$$

6. Dividir la energía total del sistema después de la colisión por la energía inicial de la arcilla:
$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\frac{3}{2}\frac{m^2x^2v^2}{(3mx^2 + Md^2)}}{\frac{1}{2}mv^2} = \boxed{\frac{1}{1 + \frac{Md^2}{3mx^2}}}$$

COMPROBACIÓN Md^2 y mx^2 tienen, obviamente, las mismas dimensiones, de forma que el resultado del paso 6 no tiene dimensiones, como deber ser al tratarse del cociente de dos energías. Además, dicho cociente está entre 0 y 1, como es de esperar en el caso de una colisión inelástica. En el límite en que $M/m \to \infty$, $K_f/K_i \to 0$, y en el límite $M/m \to 0$, $K_f/K_i \to 1$. Ambos valores límites de K_f/K_i tienen sentido físico.

OBSERVACIÓN Este ejemplo es el análogo rotacional del péndulo balístico visto en el ejemplo 8.10. En aquel ejemplo, utilizamos la conservación del momento lineal para determinar la energía del péndulo después de la colisión.

Ejemplo 10.10 Inclinando la rueda — *Conceptual*

Una muchacha está sentada sobre un taburete que está sobre una plataforma giratoria sin rozamiento (figura 10.35*a*) y sostiene una rueda de bicicleta que gira rápidamente. El eje de rotación de la rueda está inicialmente en posición horizontal, siendo el módulo del momento angular de espín $L_{w\,i}$. ¿Qué sucede cuando la muchacha, de repente, inclina el eje de rotación de la rueda (figura 10.35*b*) de forma que cuando deja de rotar el eje se halla en posición vertical? La rueda gira en sentido antihorario, visto desde arriba.

PLANTEAMIENTO El sistema plataforma-taburete-muchacha-rueda puede girar libremente en torno al eje vertical que pasa por el centro de la plataforma. Como ésta gira sin rozamiento, no habrá momentos de fuerza externos, por lo que el momento angular de todo el sistema se mantiene constante.

SOLUCIÓN

Cuando la muchacha hace rotar el eje de la rueda, no cambia el módulo del momento angular de espín de la rueda, sino que sólo cambia su dirección. El momento angular del sistema es cero, pues el sistema parte del reposo y, por tanto, el momento angular final del sistema también deberá ser cero por la conservación del momento angular. Como la rueda gira en sentido antihorario y su momento angular de espín es $L_{w\,i}$, el resto del sistema deberá girar en sentido horario con el mismo módulo $L_{w\,i}$.

El sistema muchacha-taburete-plataforma girará en sentido horario con un momento angular cuya componente a lo largo del eje de la plataforma tendrá como módulo $L_{w\,i}$.

COMPROBACIÓN La muchacha ejerce un momento de fuerza hacia arriba sobre la rueda que gira cuando la inclina hacia arriba. (Debido a la definición de momento de fuerza, un momento de fuerza dirigido hacia arriba requiere una fuerza horizontal.) La rueda ejercerá un momento de fuerza de igual módulo, pero con una fuerza horizontal sobre la muchacha que la hará girar en sentido horario.

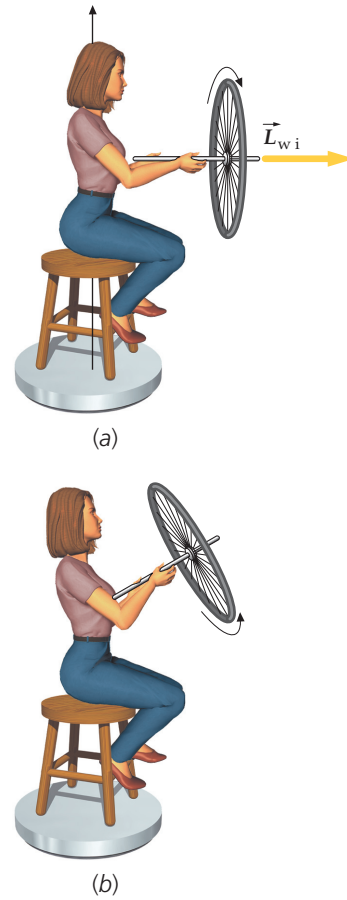


FIGURA 10.35

DEMOSTRACIONES DE LAS ECUACIONES 10.10, 10.12, 10.13, 10.14, Y 10.15

Demostración de la ecuación 10.10 A continuación, demostraremos que la segunda ley de Newton exige que la derivada del momento angular de una partícula sea igual al momento resultante que actúa sobre ella. Si tenemos cierto número de fuerzas aplicadas sobre una partícula, el momento resultante respecto al origen O es la suma de los momentos debidos a cada fuerza:

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{neta}}$$

Según la segunda ley de Newton, la fuerza neta o resultante es igual a la derivada respecto al tiempo del momento lineal $d\vec{p}/dt$. Así,

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{neta}} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad 10.22$$

Comparemos ahora esta expresión con la derivada respecto al tiempo del momento angular. La definición del momento angular de una partícula (ecuación 10.8) es

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Podemos calcular $d\vec{L}/dt$ utilizando la regla de derivación de un producto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 10.1

La rueda de la bicicleta rueda en sentido antihorario (visto desde arriba) y la muchacha sostiene su eje de rotación en posición vertical. Si la muchacha está sentada en un taburete sobre una plataforma giratoria, ¿en qué dirección girará la muchacha conforme inclina el eje de rotación hasta la posición horizontal?

El primer término del segundo miembro de esta ecuación es cero, porque $\vec{p} = m\vec{v}$ y $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, de modo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$$

pues el producto vectorial entre dos vectores paralelos es cero. Por lo tanto,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Comparando este resultado con la ecuación 10.22, resulta

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad 10.23$$

El momento resultante aplicado a un sistema de partículas es la suma de los momentos individuales que actúan sobre el sistema. Generalizando la ecuación 10.23 a un sistema de partículas, resulta

$$\vec{\tau}_{\text{neto sist}} = \sum_i \vec{\tau}_{\text{neto } i} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}_{\text{sist}}}{dt}$$

En esta ecuación, la suma de los momentos puede incluir momentos internos y momentos debidos a fuerzas externas al sistema. La suma de los momentos internos debe ser cero. Por lo tanto,

$$\vec{\tau}_{\text{neto ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{sist}}}{dt} \qquad 10.10$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA EL MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

***Demostración de las ecuaciones 10.12 y 10.13** A continuación, demostraremos que el momento angular de un sistema de partículas se escribe como la suma del momento angular orbital más el momento angular de espín.

La figura 10.36 muestra un sistema de partículas. El momento angular $\vec{L}_i$ de la partícula i respecto a un punto arbitrario *O* viene dado por

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \qquad 10.24$$

y el momento angular del sistema respecto a *O* es

$$\vec{L} = \Sigma\vec{L}_i = \Sigma(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i)$$

El momento angular respecto al centro de masas viene dado por

$$\vec{L}_{\text{cm}} = \Sigma(\vec{r}_i' \times m_i\vec{u}_i)$$

donde $\vec{r}_i'$ y $\vec{u}_i$ son la posición y la velocidad relativa al centro de masas de la partícula i. A partir de la figura, puede verse que

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{\text{cm}} + \vec{r}_i'$$

Derivando con respecto del tiempo en ambos lados, se obtiene

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{cm}} + \vec{u}_i$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación 10.24, tenemos

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = (\vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{r}_i') \times m_i(\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{u}_i)$$

Desarrollando los términos de la derecha, se llega a

$$\vec{L}_i = (\vec{r}_{\text{cm}} \times m_i\vec{v}_{\text{cm}}) + (\vec{r}_{\text{cm}} \times m_i\vec{u}_i) + (m_i\vec{r}_i' \times \vec{v}_{\text{cm}}) + (\vec{r}_i' \times m_i\vec{u}_i)$$

Sumamos ambos lados para todas las partículas y extraemos el factor común en las sumas, obteniendo

$$\vec{L}_{\text{sist}} = \Sigma\vec{L}_i = \vec{r}_{\text{cm}} \times (\Sigma m_i)\vec{v}_{\text{cm}} + \vec{r}_{\text{cm}} \times (\Sigma m_i\vec{u}_i) + (\Sigma m_i\vec{r}_i') \times \vec{v}_{\text{cm}} + \Sigma(\vec{r}_i' \times m_i\vec{u}_i)$$

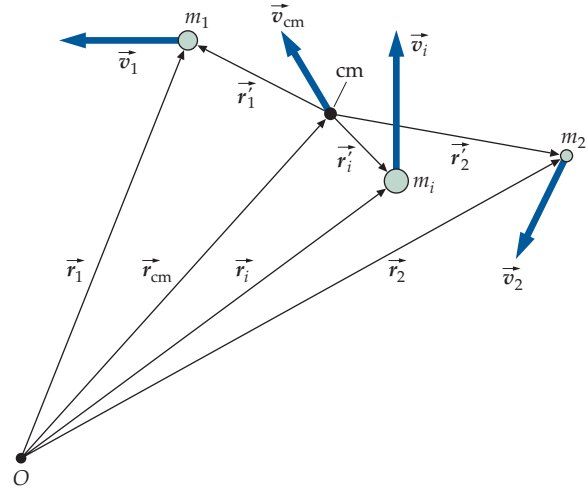


FIGURA 10.36

Dado que $\Sigma m_i \vec{r}_i'$ y $\Sigma m_i \vec{u}_i$ son cero y que $\Sigma m_i = M$ y $\Sigma(\vec{r}_i' \times m_i \vec{u}_i) = \vec{L}_{cm}$, tenemos $\vec{L}_{sist} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{v}_{cm} + \vec{L}_{cm}$ o bien,

$$\vec{L}_{sist} = \vec{L}_{orbital} + \vec{L}_{espín} \qquad 10.12$$

donde $\vec{L}_{orbital} = \vec{v}_{cm} \times M\vec{v}_{cm}$ y

$$\vec{L}_{espín} = \vec{L}_{cm} = \Sigma(\vec{r}_i' \times m_i \vec{u}_i) \qquad 10.25$$

DEFINICIÓN: MOMENTO ANGULAR DE ESPÍN

***Demostración de las ecuaciones 10.14 y 10.15** A continuación, para obtener las fórmulas para el momento y el momento angular respecto de un eje fijo, tomamos las componentes z de los vectores momento y momento angular alrededor de un punto. El momento angular de una partícula respecto del origen es $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, por lo que determinar la componente z del momento angular significa determinar la componente z del producto vectorial $\vec{r} \times \vec{p}$, para lo cual expresamos $\vec{r}$ y $\vec{p}$ como

$$\vec{r} = \vec{r}_{rad} + \vec{r}_z \quad \text{y} \quad \vec{p} = \vec{p}_{xy} + \vec{p}_z$$

donde $\vec{r}_{rad}$, $\vec{r}_z$, $\vec{p}_{xy}$, y $\vec{p}_z$ son las componentes de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ (véase la figura 10.37).

Sustituyendo $\vec{r}$ y $\vec{p}$, se obtiene

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{r}_{rad} + \vec{r}_z) \times (\vec{p}_{xy} \times \vec{p}_z)$$

y desarrollando el término de la derecha, se obtiene

$$\vec{L} = (\vec{r}_{rad} \times \vec{p}_{xy}) + (\vec{r}_{rad} \times \vec{p}_z) + (\vec{r}_z \times \vec{p}_{xy}) + (\vec{r}_z \times \vec{p}_z)$$

El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a ambos, por lo que el producto $\vec{r}_{rad} \times \vec{p}_{xy}$ es paralelo al eje z. En cada uno de los tres productos restantes, al menos un vector es paralelo al eje z, por lo que la componente z de cada uno de estos productos es cero. Por consiguiente

$$\vec{L}_z = \vec{r}_{rad} \times \vec{p}_{xy} \qquad 10.14$$

MOMENTO ANGULAR RESPECTO AL EJE z

El momento respecto al origen asociado con una fuerza que actúa sobre la partícula viene dado por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ (ecuación 10.1). Siguiendo el mismo procedimiento con el momento que el que seguimos con el momento angular, se obtiene

$$\vec{\tau}_z = \vec{r}_{rad} \times \vec{F}_{xy} \qquad 10.15$$

MOMENTO RESPECTO DEL EJE z

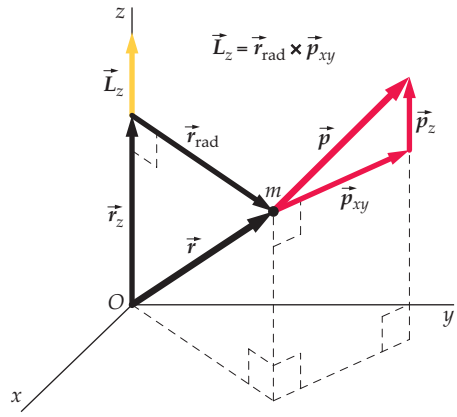


FIGURA 10.37 Las componentes $\vec{r}_{rad}$, $\vec{r}_z$, $\vec{p}_{xy}$, y $\vec{p}_z$ de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ se usan para calcular el momento angular respecto el eje z, $\vec{L}_z$.

* 10.4 CUANTIZACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

El momento angular desempeña un papel importante en la descripción de los átomos, moléculas y partículas elementales. Si una partícula está ligada a otra o más partículas, se dice que se trata de una *partícula ligada*. Los planetas, los asteroides, los cometas y el Sol conforman un *sistema ligado*, llamado sistema solar, y la Tierra está ligada al sistema solar. Lo mismo que la energía, el momento angular está **cuantizado**, es decir, las variaciones del momento angular pueden tener lugar sólo en cantidades discretas.

El momento angular de una partícula asociado a su movimiento constituye el llamado momento angular orbital. El módulo del momento angular orbital de una partícula sólo puede tener los valores

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\,\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{10.26}$$

donde $\hbar$ es la **unidad fundamental del momento angular**, relacionada con la constante de Planck, h:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \tag{10.27}$$

La componente del momento angular orbital a lo largo de cualquier línea del espacio está también cuantizada y puede tener sólo los valores $\pm m\,\hbar$, donde m es un número entero no negativo menor o igual que ℓ. Por ejemplo, si $\ell = 2$, m puede ser 2, 1, ó 0.

El cuanto del momento angular $\hbar$ es tan pequeño, que la cuantización del momento angular no se aprecia en el mundo macroscópico. Consideremos, por ejemplo, una partícula de masa 1,00 g = $1{,}00 \times 10^{-3}$ kg que se mueve en un círculo de radio 1 cm con un periodo de 1,00 s. Su momento angular orbital es

$$\begin{aligned} L = mvr = mr^2\omega = mr^2\frac{2\pi}{T} &= (1{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg})(1{,}00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2\frac{2\pi}{1{,}00\,\mathrm{s}} \\ &= 6{,}28 \times 10^{-7}\,\mathrm{J \cdot s} \end{aligned}$$

Si dividimos por $\hbar$, resulta

$$\frac{L}{\hbar} = \frac{6{,}28 \times 10^{-7}\,\mathrm{J \cdot s}}{1{,}05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}} = 6{,}00 \times 10^{27}$$

El momento angular de este sistema macroscópico contiene 6×10^{27} unidades de la unidad fundamental del momento angular. Aunque pudiésemos medir L con la precisión de una parte en mil millones, nunca podríamos apreciar la cuantización de este momento angular macroscópico.

La cuantización del momento angular orbital conduce a la cuantización de la energía cinética de rotación. Consideremos una molécula que gira alrededor de su centro de masas con momento angular L (figura 10.38). Sea I su momento de inercia. Su energía cinética es

$$K = \frac{L^2}{2I} \tag{10.28}$$

Pero L^2 está cuantizado según los valores $L^2 = \ell(\ell + 1)\,\hbar^2$, con $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. Por lo tanto, la energía cinética está cuantizada según los valores K_ℓ dados por

$$K_\ell = \frac{L^2}{2I} = \frac{\ell(\ell + 1)\,\hbar^2}{2I} = \ell(\ell + 1)E_{0\mathrm{r}} \tag{10.29a}$$

donde

$$E_{0\mathrm{r}} = \frac{\hbar^2}{2I} \tag{10.29b}$$

La figura 10.39 muestra un diagrama de niveles energéticos de una molécula en rotación con momento de inercia constante I. Obsérvese que, al contrario de lo que ocurre en los niveles energéticos de un sistema en vibración (sección 7.4), los niveles energéticos de rotación no están igualmente espaciados y el nivel más bajo es cero.

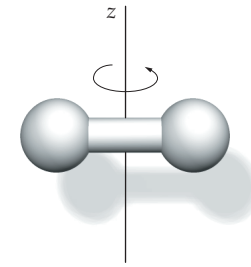


FIGURA 10.38 Modelo de una molécula diatómica rígida que gira alrededor del eje z.

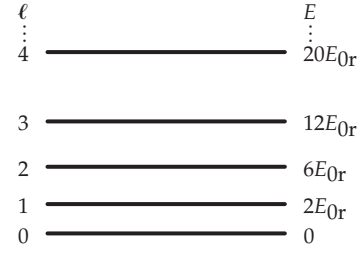


FIGURA 10.39 Diagrama de niveles energéticos de una molécula en rotación.

Ejemplo 10.11 Niveles de energía rotacional

La energía rotacional característica E_{0r} (ecuación 10.29*b*) para la rotación de la molécula de N_2 es $2{,}48 \times 10^{-4}$ eV. Utilizando esta información, determinar la distancia de separación entre dos átomo de nitrógeno.

PLANTEAMIENTO La energía rotacional característica depende del momento de inercia y éste depende de la distancia de separación.

SOLUCIÓN

1. La energía rotacional característica depende del momento de inercia (ver ecuación 10.29*b*):
$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I}$$

2. Considerar cada átomo de nitrógeno como una masa puntual en el centro de su núcleo. Entonces, la molécula de N_2 se considera formada por dos masas puntuales separadas cierta distancia, que rotan en torno a su centro de masas. Calcular el momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas y que es perpendicular a la línea que une las masas:
$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

3. La distancia de cada molécula al centro de masas es la mitad de la distancia d que separa ambas masas:
$$r_1 = r_2 = \frac{d}{2} \quad \text{y} \quad m_1 = m_2 = m$$

4. Calcular el momento de inercia en función de m y d:
$$I = m\frac{d^2}{4} + m\frac{d^2}{4} = \frac{1}{2}md^2$$

5. Tenemos en cuenta el resultado del paso 1 y que la masa del átomo de nitrógeno es 14 u. (Las masas atómicas se encuentran en el apéndice C.)
$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{md^2}$$
$$\text{donde} \quad m = (14{,}00\,\text{u})(1{,}661 \times 10^{-27}\,\text{kg/u}) = 2{,}325 \times 10^{-26}\,\text{kg}$$
$$\text{y} \quad E_{0r} = (2{,}48 \times 10^{-4}\,\text{eV})(1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}) = 3{,}973 \times 10^{-23}\,\text{J}$$

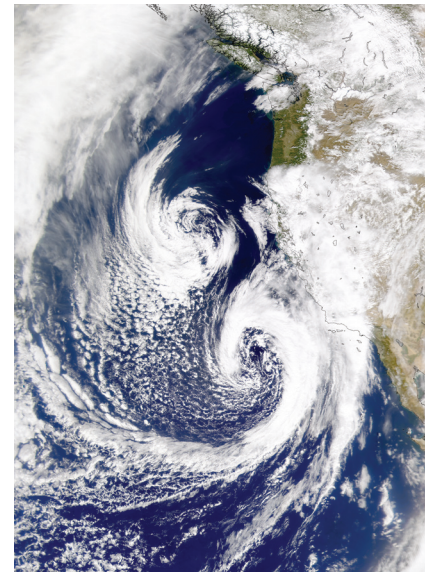
6. Despejamos d:
$$d = \frac{\hbar}{\sqrt{mE_{0r}}} = \frac{1{,}055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{(2{,}325 \times 10^{-26}\,\text{kg})(3{,}973 \times 10^{-23}\,\text{J})}}$$
$$= 1{,}097 \times 10^{-10}\,\text{m} = \boxed{0{,}110\,\text{nm}}$$

COMPROBACIÓN En 1911, el físico británico Ernest Rutherford (1871-1935) calculó que el diámetro del núcleo era del orden de 10^{-6} nm mientras que el diámetro de un átomo era del orden de 0,1 nm, que es aproximadamente igual al resultado del paso 6. ¿Sería razonable que la distancia de separación entre átomos de N_2 fuera del orden del diámetro de dos átomos? En efecto, en la molécula de nitrógeno la valencia es compartida por los dos átomos. Este proceso, llamado enlace covalente, se trata en el capítulo 37.

La materia estable contiene sólo tres tipos de partículas: electrones, protones y neutrones. Además de su momento angular orbital, cada una de estas partículas posee también un momento angular intrínseco llamado **espín**. El momento angular de espín de una partícula, como su masa y carga eléctrica, es una propiedad fundamental de la partícula que no puede modificarse. El módulo del vector momento angular de espín para electrones, protones y neutrones es $s = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)}\,\hbar$, y la componente a lo largo de cualquier línea del espacio puede tener sólo dos valores, $+\frac{1}{2}\hbar$ y $-\frac{1}{2}\hbar$. Las partículas con un momento angular de espín igual al de los electrones se llaman "partículas de espín un medio". Las partículas de espín un medio se llaman **fermiones**. Otras partículas, llamadas **bosones**, tienen espín cero o entero. (Los fotones y las partículas alfa son ejemplos de bosones.) El espín es una propiedad cuántica que no tiene nada que ver con el movimiento de la partícula.

La imagen de un electrón como una bola que gira sobre sí misma y se mueve en órbita alrededor del núcleo (del mismo modo que la Tierra gira sobre sí misma y alrededor del Sol) es un modelo útil, pero no totalmente exacto. Mientras el momento angular de una bola que gira sobre sí misma puede aumentar o disminuir, el espín de un electrón es una propiedad fija que no se modifica como sucede con su masa o su carga. Además, hoy sabemos que un electrón es una partícula puntual que carece de tamaño, y que no orbita alrededor del núcleo como los planetas lo hacen alrededor del Sol. El modelo mecánico-cuántico de un átomo nos permite calcular la probabilidad de que un electrón se encuentre en un volumen dado del espacio.

El momento angular atmosférico



Las formas de las nubes sugieren dos centros de bajas presiones muy próximas. *(SeaWiFS Project, NASA/Goddard Space Flight Center, and ORBIMAGE.)*

El aire tiene una densidad medible que varía con la humedad y la altura. El aire también tiene una velocidad medible. La mayoría de los vientos superficiales son locales, mientras que las masas de aire situadas a mayor altura experimentan una circulación global que también es medible.

Debido al aumento de la potencia de los ordenadores[1] en los últimos años, los científicos han podido calcular el momento angular total atmosférico (AAM) de la Tierra. Estos resultados se encuentran disponibles en la Agencia Especial para la Atmósfera del Centro de Fluidos Geofísicos Globales.[2] Los datos se obtuvieron de medidas de servicios meteorológicos de muchos países. La mayor parte de las medidas se realizaron entre los 10 y 50 km de altura, en la troposfera y estratosfera, mediante globos meteorológicos. El AAM se calcula usando el módulo y dirección de vientos en diferentes alturas utilizando una nueva unidad, el AAM (1 AAM = $10^{25}\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$).[3]

Desde hace algunas décadas, la duración del día (LOD) en la Tierra también se ha podido medir con gran precisión,[4] calculada a partir de medidas astronómicas y corregida en unidades de tiempo universal (UT1). Para ello, se ha utilizado una combinación de mediciones láser a satélites, para la medición de distancias, interferometría de base ancha, datos recientes de GPS y el sistema DORIS (*Doppler Orbitography and Radio Positioning Integrated by Satellite*). Las variaciones del valor de la LOD llegan a ser del orden de decenas de milisegundos. Esos valores son inferiores a una parte por cien millones.

Cuando se comparan las variaciones en la LOD y en el AAM se observan similitudes asombrosas.[5] Tanto el AAM como la LOD tienen variaciones semanales, mensuales, estacionales, anuales y multianuales.[6] Y lo que es más, tienen un porcentaje[7] de correlación mutua del 95,4% o del 98,02% según el modelo de AAM. Esas correlaciones no son casualidad. El momento angular de espín del sistema global Tierra-atmósfera se conserva. Tanto el momento angular de espín de la Tierra como el AAM van en la misma dirección, de oeste a este, lo que supone un aumento del AAM cuando el momento angular de la Tierra (excluyendo la atmósfera) disminuye y la LOD aumenta.

La confirmación más clara de este resultado es el fenómeno climático llamado *El Niño*.[8] Durante *El Niño*, el océano Pacífico se calienta y los vientos subtropicales que van en dirección oeste se aceleran, mientras que los vientos tropicales que van hacia el este disminuyen su velocidad. Este comportamiento de los vientos hace aumentar el AAM. En 1984,[9] las medidas realizadas en el Centro Goddard de Vuelos Espaciales mostraron que el día se había alargado alrededor de un milisegundo durante *El Niño*. En 1997, el día se alargó cuatro décimas de milisegundo[10] durante *El Niño*. Cuando el AAM decrece, la Tierra gira más rápido y los días se acortan. El AAM es la causa principal de variación de la LOD de la Tierra. Otras causan son las explosiones solares, las erupciones volcánicas y el rozamiento del núcleo con el manto terrestre.[11]

Debido a las medidas tan precisas que se pueden obtener del AAM terrestre y de la LOD, se pueden hacer predicciones sobre cambios en la atmósfera de la Tierra, como el aumento del dióxido de carbono en la atmósfera,[12] así como el AAM de otros planetas.[13]

---

1 Marcus, S. L., et al., "Detection and Modeling of Nontidal Oceanic Effects on Earth's Rotation Rate," *Science*, Sept. 11, 1998, Vol. 281, 1656–1659.
2 "GGFC Special Bureau for the Atmosphere," *International Earth Rotation and Reference Systems Service* http://www.iers.org/MainDisp.csl?pid=76-54 as of June 2006.
3 Huang, H.P., Weickmann, K. M., and Rosen, R. D., "Unusual Behaviour in Atmospheric Angular Momentum during the 1965 and 1972 El Niños," *Journal of Climate*, Aug. 2003, Vol. 16, 2526–2539.
4 Chao, B. F. et al., "Space Geodesy Monitors Mass Transports in Global Geophysical Fluids," *Eos, Transactions, American Geophysical Union*, May 30, 2000, Vol. 81, 247+; "Universal Time (UT1) and Length of Day (LOD)" http://www.iers.org/MainDisp.csl?pid=95-97
5 Marcus et al., op. cit. "Studies of Atmospheric Angular Momentum," *NOAA-CIRES Climate Diagnostics Center*, http://www.cdc.noaa.gov/review/Chap04/sec3.html as of June, 2006.
6 Barnes, R. T. H., et al., "Atmospheric Angular Momentum Fluctuations, Length-of-Day Changes, and Polar Motion," *Proceedings of the Royal Society of London A*, May 9, 1983, Vol. 387, 31–73.
7 Koot, L., De Viron, O., and Dehant, V., "Atmospheric Angular Momentum Time Series: Characterization of Their Internal Noise and Creation of a Combined Series," *Proceedings of the Journées 2004 Systèmes de Référence Spatio-Temporels*, N. Capitaine, Ed., Observatoire de Paris, 2005, 138–139.
8 Huang, H.-P., et al., op. cit.
9 Simon, C., "The Pull of El Niño: Sluggish Rotation and Longer Days," *Science News*, Jan. 14, 1984, Vol. 125, 20.
10 Monastersky, R., "El Niño Shifts Earth's Momentum," *Science News*, Jan 17, 1998, Vol. 153, 45.
11 Marcus, S. L., et al., op. cit.
12 Rosen, R. D., and Gutowski, W. J., "Response of Zonal Winds and Atmospheric Angular Momentum to a Doubling Of CO2," *Journal of Climate*, Dec. 1992, Vol. 5, 1391–1404.
13 Zhu, Xun, "Dynamics in Planetary Atmospheric Physics: Comparative Studies of Equatorial Superrotation for Venus, Titan, and Earth," *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 2005, Vol. 26, 164–174.

Resumen

1. El momento angular es una magnitud dinámica importante derivada de la física macroscópica. En la física microscópica, el momento angular de espín es una propiedad intrínseca fundamental de las partículas elementales.
2. La conservación del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza.
3. La cuantización del momento angular es una ley fundamental de la naturaleza.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Naturaleza vectorial de la rotación	La regla de la mano derecha nos permite obtener la dirección del momento angular y del momento de fuerza.	
Velocidad angular $\vec{\omega}$	La dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}$ coincide con el eje de rotación en el sentido dado por la regla de la mano derecha.	
Momento de fuerza, $\vec{\tau}$	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	10.1
2. Producto vectorial	$\vec{A} \times \vec{B} = AB \operatorname{sen}\phi\, \hat{n}$	10.2
	donde ϕ es el ángulo entre los dos vectores y $\hat{n}$ es un vector unitario perpendicular al plano de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el sentido dado por la regla de la mano derecha cuando $\vec{A}$ gira hacia $\vec{B}$.	
Propiedades	$\vec{A} \times \vec{A} = 0$	10.3
	$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$	10.4
	$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \left(\vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}\right)$	10.6
	$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad$ y $\quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$	10.7*a*
	$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$	10.7*b*
3. Momento angular		
Para una partícula	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	10.8
Para un sistema que gira alrededor de un eje de simetría	$\vec{L} = I\vec{\omega}$	10.9
Para cualquier sistema	El momento angular respecto a un punto cualquiera O es igual al momento angular respecto al centro de masas (momento angular de espín) más el momento angular asociado al movimiento del centro de masas alrededor de O (momento angular orbital).	
	$\vec{L} = \vec{L}_{\text{orbital}} + \vec{L}_{\text{espín}} = \vec{r}_{\text{cm}} \times M\vec{v}_{\text{cm}} + \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{u}_i)$	10.12
Segunda ley de Newton para la rotación	$\vec{\tau}_{\text{neto ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	10.10
Conservación del momento angular	Si el momento externo es nulo, el momento angular del sistema se conserva. (Si la componente del momento neto externo en una dirección dada es cero, la componente del momento angular del sistema en esa dirección se conserva.)	
Energía cinética de un objeto en rotación	$K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{L^2}{2I}$	10.21
Cuantización del momento angular	El módulo del momento angular orbital de una partícula puede tener sólo los valores	
	$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$	
*Cuantización de cualquier componente del momento angular orbital	La componente del momento angular orbital a lo largo de cualquier línea del espacio está también cuantizada y puede tener sólo los valores $\pm m\hbar$, donde m es un entero no negativo menor o igual a ℓ.	
Espín	Los electrones, protones y neutrones tienen un momento angular intrínseco llamado espín.	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

10.1 En sentido antihorario visto desde arriba.

Respuestas a los problemas prácticos

10.1 $K_i = 78{,}2$ J, $K_f = 13{,}0$ J

10.2 $r_N = r_0/\sqrt[3]{N}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s^2 para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso:

(*a*) Si dos vectores van en direcciones opuestas, su producto vectorial es cero.

(*b*) El módulo del producto vectorial entre dos vectores es mínimo cuando ambos vectores son perpendiculares entre sí.

(*c*) Conociendo el módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos y los módulos de los vectores por separado, el ángulo entre ellos queda claramente determinado.

2 • Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ poseen el mismo módulo. Su producto vectorial alcanza su módulo máximo cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son (*a*) paralelos, (*b*) perpendiculares, (*c*) antiparalelos, (*d*) forman entre sí un ángulo de 45°.

3 • ¿Cuál es el ángulo que forman el vector fuerza $\vec{F}$ y un momento generado por $\vec{F}$?

4 • Una partícula de masa m se mueve con velocidad v a lo largo de una línea que pasa a través del punto P. ¿Cuál es el momento angular de la partícula respecto a dicho punto P? (*a*) mv. (*b*) Cero. (*c*) Cambia de signo cuando la partícula pasa a través del punto P. (*d*) Su módulo aumenta conforme la partícula se acerca a P.

5 • Una partícula describe una trayectoria circular y el punto P está en el centro del círculo. (*a*) Si su momento lineal $\vec{p}$ se duplica sin cambiar el radio del círculo, ¿cómo se modifica su momento angular respecto a P? (*b*) Si el radio del círculo se duplica, pero su velocidad no varía, ¿cómo se modifica el momento angular de la partícula respecto a P? SSM

6 • Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a velocidad constante. ¿Cómo varía con el tiempo su momento angular respecto a cualquier punto?

7 •• Verdadero o falso: si el momento resultante sobre un sistema que gira es cero, la velocidad angular del sistema no puede modificarse. Si su respuesta es "falso" dar un ejemplo de dicha situación.

8 •• Un niño se encuentra en el borde de una plataforma giratoria que no posee rozamiento y que gira inicialmente cuando, de repente, captura una pelota que le lanza un amigo en la misma dirección que el giro y tangente al borde de la plataforma, pero con mayor velocidad que la velocidad del niño de la plataforma. Si éste no se mueve respecto a la plataforma, (*a*) ¿la velocidad angular del niño aumentará, disminuirá o se mantendrá igual después de capturar la pelota? (*b*) ¿El módulo del momento angular del niño de la plataforma, respecto al eje de la plataforma, aumentará, disminuirá o se mantendrá igual después de capturar la pelota? (*c*) ¿Cambiará el momento angular de la pelota, respecto al eje de la plataforma, tras la captura? (*d*) ¿Cómo cambiará el momento angular total del sistema (niño-plataforma-pelota), respecto al eje de la plataforma, tras la captura?

9 •• Si el momento angular de un sistema, respecto a un punto fijo, es constante, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(*a*) Ningún momento respecto a P actúa sobre ninguna parte del sistema.

(*b*) Un momento constante respecto a P actúa sobre cada una de las partes del sistema.

(*c*) Un momento resultante nulo respecto a P actúa sobre cada parte del sistema.

(*d*) Un momento externo constante respecto a P actúa sobre el sistema.

(*e*) Un momento resultante cero respecto a P actúa sobre el sistema.

10 •• Un bloque que se desliza sobre una mesa sin rozamiento está atado a una cuerda que pasa por un agujero de la mesa. Inicialmente, el bloque se desliza con velocidad v_0 sobre una circunferencia de radio r_0. Una persona bajo la mesa tira lentamente de la cuerda. ¿Qué ocurre cuando el bloque gira en espiral hacia dentro? (Razonar la respuesta correcta.) (*a*) Su energía y momento angular se conservan. (*b*) Su momento angular se conserva y su energía crece. (*c*) Su momento angular se conserva y su energía decrece. (*d*) Su energía se conserva y su momento angular crece. (*e*) Su energía se conserva y su momento angular decrece. El momento angular referido aquí se refiere al momento angular respecto al eje vertical que pasa por el agujero.

11 •• Una forma de distinguir un huevo cocido de uno crudo sin romperlo consiste en colocar el huevo sobre una superficie horizontal e intentar darle vueltas. El huevo cocido girará fácilmente, mientras que si el huevo está crudo hay que aplicar un esfuerzo mayor. Sin embargo, cuando ya estén rodando, el huevo crudo tiene un comportamiento peculiar: si con un dedo paramos su movimiento y lo soltamos, puede ponerse a girar de nuevo. Explicar la diferencia en el comportamiento de ambas clases de huevo. SSM

12 •• Explicar por qué un helicóptero con un solo rotor principal posee un segundo rotor más pequeño montado en un eje horizontal en la parte trasera del aparato, como muestra la figura 10.40. Describir el movimiento resultante del helicóptero si este rotor trasero fallase durante el vuelo.

FIGURA 10.40 Problema 12
(Chris Sorenson/The Stock Market.)

13 •• El vector momento angular de una rueda que gira alrededor de su eje está dirigido a lo largo del eje y apunta hacia el este. Para que este vector apunte al sur, es necesario ejercer una fuerza en el extremo este del eje en dirección: (*a*) Hacia arriba. (*b*) Hacia abajo. (*c*) Hacia el norte. (*d*) Hacia el sur. (*e*) Hacia el este.

14 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un hombre que pasea hacia el norte, lleva una caja que contiene un giroscopio, montado sobre un eje apoyado en la parte delantera y trasera de la caja. La velocidad angular del giroscopio apunta al norte. El hombre comienza a girar para continuar su paseo hacia el sur. Entonces, el extremo frontal de la caja (*a*) se resiste al intento de giro y tratará de permanecer apuntando al norte, (*b*) luchará contra el intento de giro y empujará hacia el oeste, (*c*) se elevará hacia arriba, (*d*) se hundirá hacia abajo, (*e*) no experimentará ningún efecto.

15 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El momento angular de la hélice de un pequeño aeroplano está dirigido hacia adelante. Vista desde detrás, la hélice se mueve en sentido horario. (*a*) Mientras el aeroplano despega, su parte delantera se levanta y tiende a virar hacia un lado. ¿Hacia qué lado y por qué? (*b*) Si el aeroplano se encuentra volando horizontalmente y, de repente, gira hacia la derecha, ¿su parte delantera tiende a moverse hacia arriba o hacia abajo? ¿Por qué? SSM

16 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un automóvil funciona con la energía almacenada en un solo volante de momento angular $\vec{L}$. Analizar los problemas que surgirían para distintas orientaciones de $\vec{L}$ y diversas maniobras del coche. Por ejemplo, supongamos que el volante está montado de tal forma que $\vec{L}$ apunta hacia arriba cuando el coche se mueve sobre una carretera horizontal. ¿Qué sucedería cuando el coche subiese por una colina o descendiese a un valle? Supongamos ahora que el volante está montado de forma que $\vec{L}$ apunta hacia un lado cuando el coche se mueve por una carretera horizontal ¿Qué ocurriría si el coche intentase girar a la izquierda o a la derecha? En cada caso que se analice, considerar el sentido del momento de fuerza ejercido sobre el coche por la carretera.

17 •• Una mujer se sienta sobre un taburete de piano en rotación con sus brazos cruzados. (*a*) Si extiende sus brazos en cruz, ¿qué le sucede a su energía cinética? ¿Cuál es la causa de su cambio? (*b*) Explicar qué le sucede al momento de inercia de la mujer, a su velocidad angular y al momento angular cuando extiende los brazos en cruz. SSM

18 •• Una barra uniforme de masa M y longitud L se encuentra sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Una porción de masilla de masa $m = M/4$ se mueve a lo largo de una línea perpendicular a la barra, choca contra ésta cerca de su extremo y se adhiere en el punto de contacto. Describir cualitativamente el movimiento subsiguiente de la barra y la masilla.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

19 •• Una patinadora sobre hielo comienza su pirueta con los brazos extendidos girando sobre sí misma a 1,5 rev/s. Estimar su velocidad de rotación (en revoluciones por segundo) cuando ella extiende sus brazos perpendicularmente a su cuerpo. SSM

20 •• Estimar el cociente entre las velocidades angulares de rotación de un saltador entre su posición más recogida y su posición más extendida.

21 •• Los días en Marte y en la Tierra tienen casi la misma duración. La masa de la Tierra es 9,35 veces la de Marte, mientras que el radio de la Tierra es 1,88 veces el radio de Marte, y Marte está, en promedio, 1,52 veces más alejado del Sol de lo que lo está la Tierra. El año martiano es 1,88 veces mayor que el terrestre. Suponiendo que ambos planetas se consideran como esferas uniformes que orbitan circularmente alrededor del Sol, estimar el cociente (Tierra/Marte) de (*a*) sus momentos angulares de espín, (*b*) sus energías cinéticas de espín, (*c*) sus momentos angulares orbitales y (*d*) sus energía cinéticas orbitales.

22 •• Los casquetes polares de la Tierra contienen aproximadamente $2{,}3 \times 10^{19}$ kg de hielo. Su masa contribuye muy poco al momento de inercia de la Tierra, ya que está localizada en los polos, próxima al eje de rotación. Estimar el cambio de duración del día que tendría lugar si los casquetes polares se fundieran y el agua resultante se distribuyera uniformemente por toda la superficie de la Tierra.

23 •• Una partícula de 2 g se mueve con velocidad constante de 3 mm/s alrededor de un círculo de radio 4 mm. (*a*) Determinar el módulo del momento angular de la partícula. (*b*) Si $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$, donde ℓ es un entero, determinar el valor de $\ell(\ell+1)$ y el valor aproximado de ℓ. (*c*) ¿Cuánto cambia ℓ si la velocidad de la partícula cambia en una millonésima parte porcentual si nada más cambia? Explicar por qué la cuantización del momento angular no se observa en la física macroscópica. SSM

24 ••• Uno de los retos de la astrofísica durante los años 60 fue explicar los pulsares: fuentes astronómicas extremadamente regulares de pulsos de radio con periodos que abarcan desde los segundos a los milisegundos. Durante aquel tiempo, estas fuentes de radio se conocían con el acrónimo LGM, que corresponde a la denominación inglesa "*Little Green Men*" (hombrecillos verdes), que se refería a la idea de que aquellos pulsos de radio podían ser señales de civilizaciones extraterrestres. La explicación actual no es menos interesante: el Sol, que es una estrella típica, tiene una masa de $1{,}99 \times 10^{30}$ kg, y un radio de $6{,}96 \times 10^{8}$ m. Aunque no gira uniformemente, porque no es un cuerpo sólido, su velocidad media de rotación puede considerarse que es 1 rev/25 días. Las estrellas más grandes que el Sol acaban su vida en explosiones espectaculares —las supernovas— que dejan como resto una estrella denominada estrella de neutrones. ¡Estas estrellas de neutrones tienen una masa comparable a la masa inicial de la estrella pero un radio de unos pocos kilómetros! La gran velocidad de rotación que tienen se debe a la conservación del momento angular durante el colapso. Estas estrellas emiten haces de ondas de radio. A causa de la rápida velocidad angular de las estrellas, el haz barre la Tierra a intervalos regulares de tiempo. Para producir los pulsos de ondas de radio que se observan, la estrella ha de girar con velocidades del orden de 1 rev/s o 1 rev/ms. (*a*) Usando los datos que hay en el libro, estime la velocidad de rotación que tendría el Sol si colapsara en una estrella de neutrones de 10 km de radio. El Sol no es una esfera uniforme de gas, por lo que su momento de inercia viene dado por la expresión $I = 0{,}059MR^2$. Supóngase que la estrella de neutrones es esférica y que tiene una distribución de masa uniforme. (*b*) ¿La energía cinética rotacional del Sol sería mayor o menor después del colapso? ¿En qué factor cambiaría, y de dónde provendría o adónde iría la energía?

25 •• El momento de inercia de la Tierra alrededor de su eje de rotación es aproximadamente $8{,}03 \times 10^{37}$ kg · m^2. (*a*) La Tierra casi es esférica; por lo tanto, podemos considerar que el momento de inercia vale $I = CMR^2$, donde C es una constante sin dimensiones, $M = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg es la masa de la Tierra, y $R = 6370$ km es el radio. Determinar C. (*b*) Si la distribución de masa de la Tierra fuera uniforme, C valdría 2/5. A partir del valor de C obtenido en el apartado (*a*), ¿la densidad de la Tierra es mayor en el núcleo o en la corteza?

26 ••• Estimar la velocidad de Timothy Goebel (figura 10.41) al iniciar el salto, su velocidad de rotación y su momento angular si realiza una pirueta de tal modo que desde que salta hasta que vuelve a entrar en contacto con el hielo da cuatro giros en el aire. Haga cualquier suposición que considere razonable, siempre que esté preparado para justificarla. La masa del patinador es de 60 kg y la altura del salto es de

0,6 m. Obsérvese que la velocidad angular cambia durante el salto, ya que comienza el ejercicio con los brazos extendidos y, progresivamente, los va pegando al cuerpo. Si se tiene suficiente cuidado, la respuesta puede ser bastante precisa, dentro de un factor 2.

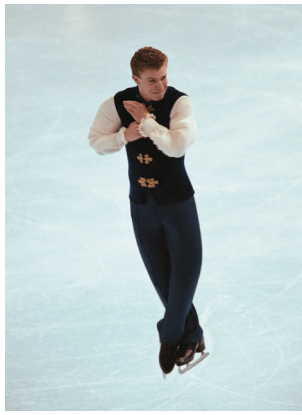


FIGURA 10.41
Problema 26
(Chris Trotman/DUOMO/Corbis.)

EL PRODUCTO VECTORIAL Y NATURALEZA VECTORIAL DEL MOMENTO DE FUERZA DE LA ROTACIÓN

27 • Se aplica una fuerza de módulo $\vec{F}$ horizontalmente en dirección $-x$, al borde de un disco de radio R, como se muestra en la figura 10.42. Escribir $\vec{F}$ y $\vec{r}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$, y calcular el momento producido por la fuerza respecto al origen situado en el centro del disco. SSM

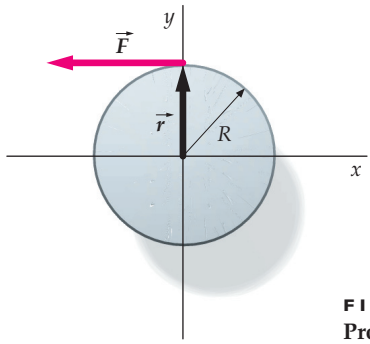


FIGURA 10.42
Problema 27

28 • Calcular el momento respecto al origen debido a la fuerza $\vec{F} = -mg\hat{j}$ que actúa sobre una partícula situada en $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$, y demostrar que este momento es independiente de la coordenada y.

29 • Hallar $\vec{A} \times \vec{B}$ en el caso de (*a*) $\vec{A} = 4\hat{i}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} + 6\hat{j}$, (*b*) $\vec{A} = 4\hat{i}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} + 6\hat{k}$, y (*c*) $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j}$.

30 •• En cada uno de los casos del problema 29, calcular $|\vec{A} \times \vec{B}|$. Compararlo con $|\vec{A}||\vec{B}|$ para estimar qué par de vectores están más cerca de ser perpendiculares entre sí. Verificar las respuestas calculando el ángulo a partir del producto escalar.

31 •• Una partícula se mueve en un círculo centrada en el origen. La partícula está en la posición $\vec{r}$ y tiene velocidad angular $\vec{\omega}$. (*a*) Demostrar que su velocidad es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. (*b*) Demostrar que su aceleración centrípeta es $\vec{a}_c = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$.

32 •• Si nos dan $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$, y $\vec{C} = c_x\hat{i} + c_y\hat{j} + c_z\hat{k}$, demostrar que se cumplen estas igualdades: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$.

33 •• Si $\vec{A} = 3\hat{j}$, $\vec{A} \times \vec{B} = 9\hat{i}$, y $\vec{A} \cdot \vec{B} = 12$, determinar $\vec{B}$.

34 •• Si $\vec{A} = 4\hat{i}$, $B_z = 0$, $|\vec{B}| = 5$, y $\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$, determinar $\vec{B}$.

35 ••• Dados tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$, que no están situados en el mismo plano, demostrar que $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ es el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores.

36 ••• Mediante el uso del producto vectorial, compruebe la ley de los senos para el triángulo de la figura 10.43: si A, B, y C son las longitudes de cada lado del triángulo, demostrar que $A/\text{sen } a = B/\text{sen } b = C/\text{sen } c$.

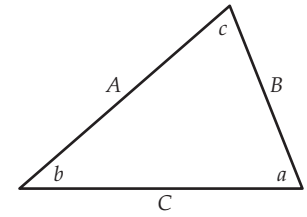


FIGURA 10.43
Problema 36

MOMENTO ANGULAR Y MOMENTO DE FUERZA

37 • Un cuerpo de 2 kg se mueve hacia el este a velocidad constante de 4,5 m/s a lo largo de la línea recta este-oeste. (*a*) ¿Cuál es el módulo de su momento angular respecto a un punto situado a 6 m al norte de la línea? (*b*) Calcular lo mismo respecto a un punto situado a 6 m al sur de la línea (*c*) ¿Y si el punto está a 6 m al este de la partícula? SSM

38 • Una partícula de masa 2 kg se mueve con velocidad constante de 3,5 m/s describiendo una circunferencia de 4 m de radio. (*a*) ¿Cuál es su momento angular respecto al centro de la circunferencia? (*b*) ¿Cuál es su momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de la circunferencia y es perpendicular al plano del movimiento? (*c*) ¿Cuál es la velocidad angular de la partícula?

39 •• (*a*) Una partícula que se mueve a velocidad constante, tiene un momento angular nulo respecto a un determinado punto. Demostrar que la partícula se mueve hacia ese punto o se aleja de él. (*b*) Usted es un bateador diestro y le lanzan una pelota horizontal, en línea recta y a la altura de su cintura que no logra impactar. ¿Cuál es la dirección del momento angular de la pelota respecto a su ombligo?

40 •• Una partícula se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ a lo largo de una línea que está a una distancia b del origen O (figura 10.44). Sea dA el área barrida por el vector posición (desde O a la partícula) en el tiempo dt. Demostrar que dA/dt es constante en el tiempo e igual a $L/2m$, donde L es el módulo momento angular de la partícula respecto al origen.

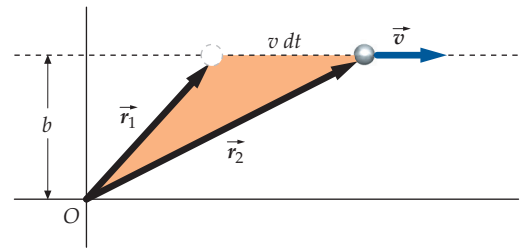


FIGURA 10.44 Problema 40

41 •• Una moneda de 15 g y diámetro 1,5 cm gira a 10 rev/s alrededor de un diámetro vertical sobre un punto fijo de una mesa. La moneda rota de canto con su centro directamente por encima del punto de contacto con la mesa. Según se mira desde arriba, la moneda gira en sentido horario. (*a*) ¿Cuál es el momento angular de la moneda respecto de su centro de masas? (Para determinar el momento de inercia usar la tabla 9.1.) Describir la moneda como un cilindro de longitud L y considerar que L tiende a cero. (*b*) ¿Cuál es el momento angular respecto a un punto de la mesa situado a 10 cm de la moneda? (*c*) Si la moneda gira de igual modo, pero su centro de masas se traslada en línea recta hacia el este sobre la mesa con velocidad de 5 cm/s, ¿cuál es el momento angular de la moneda alrededor de un punto sobre la línea de movimiento de su centro de masas? (*d*) ¿Cuál es el momento angular de la moneda respecto a un punto situado 10 cm al norte de la línea de movimiento del centro de masas?

42 •• **CONCEPTUAL** (*a*) Dos estrellas de masa m_1 y m_2 están localizadas en las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respecto al mismo origen O como indica la figura 10.45. Estas estrellas ejercen fuerzas iguales y opuestas, una sobre otra. Calcular el momento resultante ejercido por estas dos fuerzas internas alrededor del origen O y demostrar que es nulo si las fuerzas F_1 y F_2 están dirigidas a lo largo de la línea que une ambas partículas. (*b*) El hecho de que el par de fuerzas de la tercera ley de Newton no sólo tengan igual módulo y dirección opuesta, sino que además se encuentren sobre la línea que une las masas, se denomina forma fuerte de la tercera ley de Newton. ¿Por qué es importante añadir la última (tercera) condición? *Ayuda: considerar lo que les sucedería a las estrellas si las fuerzas se compensaran entre ellas.*

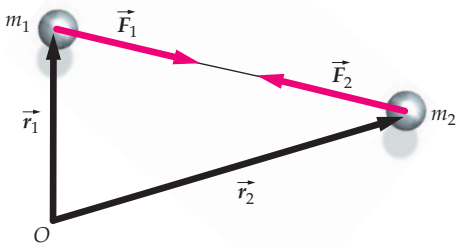


FIGURA 10.45 Problema 42

43 •• Una partícula de 1,8 kg se mueve en una circunferencia de radio 3,4 m. Según se mira hacia abajo sobre el plano de su órbita, la partícula gira en sentido horario (dirección positiva). El módulo de su momento angular relativo al centro del círculo depende del tiempo, según la expresión $L(t) = 10\ \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} - (4\ \text{N} \cdot \text{m})\, t$. (*a*) Determinar el módulo y dirección del momento que actúa sobre la partícula. (*b*) Determinar la velocidad angular de la partícula en función del tiempo.

44 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un cilindro uniforme de masa 90 kg y radio 0,4 m está dispuesto de modo que gira sin rozamiento alrededor de su eje de simetría, gracias a una correa de transmisión que se enrolla sobre su perímetro y ejerce un momento constante. En el tiempo $t = 0$, su velocidad angular es cero. En el tiempo $t = 25$ s, su velocidad angular es de 500 rev/min. (*a*) ¿Cuál es su momento angular en $t = 25$ s? (*b*) ¿Cómo se incrementa el momento angular en cada unidad de tiempo? (*c*) ¿Qué momento de fuerza externo actúa sobre el cilindro? (*d*) ¿Cuál es el módulo de la fuerza de rozamiento que actúa sobre la periferia del cilindro?

45 •• En la figura 10.46, el plano inclinado carece de rozamiento y la cuerda pasa a través del centro de masas de cada bloque. La polea tiene un momento de inercia I y una radio R. (*a*) Determinar el momento resultante que actúa sobre el sistema (las dos masas, la cuerda y la polea) respecto al centro de la polea. (*b*) Expresar el momento angular total del sistema respecto al centro de la polea cuando las masas se mueven con velocidad v. (*c*) Determinar la aceleración de las masas a partir de los resultados de los apartados (*a*) y (*b*) igualando el momento resultante con la derivada respecto al tiempo del momento angular del sistema. SSM

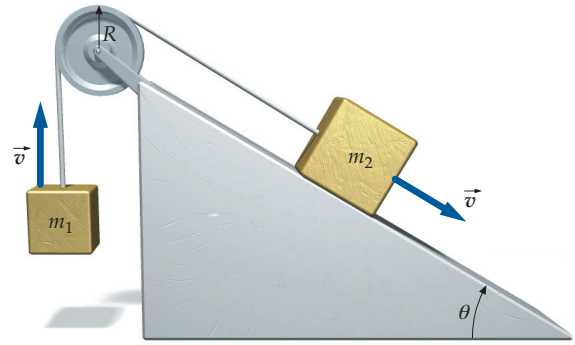


FIGURA 10.46 Problema 45

46 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La figura 10.47 muestra la parte trasera de un vehículo espacial que gira alrededor de su eje longitudinal a 30 rev/min. Los ocupantes desean detener esta rotación. Para ello disponen de pequeñas toberas montadas tangencialmente a una distancia $R = 3$ m del eje, como se indica en la figura. Cada una de ellas lanza un chorro de 10 g/s de gas a una velocidad de 800 m/s. ¿Durante cuánto tiempo deben estar funcionando estas toberas para detener la rotación? En vuelo, el momento de inercia rotacional del vehículo alrededor de su eje (supuesto constante) es de 4000 kg · m^2.

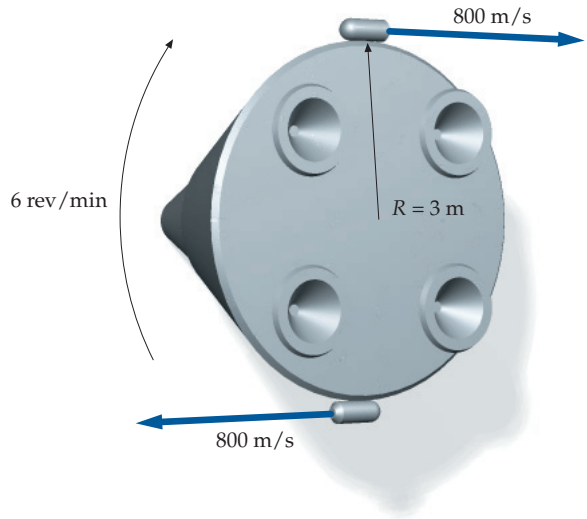


FIGURA 10.47 Problema 46

47 •• Un proyectil de masa M se lanza con un ángulo θ y con una velocidad inicial v_0. Considerando el momento de fuerza y el momento angular respecto del punto del lanzamiento, demostrar explícitamente que $dL/dt = \tau$. Ignorar los efectos de la resistencia del aire. (Las ecuaciones que describen el movimiento de los proyectiles se analizan en el capítulo 3.)

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

48 • Un planeta se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, estando éste en un foco de la elipse (figura 10.48). (*a*) ¿Cuál es el momento respecto al Sol producido por la fuerza gravitatoria de atracción del Sol sobre el planeta? (*b*) En la posición *A*, el planeta está a una distancia r_1 del Sol y se está moviendo con velocidad v_1 perpendicular a la línea que va del Sol al planeta. En la posición *B*, está a una distancia r_2 y se mueve con velocidad v_2, de nuevo perpendicular a la línea que va del Sol al planeta. ¿Cuál es la relación de v_1 y v_2 en función de r_1 y r_2?

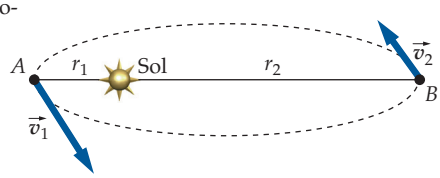


FIGURA 10.48 Problema 48

49 •• Un hombre está de pie sobre una plataforma sin rozamiento que gira con una velocidad angular de 1,5 rev/s. Sus brazos están extendidos y sostiene en cada mano una bola pesada. El momento de inercia del hombre, los pesos extendidos y la plataforma es 6 kg · m². Cuando el hombre impulsa los pesos hacia su cuerpo, el momento de inercia decrece a 1,8 kg · m². (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma? (*b*) ¿Cuál es la variación de energía cinética experimentada por el sistema? (*c*) ¿De dónde procede este incremento de energía? SSM

50 •• Una pequeña porción de masilla de masa *m* cae desde el techo sobre el borde exterior de un tocadiscos de radio *R* y momento de inercia I_0, que está girando libremente con velocidad angular ω_0 alrededor de su eje de simetría vertical fijo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular del tocadiscos más la masilla después del choque? (*b*) Después de varias vueltas, la masilla se desprende del borde del tocadiscos hacia fuera. ¿Cuál es la velocidad angular del tocadiscos después de desprenderse la masilla?

51 •• Un cilindro macizo de plástico de $R = 15$ cm y de $M = 0{,}25$ kg se ajusta de modo que puede girar alrededor de un eje vertical mediante unos cojinetes que no ejercen rozamiento. Una cucaracha de 0,015 kg de masa está sobre el cilindro a 8 cm del centro. Inicialmente, tanto el cilindro como la cucaracha están en reposo. De repente, la cucaracha echa a andar por un camino circular a una distancia fija de 8 cm del eje de rotación. Si la velocidad de la cucaracha con respecto al cilindro es de $v = 0{,}01$ m/s, ¿cuál es la velocidad de la cucaracha con respecto al exterior? SSM

52 •• Dos discos de masa idéntica, pero de radios diferentes (r y $2r$), giran sobre cojinetes sin rozamiento a la misma velocidad angular ω_0, pero en sentidos opuestos (figura 10.49). Lentamente, los dos discos son impulsados el uno hacia el otro hasta que sus superficies entran en contacto. La fuerza de rozamiento superficial da lugar a que finalmente ambos posean la misma velocidad angular. (*a*) ¿Cuál es el módulo de esta velocidad angular final? (*b*) ¿Cuál es el cambio de energía cinética de rotación del sistema?

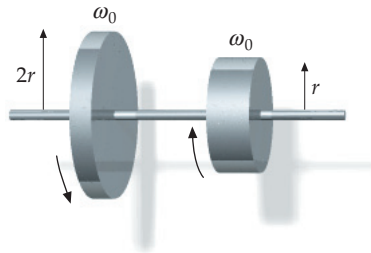


FIGURA 10.49 Problema 52

53 •• Un bloque de masa *m* que se desliza sobre una mesa sin rozamiento está atado a una cuerda que pasa por un agujero de la mesa. Inicialmente, el bloque se desliza con velocidad v_0 en un círculo de radio r_0. Determinar (*a*) el momento angular del bloque, (*b*) su energía cinética, (*c*) la tensión de la cuerda. Una persona situada bajo la mesa, tira suavemente de la cuerda. ¿Cuánto trabajo se necesita para reducir el radio del círculo de r_0 a $r_0/2$?

54 ••• Una masa puntual de 0,2 kg que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento está atada a una cinta de caucho cuyo otro extremo está fijo en el punto *P*. La cinta de caucho ejerce una fuerza $F = bx$ hacia *P*, donde *x* es la longitud de la cinta y *b* un coeficiente desconocido. La masa se mueve a lo largo de la línea de puntos de la figura 10.50. Cuando pasa por el punto *A*, su velocidad es de 4 m/s en la dirección que se muestra. La distancia *AP* es de 0,6 m y *BP* es 1,0 m. (*a*) Determinar la velocidad de la masa en los puntos *B* y *C*. (*b*) Determinar el coeficiente *b*.

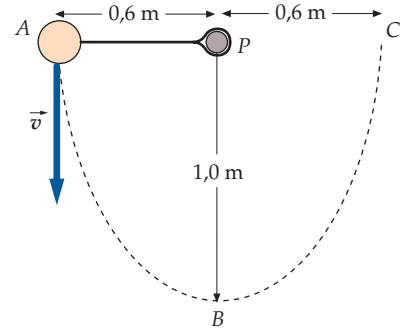


FIGURA 10.50 Problema 54

*CUANTIZACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

55 •• La componente *z* del espín de un electrón es $-\frac{1}{2}\hbar$, pero el módulo del vector espín es $\sqrt{0{,}75}\,\hbar$. ¿Qué ángulo forma el vector momento angular de espín del electrón con el eje *z*? SSM

56 •• Demostrar que la diferencia energética entre un estado rotacional y el siguiente estado más elevado es proporcional a $\ell + 1$.

57 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN BIOLÓGICA** En la molécula HBr, la masa del núcleo de bromo es 80 veces superior a la masa del núcleo de hidrógeno (un solo protón); en consecuencia, al estudiar el movimiento rotacional de esta molécula, es correcto suponer, con buena aproximación, que el núcleo de Br permanece estacionario mientras el átomo de H (masa, $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg) gira a su alrededor. La separación entre el átomo de H y el núcleo de Br es 0,144 nm. Calcular (*a*) el momento de inercia de la molécula HBr respecto al núcleo de Br y (*b*) las energías de rotación correspondientes al estado fundamental $\ell = 0$ y a los dos primeros estados excitados $\ell = 1$, $\ell = 2$. SSM

58 ••• La separación de equilibrio entre los dos núcleos de la molécula de nitrógeno (N_2) es 0,11 nm. La masa de cada núcleo de nitrógeno es 14 u, donde u $= 1{,}66 \times 10^{-27}$ kg. (*a*) Considerar un modelo de la molécula de nitrógeno formado por una pesa de gimnasia, rígida, con dos masas puntuales iguales en sus extremos y calcular el momento de inercia alrededor de su centro de masas. (*b*) Determinar los tres niveles energéticos E_ℓ de rotación mediante la relación $E_\ell = E_{c\,\ell} = \ell(\ell + 1)\,\hbar^2/(2I)$. (*c*) Las moléculas emiten una partícula (o cuanto) de luz llamada fotón cuando experimentan una transición desde un estado de mayor a otro de menor energía. Determinar la energía de un fotón emitido cuando la molécula de nitrógeno cae del estado $\ell = 2$ al estado $\ell = 1$. Los fotones de luz visible tienen una energía de entre 2 y 3 eV. ¿Pertenecen esos fotones a la región visible?

59 ••• **CONCEPTUAL** Considérese una transición desde un estado de baja energía a uno de mayor energía mediante la absorción de un cuanto de energía que da lugar a un aumento de la energía rotacional de una molécula de N_2 (ver problema 58). Suponer que dicha molécula se encuentra en el estado fundamental de rotación y que fue expuesta a fotones con una energía igual a tres veces la energía de su primer estado excitado. (*a*) ¿Será capaz la molécula de absorber la energía de los fotones? Explique su respuesta. En caso afirmativo, determinar el nivel de energía al que podría ir. (*b*) Para realizar una transición del estado fundamental al segundo estado excitado, determinar la energía necesaria expresada como un número de veces la energía del primer estado excitado.

COLISIONES CON ROTACIÓN

60 •• Una barra de 16,0 kg y 2,4 m de longitud está apoyada sobre el filo de una cuchilla por su punto medio. Una bola de 3,2 kg de arcilla se deja caer desde el reposo, desde una altura de 1,2 m y se produce un choque completamente inelástico con la barra a 0,9 m del punto de soporte (figura 10.51). Determinar el momento angular, respecto al punto de apoyo, del sistema barra más arcilla, inmediatamente después de la colisión inelástica.

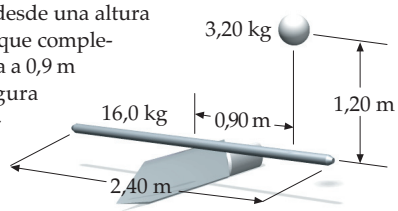


FIGURA 10.51 Problema 60

61 •• La figura 10.52 muestra una barra delgada de longitud L y masa M y una pequeña cantidad de masilla de masa m. El sistema está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento. La masilla se mueve hacia la derecha con velocidad v, choca contra la barra a una distancia d del centro de la misma y se adhiere en el punto de contacto. Determinar las expresiones correspondientes a la velocidad del centro de masas del sistema y a la velocidad angular del sistema respecto a su centro de masas tras la colisión. SSM

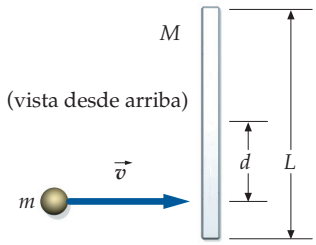


FIGURA 10.52
Problema 61

62 •• En la figura 10.52, reemplazar la bola de masilla por una pequeña esfera dura, de tamaño despreciable, que choca elásticamente contra la barra a una distancia $L/4$ del centro de la barra. Después de la colisión, la esfera queda en reposo. Calcular m/M.

63 •• La figura 10.53 muestra una barra uniforme de longitud d y masa M que cuelga de un pivote en la parte superior. La barra, inicialmente en reposo, recibe el choque de una partícula de masa m en un punto $x = 0{,}8d$ por debajo del pivote. Suponer que la masilla se pega a la barra. ¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad v de la partícula para que el ángulo máximo entre la barra y la vertical sea de 90°?

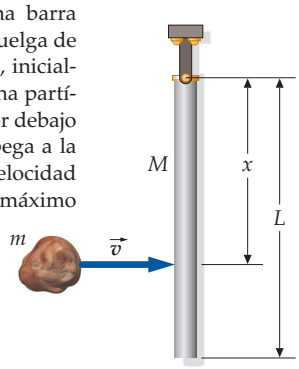


FIGURA 10.53
Problema 63

64 •• Si para el sistema del problema 63, $d = 1{,}2$ m, $M = 0{,}8$ kg y $m = 0{,}3$ kg, y el ángulo máximo entre la barra y la vertical es 60°, determinar la velocidad de la partícula antes del impacto.

65 •• Una barra uniforme de masa M está en reposo sobre una mesa sin rozamiento cuando, de repente, cerca de uno de sus extremos es golpeada con un impulso K en la dirección horizontal perpendicular a la barra. Inmediatamente después del golpe, (*a*) ¿cuál es la velocidad del centro de masas de la barra?, (*b*) ¿cuál es la velocidad del extremo donde es golpeada?, (*c*) ¿cuál es la velocidad del otro extremo de la barra? (*d*) ¿hay algún punto de la barra que no se mueva?

66 •• Un proyectil de masa m_p se mueve a velocidad constante v_0 hacia un disco estacionario de masa M y radio R, libre de girar alrededor de un pivote que pasa por su eje O (figura 10.54). Antes del impacto, el proyectil se desplaza a lo largo de una línea situada a la distancia b por debajo del eje. El proyectil choca contra el disco y se adhiere al punto B. Tratar al proyectil como una masa puntual. (*a*) Antes del impacto, ¿cuál es el momento angular total L_0 del proyectil y el disco alrededor del eje O? (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular ω del sistema disco y proyectil justamente después del impacto? (*b*) ¿Cuál es la energía cinética del sistema disco y proyectil después del impacto? (*c*) ¿Cuánta energía mecánica se pierde en esta colisión?

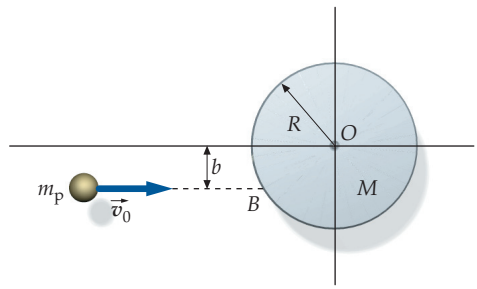


FIGURA 10.54
Problema 66

67 •• Una barra uniforme de longitud L_1 y masa $M = 0{,}75$ kg se soporta con una bisagra en un extremo y puede girar libremente en el plano vertical (figura 10.55). La barra se libera desde el reposo en la posición indicada. De la bisagra pende una partícula de masa $m = 0{,}5$ kg en el extremo de una cuerda de longitud L_2. Al producirse el contacto, la partícula se adhiere a la barra. ¿Cuál debe ser la relación L_2/L_1 para que $\theta_{máx} = 60°$ después de la colisión? SSM

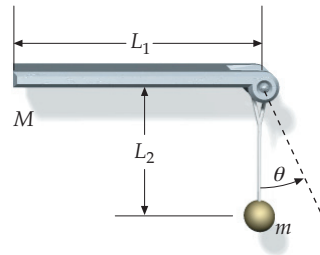


FIGURA 10.55
Problema 67

68 •• Una barra uniforme de longitud $L_1 = 1{,}2$ m y de masa $M = 2{,}0$ kg está sujeta por un extremo a una bisagra, de tal forma que puede girar en el plano vertical (figura 10.55). La barra, inicialmente en reposo en la posición de la figura, cae. Una partícula de masa m cuelga de una cuerda delgada de longitud $L_2 = 0{,}8$ m de la misma bisagra. Cuando la partícula choca con la barra, se engancha a ella. Después de la colisión, la barra sigue girando hasta formar un ángulo $\theta = \theta_{máx} = 37°$. (*a*) Calcular m. (*b*) ¿Cuánta energía se disipa durante la colisión? SSM

PRECESIÓN

69 •• Una rueda de bicicleta está montada en el punto medio de un eje de 50 cm de largo. El neumático y la llanta pesan 30 N y la rueda tiene un radio de 28 cm. La rueda se hace girar a 12 rev/s y el eje se coloca entonces en una posición horizontal con uno de sus extremos descansando sobre un pivote. (*a*) ¿Cuál es el momento angular debido al giro sobre sí mismo de la rueda? (Considérese que la rueda es un aro.) (*b*) ¿Cuál es la velocidad angular de precesión? (*c*) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para que el eje recorra 360° alrededor del pivote? (*d*) ¿Cuál es el momento angular asociado con el movimiento del centro de masas, es decir, debido a la precesión? ¿En qué dirección actúa este momento angular? SSM

70 •• Un disco uniforme de 2,5 kg de masa y radio 6,4 cm se monta en el centro de un eje de 10 cm y gira sobre sí mismo a 700 rev/min. El eje se coloca luego en una posición horizontal con un extremo descansando sobre un pivote. Al otro extremo se le da una velocidad horizontal inicial de modo que la precesión es suave sin nutación. (*a*) Hallar la velocidad angular de precesión. (*b*) ¿Cuál es la velocidad del centro de masas durante la precesión? (*c*) ¿Cuáles son el módulo y la dirección de la aceleración del centro de masas? (*d*) ¿Cuáles son las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el pivote?

PROBLEMAS GENERALES

71 • Una partícula de masa 3 kg se mueve en el plano xy con velocidad $v = 3$ m/s $\hat{\imath}$ a lo largo de la línea $y = 5{,}3$ m. (*a*) Determinar el momento angular $\vec{L}$ relativo al origen cuando la partícula está en el punto (12 m, 5,3 m). (*b*) Una fuerza $\vec{F} = (-3{,}9\text{ N})\hat{\imath}$ se aplica a la partícula. Determinar el momento producido por esta fuerza respecto al origen cuando la partícula pasa por el punto (12 m, 5,3 m). SSM

72 • El vector posición de una partícula de masa 3 kg viene dado por $\vec{r} = (4{,}0 + 3{,}0t^2)\hat{\jmath}$, donde $\vec{r}$ se expresa en metros y t en segundos. Determinar el momento angular y el momento de fuerza que actúa sobre la partícula respecto al origen.

73 •• Dos patinadores sobre hielo cogidos de las manos giran de forma sincronizada dando una revolución en 2,5 s. Sus masas son 55 kg y 85 kg y están separados 1,7 m. Su centro de masas no se mueve. Determinar (*a*) el momento angular del sistema respecto a su centro de masas y (*b*) la energía cinética total del sistema.

74 •• Una bola de 2 kg atada a una cuerda de longitud 1,5 m se mueve en una circunferencia horizontal girando en sentido antihorario (visto desde arriba) como un péndulo cónico (figura 10.56). La cuerda forma un ángulo $\theta = 30°$ con la vertical. (*a*) Demostrar que el momento angular de la bola respecto al punto de soporte P tiene una componente horizontal dirigida hacia el centro del círculo, así como una componente vertical, y hallar sus valores. (*b*) Determinar el módulo de $d\vec{L}/dt$ y demostrar que es igual al módulo del momento ejercido por la gravedad respecto al punto de soporte.

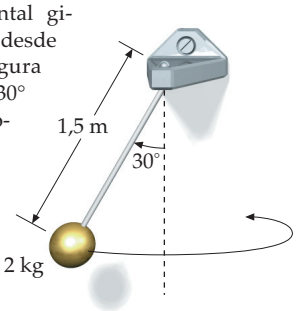


FIGURA 10.56
Problema 74

75 •• Una masa m situada sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeta a una cuerda que se arrolla alrededor de un poste cilíndrico vertical, de modo que cuando se pone en movimiento sigue una trayectoria en espiral hacia dentro. (*a*) ¿Se conserva el momento angular de la masa? (*b*) ¿Se conserva la energía de la masa? (*c*) Si la velocidad de la masa es v_0 cuando la longitud de la cuerda es r, ¿cuál será su velocidad cuando la longitud de la cuerda no arrollada sea $r/2$?

76 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La figura 10.57 muestra un tubo cilíndrico hueco de masa M, longitud L y momento de inercia $ML^2/10$. Dentro del cilindro se encuentran dos discos de masa m separados una distancia ℓ y atados a un vástago central por una cuerda delgada. El sistema puede girar alrededor de un eje vertical a través del cilindro. Cuando el sistema gira con la velocidad angular ω, las cuerdas que mantienen los discos se rompen súbitamente y éstos se pegan a las tapas del cilindro cuando llegan a los extremos. Obtener las expresiones correspondientes a la velocidad angular final y a las energías inicial y final del sistema. Suponer que las paredes interiores del cilindro carecen de rozamiento.

77 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Repetir el problema 76 suponiendo ahora que existe rozamiento entre los discos y las paredes del cilindro. Sin embargo, el coeficiente de rozamiento no es suficiente para evitar que los discos alcancen los extremos del cilindro. ¿Puede determinarse la energía final del sistema sin saber el coeficiente de rozamiento cinético? SSM

78 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Supongamos que en la figura 10.57, $\ell = 0{,}6$ m, $L = 2{,}0$ m, $M = 0{,}8$ kg y $m = 0{,}4$ kg. El sistema gira con la velocidad angular ω, de tal modo que la tensión en la cuerda es 108 N justo antes de que se rompa. Determinar la velocidad angular crítica y la velocidad angular del sistema tras las colisiones inelásticas. Calcular la energía cinética total del sistema cuando la velocidad angular es la crítica tras las colisiones inelásticas. Suponer que las paredes interiores del cilindro carecen de rozamiento.

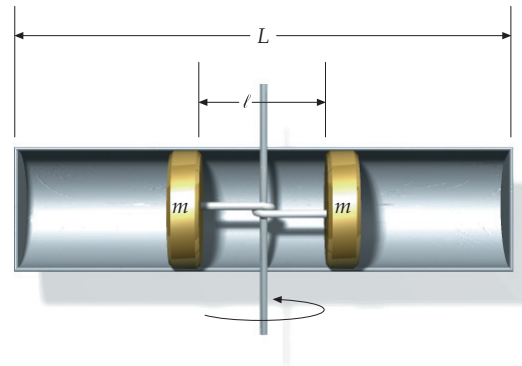


FIGURA 10.57 **Problemas 76, 77 y 78**

79 •• La segunda ley de Kepler establece que *el radio vector del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales*. Demostrar que esta ley se deduce directamente del principio de conservación del momento angular, teniendo en cuenta, además, que la fuerza de atracción gravitatoria entre un planeta y el Sol actúa a lo largo de la línea que une los dos objetos celestes. SSM

80 •• Considerar una plataforma giratoria cilíndrica de masa M y radio R girando con velocidad angular ω_1. (*a*) Un periquito de masa m revolotea sobre el disco hasta que aterriza justamente en el borde, como se muestra en la figura 10.58. ¿Cuál es la velocidad angular de la plata-

forma tras el aterrizaje del periquito? (*b*) Al sentirse mareado, el periquito salta (no vuela) con velocidad $\vec{v}$ respecto a la plataforma. La dirección de $\vec{v}$ es tangente al borde de la plataforma y en la dirección de su rotación. ¿Cuál será la velocidad angular de la plataforma tras el salto?

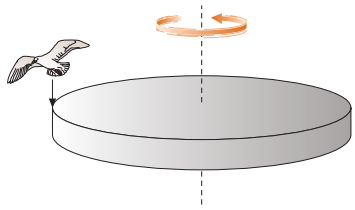


FIGURA 10.58 Problema 80

81 •• Se dispone de un disco pesado de metal (parecido a una moneda grande), como se muestra en la figura 10.59, de 0,500 kg de masa, de 0,125 m de radio y de un espesor despreciable. (Estos discos se conocen como discos de Euler.) Se coloca el disco en una plataforma giratoria, que consiste en un cilindro macizo estrecho de 0,735 kg de masa y 0,250 m de radio que gira alrededor de un eje que pasa por su centro mediante unos cojinetes que no producen rozamiento. Se imprime al disco un movimiento de rotación alrededor de un diámetro del disco y en el centro de la plataforma. Al hacerlo, se mantiene la plataforma sujeta, pero inmediatamente se la deja mover de forma libre. El disco tiene una velocidad angular inicial de 30 rev/min. (*a*) Si el disco se para de tal forma que su eje de simetría coincide con el eje de rotación de la plataforma, ¿cuál es la velocidad angular final de la plataforma? (*b*) ¿Cuál será la velocidad angular final si cuando se para el eje del disco está a 0,10 m del eje de la plataforma?

FIGURA 10.59
Problema 81 *(Gentileza de Tangent Toy Co.)*

82 •• (*a*) Suponiendo que la Tierra es una esfera homogénea de radio r y masa m, demostrar que el periodo T de la rotación terrestre alrededor de su eje está relacionado con el radio por $T = br^2$, donde $b = (4/5)\,\pi m/L$, siendo L el momento angular de espín de la Tierra debido a su rotación. (*b*) Suponer que el radio r cambia en una cantidad muy pequeña Δr debido a algún efecto interno, como la dilatación térmica. Demostrar que el cambio fraccional en el periodo ΔT viene dado aproximadamente por $\Delta T/T = 2\,\Delta r/r$. (*c*) ¿Cuántos kilómetros tendría que expansionarse la Tierra para que el periodo cambiase 0,25 días/año, de modo que los años bisiestos no fueran necesarios?

83 •• La dirección del eje de rotación de la Tierra no está fija en el espacio, sino que se mueve en un círculo de radio de 23° con un periodo de 26 000 años, produciendo lo que se conoce con el nombre de precesión de los equinocios. Por esta razón, la estrella polar actual, Polaris, no será la estrella polar indefinidamente. La Tierra es un giróscopo gigante, con un momento ejercido por el Sol y por la Luna sobre ella. Calcular un valor aproximado para este momento, sabiendo que el periodo de rotación de la Tierra es de 1 día y que su momento de inercia es $8{,}03 \times 10^{37}$ kg · m^2. SSM

84 •• Como se indicó en el texto, de acuerdo con el Modelo Estándar de la Física de Partículas, los electrones son partículas puntuales. (Esta hipótesis se ha confirmado experimentalmente, y se ha visto que el radio de un electrón es inferior a 10^{-18} m.) El espín intrínseco de un electrón podría, en principio, ser debido a su rotación. Veamos si esa conclusión es posible. (*a*) Supongamos que el electrón es una esfera de 10^{-18} m de radio. ¿Cuál debería ser la velocidad angular necesaria para producir un momento angular intrínseco igual al valor conocido de $\hbar/2$? (*b*) Utilizando este valor para la velocidad angular, mostrar que un punto del "ecuador" de este electrón tendría una velocidad lineal superior a la de la luz. ¿Cuál es la conclusión a la que llegaría sobre el momento angular de espín del electrón cuando se supone análogo al de rotación de una esfera?

85 •• Un fenómeno interesante que ocurre en determinados pulsars (ver problema 24) es un cambio rápido de la velocidad de rotación del pulsar debido a una recolocación de la masa y el consecuente cambio de su momento de inercia. Imaginemos un pulsar de 10 km de radio cuyo periodo de rotación es 25,032 ms. Se observa un cambio repentino de dicho periodo de 25,032 ms a 25,028 ms. Si este acortamiento causó la contracción de la estrella, ¿cuál fue el cambio originado sobre el radio del pulsar?

86 ••• La figura 10.60 muestra una polea formada por un disco uniforme, del cual pende una cuerda pesada. La circunferencia de la polea es de 1,2 m y su masa de 2,2 kg. La cuerda tiene 0,8 m de longitud y su masa es 4,8 kg. En el instante mostrado en la figura, el sistema está en reposo y la diferencia de altura de los dos extremos de la cuerda es 0,6 m. (*a*) ¿Cuál es la velocidad angular de la polea cuando la diferencia de altura entre los extremos de la cuerda es de 7,2 m? (*b*) Obtener una expresión para el momento angular del sistema en función del tiempo, prescindiendo del caso en que cualquiera de los extremos de la cuerda está por encima del centro de la polea. No hay deslizamiento relativo entre la cuerda y la polea.

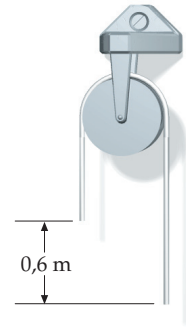
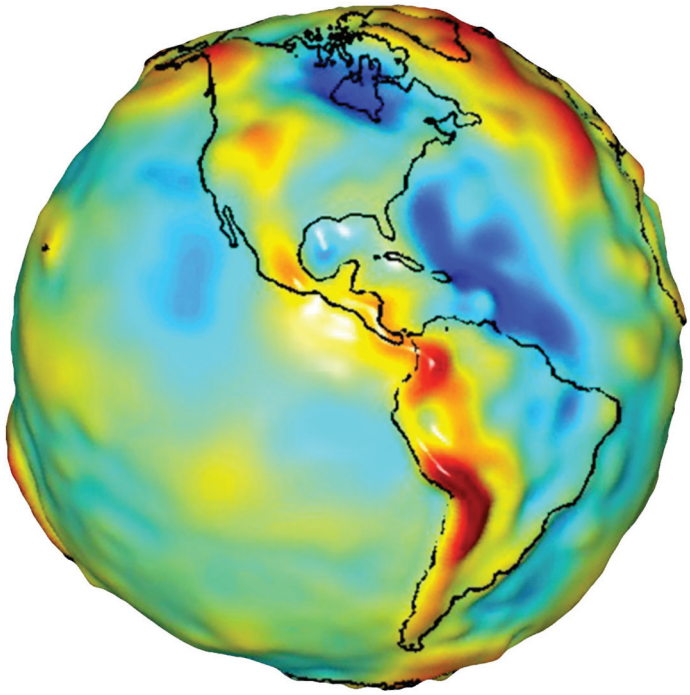


FIGURA 10.60
Problema 86

CAPÍTULO 11



ESTE MAPA DE LA GRAVEDAD TERRESTRE EN EL HEMISFERIO OESTE FUE ELABORADO COMO PARTE DE LA MISIÓN CONJUNTA ENTRE LA DLR DE ALEMANIA Y LA NASA DE ESTADOS UNIDOS. LA INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO VARÍA LIGERAMENTE DEPENDIENDO DE LA LOCALIZACIÓN (LAS VARIACIONES ILUSTRADAS EN EL MAPA SON EXAGERADAS.) LOS DATOS FUERON OBTENIDOS MEDIANTE UN SEGUIMIENTO MUY PRECISO DE LA DISTANCIA ENTRE DOS SATÉLITES. *(NASA/University of Texas Center for Space Research.)*

Gravedad

11.1 Leyes de Kepler
11.2 Ley de la gravitación de Newton
11.3 Energía potencial gravitatoria
11.4 El campo gravitatorio
*11.5 Cálculo del campo gravitatorio de una corteza esférica por integración

? Utilizando dos satélites, ¿cómo se podrían aplicar los conocimientos de la gravedad para detectar regiones donde aumenta la intensidad del campo gravitatorio? (Véase el ejemplo 11.9.)

Hoy día conocemos bien cuál es el papel de la gravedad en el movimiento e interacciones de cuerpos celestes, la expansión o contracción de galaxias y la formación de agujeros negros. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre nosotros y sobre los cuerpos que nos rodean es un hecho de experiencia cotidiano. Es la gravedad la que nos liga a la Tierra y hace que la Tierra y otros planetas permanezcan en el sistema solar. Sin embargo, las variaciones de la gravedad son a menudo demasiado pequeñas como para notarlas en la superficie terrestre, aunque no deberían ser completamente ignoradas. Los geofísicos han encontrado maneras de utilizar esas pequeñas variaciones de la gravedad para determinar la localización de depósitos de petróleo y minerales.

Durante la época de Newton, muchos creían que en el vasto universo la naturaleza seguía reglas distintas de las de aquí, sobre la Tierra. La ley de Newton de la gravitación universal y las tres leyes de la dinámica, mostraron que la naturaleza sigue las mismas reglas en todas partes; esto produjo un efecto profundo sobre la visión actual que se tiene del universo.

En este capítulo, usaremos las herramientas que nos proporcionan la conservación del momento angular, las leyes de Newton del movimiento, y la ley de Newton de la gravitación para predecir el movimiento de los planetas y de los otros objetos celestes, incluidos los satélites que hemos enviado al espacio.

11.1 LEYES DE KEPLER

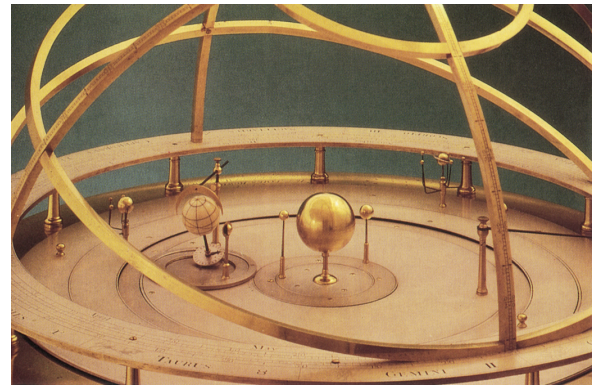
El cielo nocturno, con sus miríadas de estrellas y sus planetas brillantes, ha fascinado siempre a la humanidad. Hacia finales del siglo XVI, el astrónomo Tycho Brahe estudió los movimientos de los planetas e hizo observaciones considerablemente más exactas que las realizadas previamente. Utilizando los datos de Brahe, Johannes Kepler, descubrió que las trayectorias reales de los planetas alrededor del Sol eran elipses (figura 11.1). También demostró que los planetas no se movían con velocidad constante, sino más rápidamente cuando estaban más cerca del Sol que cuando estaban más lejos. Finalmente, Kepler desarrolló una relación matemática precisa entre el periodo de un planeta y su distancia media al Sol (ver tabla 11.1). Kepler expresó sus resultados en tres leyes empíricas del movimiento planetario. Estas leyes proporcionaron a Newton la base para su descubrimiento de la ley de la gravedad. Las leyes de Kepler son:

Ley 1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol situado en un foco.

Una elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos, llamados focos F, es constante (figura 11.2). La figura 11.3 muestra una trayectoria elíptica de un planeta con el Sol en un foco. La órbita de la Tierra es casi circular; la distancia al Sol en el perihelio (punto más próximo) es de $1{,}48 \times 10^{11}$ m, y en el afelio (punto más lejano) de $1{,}52 \times 10^{11}$ m. El semieje mayor, que es la semisuma de estas distancias, vale $1{,}50 \times 10^{11}$ m para la órbita terrestre. La distancia media Tierra-Sol define la unidad astronómica (UA):

$$1\ \text{UA} = 1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m} = 93{,}0 \times 10^{6}\ \text{mi} \qquad 11.1$$

La UA se utiliza frecuentemente en los problemas relacionados con el sistema solar.



Modelo mecánico del sistema solar, denominado planetario de mesa, de la colección de Instrumentos científicos históricos de la Universidad de Harvard. *(Collection of Historical Scientific Instruments, Harvard University.)*

Tabla 11.1 Radios orbitales medios y periodos orbitales de los planetas

Planeta	Radio orbital medio r ($\times 10^{10}$ m)	Periodo T (años)
Mercurio	5,79	0,241
Venus	10,8	0,615
Tierra	15,0	1,00
Marte	22,8	1,88
Júpiter	77,8	11,9
Saturno	143	29,5
Urano	287	84
Neptuno	450	165
Plutón	590	248

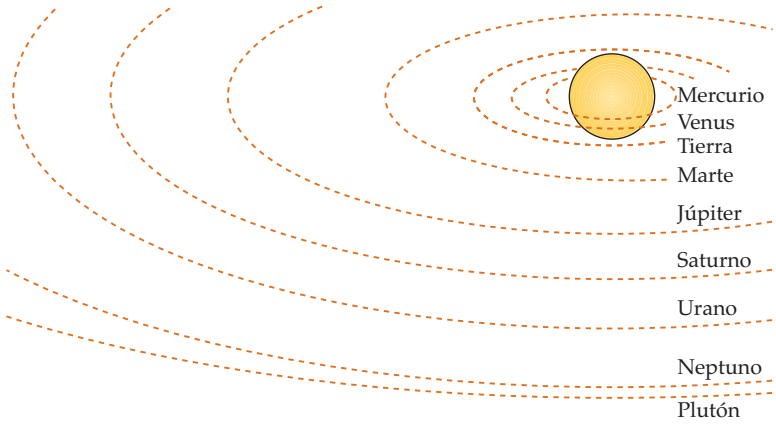


FIGURA 11.1 Órbitas de los planetas alrededor del Sol. (Los tamaños no están a escala.) En 2006, la Unión Astronómica Internacional aprobó una nueva definición de planeta que excluye a Plutón, pero lo incluyó en una nueva categoría llamada "planetas enanos".

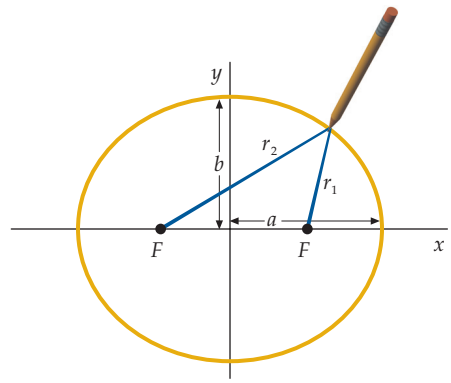


FIGURA 11.2 Una elipse es el lugar geométrico de los puntos para los cuales $r_1 + r_2 =$ constante. La distancia a es el semieje mayor y b el semieje menor. Una elipse puede dibujarse con una cuerda fijando cada extremo en un foco y utilizándola como guía para un lápiz. El círculo es un caso especial en el que los dos focos coinciden en un mismo punto.

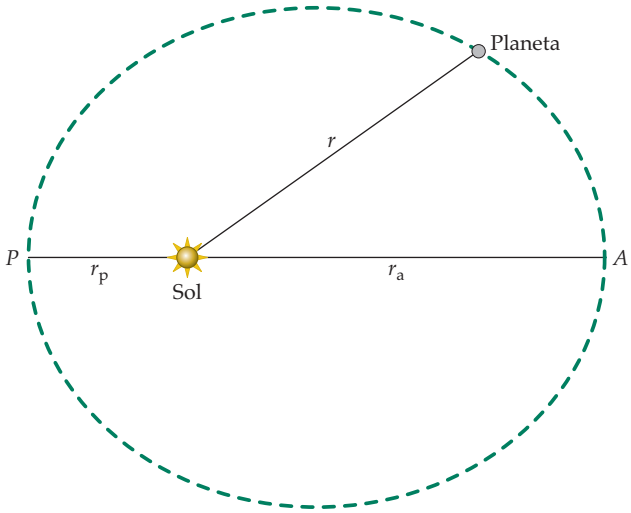


FIGURA 11.3 Recorrido elíptico de un planeta con el Sol en un foco. El punto *P*, donde el planeta está más cerca del Sol, se llama perihelio, y el punto A, donde está más lejos, afelio. La distancia media entre el planeta y el Sol, que se define como $(r_p + r_a)/2$, es igual al semieje mayor. (Los planetas conocidos viajan a lo largo de trayectorias más circulares que la que aquí se muestra.)

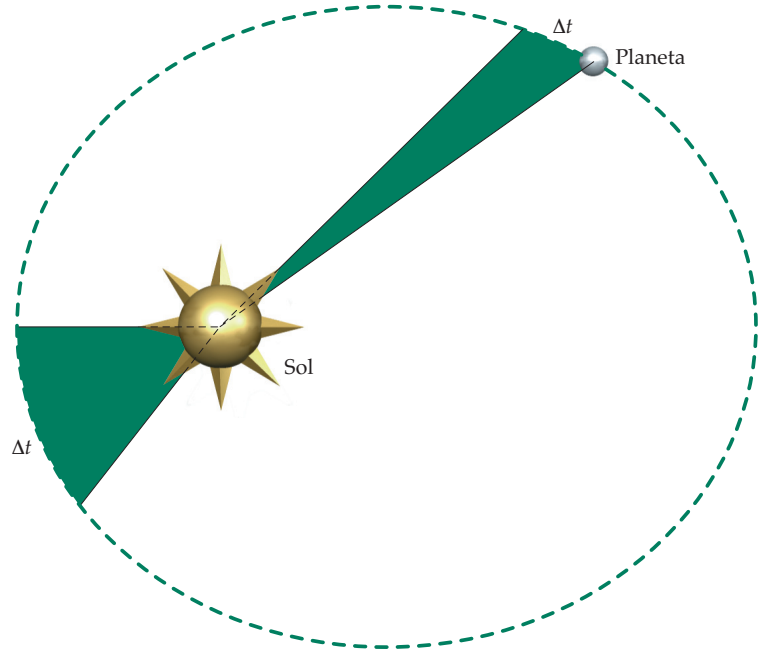


FIGURA 11.4 Cuando un planeta está próximo al Sol, se mueve más deprisa que cuando está más lejos. Las áreas barridas por el radio vector en un intervalo de tiempo determinado son iguales.

Ley 2. La recta que une cualquier planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

La figura 11.4 ilustra la segunda ley de Kepler, o la ley de las áreas iguales. Un planeta se mueve más rápidamente cuando está más próximo al Sol que cuando está más lejos, de tal modo que el área barrida por el radio vector en un determinado intervalo de tiempo es la misma a lo largo de toda la órbita. Esta ley de las áreas iguales está relacionada con la ley de conservación del momento angular, como veremos en la sección próxima.

Ley 3. El cuadrado del periodo de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de un planeta con su distancia media al Sol, que es igual al semieje mayor de su órbita elíptica. En forma algebraica, si r es el radio orbital medio (por radio orbital medio entendemos el promedio de las distancias del perihelio y del afelio) y T es el periodo de revolución del planeta, la tercera ley de Kepler establece que

$$T^2 = Cr^3 \qquad 11.2$$

donde la constante C tiene el mismo valor para todos los planetas. Esta ley es una consecuencia simple del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta varía inversamente con el cuadrado de la distancia del Sol al planeta. Lo demostraremos en la sección siguiente para el caso especial de una órbita circular.

Ejemplo 11.1 Órbita de Júpiter

La distancia media del Sol a Júpiter es 5,20 UA. ¿Cuál es el periodo de la órbita de Júpiter alrededor del Sol?

PLANTEAMIENTO Utilizaremos la tercera ley de Kepler para relacionar el periodo de Júpiter con su radio orbital medio. La constante C puede deducirse a partir de la distancia media al Sol y el periodo de la Tierra, que son conocidos.

SOLUCIÓN

1. La tercera ley de Kepler relaciona el periodo de Júpiter T_J con su distancia media al Sol, r_J: $T_J^2 = Cr_J^3$
2. Aplicar la tercera ley de Kepler a la Tierra para determinar C en función de T_T y r_T: $T_T^2 = Cr_T^3$
3. Dividir las dos ecuaciones, eliminando C, y despejar T_J: $\dfrac{T_J^2}{T_E^2} = \dfrac{r_J^3}{r_E^3}$

$$\text{por lo tanto,} \quad T_J = T_T\left(\frac{r}{r_T}\right)^{3/2} = (1\text{ año})\left(\frac{5{,}20\text{ UA}}{1\text{ UA}}\right)^{3/2}$$

$$= \boxed{11{,}9\text{ años}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 3 concuerda con el periodo orbital de Júpiter de la tabla 11.1.

OBSERVACIÓN En la figura 11.5, se representan el periodo de las órbitas de la Tierra, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno en función de la distancia media al Sol. En (*a*) el periodo se representa en función de la distancia media al Sol mientras que en (*b*) se representa el periodo al cuadrado respecto la tercera potencia de la distancia media al Sol. En el segundo caso, los puntos se alinean en una línea recta.

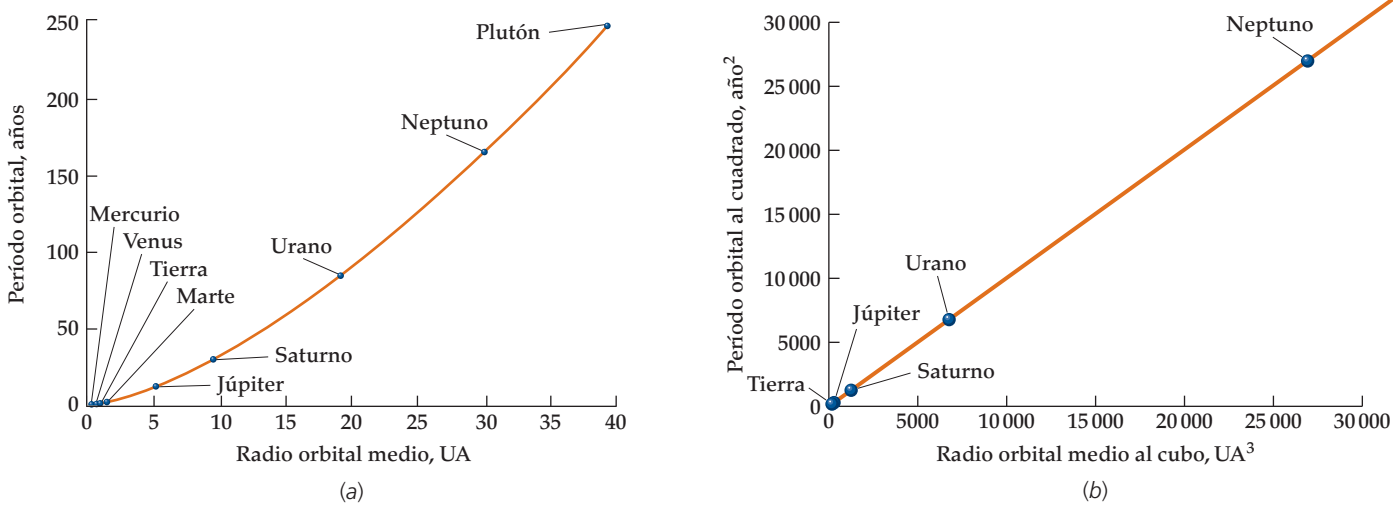


FIGURA 11.5

PROBLEMA PRÁCTICO 11.1 El periodo de Neptuno es 164,8 años. Calcular su distancia media al Sol.

PROBLEMA PRÁCTICO 11.2 Si se representa el logaritmo del periodo de la Tierra, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno en función del logaritmo de la distancia media al Sol, todos los puntos se sitúan en una curva. ¿Cuál es la forma de esa curva?

11.2 LEY DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

Aunque las leyes de Kepler constituyeron un paso importante en la comprensión de los movimientos planetarios, en realidad fueron simples leyes empíricas obtenidas a partir de las observaciones astronómicas de Brahe. Fue Newton quien dio un paso de gigante al atribuir la aceleración de un planeta en su órbita a una fuerza ejercida sobre él por el Sol. Utilizando su segunda ley, Newton demostró que una fuerza que varía en razón inversa al cuadrado de la distancia entre el Sol y un planeta era la causa de las órbitas elípticas observadas por Kepler. Además, Newton formuló la atrevida hipótesis de que tal fuerza existía entre dos objetos cualesquiera del universo. Antes de Newton no se aceptaba generalmente que las leyes de la física observables en la Tierra fueran aplicables a los cuerpos celestes. Newton cambió el conocimiento que teníamos de la naturaleza del reino celestial mostrando que las leyes de la física se podían aplicar igualmente a objetos terrestres como a objetos no-terrestres. La **ley de la gravitación de Newton** postula que existe una fuerza de atracción entre cada par de objetos que es proporcional al producto de las masas de los objetos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Sean m_1 y m_2 las masas de las partículas puntuales 1 y 2 (situadas en las posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente) y sea $\vec{r}_{12}$ el vector que apunta desde la partícula 1 a la partícula 2 (figura 11.6*a*).

La fuerza $\vec{F}_{12}$ que la partícula 1 ejerce sobre la partícula 2 es

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad 11.3$$

LEY DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

donde $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ es el vector unitario que apunta de 1 a 2 y G es la **constante de la gravitación universal**, que vale

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \qquad 11.4$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza $\vec{F}_{21}$ ejercida por 2 sobre 1 es la opuesta a la fuerza $\vec{F}_{12}$ (figura 11.6*b*). El módulo de la fuerza gravitatoria ejercida por una partícula de masa m_1 sobre otra partícula de masa m_2 a una distancia r viene dada por

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad 11.5$$

Newton publicó su teoría de la gravitación en 1686, pero hubo que esperar un siglo para que Henry Cavendish, como veremos en la siguiente sección, determinase experimentalmente con exactitud el valor de G.

El valor conocido de G puede utilizarse para calcular la atracción gravitatoria entre dos objetos ordinarios.

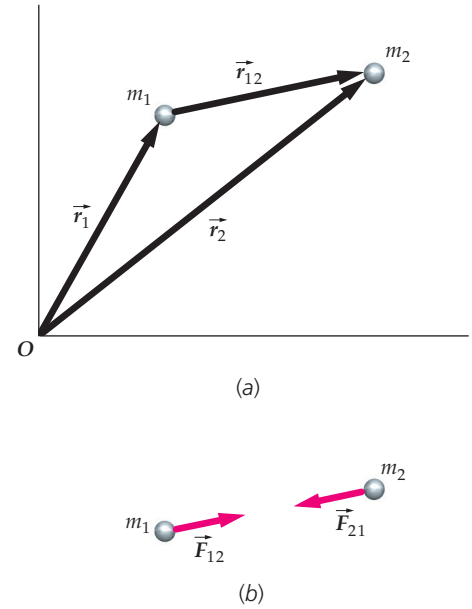


FIGURA 11.6 (*a*) Partículas en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$. (*b*) Las partículas ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre otra.

PROBLEMA PRÁCTICO 11.3

Mostrar que la fuerza gravitatoria de atracción de un joven de 65 kg y una muchacha de 50 kg separados 0,5 m es de $8{,}7 \times 10^{-7}$ N. Suponer que sus masas son puntuales.

Este cálculo demuestra que la fuerza gravitatoria ejercida entre sí por dos objetos de tamaño ordinario es extraordinariamente pequeña. Para comparar, un mosquito pesa aproximadamente 1×10^{-7} N, así que la fuerza de atracción es igual al peso de 9 mosquitos. El peso de una persona de 50 kg es de 490 N, es decir, 500 millones de veces superior a la fuerza de atracción calculada en el problema práctico 11.3. La atracción gravitatoria sólo puede apreciarse fácilmente cuando al menos uno de los objetos tiene una masa enorme. La atracción gravitatoria entre la muchacha del ejemplo y la Tierra es considerable.

Para comprobar la validez de la ley de la inversa del cuadrado de la distancia correspondiente a la fuerza gravitatoria, Newton comparó la aceleración de la Luna en su órbita con la aceleración de caída libre de los objetos próximos a la superficie de la Tierra (tal como la legendaria manzana). Para ello, formuló la hipótesis de que la atracción gravitatoria debida a la Tierra era la causa de ambas aceleraciones. En primer lugar, suponía que la Tierra y la Luna podían considerarse como partículas puntuales con sus masas totales concentradas en los centros respectivos. La fuerza que actúa sobre una partícula de masa m a una distancia r del centro de la Tierra es

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} \qquad 11.6$$

donde M_T es la masa de la Tierra. Si ésta es la única fuerza que actúa sobre la partícula, su aceleración es

$$a = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_T}{r^2} \qquad 11.7$$

Para objetos próximos a la superficie de la Tierra, $r \approx R_T$ y la aceleración de caída libre es g:

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2} \qquad 11.8$$

donde R_T es el radio de la Tierra. La distancia a la Luna es, aproximadamente, 60 veces el radio de la Tierra ($r = 60R_T$). Sustituyendo en la ecuación 11.7, resulta $a = g/60^2$, de modo que la aceleración de la Luna en su órbita casi circular es igual a la aceleración de caída libre g cerca de la superficie de la Tierra dividida por 60^2. Es decir, la aceleración de la Luna a_L tendría que ser $(9{,}81/3600)\ \mathrm{m/s^2}$. Esta aceleración centrípeta de la Luna puede calcularse a partir de su distancia conocida al centro de la Tierra, $r = 3{,}84 \times 10^8$ m y su periodo, $T = 27{,}3$ días $= 2{,}36 \times 10^6$ s:

$$a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(3{,}84 \times 10^8\ \mathrm{m})}{(2{,}36 \times 10^6\ \mathrm{s})^2} = 2{,}72 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

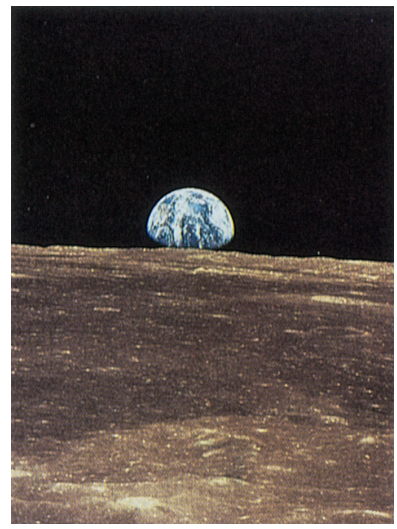
Por lo tanto,

$$\frac{g}{a_L} = \frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}{2{,}72 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}} = 3607 \approx 3600$$

Newton dijo: "He comparado la fuerza necesaria para mantener la Luna en su órbita con la fuerza gravitatoria sobre la superficie de la Tierra y los resultados son bastante cercanos".

La hipótesis de que la Tierra y la Luna pueden tratarse como partículas puntuales en el cálculo de la fuerza sobre la Luna es razonable, pues ésta se encuentra lejos de la Tierra en comparación con los radios terrestre o lunar, pero esta hipótesis es cuestionable cuando se aplica a la fuerza ejercida por la Tierra sobre un objeto próximo a su superficie. Tras un esfuerzo considerable, Newton consiguió probar que la fuerza ejercida por un objeto con simetría esférica sobre una masa puntual situada sobre su superficie o exteriormente, es la misma que tendría si toda la masa del objeto estuviera concentrada en su centro. La prueba requiere utilizar el cálculo integral, que Newton desarrolló para resolver este problema.

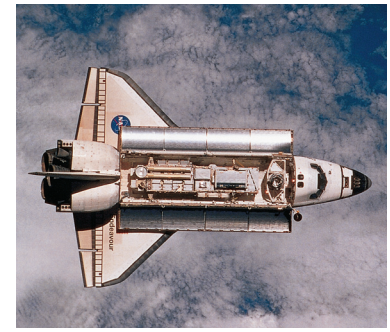
Como $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ se mide fácilmente y el radio de la Tierra es conocido, la ecuación 11.8 puede utilizarse para determinar el valor del producto GM_T. Newton estimó el valor de G a partir de una estimación de la masa de la Tierra. Cuando Cavendish determinó G unos cien años más tarde, midiendo la fuerza entre pequeñas esferas de masas y separación conocidas, decía que el objetivo de su aparato era "pesar la Tierra". Saber el valor de G significa que puede determinarse la masa del Sol o la masa de cualquier planeta con satélites. Después del siguiente ejercicio se ilustra un método para calcular G.



Visión de la Tierra tomada el 16 de julio de 1969 desde el *Apolo XI* en su órbita alrededor de la Luna. *(NASA.)*

Ejemplo 11.2 Cayendo hacia la Tierra

¿Cuál es la aceleración en caída libre de un objeto a la altura de la órbita del transbordador espacial, unos 400 km por encima de la superficie terrestre?



(NASA.)

PLANTEAMIENTO La única fuerza que actúa es la fuerza de atracción gravitatoria.

SOLUCIÓN

1. La aceleración es $a = F_g/m$, donde F_g viene dada por la ley de la gravitación de Newton:
$$a = \frac{F_g}{m} = \frac{GmM_T/r^2}{m} = \frac{GM_T}{r^2}$$

2. La distancia r está relacionada con el radio de la Tierra, R_T, y la altura h:
$$r = R_T + h = 6370\,\text{km} + 400\,\text{km} = 6770\,\text{km}$$

3. La aceleración es, por lo tanto:
$$a = \frac{GM_T}{r^2} = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24}\,\text{kg})}{(6{,}77 \times 10^{6}\,\text{m})^2} = \boxed{8{,}70\,\text{m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Una altitud de 400 km representa un 6% del radio de la Tierra (6370 km), y la aceleración de la gravedad de 8,7 m/s² es un 11% menor que 9,81 m/s². Esa aceleración de la gravedad es razonable porque la altitud es sólo un 6% del radio de la Tierra.

OBSERVACIÓN Ésta es también la aceleración de los astronautas del transbordador "en estado de ingravidez" cuando aceleran en su órbita circular.

El cálculo realizado en este ejemplo 11.2 puede simplificarse usando la ecuación 11.8 para eliminar GM_T a partir de la ecuación 11.7. En ese caso, la aceleración a una distancia r es

$$a = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_T}{r^2} = g\frac{R_T^2}{r^2} \qquad 11.9$$

PROBLEMA PRÁCTICO 11.4
¿A qué distancia por encima de la superficie de la Tierra la aceleración de la gravedad vale la mitad del valor que tiene en el nivel del mar?

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 11.1

¿Cómo es posible que los astronautas que se encuentran en un transbordador en órbita afirmen que se sienten en ingravidez, si la fuerza de la gravedad allí es sólo un 11% menor que la que hay en la superficie de la Tierra?

MEDIDA DE *G*

Henry Cavendish fue el primero que, en 1798 y usando el aparato que se muestra en la figura 11.7, midió la constante de la gravitación universal G. La medida de G ha sido repetida por otros experimentadores con diversas mejoras y refinamientos. En

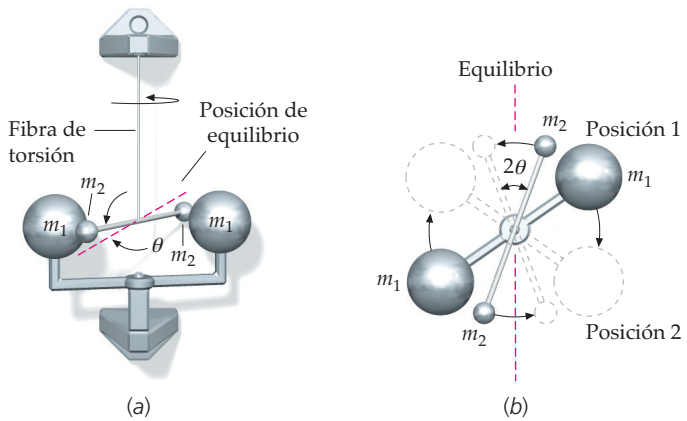


FIGURA 11.7 (*a*) Dos pequeñas esferas, cada una de masa m_2, están en los extremos de una varilla ligera colgada de una fibra muy delgada. Medidas cuidadosas determinan el momento necesario para que la fibra se retuerza un determinado ángulo. Dos grandes esferas, cada una de masa m_1, se sitúan entonces próximas a las esferas pequeñas. Debido a la atracción gravitatoria de las esferas grandes sobre las pequeñas, la fibra gira un ángulo muy pequeño θ a partir de su posición de equilibrio. (*b*) El mismo aparato visto desde arriba. Una vez que el aparato alcanza el reposo se invierten las posiciones de las esferas grandes (como indican las líneas de trazos), de modo que estén a la misma distancia de la posición de equilibrio, pero en el lado opuesto. Cuando el aparato vuelva al reposo, la fibra habrá girado un ángulo 2θ en respuesta a la inversión del momento. Conocida la constante de torsión de la fibra, las fuerzas entre las masas m_1 y m_2 pueden determinarse a partir de la medida del ángulo de torsión. Como las masas y sus separaciones son conocidas, G puede calcularse. Cavendish obtuvo un valor de G con una precisión del orden del 1% respecto al valor hoy aceptado y que viene dado por la ecuación 11.4.

cualquier caso, medir G siempre resulta difícil a causa de la extraordinaria debilidad de la atracción gravitatoria. Por ello, el valor de G se conoce sólo con una precisión de 1 parte en 10 000. Aunque G fue una de las primeras constantes físicas universales determinadas, sigue siendo una de las conocidas con menor exactitud.

MASA GRAVITATORIA Y MASA INERCIAL

La propiedad de un cuerpo responsable de la fuerza gravitatoria que éste ejerce sobre otro cuerpo recibe el nombre de masa *gravitatoria*. Por otro lado, la propiedad de un cuerpo que mide su resistencia frente a la aceleración recibe el nombre de masa *inercial* (o inerte). Para estas dos propiedades hemos estado utilizando el símbolo m porque, experimentalmente, las masas gravitatoria e inercial de un cuerpo son proporcionales. Por conveniencia, las unidades se definen de tal forma que la constante de proporcionalidad sea uno. El hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida por un cuerpo sea proporcional a su masa inercial es una característica única que sólo cumple la fuerza de gravedad. Una de las consecuencias es que, si se desprecia la resistencia del aire, todos los objetos próximos a la Tierra caen con la misma aceleración. Este hecho ha sorprendido al mundo desde tiempos ya lejanos. El relato de cómo Galileo demostró este hecho dejando caer objetos desde la torre inclinada de Pisa es sólo uno de los ejemplos sobre el interés que esta cuestión suscitó en el siglo XVI.

Podríamos imaginar fácilmente que las masas gravitatoria e inercial de un cuerpo no son iguales. Supongamos que designamos a la masa gravitatoria con el símbolo m_G y a la masa inercial con m. En este caso, la fuerza ejercida por la Tierra sobre un objeto próximo a su superficie sería

$$F_g = \frac{GM_T m_G}{R_T^2} \qquad 11.10$$

donde M_T es la masa gravitatoria terrestre. Por lo tanto, la aceleración de caída libre de un cuerpo próximo a la superficie de la Tierra será

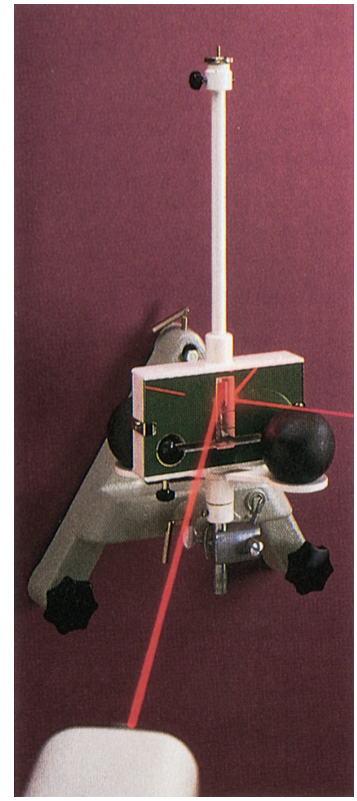
$$a = \frac{F_g}{m} = \left(\frac{GM_T}{R_T^2}\right)\frac{m_G}{m} \qquad 11.11$$

Si la gravedad fuera otra propiedad distinta de la materia, como el color o la rigidez, sería razonable pensar que la relación m_G/m fuese función de magnitudes tales como la composición química del cuerpo o su temperatura. Entonces, la aceleración de caída libre sería diferente para diferentes objetos. Sin embargo, el hecho experimental es que a es la misma para todos los cuerpos. Como este es el caso, no es necesario mantener la distinción entre m_G y m, y podemos escribir $m_G = m$. Sin embargo, no debe olvidarse que esta es una conclusión experimental y, como tal, limitada por la exactitud con la que se lleve a cabo el experimento. En la década de 1580-90, Simon Stevin realizó una serie de experimentos para comprobar esta equivalencia. Galileo difundió esta ley ampliamente, y sus contemporáneos lograron considerables mejoras en la exactitud experimental con que fue establecida.

Los experimentos más precisos llevados a cabo para comparar las masas gravitatoria e inercial fueron realizados por Newton utilizando péndulos simples, en lugar de cuerpos que caían libremente. De este modo, estableció la equivalencia entre ambas masas con una precisión aproximada de 1 parte en 1000. Los experimentos que comparan la masa inercial y la masa gravitatoria han sido mejorados continuamente a lo largo de los años. Actualmente, la equivalencia entre m_G y m se encuentra establecida, aproximadamente, en 1 parte en 5×10^{13}. Por lo tanto, de todas las leyes físicas, la equivalencia entre las masas gravitatoria e inercial es una de las mejores establecidas. La equivalencia entre las masas gravitatoria e inercial es la base del llamado principio de equivalencia, que es fundamento de la teoría de la relatividad general de Einstein.

DEDUCCIÓN DE LAS LEYES DE KEPLER

Newton utilizó su segunda ley del movimiento para mostrar que una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza atractiva, que varía inversamente con el cua-



Balanza gravitatoria de torsión utilizada en los laboratorios de prácticas de alumnos para la medida de G. Una pequeña desviación angular de la balanza origina una gran desviación angular del haz de láser que se refleja en el espejo de la balanza. *(Gentileza de Central Scientific Company.)*

! La aceleración de caída libre es la misma para todos los cuerpos.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 11.2

¿Cuál es la diferencia entre masa inercial y masa gravitatoria?

drado de la distancia desde un punto fijo, se mueve siguiendo una sección cónica (una elipse, una parábola o una hipérbola) con un foco localizado en el punto fijo. Newton infirió a partir de este resultado y de las leyes de Kepler que los planetas y los cometas son atraídos hacia el centro del Sol por una fuerza que varía inversamente con el cuadrado de sus distancias al centro del Sol. Las trayectorias parabólica e hiperbólica se aplican a objetos que pasan una sola vez junto al Sol y nunca regresan. Tales órbitas no son cerradas. Las únicas órbitas cerradas en un campo de fuerzas $1/r^2$ son elipses. Así, la primera ley de Kepler es una consecuencia directa de la ley de gravitación de Newton. La segunda ley de Kepler o ley de las áreas iguales, resulta del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta está dirigida hacia el centro de Sol. Esta es una **fuerza central**. La figura 11.8*a* muestra un planeta que se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el tiempo dt, el planeta se desplaza una distancia $v\,dt$ y el radio vector $\vec{r}$ barre el área indicada en la figura. Esta es la mitad del área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}\,dt$, es decir, $|\vec{r} \times \vec{v}\,dt|$. Por lo tanto, el área dA barrida por el radio vector $\vec{r}$ en el tiempo dt es

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}\,dt| = \frac{|\vec{r} \times m\vec{v}|}{2m}\,dt$$

o sea

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad 11.12$$

donde $L = |\vec{r} \times m\vec{v}|$ es el módulo del momento angular del planeta respecto al Sol. El área barrida en un determinado intervalo de tiempo dt es, por lo tanto, proporcional al momento angular L. Como la fuerza que actúa sobre un plantea está dirigida a lo largo de la línea que une el planeta con el Sol, el momento respecto al Sol es nulo. Por lo tanto, el momento angular del planeta se conserva, es decir, L es constante y el área barrida en cierto intervalo de tiempo es la misma para todas las partes de la órbita, que es la segunda ley de Kepler. Asimismo, dado que L es constante se sabe que rv sen ϕ también lo es. Tanto en el perihelio como en el afelio $\phi = 90^\circ$ (figura 11.8*b*), por lo que $r_a v_a = r_p v_p$.

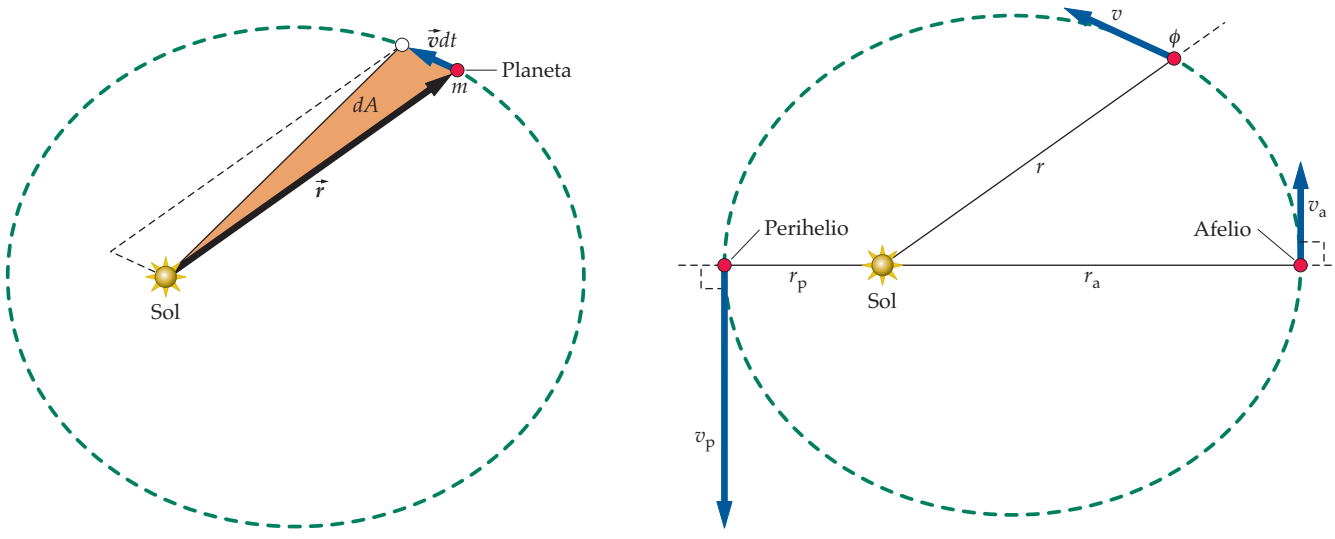


FIGURA 11.8 (*a*) El área dA barrida en el tiempo dt es igual a $\frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}\,dt| = \frac{1}{2m}L\,dt$, donde $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Como $\vec{L}$ permanece constante, dA/dt permanece constante. (*b*) El módulo del momento angular, dado por $L = mrv$ sen ϕ, permanece constante; así, rv sen ϕ es constante. Además, $\phi = 90^\circ$ tanto en el perihelio como en el afelio, de forma que $r_a v_a = r_p v_p$.

A continuación, demostraremos que la ley de gravitación de Newton implica la tercera ley de Kepler para el caso especial de una órbita circular. Consideremos un planeta que se mueve con velocidad v en una órbita circular de radio r alrededor del Sol. La fuerza gravitatoria de atracción entre el Sol y el planeta proporciona la aceleración centrípeta v^2/r. Aplicando la segunda ley de Newton a los planetas,

$$\frac{GM_S M_p}{r^2} = M_p \frac{v^2}{r} \qquad 11.13$$

donde M_S es la masa del Sol y M_p la del planeta. Despejando v^2, tenemos

$$v^2 = \frac{GM_S}{r} \qquad 11.14$$

Como el planeta recorre la distancia $2\pi r$ en el tiempo T, su velocidad está relacionada con el periodo por

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad 11.15$$

Sustituyendo v por esta expresión en la ecuación 11.14, se obtiene

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_S}{r}$$

o sea,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} r^3 \qquad 11.16$$

TERCERA LEY DE KEPLER

La tercera ley de Kepler dada por la ecuación 11.16 equivale a la ecuación 11.2 haciendo $C = 4\pi^2/GM_S$. La ecuación 11.16 se aplica también a las órbitas de los satélites de cualquier planeta, reemplazando la masa del Sol, M_S, por la masa del planeta.

(NASA.)

Ejemplo 11.3 La estación espacial orbital

Póngalo en su contexto

La Estación Espacial Internacional se mueve en una órbita prácticamente circular alrededor de la Tierra, a 385 km por encima de su superficie. En un lugar determinado, calcular cuánto tiempo hay que esperar entre dos avistamientos consecutivos de la estación.

PLANTEAMIENTO Para detectar visualmente la estación, hace falta que sea de noche y que la estación esté por encima del horizonte de nuestro lugar de observación. Por lo tanto, el tiempo mínimo entre dos avistamientos, aproximadamente, coincide con el periodo orbital. Para determinar el periodo orbital, usamos la segunda ley de Newton aplicada a la estación, teniendo en cuenta, además, que distancia es igual a velocidad por tiempo.

SOLUCIÓN

1. El periodo orbital T y la velocidad v para una órbita circular pueden relacionarse con el radio r sabiendo que la distancia es igual a velocidad por tiempo:
$$2\pi r = vT$$

2. Para obtener una segunda ecuación que relacione v y r, aplicamos la segunda ley de Newton a la estación espacial de masa m:
$$F_g = ma$$
$$\frac{GM_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

3. Sustituyendo $2\pi r/T$ en v (a partir del resultado del paso 1), se tiene:
$$\frac{GM_T}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

4. Despejando T^2, obtenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} r^3$$

5. A una altitud $h = 385\,\text{km}$, $r = R_E + h = 6760\,\text{km}$. Sustituyendo $r = R_E + h$ y despejando el periodo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T + h)^3$$

$$= \frac{4\pi^2}{(6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24}\,\text{kg})}(6{,}76 \times 10^6\,\text{m})^3$$

$$= 30{,}56 \times 10^6\,\text{s}^2$$

por tanto, $T = 5528\,\text{s} = \boxed{92{,}1\,\text{min}}$

COMPROBACIÓN Una búsqueda en Internet de "NASA periodo orbital ISS" nos dice que el periodo orbital es de 91,5 min, de forma que el resultado es una buena aproximación.

OBSERVACIÓN La Estación Espacial Internacional se mueve en una órbita casi circular que está inclinada unos 52° con el plano del ecuador. Si la estación está directamente sobre nuestra cabeza en el tiempo t, 92,1 min más tarde volverá a estar sobre una localidad 23,0° hacia el oeste. Por ejemplo, Kansas City está situada 23° al oeste de la ciudad de Nueva York. Si se avista la estación orbital a medianoche en Nueva York, 92,1 minutos más tarde pasará por la vertical de Kansas City.

PROBLEMA PRÁCTICO 11.5 ¿Cuántos grados gira la Tierra durante el tiempo en que la estación orbital da una órbita completa?

PROBLEMA PRÁCTICO 11.6 Determinar el radio de la órbita circular de un satélite que describe una órbita alrededor de la Tierra con un periodo de 1 día.

Si se sabe cuánto vale G mediante el uso de la ecuación 11.16, la medida del periodo T y del radio orbital medio r de un satélite que se mueve alrededor de un objeto astronómico permite determinar su masa. Al establecer la ecuación 11.16, se supuso que la masa del satélite era despreciable con respecto de la masa del objeto central. Esto significa que el objeto central permanecía estacionario mientras que el satélite orbitaba a su alrededor. En realidad, el objeto central y el satélite se mueven alrededor de un punto común, su centro de masas. Si la masa del satélite no es despreciable, el resultado es

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} r^3 \qquad 11.17$$

donde r es la separación entre los centros de ambos. La deducción de la ecuación 11.17 para órbitas circulares se deja para el problema 11.93. (Para órbitas elípticas más generales, el análisis matemático es más complejo, pero el resultado es el mismo; al final, sólo hace falta reemplazar r por el promedio entre las distancias máximas y mínimas entre los centros de los objetos.) Si la masa del satélite no es despreciable, como es el caso de la mayor parte de los sistemas binarios, lo que se determina es sólo la suma de las masas, como aparece explícitamente señalado en la ecuación 11.17. La Luna y algunos planetas, como Mercurio y Venus, no tienen satélites naturales, por lo que sus masas no fueron bien conocidas hasta los años 60, cuando se colocaron satélites artificiales en órbita a su alrededor.

PROBLEMA PRÁCTICO 11.7
Phobos, el satélite de Marte, tiene un periodo de 460 min y un radio orbital medio de 9400 km. ¿Cuál es la masa de Marte?

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 11.3

La primera ley de Kepler dice que todos los planetas siguen órbitas elípticas alrededor del Sol con éste en uno de los focos. Newton infirió a partir de la primera ley de Kepler que todos los planetas son atraídos hacia el centro del Sol por fuerzas que varían inversamente con el cuadrado de la distancia. ¿Qué le hizo llegar a esa conclusión?

11.3 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

En las proximidades de la superficie terrestre, la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre un objeto es constante, ya que la distancia al centro de la Tierra es $r = R_T + h$, y se puede considerar que $h << R_T$. La energía potencial de un objeto próximo a la superficie terrestre es $mgh = mg(r - R_T)$, asignando el valor $U = 0$ en la superficie de la Tierra y siendo $r = R_T$. Si estamos lejos de la superficie de la Tierra, debemos tener en cuenta el hecho de que la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra no es constante sino que disminuye con la distancia en la forma $1/r^2$. La definición general de la energía potencial (ecuación 7.1) es

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre una partícula y $d\vec{\ell}$ es el desplazamiento general de la partícula. Para la fuerza gravitatoria radial $\vec{F}_g$ dada por la ecuación 11.6 (figura 11.9), tenemos

$$dU = -\vec{F}_g \cdot d\vec{\ell} = -(-F_g \hat{r}) \cdot d\vec{\ell} = F_g \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = \frac{GM_T m}{r^2} dr \qquad 11.18$$

donde hemos utilizado $\vec{F}_g = -F_g \hat{r}$ y $\hat{r} \cdot d\vec{\ell} = d\ell \cos\phi = dr$. Integrando ambos miembros de esta ecuación, resulta

$$U = GM_T m \int r^{-2}\, dr = -\frac{GM_T m}{r} + U_0 \qquad 11.19$$

donde U_0 es una constante de integración. La expresión para U es más sencilla si se toma $U_0 = 0$. Entonces

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \qquad 11.20$$

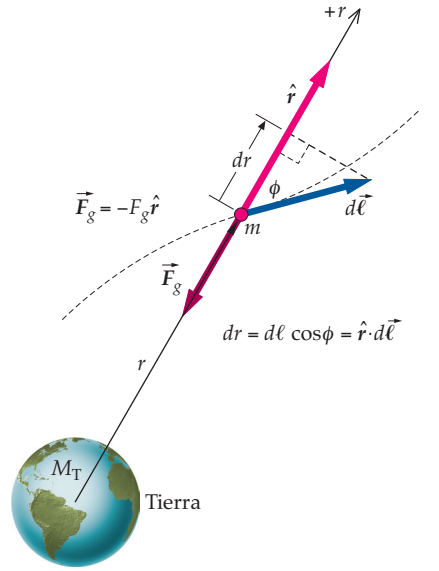


FIGURA 11.9 La distancia r de la partícula a la Tierra crece en un dr cuando la partícula se desplaza un $d\vec{\ell}$. En la figura, la longitud del $d\vec{\ell}$ se ha exagerado.

Entonces, si elegimos U_0 igual a cero quiere decir que U tiende a cero conforme r tiende a infinito. A primera vista puede parecer una elección extraña porque para valores finitos de r todos los valores de U son negativos. Sin embargo, esto sólo significa que la energía potencial es máxima cuando la Tierra y la partícula están separadas una distancia infinita. Una energía potencial negativa no es nada nuevo. Cuando utilizamos $U = mgh$, donde h es la altura respecto a un punto de referencia de una mesa, la energía potencial es negativa cuando la partícula se encuentra a una altura que está por debajo del nivel de la mesa. Esto refleja que cuando la partícula está a una altura por debajo del nivel de la mesa su energía potencial es menor que cuando está al nivel de la mesa.

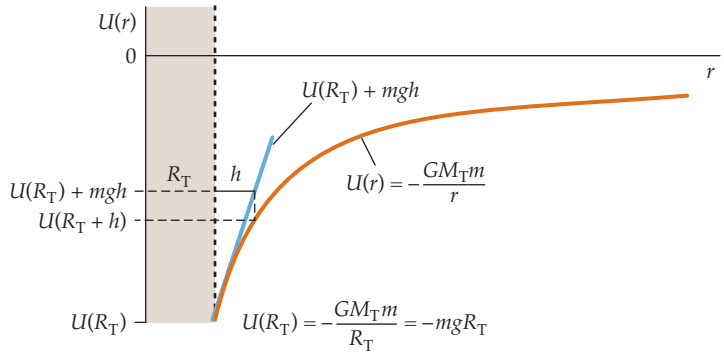


FIGURA 11.10

La figura 11.10 es un gráfico de $U(r)$ en función de r para $U(r) = -GM_T m/r$ con $R_T \leq r < \infty$. Esta función comienza con el valor negativo $U = -GM_T\, m/R_T = -mgR_T$ en la superficie de la Tierra y crece cuando r aumenta, aproximándose al valor cero para r infinito. La pendiente de esta curva en $r = R_T$ es $GM_T m/R_T^2 = mg$, de modo que la ecuación de la recta tangente, trazada en azul, es $f(h) = U(R_T) + mgh$, donde $h = r - R_T$ es la distancia por encima de la superficie de la Tierra. De la figura se desprende que para h pequeña, $U(R_T) + mgh \approx U(r)$.

VELOCIDAD DE ESCAPE

Desde mediados de los años 50, la idea de escapar del campo gravitatorio terrestre ha pasado de la fantasía a la realidad. Sondas espaciales han sido enviadas a los puntos más alejados del sistema solar. Algunas de estas sondas acabarán girando alrededor del Sol, mientras que otras abandonarán el sistema solar y se perderán en el espacio exterior. En esta sección, veremos que existe una velocidad inicial mínima llamada **velocidad de escape** que es la necesaria para que un cuerpo escape de la Tierra.

Si lanzamos un cuerpo hacia arriba desde la Tierra con cierta energía cinética inicial, a medida que el cuerpo asciende, la energía cinética disminuye y la energía potencial crece. El máximo incremento de energía potencial es GM_Tm/R_T. Por lo tanto, este valor es el mismo que puede decrecer la energía cinética. Si la energía cinética inicial es mayor que GM_Tm/R_T, la energía total E será mayor que cero (E_2 en la figura 11.11) y el cuerpo todavía tendrá cierta energía cinética cuando r sea muy grande (o incluso cuando r sea infinito). Así, el cuerpo escapará de la Tierra si la energía cinética inicial es mayor que GM_Tm/R_T. Como la energía potencial en la superficie de la Tierra es $-GM_Tm/R_T$, la energía total $E = K + U$ debe ser mayor o igual que cero para que el cuerpo escape. La velocidad del cuerpo próximo a la superficie terrestre, correspondiente a una energía total cero se denomina velocidad de escape v_e. Puede determinarse a partir de

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}$$

de modo que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \qquad 11.21$$

VELOCIDAD DE ESCAPE

(NASA.)

Entonces, tomando los valores $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$, $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}\,\text{kg}$, y $R_T = 6{,}37 \times 10^6\,\text{m}$, se obtiene

$$v_e = \sqrt{2(9{,}81\,\text{m/s}^2)(6{,}37 \times 10^6\,\text{m})} = 11{,}2\,\text{km/s}$$

Un cuerpo con esta velocidad escapará de la gravedad Tierra. Sin embargo, no escapará del sistema solar, pues hemos despreciado la atracción gravitatoria del Sol y otros planetas (ver problema 50).

La velocidad de escape de un planeta o satélite respecto a las velocidades térmicas de las moléculas de un gas determina el tipo de atmósfera que el planeta o satélite puede tener. La energía cinética media de las moléculas del gas, $(\frac{1}{2}mv^2)_m$, es proporcional a la temperatura absoluta T (capítulo 18). En la superficie de la Tierra, las velocidades moleculares del oxígeno y nitrógeno son muy inferiores a la velocidad de escape y, por ello, estos gases permanecen en nuestra atmósfera. En cambio, las moléculas más ligeras de hidrógeno y helio poseen en su mayor parte velocidades superiores a la de escape; por ello, estos gases no se encuentran en nuestra atmósfera. La velocidad de escape en la atmósfera de la Luna puede calcularse mediante la ecuación 11.21, utilizando la masa y el radio de la Luna para reemplazar M_T y R_T. La velocidad de escape para la Luna es de 2,3 km/s, muy inferior a la de la Tierra y demasiado pequeña para que pueda existir allí ningún tipo de atmósfera.

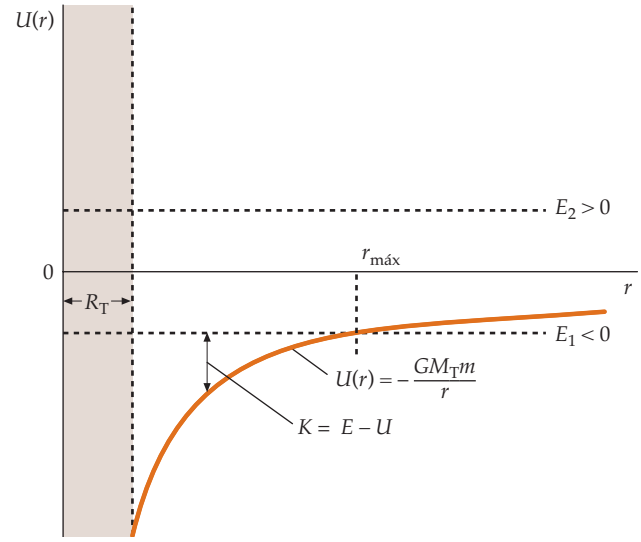


FIGURA 11.11 La energía cinética de un cuerpo a la distancia r del centro de la Tierra es $E - U(r)$. Cuando la energía total es menor que cero (E_1 en la figura), la energía cinética es cero para $r = r_{máx}$ y el cuerpo está ligado a la Tierra. Cuando la energía total es mayor que cero (E_2 en la figura), el cuerpo puede escapar de la Tierra.

PROBLEMA PRÁCTICO 11.8

Determinar la velocidad de escape en la superficie de Mercurio, cuya masa es $M = 3{,}31 \times 10^{23}$ kg y cuyo radio es $R = 2440$ km.

CLASIFICACIÓN ENERGÉTICA DE LAS ÓRBITAS

En la figura 11.11, se muestran dos valores posibles de la energía total E sobre un gráfico de U en función de r: E_1, que es negativa, y E_2, positiva. Una energía total negativa significa simplemente que la energía cinética en la superficie de la Tierra es menor que GM_Tm/R_T, de modo que $K + U$ nunca es mayor que cero. En general, a

partir de esta figura podemos ver que cuando la energía total de un sistema es negativa, la línea de energía total corta a la curva de energía potencial a cierta distancia máxima $r_{máx}$ y el sistema está ligado. Por otra parte, cuando la energía total es positiva o cero, entonces no se cortan ambas líneas y el sistema no está ligado. Los criterios para los sistemas ligados y no ligados pueden resumirse del modo siguiente:

Si $E < 0$, el sistema es ligado.

Si $E \geq 0$, el sistema es no ligado.

Cuando E es negativa, su valor absoluto $|E|$ se denomina *energía de enlace*. La energía de enlace es, por lo tanto, la energía que debe añadirse al sistema para que la energía total sea cero.

La energía potencial de un objeto, como un planeta o cometa de masa m, a una distancia r del Sol es

$$U(r) = -\frac{GM_S m}{r} \qquad 11.22$$

donde M_S es la masa del Sol. La energía cinética del cuerpo es $\frac{1}{2}mv^2$. Si la energía total, cinética más potencial, es menor que cero, la órbita será una elipse (o circunferencia), y el objeto estará ligado al Sol, de manera que no podrá escapar de su campo gravitatorio. Por otro lado, si la energía total es positiva, la órbita será una hipérbola, lo que significa que el objeto se acercará al Sol, lo rodeará y se alejará para no volver nunca más. Si la energía total es exactamente cero, la trayectoria será una parábola y el objeto también escapará. En resumen, cuando la energía total es cero o positiva, los cuerpos no están ligados al campo gravitatorio del Sol y escapan. Curiosamente, no hay medidas de la energía E de un cometa o de un asteroide que, sin lugar a duda, no sean negativas. Por lo tanto, todos los cuerpos observados de este tipo están ligados al sistema solar.

Ejemplo 11.4 Altura de un proyectil

Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial $v_i = 8$ km/s. Determinar la altura máxima que alcanza despreciando la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO La altura máxima puede determinarse a partir del principio de conservación de la energía.

SOLUCIÓN

1. Aplicar la conservación de la energía mecánica. A la altura máxima, la velocidad es cero. El proyectil se lanza desde la superficie terrestre, luego $r_i = R_T$:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$
$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{r_f} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{r_i}$$
$$0 - \frac{GM_T m}{r_f} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{R_T}$$

2. Multiplicar la ecuación anterior por $-1/(GM_T m)$ y despejar r_f:

$$\frac{1}{r_f} = -\frac{v_i^2}{2GM_T} + \frac{1}{R_T}$$
$$= \frac{-(8000\ \text{m/s})^2}{2(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg})} + \frac{1}{6{,}37 \times 10^6\ \text{m}}$$
$$= 7{,}68 \times 10^{-8}\ \text{m}^{-1}$$
$$\text{por lo tanto,}\quad r_f = 1/(7{,}68 \times 10^{-8}\ \text{m}^{-1}) = 1{,}30 \times 10^7\ \text{m}$$

3. Reemplazar por valores numéricos para determinar r y $h = r - R_T$:

$$h = r_f - R_T = 1{,}30 \times 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \times 10^6\ \text{m} = \boxed{6{,}7 \times 10^6\ \text{m}}$$

COMPROBACIÓN Si g fuese igual a 9,81 m/s^2, entonces la altura máxima h se podría calcular de $mgh = \frac{1}{2}mv_i^2$. Despejando h se tiene que $h = v_i^2/(2g) = (8000\ \text{m/s})^2/(19{,}6\ \text{m/s}^2) = 3{,}3 \times 10^6$ m. Como era de esperar, el resultado del paso 3 da un valor mayor.

OBSERVACIÓN El resultado del paso 3 es un 4,5% mayor que el radio de la Tierra.

Ejemplo 11.5 Velocidad de un proyectil

Inténtelo usted mismo

Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial $v_i = 15$ km/s. Determinar la velocidad del proyectil cuando está muy lejos de la Tierra, despreciando la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Mediante el principio de conservación de la energía es posible determinar la altura máxima. La velocidad inicial de 15 km/s es mayor que la de escape (11,2 km/s), de forma que la energía del proyectil es positiva y retendrá alguna energía cinética cuando esté muy lejos de la Tierra.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Aplicar la conservación de la energía mecánica, teniendo en cuenta que cuando $r_f \to \infty$, $U_f \to 0$.	$\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_Tm}{R_T}$
2. Despejar v_f^2.	$v_f^2 = v_i^2 - \frac{2GM_T}{R_T}$
3. Calcular v_f.	$v_f = \boxed{1{,}0 \times 10^4 \text{ m/s}}$

COMPROBACIÓN La velocidad inicial es ligeramente inferior a la raíz cuadrada de 2 veces la velocidad de escape, de forma que la energía cinética es casi el doble de la que se necesita para escapar con velocidad final cero. Esto significa que la energía cinética final será un poco menor que si el proyectil se moviera con la velocidad de escape. El resultado del apartado 3, 10 km/s, es ligeramente inferior a 11 km/s.

OBSERVACIÓN En la figura 11.12 se representa la velocidad del proyectil en kilómetros por segundo en función de h/R_T, siendo h la altura por encima de la superficie terrestre. Para valores muy grandes de h/R_T, la velocidad se aproxima a la línea horizontal, $v_f = 10$ km/s.

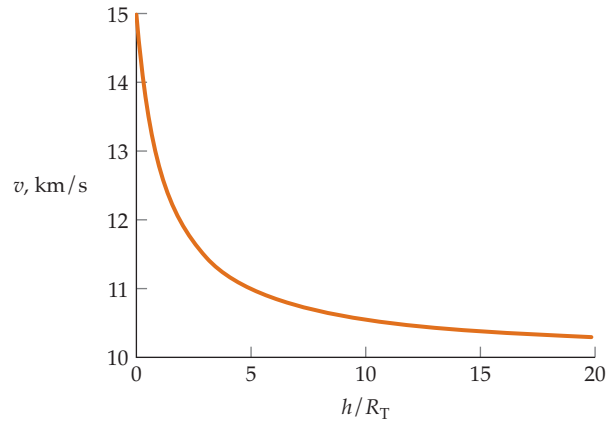


FIGURA 11.12

Ejemplo 11.6 Energía total de un satélite

Demostrar que la energía total de un satélite que describe una órbita circular es igual a la mitad de su energía potencial.

PLANTEAMIENTO La energía total de un satélite en órbita es la suma de su energía potencial y de su energía cinética, $E = U + K$. La segunda ley de Newton nos permite encontrar la velocidad v del satélite en función de su radio orbital r. La energía cinética depende de la velocidad, por lo que podemos determinar la energía cinética en función de r.

SOLUCIÓN

1. Escribir la energía total como la suma de la energía cinética más la energía potencial:
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r}$$

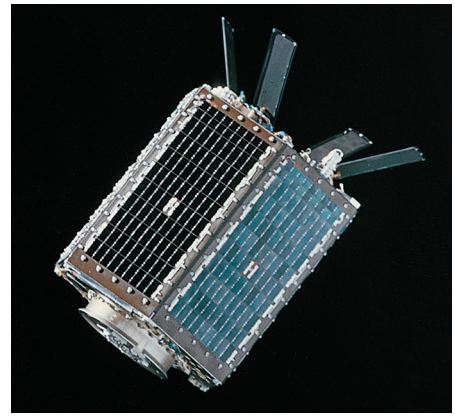
2. Aplicar la segunda ley de Newton al satélite y despejar el cuadrado de la velocidad:
$$F = ma$$
$$\frac{GM_Tm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$
$$\text{por lo tanto,} \quad v^2 = \frac{GM_T}{r}$$

3. Sustituir en el resultado del paso 1 y simplificar:
$$E = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_Tm}{r} = -\frac{GM_Tm}{2r}$$

4. Comparar el resultado del paso 3 con U del paso 1:
$$E = -\frac{GM_Tm}{2r} = \frac{1}{2}\left(-\frac{GM_Tm}{r}\right) = \boxed{\frac{1}{2}U}$$

COMPROBACIÓN $E = K + U$, o bien $K = E - U$. Como K es positivo, significa que E es mayor que U. Como U es negativo, $U/2$ es mayor que U. Entonces, el resultado del paso 4 concuerda con el hecho de que $E > U$.

PROBLEMA PRÁCTICO 11.9 Un satélite de masa 450 kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular situada a 6830 km por encima de su superficie. Hallar (*a*) la energía potencial, (*b*) la energía cinética y (*c*) la energía total del satélite.



(NASA.)

11.4 EL CAMPO GRAVITATORIO

La fuerza gravitatoria ejercida por una masa puntual m_1 sobre una segunda masa m_2 situada a la distancia $r_{1,2}$ viene dada por

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

donde $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ es un vector unitario que apunta de la partícula 1 a la partícula 2. El **campo gravitatorio** en un punto P se determina colocando una partícula puntual de ensayo de masa m en P y calculando la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$ ejercida por el resto de partículas. La fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$ dividida por m se denomina campo gravitatorio $\vec{g}$ en P:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} \qquad 11.23$$

DEFINICIÓN: CAMPO GRAVITATORIO

El punto P se denomina **punto campo**. El campo gravitatorio en un punto debido a un conjunto de masas puntuales es igual a la suma vectorial de los campos debidos a las masas individuales en dicho punto.

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i \qquad 11.24a$$

Los puntos donde están localizadas estas partículas se denominan **puntos fuente**. Para determinar el campo gravitatorio en un punto debido a un cuerpo continuo, se calcula el campo $d\vec{g}$ debido a un pequeño elemento de volumen con masa dm y se integra sobre el cuerpo entero (el conjunto completo de puntos).

$$\vec{g} = \int d\vec{g} \qquad 11.24b$$

El campo gravitatorio de la Tierra a una distancia $r \geq R_T$ está dirigido hacia la Tierra y su módulo $g(r)$ viene dado por

$$g(r) = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_T}{r^2} \qquad 11.25$$

CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

En el siguiente apartado de Estrategia de resolución de problemas y en los dos ejemplos siguientes hay que calcular el campo gravitatorio producido por distribuciones de masa un tanto artificiales. Las presentamos aquí porque las estrategias desarrolladas para hacer los cálculos serán necesarias en otras áreas de la Física. En concreto, serán utilizadas en los capítulos 21 y 22, donde la tarea consistirá en determinar el campo eléctrico producido por distribuciones de carga.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo del campo gravitacional

PLANTEAMIENTO Es crucial hacer un dibujo de la masa o masas descritas en el problema para determinar la localización de los puntos de campo y de los puntos de fuente. Estas localizaciones serán necesarias para encontrar el módulo y la dirección del campo gravitacional.

SOLUCIÓN

1. Hacer un diagrama que describa la situación dada en el enunciado del problema. No olvidar identificar los puntos campo y fuente. Su localización debe ser precisa.
2. Determinar r o la distancia entre el punto de campo y los puntos de fuente. Puede ser necesario el uso de trigonometría o geometría para determinar r.
3. La ecuación $g(r) = GM/r^2$ permite calcular el módulo del campo gravitacional. La dirección se obtiene a partir del diagrama.

COMPROBACIÓN No olvide que el campo gravitacional es un campo vectorial, de forma que sus respuestas deben incluir tanto los módulos como las direcciones.

Ejemplo 11.7 Campo gravitatorio de dos partículas puntuales

Dos partículas, cada una de masa M, están fijas sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$. Determinar el campo gravitatorio en todos los puntos del eje x en función de x.

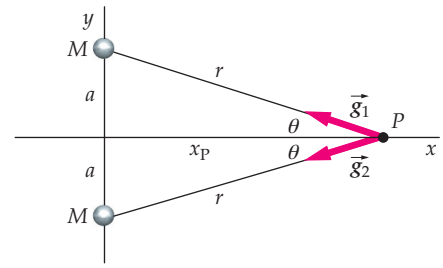


FIGURA 11.13 Cada partícula está localizada en un punto fuente y el punto P es un punto de campo.

PLANTEAMIENTO Hacer un dibujo de las dos partículas y de los ejes de coordenadas (figura 11.13). Dos partículas de masa M producen un campo gravitatorio en el punto P localizado en $x = x_P$. La distancia r entre P y cualquiera de las partículas es $\sqrt{x_P^2 + a^2}$. El campo resultante $\vec{g}$ es la suma vectorial de los campos $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$ debidos a cada una de las masas.

SOLUCIÓN

1. Calcular el módulo de $\vec{g}_1$ y $\vec{g}_2$:
$$g_1 = g_2 = \frac{GM}{r^2}$$

2. La componente y del campo resultante, la suma de g_{1y} y g_{2y}, es cero. La componente x es la suma de g_{1x} y g_{2x}:
$$g_y = g_{1y} + g_{2y} = g_1 \operatorname{sen}\theta - g_2 \operatorname{sen}\theta = 0$$
$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = g_1 \cos\theta + g_2 \cos\theta = 2g_1 \cos\theta = \frac{2GM}{r^2}\cos\theta$$

3. Expresar $\cos\theta$ en función de x_P y r a partir de la figura:
$$\cos\theta = \frac{x_P}{r}$$

4. Combinando los dos últimos resultados, se obtiene $\vec{g}$. Para expresar $\vec{g}$ en función de x_P, sustituir r por $(x_P^2 + a^2)^{1/2}$:
$$\vec{g} = g_x\hat{\imath} = -\frac{2GM}{r^2}\frac{x_P}{r}\hat{\imath} = -\frac{2GMx_P}{r^3}\hat{\imath} = -\frac{2GMx_P}{(x_P^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath}$$

5. x_P es un punto arbitrario del eje x. Para simplificar, reemplazamos x_P por x:
$$\vec{g} = \boxed{-\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{\imath}}$$

COMPROBACIÓN: Si $x < 0$, $\vec{g}$ va en la dirección positiva de x, y si $x > 0$, $\vec{g}$ va en la dirección negativa, como era de esperar. Si $x = 0$, resulta que $\vec{g} = 0$; los campos debidos a las masas m_1 y m_2 son iguales y opuestos en $x = 0$, y por lo tanto se cancelan.

OBSERVACIÓN Para $x \gg a$, $\vec{g} \approx -(2GM/x^2)\hat{\imath}$. El campo es el mismo que si una masa única de valor $2M$ estuviera en el origen.

Ejemplo 11.8 Campo gravitatorio de una barra uniforme

Una barra uniforme de masa M y longitud L está centrada en el origen y apoyada longitudinalmente a lo largo del eje x. Determinar el campo gravitatorio debido a la barra en todos los puntos del eje x que cumplen $x > L/2$.

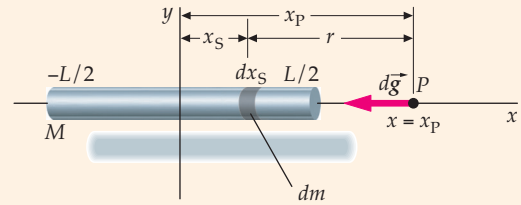


FIGURA 11.14 Todos los puntos sobre el eje x en el intervalo $-L/2 < x < L/2$ son puntos fuente y el punto P es un punto campo.

PLANTEAMIENTO Hacer un dibujo de la barra (figura 11.14). Elegimos un elemento de masa dm de longitud dx_S en $x = x_S$, donde $-L/2 < x_S < L/2$, y elegimos un punto campo P sobre el eje x en $x = x_P$, donde $x_P > L/2$. Cada elemento de masa crea un campo gravitatorio en P que apunta en la dirección negativa de x. Podemos calcular el campo total integrando la componente x del campo producido por dm desde $x = -L/2$ a $x = +L/2$.

SOLUCIÓN

1. Determinar la componente x del campo en P producido por el elemento dm:
$$dg_x = -\frac{G\,dm}{r^2}$$

2. Como la barra es uniforme, la masa por unidad de longitud λ es constante e igual a la masa total dividido por la longitud total. La masa dm de un elemento de longitud dx_S es igual a lambda veces la longitud dx_S:
$$dm = \lambda\,dx \qquad \text{donde} \quad \lambda = \frac{M}{L}$$

3. Expresar la distancia r entre dm y el punto P en función de x_S y x_P:
$$r = x_P - x_S$$

4. Utilizar estos resultados para expresar dg en función de x:
$$dg_x = -\frac{G\,dm}{r^2} = -\frac{G\lambda\,dx_S}{(x_P - x_S)^2}$$

5. Integrar para determinar la componente x del campo total:
$$g_x = \int dg_x = -G\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx_S}{(x_P - x_S)^2} = -\frac{GM}{x_P^2 - (L/2)^2}$$

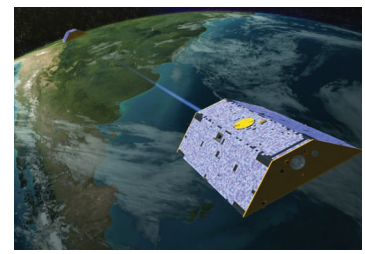
6. Expresar el campo resultante en forma vectorial:
$$\vec{g} = g_x\hat{\imath} = -\frac{GM}{x_P^2 - (L/2)^2}\hat{\imath}$$

7. x_P es un punto arbitrario en la región del eje x si $x > L/2$, por lo que lo podemos reemplazar por x:
$$\vec{g} = \boxed{-\frac{GM}{x^2 - (L/2)^2}\hat{\imath} \qquad x > L/2}$$

COMPROBACIÓN Para $x >> L/2$, el resultado se aproxima al campo de una masa puntual de masa M, $\vec{g} = -(GM/x^2)\hat{\imath}$.

Ejemplo 11.9 Un mapa de la gravedad terrestre *Conceptual*

Dos satélites gemelos, lanzados en marzo de 2002, se encargan de hacer mediciones de la gravedad de la Tierra con una precisión elevada. Ambos están en órbitas idénticas pero uno frente al otro y separados una distancia de unos 220 km. La distancia entre ellos está continuamente monitorizada con una precisión de un micrómetro mediante un equipo de telemetría de microondas. ¿Cómo cambia la distancia entre los dos satélites cuando ambos se acercan a una región de mayor masa?



Satélites gemelos que monitorizan la distancia entre ellos y miden variaciones del campo gravitacional de la Tierra. *(NASA and DLR under the NASA Earth System Science Pathfinder Program.)*

PLANTEAMIENTO La variación de la intensidad del campo gravitacional terrestre se debe a que la masa de la Tierra no está distribuida de manera uniforme. Por ejemplo, las rocas son más densas que el agua, por lo que el campo gravitacional será mayor en regiones cubiertas por rocas que en regiones cubiertas por agua.

SOLUCIÓN

Conforme los satélites se acercan a la región con exceso de masa, la intensidad del campo gravitacional aumenta debido a que aumenta la fuerza de atracción. Como consecuencia de ello, el satélite que llega primero y se encuentra más cerca del exceso de masa, aumentará de velocidad más rápidamente que el satélite que queda más apartado. Esto se traducirá en un aumento de la distancia que los separa. Por tanto, la distancia que los separa aumentará cuando se acerquen a una zona con mayor intensidad gravitacional y disminuirá en caso contrario.

La distancia entre ellos aumentará.

OBSERVACIÓN Un mapa del campo gravitacional es también un mapa de la distribución de masa tanto en la superficie terrestre como por debajo de ella. Así, por ejemplo, la acumulación de agua en el Pacífico oeste durante *El Niño* se puede detectar mediante satélites gemelos. Los mapas gravitacionales también pueden proporcionar información útil para localizar recursos subterráneos como petróleo o agua.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 11.4

Cuando dos satélites gemelos pasan por encima de una región de mayor masa con el satélite que va primero alejándose de la región y el segundo entrando en la región, ¿cambia la distancia entre ellos? En caso afirmativo, ¿aumentará o disminuirá?

$\vec{g}$ DE UNA CORTEZA ESFÉRICA Y DE UNA ESFERA SÓLIDA

Una de las motivaciones que tuvo Newton para desarrollar el cálculo diferencial fue la de poder demostrar que el campo gravitatorio en un punto exterior de una esfera maciza es el mismo que se obtendría si toda la masa de la esfera estuviese concentrada en su centro. Esto lo demostraremos en la sección 11.5. Aquí, sólo analizaremos los resultados de esta demostración. Consideremos primero una corteza esférica uniforme de masa M y radio R (figura 11.15). Vamos a demostrar que el campo gravitatorio originado por la corteza a distancia r de su centro viene dado por

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad r > R \qquad 11.26a$$

$$\vec{g} = 0 \qquad r < R \qquad 11.26b$$

CAMPO GRAVITATORIO DE UNA CORTEZA ESFÉRICA

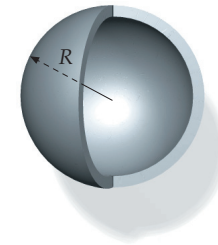


FIGURA 11.15 Corteza esférica uniforme de masa M y radio R.

De la figura 11.16, donde se muestra una masa puntual m_0 dentro de una corteza esférica uniforme, se puede entender el resultado de que $\vec{g} = 0$ en el interior de la corteza. En esta figura, los segmentos de la corteza con masas m_1 y m_2 son proporcionales a las áreas A_1 y A_2, respectivamente, y las áreas son proporcionales a los cuadrados de los radios r_1 y r_2, respectivamente. Así,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \qquad \text{por tanto,} \qquad \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

Como la fuerza debida a cada masa decrece inversamente al cuadrado de la distancia, la fuerza sobre m_0 debida a la masa más pequeña situada a la izquierda es equilibrada exactamente por la debida a la más distante y de mayor masa situada a la derecha.

El campo gravitatorio en el exterior de una esfera sólida es una simple extensión de la ecuación 11.26*a*. Basta considerar que la esfera sólida está compuesta por un conjunto continuo de cortezas esféricas. Como el campo debido a cada una de las cortezas es el mismo que si toda su masa estuviera concentrada en el centro, el campo debido a la esfera completa es igual al que se origina si la totalidad de su masa estuviese concentrada es su centro:

$$g_r = -\frac{GM}{r^2} \qquad r > R \qquad 11.27$$

Este resultado es válido aunque la densidad de la esfera no sea constante, con tal de que la densidad dependa únicamente de r.

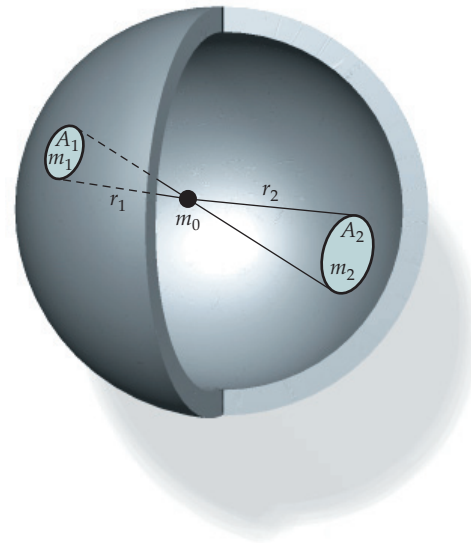


FIGURA 11.16 Una masa puntual m_0 en el interior de una corteza esférica uniforme no aprecia ninguna fuerza neta.

$\vec{g}$ EN EL INTERIOR DE UNA ESFERA SÓLIDA

Utilizaremos ahora las ecuaciones 11.26*a* y 11.26*b* para determinar el campo gravitatorio en el interior de una esfera sólida de densidad constante en un punto a una distancia r del centro, donde r es menor que el radio R de la esfera. Esto se aplicaría, por ejemplo, al caso de que fuese necesario encontrar el peso de un objeto situado en el fondo del pozo de una mina muy profunda. Como hemos visto, el campo en el interior de una corteza esférica es cero. Así pues, en la figura 11.17 la masa de la porción de esfera exterior a r no ejerce ninguna fuerza en su interior. Por consiguiente, sólo la masa M' dentro del radio r contribuye al campo gravitatorio en r.

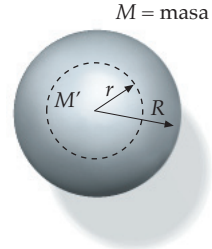


FIGURA 11.17 Esfera sólida uniforme de radio R y masa M. Sólo la masa M', contenida en el interior de la esfera de radio r, contribuye al campo gravitatorio que se ejerce a la distancia r.

Esta masa produce un campo igual al de una masa puntual M' situada en el centro de la esfera. Para una esfera uniforme, la fracción de la masa total de la esfera que está dentro de r es igual al cociente entre el volumen de una esfera de radio r y el de una esfera de radio R. Por lo tanto, si M es la masa total de la esfera, M' vendrá dada por

$$M' = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{r^3}{R^3} M \qquad 11.28$$

El campo gravitatorio a la distancia r es, por lo tanto,

$$g_r = -\frac{GM'}{r^2} = -\frac{GM}{r^2}\frac{r^3}{R^3} \qquad r \le R$$

o sea,

$$g_r = -\frac{GM}{R^3} r \qquad r \le R \qquad 11.29$$

El valor del campo aumenta linealmente con la distancia r en el interior de la esfera uniforme. La figura 11.18 muestra una gráfica del campo g_r en función de r para una esfera maciza de densidad constante.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Geometría**

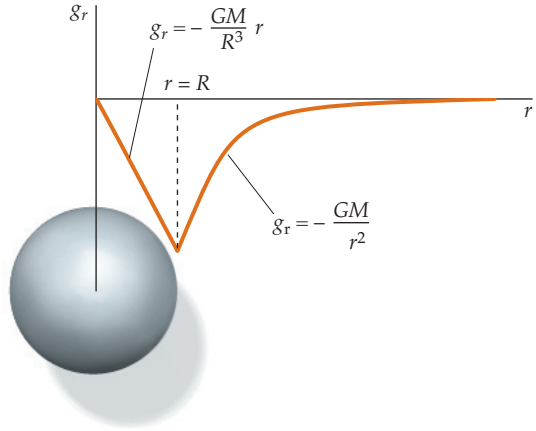


FIGURA 11.18 Gráfico de g_r en función de r para una esfera sólida de masa M. El módulo del campo gravitatorio crece linealmente con r dentro de la esfera y decrece como $1/r^2$ fuera de la esfera.

Ejemplo 11.10 Un planeta vacío

Un planeta, cuyo núcleo está vacío, consiste en una corteza esférica gruesa de masa M, de radio exterior R y de radio interior $R/2$. (*a*) ¿Qué masa hay entre el centro del planeta y $\frac{3}{4}R$? (*b*) ¿Cuál es el campo gravitatorio a una distancia $\frac{3}{4}R$ del centro?

PLANTEAMIENTO La masa M' de la corteza que dista del centro menos de $\frac{3}{4}R$ es igual al producto de la densidad por el volumen de la corteza de radio exterior $\frac{3}{4}R$ y radio interior $\frac{1}{2}R$. Primero hay que determinar la densidad y el volumen, y después calcular la masa. El campo gravitatorio en $r = \frac{3}{4}R$ únicamente se debe a la masa que está entre esta distancia y el centro del planeta.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La masa M' (la masa de la corteza con radio externo $\frac{3}{4}R$ y radio interno $\frac{1}{2}R$) es la densidad ρ por el volumen V':

$$M' = \rho V'$$

2. La densidad es la masa M dividida por el volumen V:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}R)^3} = \frac{M}{\frac{7}{6}\pi R^3} = \frac{6M}{7\pi R^3}$$

3. Determinar el volumen V' de la corteza con radio externo $\frac{3}{4}R$ y radio interno $\frac{1}{2}R$:

$$V' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3R}{4}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{19}{48}\pi R^3$$

4. Determinar la masa M':

$$M' = \rho V' = \frac{6M}{7\pi R^3}\frac{19}{48}\pi R^3 = \boxed{\frac{19}{56}M}$$

(*b*) El campo gravitatorio en $r = \frac{3}{4}R$ lo produce únicamente la masa M':

$$\vec{g} = -\frac{GM'}{r^2}\hat{r} = -\frac{G\frac{19}{56}M}{(\frac{3}{4}R)^2}\hat{r} = \boxed{-\frac{38}{63}\frac{GM}{R^2}\hat{r}}$$

COMPROBACIÓN El volumen V' (paso 3) es menor que $V/2$, de forma que es de esperar que M' sea menor que $M/2$. El resultado del paso 4 así lo corrobora.

Ejemplo 11.11 Densidad que depende del radio

Una esfera sólida de radio R y masa M es esféricamente simétrica, pero no uniforme. La densidad r, definida como su masa por unidad de volumen, es proporcional a la distancia r medida desde el centro para $r \leq R$. Es decir, $\rho = Cr$ para $r \leq R$, donde C es una constante. (*a*) Determinar C. (*b*) Determinar $\vec{g}$ para $r \geq R$. (*c*) Determinar $\vec{g}$ para $r = \frac{1}{2}R$.

PLANTEAMIENTO (*a*) Podemos determinar C integrando la densidad para todo el volumen de la esfera e igualando el resultado con M. Para un volumen elemental, tomar una corteza esférica de radio r y espesor dr (figura 11.19). Su volumen es $4\pi r^2\,dr$ y su masa $dM = \rho\,dV = Cr\,(4\pi r^2\,dr)$. (*b*) El campo para $r \geq R$ es el mismo que si la masa total M estuviera en el centro de la esfera. (*c*) El campo en $r = \frac{1}{2}R$ es el mismo que si la masa M' estuviera en el centro de la esfera, donde M' es la masa dentro de la esfera de radio $\frac{1}{2}R$. La masa entre $r = \frac{1}{2}R$ y $r = R$ produce un campo cero en $r = \frac{1}{2}R$.

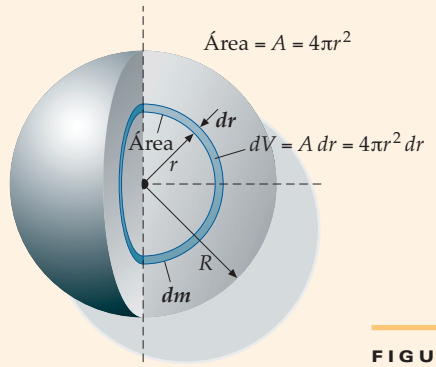


FIGURA 11.19

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Integrar $dM = \rho\,dV$ para relacionar C con la masa M, donde $dV = 4\pi r^2\,dr$. ($4\pi r^2$ es el área de una esfera de radio r, luego $4\pi r^2\,dr$ es el volumen de una corteza esférica de radio r y grosor dr):

$$M = \int dM = \int \rho\,dV$$
$$= \int_0^R Cr(4\pi r^2\,dr) = C\pi R^4$$

2. Despejar C en función de M y de R:

$$C = \boxed{\frac{M}{\pi R^4}}$$

(*b*) Escribir una expresión para el campo en el exterior de la esfera en función de la masa M, de la distancia del centro r y del vector unitario $\hat{\boldsymbol{r}}$ orientado en la dirección creciente de r:

$$\vec{g} = \boxed{-\frac{GM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}} \quad (r > R)$$

(*c*) 1. Calcular la masa M' que hay en el interior del radio $\frac{1}{2}R$ integrando $dm = \rho\,dV$ desde $r = 0$ hasta $r = \frac{1}{2}R$, y usar el valor de C calculado en el paso 2 del apartado (*a*):

$$M' = \int \rho\,dV = \int_0^{R/2} Cr(4\pi r^2\,dr) = C\pi R^4/16$$
$$M' = \frac{M}{16}$$

2. Escribir una expresión para el campo en $r = \frac{1}{2}R$ en función de M y R:

$$\vec{g} = -\frac{GM'}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \boxed{-\frac{GM}{4R^2}\hat{\boldsymbol{r}} \quad \text{en} \quad r = \tfrac{1}{2}R}$$

COMPROBACIÓN En una esfera uniforme, la ecuación 11.29 nos da el valor $g_r = -GM/(2R^2)$ para el campo en $r = \frac{1}{2}R$, que es el doble del resultado del apartado (*c*) del ejemplo. Este resultado era de esperar, ya que una esfera uniforme tiene una fracción mayor de su masa total en la región $0 < r < \frac{1}{2}R$ que una esfera como la del ejemplo 11.11.

OBSERVACIÓN Las unidades para C son kg/m^4, por lo que las unidades de ρ son kg/m^3, que corresponden a masa por unidad de volumen.

* 11.5 CÁLCULO DE LA ECUACIÓN CORRESPONDIENTE AL CAMPO GRAVITATORIO DE UNA CORTEZA ESFÉRICA POR INTEGRACIÓN

Obtendremos la ecuación correspondiente al campo gravitatorio de una corteza esférica en dos pasos. En primer lugar, determinaremos el campo gravitatorio sobre el eje de un anillo de masa uniforme. Aplicaremos luego el resultado obtenido a una corteza esférica, que podemos considerar como un conjunto de anillos coaxiales.

En la figura 11.20, se muestra un anillo de masa total m y radio a y un punto P sobre el eje, a una distancia x de su centro. Escogemos un elemento de masa dm sobre el anillo, suficientemente pequeño para considerarlo como una partícula elemental. La distancia de este elemento a P es s y la línea recta que une el elemento con P forma un ángulo α con el eje del anillo.

El campo en P, debido al elemento dm, está dirigido hacia él y su módulo dg viene dado por

$$dg = \frac{G\,dm}{s^2}$$

A partir de la simetría de la figura, podemos ver que al sumar respecto a todos los elementos del anillo, el campo neto estará dirigido a lo largo de su eje; es decir, la suma de todas las componentes elementales perpendiculares de $\vec{g}$ al eje x es nula. Por ejemplo, la componente perpendicular del campo elemental indicado en la figura será equilibrada por la componente debida al elemento del anillo directamente opuesto al indicado. Por lo tanto, el campo neto tendrá el sentido de las x negativas. La componente x del campo debida al elemento dm es

$$dg_x = -dg\cos\alpha = -\frac{G\,dm}{s^2}\cos\alpha$$

Se obtiene el campo total sumando respecto a todos los elementos del anillo:

$$g_x = -\int \frac{G\cos\alpha}{s^2}\,dm$$

Como s y α tienen el mismo valor para todos los puntos del anillo, son constantes en cuanto a la integración se refiere. Así pues,

$$g_x = -\frac{G\cos\alpha}{s^2}\int dm = -\frac{Gm}{s^2}\cos\alpha \qquad 11.30$$

donde $m = \int dm$ es la masa total del anillo.

Ahora utilizaremos este resultado para calcular el campo gravitatorio debido a una corteza esférica de masa M y radio R en un punto situado a una distancia r de su centro. En primer lugar, vamos a considerar el caso en que el punto campo P sea exterior a la corteza, como muestra la figura 11.21. Por simetría, el campo debe ser radial. Elegimos como elemento de masa la banda indicada, que puede considerarse como un anillo de masa dM. El campo debido a esta banda viene dado por la ecuación 11.30, donde m se reemplaza por dM:

$$dg_r = -\frac{G\,dM}{s^2}\cos\alpha \qquad 11.31$$

La masa dM es proporcional al área de la banda dA, que es igual al producto de la circunferencia por su anchura. El área de la banda es R sen θ, de modo que la circunferencia es $2\pi R$ sen θ. La anchura es $R\,d\theta$. Si la masa total de la corteza es M, y $A = 4\pi R^2$, la masa de la banda de área dA es

$$dM = \frac{M}{A}\,dA = \frac{M}{4\pi R^2}2\pi R^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}M\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \qquad 11.32$$

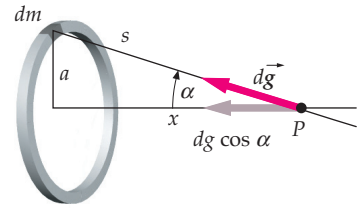


FIGURA 11.20 Campo gravitatorio en un punto P a una distancia x de un anillo uniforme. El campo debido al elemento dm apunta hacia él. El campo total debido al anillo está dirigido a lo largo de su eje.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Integrales

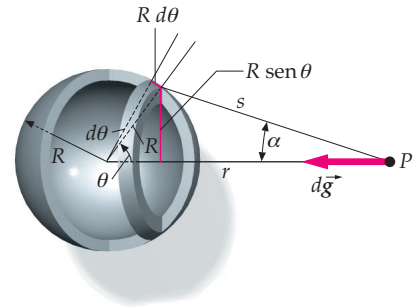


FIGURA 11.21 Corteza esférica uniforme delgada de radio R y masa total M. La banda indicada puede considerarse como un anillo de anchura $R\,d\theta$ y circunferencia $2\pi R$ sen θ.

Aplicando este resultado en la ecuación 11.31, se obtiene

$$dg_r = -\frac{G\,dM}{s^2}\cos\alpha = -\frac{GM\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}{2s^2}\cos\alpha \qquad 11.33$$

Antes de integrar respecto a la corteza completa, hemos de eliminar dos de las tres variables relacionadas entre sí: s, θ y α. Lo más sencillo es escribir todas ellas en función de s. Por la ley de los cosenos, tendremos

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$$

Diferenciando, se tiene

$$2s\,ds = +2rR\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

o bien

$$\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{s\,ds}{rR}$$

Puede obtenerse una expresión para el cos α aplicando la ley de los cosenos al mismo triángulo. Resulta

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\alpha$$

o sea,

$$\cos\alpha = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr}$$

Aplicando estos resultados en la ecuación 11.33, se tiene

$$\begin{aligned} dg_r &= -\frac{GM\,\text{sen}\,\theta\,d\theta}{2s^2}\cos\alpha = -\frac{GM}{2s^2}\left(\frac{s\,ds}{rR}\right)\frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr} \\ &= -\frac{GM\,ds}{4s^2r^2R}(s^2 + r^2 - R^2) = -\frac{GM}{4r^2R}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2}\right)ds \end{aligned} \qquad 11.34$$

Para determinar el campo en P, se integra sobre toda la corteza. Los límites de integración dependen ahora de si el punto P está fuera o dentro de la corteza. Si P está fuera, s varía desde $r - R$ ($\theta = 0$) hasta $s = r + R$ ($\theta = 180^\circ$), por lo que el campo debido a la corteza completa se determina integrando desde $s = r - R$ hasta $s = r + R$.

$$g_r = -\frac{GM}{4r^2R}\int_{r-R}^{r+R}\left(1 + \frac{(r - R)(r + R)}{s^2}\right)ds = -\frac{GM}{4r^2R}\left[s - \frac{(r - R)(r + R)}{s}\right]_{r-R}^{r+R}$$

Al sustituir los límites superior e inferior en la expresión entre corchetes resulta un valor de $4R$. Por consiguiente,

$$g_r = -\frac{GM}{r^2} \qquad \text{para} \quad r > R$$

que es el mismo resultado de la ecuación 11.26*a*.

Si el punto del campo P está contenido dentro de la corteza (figura 11.22), el cálculo es idéntico, excepto que s varía ahora de $R - r$ a $R + r$. Así,

$$g_r = -\frac{GM}{4r^2R}\left[s - \frac{(r - R)(r + R)}{s}\right]_{R-r}^{R+r}$$

que al sustituir los límites superior e inferior da cero. Por consiguiente,

$$g_r = 0 \qquad \text{para} \quad r < R$$

que es la ecuación 11.26*b*.

Una aplicación de estos resultados para calcular el campo gravitacional debido a una corteza esférica de grosor finito se ve en el problema 11.99.

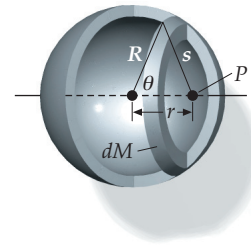


FIGURA 11.22

Temas de actualidad en Física

Lentes gravitacionales: una ventana abierta al universo

En 1919, Arthur Eddintong tomó unas fotografías durante un eclipse solar que mostraban unas estrellas en posiciones que no les correspondían. La luz solar había sido curvada por el Sol. Esto verificaba una predicción esencial de la teoría de la relatividad general de Einstein de 1915 que decía que los objetos de gran masa curvaban el espacio. El grado de curvatura del espacio depende de la masa del objeto.

La luz curvada fue una mera curiosidad durante muchos años. Años más tarde, muchos astrónomos empezaron a estudiar los quasars y otros objetos estelares que emitían más luz que la mayoría de las galaxias. En 1979, fueron vistas imágenes gemelas de un quasar muy lejano. Esas imágenes se habían formado cuando la luz procedente del quasar fue curvada por un cúmulo de galaxias[1] que se hallaban entre el quasar y la Tierra.

Las manchas centrales de color rojizo/blanco son galaxias elípticas gigantes y la luz azul que rodea esas manchas proceden de galaxias que están justo detrás de las galaxias elípticas pero dos veces más lejos. La luz procedente de las galaxias más lejanas es distorsionada formando círculos a causa del campo gravitacional de las galaxias elípticas gigantes. *(NASA, ESA, A. Bolton (Harvard-Smithsonian CfA), & the SLACS Team.)*

Los cúmulos de galaxias son objetos de gran masa. El espacio que hay a su alrededor se curva, así como la luz procedente de objetos distantes en su camino a través de los cúmulos o muy cerca de ellos hacia la Tierra. La región de espacio curvo cercano al objeto masivo se denomina *lente gravitacional*. Las lentes gravitacionales pueden hacer más brillante la luz procedente de objetos distantes, al igual que sucede cuando la luz pasa a través de una gota de agua. Las lentes gravitacionales se utilizan para estudiar quasars y galaxias muy distantes. Como las lentes magnifican la luz débil, pueden ayudar a determinar la edad y la expansión del universo.[2]

Los cálculos que utilizan lentes gravitacionales se basan en imágenes de objetos distantes. Para conseguir una descripción precisa de un objeto, se necesita determinar la distancia, la masa y la forma de las lentes gravitacionales que intervienen. Una lente constituida por una masa circular uniforme situada entre un objeto distante y la Tierra crearía una imagen circular uniforme llamada *anillo de Einstein* cuyos valores serían fáciles de calcular.[3,4] Sin embargo, las lentes gravitacionales crean múltiples[5] y extrañas imágenes distorsionadas con mucha mayor frecuencia que cuando crean anillos perfectos. Las lentes más fuertes están formadas por cúmulos de galaxias.[6] Esas galaxias son difíciles de modelizar y la energía detectable no es capaz de dar cuenta de toda la distorsión que producen. Los cálculos sugieren que las galaxias tienen un gran halo de masa indetectable. Las lentes gravitacionales confirman, por tanto, que la mayor parte de la masa del universo es *materia oscura*, materia que no emite energía detectable[7,8]

Las lentes débiles, o *microlentes*, no crean imágenes múltiples de los objetos distantes sino que mejoran la imagen de objetos conocidos durante un breve periodo de tiempo. Este tipo de lentes están formadas por objetos macizos de halo compacto (macho) que pasan entre la Tierra y el objeto conocido.[9] Los cambios en el brillo revelan mucha información sobre la forma y masa del macho. Una estrella designada como microlente fue una enana roja que era orbitada por uno de los planetas más pequeños de fuera de nuestro sistema solar.[10]

Las lentes gravitacionales han permitido descubrir desde galaxias[11] creadas al menos mil millones de años después del origen del universo hasta los objetos más pequeños conocidos fuera del sistema solar. Estas lentes han dado respuesta a preguntas sobre la energía y la materia del universo, e incluso permiten medir cosas que aún no han sido vistas.

---

1 Walsh, D., Carswell, R. F., and Weymann, R.J., "0957 + 561 A, B - Twin Quasistellar Objects or Gravitational Lens," *Nature*, May 31, 1979, Vol. 279, 381–384.
2 Irion, R., "Through a Lens, Deeply," *Science*, Jan. 24, 2003, Vol 299, 500+.
3 Greene, Katie, "Ring Around the Galaxy," *Science News*, Nov. 25, 2005, 342.
4 Liu, C., "The Quest for the Golden Lens," *Natural History*, Sept. 2003, 64–66.
5 Rusin, D., Kochanek, C. S., Norbury, M., Falco, E. E., Impey, C. D., Lehár, J., McLeod, B. A., Rix, H.-W., Keeton, C. R., Muñoz, J. A., and Peng, C. Y., "B1359+154: A Six-Image Lens Produced by a $z \simeq 1$ Compact Group of Galaxies," *Astrophysical Journal*, Aug. 20, 2001, Vol. 557, 594–604.
6 Abell, G. O., Corwin, H. G., and Olowin, R. P., 1989, *A Catalog of Rich Clusters of Galaxies*, The Astrophysical Journal Supplement Series, 1989, Vol. 70, 1–138.
7 Koopmans, L.V.E., and Blandford, R. D., "Gravitational Lenses," *Physics Today*, June 2004, 45–51.
8 Seife, Charles, "The Intelligent Noncosmologist's Guide to Spacetime," *Science*, May 2002, Vol. 296, 1418–1421.
9 Mancini, L., Jetzer, Ph., and Scarpetta, G., "Compact Dark Objects and Gravitational Microlensing towards the Large Magellanic Cloud," in *Highlights in Condensed Matter Physics*, A. Avella et al., eds. New York: American Institute of Physics, 2003, 339–347.
10 Cowan, Ron, "Tiny Planet Orbits Faraway Star," *Science News*, Feb. 25, 2006, 126.
11 Cowan, Ron, "A Galaxy that Goes the Distance?" *Science News*, Apr. 24, 2004, 270.

Resumen

1. Las leyes de Kepler son observaciones *empíricas*. También se pueden deducir a partir de las leyes de Newton del movimiento y de la ley de la gravedad de Newton.
2. La ley de la gravitación de Newton es una *ley fundamental* de la Física y G es una constante universal.
3. La energía potencial gravitatoria de un sistema de dos masas, relativa a $U = 0$ a una separación infinita, viene dada por $U = -Gm_1m_2/r$. Si el sistema está ligado, su energía total es negativa.
4. El campo gravitatorio es un concepto *físico fundamental* que describe el estado impuesto en el espacio por una distribución de masa.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Las tres leyes de Kepler	Ley 1. Todos los planetas se mueven recorriendo órbitas elípticas estando situado el Sol en uno de sus focos.
	Ley 2. Toda línea que une un planeta cualquiera con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.
	Ley 3. El cuadrado del periodo de un planeta cualquiera es proporcional al cubo de su distancia media al Sol: $$T^2 = Cr^3 \quad (11.2)$$ donde C tiene el mismo valor para todos los planetas; según la ley de gravitación de Newton, C vale $4\pi^2/[G(M_S + M_p)]$. Si $M_S \gg M_p$, esta ley puede expresarse por $$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S}r^3 \quad (11.16)$$ Las leyes de Kepler pueden obtenerse a partir de la ley de Newton de la gravedad. Las leyes primera y tercera resultan del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre los planetas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa a cada planeta del Sol. La segunda ley se deduce del hecho de que la fuerza ejercida por el Sol sobre un planeta tiene la dirección de la recta que los une y, por lo tanto, se conserva el momento angular orbital del planeta. Las leyes de Kepler son válidas también para cualquier cuerpo que gire en órbita alrededor de otro y obedezca a un campo que sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, como ocurre con todo satélite que gira alrededor de un planeta.
2. Ley de gravitación de Newton	Toda partícula puntual ejerce una fuerza atractiva sobre cualquier otra partícula puntual que es proporcional al producto de las masas de ambas partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa: $$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \quad (11.3)$$
Constante de gravitación universal	$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \quad (11.4)$$
3. Energía potencial gravitatoria	La energía potencial gravitatoria U de un sistema compuesto por una partícula de masa m situada fuera de un objeto con simetría esférica de masa M a una distancia r del centro es $$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (11.20)$$ Cuando r se aproxima a infinito, esta función energía potencial tiende a cero.
4. Energía mecánica	La energía mecánica E de un sistema compuesto por una partícula de masa m situada fuera de un objeto con simetría esférica de masa M a una distancia r del centro es $$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$
Velocidad de escape	Para un valor determinado de r, se denomina velocidad de escape v_e, a la velocidad de la partícula para la cual $E = 0$. Es decir, si $v = v_e$, $E = 0$.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
5. Clasificación de las órbitas	Si $E < 0$, el sistema está ligado y la órbita es una elipse (o un círculo, que es un tipo de elipse). Si $E \geq 0$, el sistema no está ligado y la órbita es una hipérbola (o una parábola para $E = 0$).	
6. Campo gravitatorio		
Definición	$\vec{g} = \dfrac{\vec{F}_g}{m}$	11.23
Campo gravitatorio terrestre	$\vec{g}(r) = \dfrac{\vec{F}_g}{m} = -\dfrac{GM_T}{r^2}\hat{r} \quad (r \geq R_E)$	11.29
Campo gravitatorio creado por una corteza esférica delgada	Fuera de la corteza, el campo gravitatorio es igual al que se crearía si toda la masa de la corteza estuviera concentrada en el centro. El campo interior a la corteza es cero.	
	$\vec{g} = -\dfrac{GM}{r^2}\hat{r}$ para $r > R$	11.26*a*
	$\vec{g} = 0$ para $r < R$	11.26*b*

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

11.1 Se dice que el astronauta en órbita está en un estado de ingravidez porque tanto él como su lanzadera están en caída libre con la misma aceleración, de tal forma que si el astronauta se colocara sobre una balanza, ésta marcaría cero. Un astronauta en órbita no está en realidad en ingravidez puesto que hemos definido el peso como el módulo de la fuerza gravitacional.

11.2 La masa gravitacional de un objeto es la propiedad responsable de la fuerza gravitacional que este objeto ejerce sobre otros objetos o de la fuerza gravitacional que otro objeto ejerce sobre él. En cambio, la masa inercial de un objeto es una propiedad que indica la resistencia inercial a ser acelerado.

11.3 Utilizando la segunda ley, Newton demostró que una fuerza atractiva que varíe con el inverso del cuadrado de la distancia entre el Sol y un planeta, daría lugar a un movimiento elíptico del planeta alrededor del Sol con éste situado en uno de sus focos.

11.4 La distancia entre los satélites decrece.

Respuestas a los problemas prácticos

11.1 30,1 UA

11.2 Una línea recta con pendiente 1,5

11.3 $8{,}67 \times 10^{-7}$ N

11.4 2640 km

11.5 La Tierra rota 360º en 24 h, de forma que en 1 h la Tierra rota 15º. Debido al movimiento orbital de la Tierra, la dirección del Sol relativa a la Tierra cambia en (1/365,25) rev cada 24 h. Como resultado, la Tierra rota 1 rev en 24 h menos 4 minutos. El tiempo que tarda en dar 1 rev se llama día sideral.

11.6 $r = 6{,}63R_T = 4{,}22 \times 10^7$ m = 26 200 mi. Si este satélite está en órbita alrededor del ecuador y se mueve en la misma dirección que la rotación de la Tierra, respecto a la superficie de la Tierra parece que esté fijo. Muchos satélites están "aparcados" en estas condiciones que se denominan órbitas geosíncronas.

11.7 $6{,}45 \times 10^{23}$ kg = $0{,}108\, M_T$

11.8 $v_e = 4{,}25$ km/s

11.9 (Obsérvese que $r = R_T + h = 13\,200$ km.)
(*a*) $U = -13{,}6 \times 10^9$ J, (*b*) $K = 6{,}80 \times 10^9$ J,
(*c*) $E = -6{,}80 \times 10^9$ J

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81$ m/s² para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso:
(*a*) La ley de las áreas iguales de Kepler implica que la fuerza gravitacional debe variar en razón inversa con el cuadrado de la distancia entre un planeta y el Sol.
(*b*) El planeta más próximo al Sol tiene, por término medio, el periodo de revolución más corto.
(*c*) La velocidad orbital de Venus es mayor que la de la Tierra.
(*d*) El período de revolución de un planeta permite una medida precisa de su masa. SSM

2 • Si la masa de un satélite se duplica, el radio de su órbita puede permanecer constante si la velocidad del satélite (*a*) se incrementa en un factor de 8, (*b*) se incrementa en un factor de 2, (*c*) no varía, (*d*) se reduce en un factor de 8, (*e*) se reduce en un factor de 2.

3 • ¿Durante qué estación el hemisferio norte de la Tierra alcanza su velocidad orbital máxima alrededor del Sol? ¿En qué estación alcanza la velocidad mínima? *Ayuda: la Tierra está en el perihelio a principios de enero.* SSM

4 • El cometa *Halley* se halla en una órbita elíptica alrededor del Sol cuyo periodo es de unos 76 años. El acercamiento máximo al Sol se produjo en 1987. ¿En qué años del siglo XX viajaba a la velocidad orbital máxima y a la mínima alrededor del Sol?

5 • Venus no tiene satélites naturales. Sin embargo, se han situado en su orbita satélites artificiales. ¿Qué parámetros habría que medir para calcular la masa de Venus mediante uno de esos satélites? ¿Cómo se utilizarían esos datos para determinar la masa?

6 • La mayoría de los asteroides se encuentran orbitando en unos "cinturones" circulares entre Marte y Júpiter. ¿Tienen todos ellos el mismo periodo orbital alrededor del Sol? Explique la respuesta.

7 • En la superficie de la Luna, la aceleración debida a su gravedad es a. A una distancia del centro de la Luna igual a cuatro veces su radio, la aceleración debida a su gravedad es (*a*) $16a$, (*b*) $a/4$, (*c*) $a/3$, (*d*) $a/16$, (*e*) ninguna de las anteriores. SSM

8 • A una profundidad igual a la mitad del radio de la Tierra, la aceleración de la gravedad es (*a*) g, (*b*) $2g$, (*c*) $g/2$, (*d*) $g/4$, (*e*) $g/8$, (*f*) no se puede saber con esos datos.

9 •• Dos estrellas orbitan alrededor de su centro de masas como un sistema binario de estrellas. Si se doblara el valor de cada una de sus masas, ¿qué le debería suceder a la distancia entre ellas para que se mantuviera la misma fuerza gravitacional? La distancia tendría que (*a*) mantenerse igual, (*b*) duplicarse, (*c*) cuadruplicarse, (*d*) reducirse en un factor de 2, (*e*) no se sabe con los datos aportados.

10 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Si usted hubiera trabajado para la NASA en los años 60 planificando el viaje a la Luna, sabría que existe una única localización entre la Tierra y la Luna donde hay una verdadera ingravidez. (Considerar únicamente la Luna, la Tierra y la nave espacial *Apolo* y despreciar otras fuerzas gravitacionales.) Explique este fenómeno e indique si esta localización se halla más cerca de la Tierra, de la Luna o a medio camino entre ambas.

11 •• Supongamos que la velocidad de escape de un planeta es ligeramente superior a la de la Tierra, aunque el planeta es considerablemente más grande. ¿Cómo habría de ser la densidad media del planeta en comparación con la de la Tierra? (*a*) Más denso. (*b*) Menos denso. (*c*) Igual densidad. (*d*) No se sabe con los datos aportados. SSM

12 •• Supongamos que utilizando un telescopio fuimos capaces de descubrir un objeto distante acercándose al Sol y fuimos capaces de determinar su distancia al Sol y su velocidad. ¿Cómo podríamos averiguar si el objeto permanecerá en el sistema solar o si se acerca para luego salir y no regresar?

13 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Cuando los satélites que orbitan la Tierra llegan al final de su vida útil, son sometidos a ciertas maniobras de forma que se incendian al entrar en contacto con la atmósfera terrestre. Las maniobras deben realizarse con mucha precisión para que los fragmentos no caigan sobre zonas pobladas. ¿En qué dirección se habrían de propulsar los cohetes del satélite para minimizar el tiempo de incendio e iniciar el movimiento espiral hacia abajo? ¿Qué le sucedería a la energía cinética, potencial gravitatoria y total mecánica tras el incendio conforme se acerca a la Tierra? SSM

14 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Durante el viaje de vuelta de la Luna, la aeronave *Apolo* enciende sus cohetes de propulsión para salir de la órbita lunar. Luego, entra en la atmósfera terrestre a gran velocidad, supera el incendio de entrada y acciona el paracaídas hasta caer sobre el océano. ¿En qué dirección se deberían encender los cohetes para iniciar el viaje de vuelta? Explicar los cambios de la energía cinética, potencial gravitatoria y total mecánica de la nave que tienen lugar desde el inicio hasta el final de este viaje.

15 •• Explicar por qué dentro de una esfera de masa uniforme el campo gravitatorio es directamente proporcional a r en vez de inversamente proporcional a r.

16 •• En la película *2001: odisea en el espacio*, una nave espacial con dos astronautas va a Júpiter en una misión de larga duración. Un modelo de esta nave espacial consiste en una barra tipo bolígrafo (que contiene los sistemas de propulsión) con una esfera uniforme (los habitáculos y la sala de pilotaje) en uno de sus extremos. El radio de la esfera es menor que la longitud de la barra (figura 11.23). A pocos metros de la nave, en el punto P, sobre la bisectriz de la barra, ¿cuál sería el campo gravitatorio creado por la nave? A gran distancia de la nave, ¿cómo sería la dependencia del campo gravitatorio con la distancia a la nave?

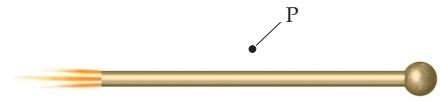


FIGURA 11.23 Problema 16

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

17 • Estimar la masa de nuestra galaxia (la Vía Láctea) si el Sol sigue una órbita respecto del centro de la galaxia con un periodo de 250 millones de años a una distancia media de 30 000 años luz. Expresar la masa en función de múltiplos de la masa solar M_s. (Despreciar la masa que está más lejos del centro de la galaxia que el Sol y considerar que la que está más cerca que el Sol ejerce la misma fuerza sobre el Sol que la que ejercería una partícula puntual de la misma masa localizada en el centro de la galaxia.) SSM

18 •• Además de estudiar muestras de la superficie lunar, los tripulantes del *Apolo* tuvieron a su alcance muchas maneras diferentes de demostrar que la Luna *no* está hecha de queso verde. Una de ellas consistía en medir la aceleración de la gravedad en la superficie lunar. Estimar la gravedad en la superficie lunar si la Luna fuese un bloque de queso verde y comparar el resultado con valor conocido.

19 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Usted es el responsable de un equipo de exploradores de asteroides. Estimar el máximo radio que debe tener un asteroide para que los exploradores puedan escapar de su gravedad saltando. Suponer geometría esférica y valores razonables para la densidad del asteroide.

20 ••• Uno de los grandes avances de la astronomía de los últimos años es la detección de planetas fuera del sistema solar. Desde 1996 se han detectado 100 planetas que se mueven en órbitas alrededor de otras estrellas distintas del Sol. Los planetas no se ven directamente, pero los telescopios pueden detectar el pequeño movimiento periódico de una estrella y un planeta en el movimiento de uno alrededor del otro alrededor de su centro de masas común. (Este efecto se mide mediante la detección del *efecto Doppler*, que se discutirá en el capítulo 15.) Mediante observaciones experimentales se determina, pues, tanto el periodo de este movimiento como la variación de la velocidad de la estrella. A partir de la observación de la luminosidad de la estrella y teniendo en cuenta la teoría de la estructura estelar, se determina la masa de una estrella. Iota Draconis es la octava estrella más brillante de la constelación Draco y las observaciones indican que alrededor de esta estrella hay un planeta que se mueve con un periodo de 1,5 años. La masa de Iota Draconis es $1{,}05M_{sol}$. (*a*) ¿Cuál es el tamaño (en UA) del semieje mayor de la órbita del planeta? (*b*) Se observa que la velocidad radial de la estrella varía en 592 m/s. Usando la conservación del momento, determinar la masa del planeta. Suponer que la órbita es circular y que no hay ningún otro planeta que tenga su órbita alrededor de Iota Draconis. Expresar la masa en función de la masa de Júpiter.

21 ••• Uno de los problemas sin resolver de la teoría sobre la formación del sistema solar es que, mientras que la masa del Sol representa el 99,9% de la masa total del sistema solar, el astro rey sólo concentra el 2% del momento angular total. La teoría más ampliamente aceptada sobre la formación del sistema solar sostiene como hipótesis central el colapso gravitatorio de una nube de polvo y de gas, la mayor parte de la cual formó el Sol. Sin embargo, el momento angular neto de esta masa de gas y polvo tuvo que conservarse, por lo que cualquier teoría simple predice que el Sol debería girar mucho más rápido de lo que en realidad gira. En este problema usted demostrará por qué es importante que la mayor fracción del momento angular se haya transferido de alguna manera a los planetas. (*a*) El Sol es una nube de gas que se mantiene unida por la fuerza de la gravedad. Si el Sol girara mucho más rápido, la gravedad no tendría suficiente fuerza para mantenerlo tal como lo conocemos. Estimar la velocidad angular máxima con que podría girar el Sol, usando los valores conocidos de su masa ($1{,}99 \times 10^{30}$ kg) y de su radio ($6{,}96 \times 10^{8}$ km), para que siguiera siendo tal como lo conocemos actualmente. ¿Cuál es el periodo de rotación que corresponde a esta velocidad angular? (*b*) Calcular el momento angular orbital de Júpiter y de Saturno a partir de su masa (318 y 95,1 veces la masa de la Tierra, respectivamente), de su distancia media al Sol (778 y 1430 millones de km, respectivamente), y del periodo de su órbita (11,9 y 29,5 años, respectivamente). Compararlos con el valor medido experimentalmente del momento angular del Sol ($1{,}91 \times 10^{41}$ kg · m^2/s). (*c*) Si se transfiriera todo el momento angular de Júpiter y de Saturno al Sol, ¿cuál sería el nuevo periodo orbital del astro? El Sol no es una esfera uniforme de gas; por lo tanto, su momento de inercia viene dado por la fórmula $I = 0{,}059MR^2$. Comparar este resultado con el obtenido para la velocidad angular de rotación máxima obtenida en el apartado (*a*).

LEYES DE KEPLER

22 • Se ha descubierto el nuevo cometa Alex-Casey en una órbita muy elíptica, con un periodo de 127,4 años. Si el acercamiento máximo del cometa al Sol es de 0,1 UA, ¿cuál es su distancia máxima al astro?

23 • El radio de la órbita terrestre es $1{,}496 \times 10^{11}$ m y el de Urano, $2{,}87 \times 10^{12}$ m. ¿Cuál es el periodo de Urano?

24 • El asteroide Hector, descubierto en 1907, describe una órbita casi circular de radio 5,16 UA alrededor del Sol. Determinar el periodo de este asteroide.

25 •• Uno de los llamados "huecos de Kirkwood" del cinturón de asteroides se encuentra en un radio orbital alrededor del Sol tal que el periodo de la órbita es la mitad del periodo de la órbita de Júpiter. El motivo por el cual hay un hueco para órbitas con este radio radica en que los asteroides experimentan una fuerza atractiva periódica, procedente de Júpiter, justo en la misma posición tras orbitar alrededor del Sol. Esas atracciones repetitivas por parte de Júpiter modifican la órbita de los asteroides. Por tanto, todos los asteroides que orbiten en ese radio serán expulsados debido a la atracción resonante. ¿A qué distancia del Sol se encuentran esos huecos de Kirkwood? SSM

26 •• Atlas, la diminuta luna de Saturno, se encuentra atrapada en resonancia orbital con otra luna, Mimas, cuya órbita es mayor que la de Atlas. El ratio entre los periodos de sus órbitas es 3:2, es decir, por cada 3 revoluciones de Atlas, Mimas completa 2 revoluciones. Por tanto, Atlas, Mimas y Saturno están alineados en intervalos iguales de dos periodos orbitales de Atlas. Si Mimas orbita Saturno con un radio de 186 000 km, ¿cuál es el radio de la órbita de Atlas?

27 •• El asteroide Ícaro, descubierto en 1949, se denominó así porque su órbita elíptica, muy excéntrica, le acerca mucho al Sol en su perihelio. La excentricidad e de una elipse viene definida por la relación $r_p = a(1 - e)$, donde r_p es la distancia al perihelio y a el semieje mayor. Ícaro tiene una excentricidad de 0,83 y su periodo es de 1,1 años. (*a*) Determinar el semieje mayor de la órbita de Ícaro. (*b*) Determinar las distancias del perihelio y del afelio de la órbita de Ícaro.

28 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, APLICACIÓN BIOLÓGICA** Se lleva mucho tiempo discutiendo las distintas posibilidades de enviar una misión tripulada a Marte y las dificultades que entrañaría a los astronautas acometer un viaje tan largo por el espacio. Vamos a analizar el problema de una forma sencilla, considerando una de las posibilidades que se han barajado: "la transferencia orbital de Hohmann". Según esta propuesta, se trataría de establecer una órbita elíptica tangente a la órbita de la Tierra cuando ésta esté en el punto más cercano al Sol que a la vez fuera tangente a la órbita de Marte cuando el planeta rojo esté en el punto más alejado del astro rey. Calcular el tiempo total invertido por los astronautas en viajar de un planeta a otro sabiendo que la distancia de Marte al Sol es 1,52 veces la distancia media Tierra-Sol.

29 •• **ESTIMACIÓN** Kepler determinaba distancias entre los planetas del sistema solar a partir de los datos que había obtenido mediante sus observaciones. Por ejemplo, determinó la distancia relativa entre el Sol y Venus (comparandola con la distancia Sol-Tierra). A causa de que la órbita de Venus es más cercana al Sol que la órbita de la Tierra, Venus siempre se puede observar próximo al alba o al ocaso, ya que su posición en el cielo nunca está lejos del Sol (véase la figura 11.24). Suponiendo que la órbita de Venus alrededor del Sol es un círculo perfecto, consideremos la la orientación relativa de Venus, Tierra y Sol cuando alcanzan su máxima

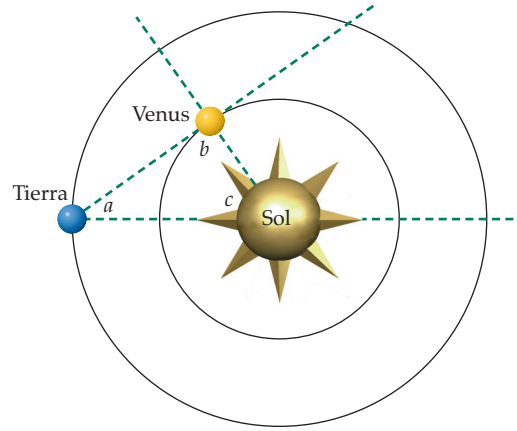


FIGURA 11.24 Problema 29

extensión, es decir, cuando Venus está más alejado del Sol en el cielo. (*a*) En estas condiciones, demostrar que el ángulo *b* de la figura 11.24 es 90°. (*b*) Si el ángulo de máxima elongación entre Venus y el Sol es de 47°, ¿cuál es la distancia entre Venus y el Sol en UA? (*c*) Utilizar este resultado para estimar la duración del año "venusiano". SSM

30 •• La Luna, cuando está en el apogeo de su órbita alrededor de la Tierra está a 406 395 km de distancia, mientras que en el perigeo está a 357 643 km. ¿Cuál es la velocidad de la Luna en el apogeo y en el perigeo? La masa de la Tierra es $5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

LEY DE LA GRAVITACIÓN DE NEWTON

31 • Europa es un satélite que se mueve en una órbita de Júpiter con un periodo de 3,55 días y a una distancia media de $6{,}71 \times 10^8$ m. (*a*) A partir de estos datos y suponiendo que la órbita es circular, calcular la masa de Júpiter. (*b*) Otro satélite de Júpiter, Calisto, se mueve a una distancia media de $18{,}8 \times 10^8$ m en una órbita que tiene un periodo de 16,7 días. A partir de estos datos, determinar la aceleración de Calisto y de Europa y comprobar que son consistentes con una ley de la gravitación que contemple una dependencia espacial proporcional a la inversa del cuadrado de la distancia. [*Nota*: en el apartado (*b*) de este problema NO debe usarse el valor de *G* para nada.] SSM

32 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Se suele pensar que los astronautas de la lanzadera espacial están en condiciones de ingravidez "porque están más allá de la atracción gravitatoria de la Tierra". De hecho, esta opinión es completamente falsa. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la aceleración de la gravedad para los astronautas de la lanzadera espacial cuando el ingenio espacial está a 400 km por encima de la superficie de la Tierra? (*b*) Dada la respuesta del apartado (*a*), ¿por qué,los astronautas en estas condiciones sufren efectos biológicos adversos, como atrofia muscular, incluso sin estar sometidos a una situación de ingravidez?

33 • La masa de Saturno es de $5{,}69 \times 10^{26}$ kg. (*a*) Calcular el periodo de su luna Mimas, sabiendo que el radio medio de su órbita es $1{,}86 \times 10^8$ m. (*b*) Calcular el radio medio de la luna Titán, cuyo periodo es de $1{,}38 \times 10^6$ s. SSM

34 • Calcular la masa terrestre a partir de los valores del periodo de la Luna $T = 27{,}3$ días, el radio medio de su órbita $r_m = 3{,}84 \times 10^8$ m y el valor ya conocido de *G*.

35 • Suponer que se realiza un aterrizaje en un planeta de otro sistema solar que tiene la misma masa por unidad de volumen que la Tierra, pero su radio es 10 veces el de la Tierra. ¿Cuál sería su peso en ese planeta en comparación con el que tiene en la Tierra?

36 • Suponer que la Tierra, manteniendo su masa actual, fuera comprimida hasta la mitad de su radio. ¿Cuál sería la aceleración de la gravedad *g* en la superficie de este nuevo planeta más compacto?

37 • Un planeta se mueve alrededor de un sol masivo con momento angular constante. Cuando el planeta pasa por el perihelio posee una velocidad de 5×10^4 m/s y se encuentra a $1{,}0 \times 10^{15}$ m del sol. El radio orbital en el afelio aumenta en $2{,}2 \times 10^{15}$ m. ¿Cuál es la velocidad del planeta en el afelio?

38 • ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de una estrella de neutrones cuya masa es 1,60 veces la masa del Sol y que tiene un radio de 10,5 km?

39 •• La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. (*a*) Determinar la relación de las distancias al afelio y al perihelio. (*b*) ¿Este asteroide está más lejos o más cerca del Sol que la Tierra, en promedio? Explique la respuesta.

40 •• Un satélite de masa 300 kg se mueve en una órbita circular de 5×10^7 m por encima de la superficie terrestre. (*a*) ¿Cuál es la fuerza gravitatoria sobre el satélite? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del satélite? (*c*) ¿Cuál es el periodo del satélite?

41 •• Un medidor superconductor de la gravedad puede medir cambios de esta magnitud del orden $\Delta g/g = 10^{-11}$. (*a*) Si una persona está escondida detrás de un árbol con un medidor de gravedad, ¿a qué distancia máxima se podrá acercar su amigo de 80 kg de masa sin que el detector muestre un cambio de *g* debido a su presencia? (*b*) Una persona sube a un globo aeroestático con un medidor de la gravedad con el objetivo de determinar la velocidad de ascenso (supuesta constante). ¿Cuál es la altura mínima ascendida que produce un cambio del campo gravitatorio terrestre perceptible por el aparato? SSM

42 •• Si suponemos que la interacción atractiva entre una estrella de masa *M* y un planeta de masa $m << M$ es de la forma $F = KMm/r$, siendo *K* la constante gravitatoria, ¿cuál sería la relación entre el radio de la órbita circular del planeta y su periodo?

43 •• La Tierra tiene un radio de 6370 km. El radio de la Luna es 1738 km. Sabiendo que la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es 1,62 m/s^2, ¿cuál es la relación entre la densidad media de la Luna y la de la Tierra? SSM

MASAS GRAVITATORIA E INERCIAL

44 • Se mide el peso de un cuerpo patrón que por definición tiene una masa exacta de 1 kg y se obtiene un valor de 9,81 N. En el mismo laboratorio, otro objeto pesa 56,6 N. (*a*) ¿Cuál es la masa de este último? (*b*) La masa determinada en (*a*), ¿es gravitatoria o inercial?

45 • **ESTIMACIÓN** El *principio de equivalencia* establece que la caída libre de cualquier cuerpo en un campo gravitatorio es independiente de la masa del objeto. Este resultado puede comprobarse a partir de la ley de gravitación universal pero, ¿se ha comprobado experimentalmente? Un experimento realizado en la década de los años 1960, el experimento de Roll-Krotkov-Dicke, indica que la aceleración de la caída libre de los cuerpos es independiente de la masa al menos con una exactitud de 1 parte en 10^{12}. Supongamos que dos cuerpos caen simultáneamente, desde el reposo, en un campo gravitatorio uniforme y que, además, uno de los objetos cae con una aceleración exacta de 9,8 m/s^2 mientras que el otro cae con una aceleración constante que supera los 9,8 m/s^2 en 1 parte sobre 10^{12}. ¿Qué distancia habrá caído el primer cuerpo cuando el segundo, en su caída, le aventaje en 1 mm? (Obsérvese que esta estimación corresponde al cálculo de un límite superior en la diferencia de aceleraciones, aunque la mayoría de los físicos creen que no hay ninguna diferencia en la aceleraciones.)

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

46 • (*a*) Considerando que la energía potencial es cero a una distancia infinita, hallar la energía potencial de un cuerpo de 100 kg en la superficie de la Tierra. (*b*) Hallar la energía potencial del mismo cuerpo a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra. (*c*) ¿Cuál deberá ser la velocidad de escape de un cuerpo proyectado desde esta altura? SSM

47 • Hallar la velocidad de escape de un cohete que abandona la Luna. La aceleración de la gravedad en la Luna es 0,166 veces la de la Tierra y el radio de la Luna es 0,273 R_T. SSM

48 •• ¿Qué velocidad inicial debe darse a una partícula para que cuando esté muy alejada de la Tierra su velocidad final sea igual a la de escape? Despreciar los efectos de rozamiento con el aire.

49 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Mientras se prepara el presupuesto para el próximo año, la NASA quiere informar sobre el coste (por kilogramo) del lanzamiento de un nuevo satélite terrestre. (*a*) ¿Cuánto costará (en kW · h) enviar un objeto de 1 kg a una órbita de 300 km de altura respecto de la superficie te-

rrestre? Tener en cuenta que, a esa altura, el radio de la Tierra es significativo. (*b*) Si el precio al que la NASA paga su consumo energético es de 0,15 $ por kW · h, ¿cuál será el coste mínimo del lanzamiento de un satélite de 400 kg en esa órbita? Despreciar los efectos de rozamiento con el aire.

50 •• El escritor de ciencia ficción Robert Heinlein afirmó: "Si se consigue estar en una órbita estable, se está a medio camino de todas partes". Justificar esta frase comparando la energía cinética necesaria para colocar un satélite en una órbita baja ($h = 400$ km) con la energía necesaria para colocar el satélite completamente libre de la gravedad terrestre.

51 •• Se deja caer desde el reposo un objeto situado a una altura de 4×10^6 m sobre la superficie terrestre. Si no existiese la resistencia del aire, ¿cuál sería su velocidad al chocar contra la Tierra? SSM

52 •• Se lanza un objeto hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 4 km/s. Hallar la altura máxima que alcanzará.

53 •• Se lanza desde la superficie de la Tierra una partícula con una velocidad doble de la de escape. Cuando esté muy lejos de la Tierra, ¿cuál será su velocidad?

54 ••• Cuando calculamos las velocidades de escape, lo hacemos bajo la hipótesis de que el objeto que escapa está aislado. Esto, en general, no es del todo cierto para el sistema solar. Demostrar que la velocidad de escape en un punto cercano a un sistema compuesto por dos cuerpos masivos esféricos estacionarios es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las velocidades de escape en cada uno de los cuerpos considerados individualmente.

55 ••• Calcular la velocidad mínima, respecto a la Tierra, que debe tener un cohete para poder escapar del sistema solar si se lanza desde la superficie terrestre. La respuesta dependerá de la dirección de lanzamiento. Explicar qué dirección de lanzamiento sería la óptima a la hora de minimizar la velocidad de escape. Despreciar el efecto de rotación terrestre y la resistencia con el aire.

56 ••• Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra. Demostrar que la altura máxima alcanzada por el cuerpo es $H = R_T H'/(R_T - H')$, donde H' es la altura que alcanzaría si el campo gravitatorio fuera constante.

ÓRBITAS GRAVITACIONALES

57 •• Un vehículo espacial de 100 kg de masa se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura $h = 2R_T$. (*a*) ¿Cuál es el periodo de la órbita de este vehículo alrededor de la Tierra? (*b*) ¿Cuál es su energía cinética? (*c*) Expresar el momento angular L del vehículo espacial en función de su energía cinética K y determinar su valor numérico.

58 •• **ESTIMACIÓN** El periodo orbital de la Luna es de 27,3 días, la distancia media de centro a centro entre la Tierra y la Luna es $3{,}82 \times 10^8$ m, la duración del año terrestre es 365,25 días y la distancia de centro a centro entre la Tierra y el Sol es $3{,}82 \times 10^{11}$ m. Utilizar esta información para estimar el cociente entre las masas del Sol y la Tierra. Comparar este resultado con el valor medido de $3{,}33 \times 10^5$. En caso de discrepancia, enumere los factores que pudieran contribuir.

59 •• Alrededor de la Tierra, a unos 1000 km de altura sobre la superficie terrestre hay muchos satélites en órbita. Los satélites geosíncronos están en órbita a una distancia de 35 790 km de la superficie de la Tierra. ¿Cuánta energía adicional se requiere para lanzar un satélite de 500 kg a una órbita geosíncrona en vez de a una órbita de 1000 km por encima de la superficie terrestre? SSM

60 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La idea de un puerto espacial orbitando la Tierra es una propuesta atractiva para enviar sondas, misiones tripuladas a planetas alejados del sistema solar. Supongamos que se ha construido una "plataforma" que orbita la Tierra a 450 km sobre la superficie terrestre. Un equipo de investigación lanza una sonda lunar en una órbita que tiene su perigeo en el radio orbital de la plataforma y su apogeo en el radio orbital de la Luna. (*a*) Para lanzar correctamente la sonda, determine en primer lugar la velocidad orbital de la plataforma. (*b*) Determine ahora la velocidad necesaria, relativa a la plataforma, con la que hay que lanzar la sonda para que alcance la órbita deseada. Despreciar los efectos de atracción de la Luna sobre la sonda. Suponer además que el lanzamiento tiene lugar durante un periodo de tiempo despreciable. (*c*) ¿Cuánto tiempo hay que esperar desde el lanzamiento para que la sonda llegue al apogeo?

CAMPO GRAVITATORIO ($\vec{g}$)

61 • Una cuerpo de prueba de 3 kg experimenta una fuerza gravitatoria de 12 N$\hat{i}$ en cierto punto P. ¿Cuál es el campo gravitatorio en ese punto?

62 • El campo gravitatorio en cierto punto viene dado por $\vec{g} = 2{,}5 \times 10^{-6}$ N/kg $\hat{j}$. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria sobre un objeto de 4 g en ese punto?

63 •• Una partícula puntual de masa m está sobre el eje x en el punto $x = L$ y otra masa puntual igual está sobre el eje y en el punto $y = L$. (*a*) Determinar el campo gravitatorio en el origen. (*b*) ¿Cuál es el módulo de este campo? SSM

64 •• Cinco cuerpos con masas iguales M están equidistantes sobre el arco de una semicircunsferencia de radio R como se indica en la figura 11.25. Se sitúa un objeto de masa m en el centro de curvatura del arco. (*a*) Si M es 3 kg, m vale 2 kg y R es 10 cm, ¿cuál es la fuerza sobre m debida a los cinco cuerpos de masa M? (*b*) Si m se retira, ¿cuál es el campo gravitatorio en el centro de curvatura del arco?

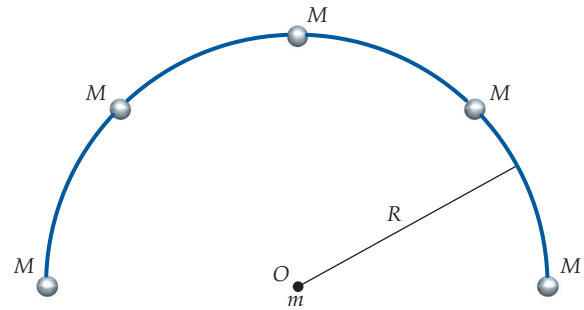


FIGURA 11.25 Problema 64

65 •• Una partícula puntual de masa 2 kg está en el origen y una segunda partícula puntual de masa $m_2 = 4$ kg está sobre el eje x en el punto $x = 6$ m. Determinar el campo gravitatorio $\vec{g}$ en (*a*) $x = 2$ m, y (*b*) $x = 12$ m. (*c*) Hallar el punto sobre el eje x, para el cual $g = 0$.

66 •• Demostrar que el máximo valor de g para el campo del ejemplo 11.7 tiene lugar en los puntos $x = \pm a/\sqrt{2}$.

67 ••• Una barra no uniforme de longitud L se encuentra alineada sobre el eje x con un extremo en el origen y el otro en $x = L$. Su densidad λ (masa por unidad de longitud) varía en la forma $\lambda = Cx$, donde C es una constante. (Así, un elemento de la barra tiene una masa $dm = \lambda\, dx$.) (*a*) ¿Cuál es la masa total de la barra? (*b*) Determinar el campo gravitatorio debido a la barra en el punto $x_0 > L$. SSM

68 •• Una varilla uniforme de masa M y longitud L está situada sobre el eje x con su centro en el origen. Consideremos un elemento de longitud dx a una distancia x del origen donde $0 < x < L$. (*a*) Demostrar que este elemento produce un campo gravitatorio en un punto x_0 sobre el eje $x_0 > L$ dado por $dg_x = -\dfrac{GM}{L(x_0 - x)^2}\,dx$. (*b*) Integrar este resultado respecto a toda la varilla para hallar el campo gravitatorio total en el punto x_0 debido a la misma. (*c*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre un objeto de masa m_0 en x_0? (*d*) Demostrar que para $x_0 \gg L$, el campo es aproximadamente igual al ejercido por una partícula puntual de masa M situada en $x = 0$.

CAMPO GRAVITATORIO ($\vec{g}$) PRODUCIDO POR OBJETOS ESFÉRICOS

69 • Una corteza esférica tiene una radio de 2 m y una masa de 300 kg. ¿Cuál es el campo gravitatorio a las siguientes distancias del centro de la corteza? (*a*) 0,5 m. (*b*) 1,9 m. (*c*) 2,5 m.

70 • Una corteza esférica tiene un radio de 2 m y una masa de 300 kg; su centro está localizado en el origen de un sistema de coordenadas. Otra corteza esférica de radio 1 m y masa 150 kg está situada dentro de la corteza mayor con su centro a 0,6 m sobre el eje x. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria de atracción entre las dos cortezas?

71 •• Dos esferas sólidas, S_1 y S_2, tienen radios iguales R y masas iguales M. La densidad de la esfera S_1 es constante, mientras que la densidad de la esfera S_2 depende de la distancia radial de acuerdo con la expresión $\rho(r) = C/r$. Si la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera S_1 es g_1, ¿cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera S_2? SSM

72 •• Dos esferas sólidas homogéneas, S_1 y S_2, tienen masas iguales, pero radios distintos, R_1 y R_2. Si la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera S_1 es g_1, ¿cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de la esfera S_2?

73 •• Dos cortezas esféricas concéntricas y uniformes poseen masas M_1 y M_2, y radios a y $2a$, como se muestra en la figura 11.26. ¿Cuál es el módulo de la fuerza gravitatoria sobre una masa puntual m localizada (*a*) a una distancia $3a$ del centro de las dos cortezas? (*b*) a una distancia $1{,}9a$ del centro de las cortezas? (*c*) a una distancia $0{,}9a$ del centro de las cortezas?

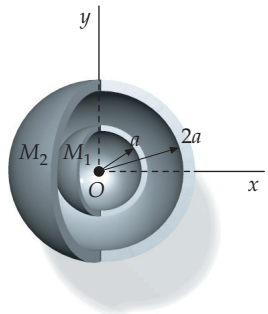


FIGURA 11.26 Problema 73

74 •• La corteza esférica interna del problema 73 se desplaza de modo que su centro está ahora en $x = 0{,}8a$. ¿Cuál es el módulo de la fuerza gravitatoria sobre una partícula puntual de masa m situada sobre el eje x en (*a*) $x = 3a$, (*b*) $x = 1{,}9a$, (*c*) $x = 0{,}9a$?

75 •• Imagínese que se encuentra sobre una balanza de muelles en un ascensor que desciende a velocidad constante hacia el interior de una mina localizada en el ecuador. Tratar la Tierra como una esfera homogénea.

(*a*) Demostrar que la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra es proporcional a su distancia al centro del planeta.

(*b*) Supongamos que el túnel que da acceso a la mina es vertical y está en el ecuador. Considerando la rotación de la Tierra, demostrar que el peso efectivo es proporcional a la distancia desde el centro de la Tierra. SSM

76 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supongamos que la Tierra fuese una esfera uniforme sin rotación. Considere una mina situada en el ecuador que tiene un túnel de acceso vertical cuya profundidad es de 15 km respecto a la superficie. Determinar la disminución del peso de una persona que pesa 800 N en la superficie terrestre, cuando se halla en el fondo del túnel. La densidad de la corteza terrestre, en realidad, aumenta con la profundidad. ¿Cómo afectaría esto al resultado?

77 •• Una esfera sólida de radio R tiene su centro en el origen de coordenadas. Posee una densidad de masa uniforme, ρ_0, exceptuando el hecho de que tiene un agujero esférico de radio $r = \frac{1}{2}R$ cuyo centro se encuentra en $x = \frac{1}{2}R$, como se muestra en la figura 11.27. Calcular el campo gravitatorio en los puntos del eje x para los que se cumple que $|x| > R$. (*Sugerencia: puede considerarse la cavidad como una esfera de masa* $m = (4/3)\pi r^3\rho_0$ *más una esfera de masa* $-m$.) SSM

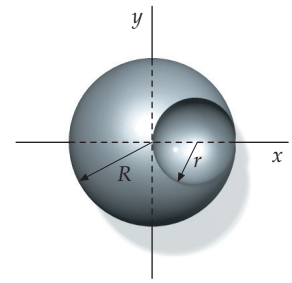


FIGURA 11.27 Problema 77

78 ••• Demostrar para la esfera con un agujero del problema 77 que el campo gravitatorio dentro del agujero es uniforme, y calcular su módulo y dirección.

79 ••• Se taladra un túnel liso y recto a través de un planeta esférico cuya densidad de masa ρ_0 es constante. El túnel pasa por el centro del planeta y es perpendicular a su eje de rotación, que está fijo en el espacio. El planeta gira con una velocidad angular ω determinada, de modo que los objetos dentro del túnel no tienen aceleración relativa a éste. Hallar ω.

80 ••• La densidad de una esfera viene dada por $\rho(r) = C/r$. La esfera tiene una radio de 5 m y una masa de 1×10^{11} kg. (*a*) Determinar la constante C. (*b*) Obtener las expresiones del campo gravitatorio para (1) $r > 5$ m y (2) $r < 5$ m.

81 ••• En la esfera descrita en el problema 80 se taladra un agujero hacia su centro a profundidad de 2 m por debajo de la superficie de la esfera. Desde la superficie se deja caer en el agujero una pequeña masa. Determinar la velocidad de esta masa al chocar contra el fondo del agujero. SSM

82 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La superficie sólida de la Tierra tiene un espesor de 40 km y una densidad de 3000 kg/m^3, aproximadamente. Centrado a 2000 m por debajo de dicha superficie se encuentra un depósito esférico de metales pesados con una densidad de 8000 kg/m^3 y un radio de 1000 m. Determinar el cociente $\Delta g/g$ directamente encima de este depósito, siendo Δg el aumento del campo gravitatorio debido al depósito.

83 ••• Dentro de una esfera de plomo de radio R se han taladrado dos huecos esféricos idénticos de radio $R/2$. Ambos son tangentes a la superficie de la esfera y tocan su centro como se ve en la figura 11.28. Antes de formar los huecos, la masa de la esfera de plomo era M. Hallar la fuerza de atracción que la esfera de plomo ejerce sobre una partícula puntual de masa m situada en la posición que indica la figura. SSM

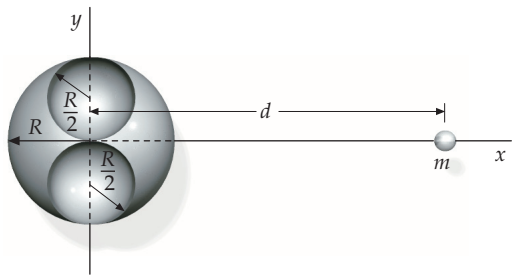


FIGURA 11.28 Problema 83

84 ••• Un clúster (racimo) globular es un conjunto casi esférico de millones de estrellas que se mantienen juntas gracias a la fuerza de la gravedad. Los astrónomos miden las velocidades de las estrellas del clúster con el objetivo de estudiar su composición y de tener una idea de la distribución de masa en su interior. Si se supone que todas las estrellas tienen, aproximadamente, la misma masa, demostrar que la velocidad media de una estrella en una órbita circular alrededor del centro del clúster ha de aumentar linealmente con la distancia al centro del mismo.

PROBLEMAS GENERALES

85 • La distancia media de Plutón al Sol es de 39,5 UA. Determinar el periodo de Plutón.

86 • Calcular la masa de la Tierra a partir de los valores de G, g y R_T.

87 •• La fuerza ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa m a la distancia r ($r > R_T$) del centro del planeta tiene el módulo mgR_T^2/r^2, donde $g = GM_T/R_T^2$. (*a*) Calcular el trabajo que debe realizarse contra la gravedad para desplazar la partícula de una distancia r_1 a otra r_2. (*b*) Demostrar que cuando $r_1 = R_T$ y $r_2 = R_T + h$, el resultado puede escribirse en la forma $W = mgR_T^2[(1/R_T) - 1/(R_T + h)]$. (*c*) Demostrar que cuando $h \ll R_T$, el trabajo viene dado aproximadamente por $W = mgh$.

88 •• La densidad media de la Luna es $r = 3340$ kg/m^3. Determinar el periodo mínimo posible T de un vehículo espacial en órbita alrededor de la Luna.

89 •• Una *estrella de neutrones* es una estrella de gran masa, muy condensada, en la última etapa de su evolución. Está formada por neutrones (de ahí su nombre) debido a que la intensa fuerza gravitacional produce la "fusión" entre electrones y protones para dar lugar a neutrones. Supongamos que al final de la fase actual, el Sol colapsa en una estrella de neutrones (en realidad no puede hacerlo pues no tiene masa suficiente) de 12 km de radio sin que haya pérdida de masa en el proceso. (*a*) Calcular el cociente entre la aceleración de la gravedad tras el colapso y su valor actual. (*b*) Calcular el cociente entre las velocidades de escape tras el colapso y el valor actual. SSM

90 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Supongamos que el Sol pudiera colapsar en una estrella de neutrones de 12 km de radio, como en el problema 89. Su equipo de investigación se encarga de enviar una sonda espacial desde la Tierra para estudiar el Sol una vez transformado y la sonda llega hasta una órbita circular que se encuentra a 4500 km del centro del Sol. (*a*) Calcular la velocidad de la sonda. (*b*) Posteriormente, se planea construir una plataforma espacial en la misma órbita. Para transportar el equipamiento, los científicos de la Tierra necesitan que determine la velocidad de escape (relativa a la plataforma) de cohetes lanzados desde la plataforma, en la dirección de la velocidad orbital de la plataforma en el instante del despegue. ¿Cuál es la velocidad y cómo es en comparación con la de velocidad de escape de la superficie de la Tierra?

91 •• Un satélite gira alrededor de la Luna (radio 1700 km), próximo a la superficie, con una velocidad v. Desde la Luna se lanza verticalmente hacia arriba un proyectil con la misma velocidad inicial v. ¿Qué altura máxima alcanzará?

92 •• Los *agujeros negros* son objetos cuyo campo gravitacional es tan intenso que ni tan siguiera la luz puede escapar. Considere un objeto esférico cuya densidad es tan grande que la velocidad de escape en su superficie es mayor que la velocidad de la luz, c. Si el radio de una estrella fuese inferior al valor del *radio de Schwarzchild* R_S, entonces la estrella se convertirá en un agujero negro, es decir, la luz que se origina en su superficie no puede escapar. (*a*) Para un agujero negro sin rotación, el radio de Schwarzchild depende sólo de la masa del agujero negro. Demostrar que $R_S = 2GM/c^2$. (*b*) Calcular el radio de Schwarzchild para un agujero negro cuya masa es la de 10 soles.

93 •• En un sistema de estrellas binarias, dos estrellas orbitan alrededor de su centro común de masas. Si las estrellas tienen masas m_1 y m_2, y están separadas por una distancia r, demostrar que el periodo de rotación está relacionado con r según la expresión $T^2 = 4\pi^2 r^3/[G(m_1 + m_2)]$.

94 •• Dos partículas de masa m_1 y m_2 separadas una distancia infinita se dejan libremente desde el reposo. Determinar sus velocidades v_1 y v_2 cuando su distancia de separación es r. La distancia de separación se dice que es grande, pero *grande* es un término relativo. ¿Qué distancia podemos calificar como grande?

95 •• Urano, el séptimo planeta del sistema solar, fue observado por primera ver en 1781 por William Herschel. Su órbita fue entonces analizada mediante las leyes de Kepler. Hacia el 1840, las observaciones de Urano indicaban claramente que su órbita real difería de las predicciones basadas en las leyes de Kepler en una cantidad que no era atribuible a un error de precisión observacional. La conclusión fue que debía haber otra influencia, además de la del Sol y de los ya conocidos planetas internos a la órbita de Urano. Se creyó que era debida a un octavo planeta, cuya órbita fue predicha independientemente en 1845 por dos astrónomos: John Adams y Urbain LeVerrier. En septiembre de 1846, John Galle, observó por primera vez a Neptuno, justo en la posición predicha por Adams y LeVerrier. Urano y Neptuno orbitan el Sol con periodos de 84 y 164,8 años, respectivamente. Para ver el efecto que Neptuno tuvo sobre Urano, determinar el cociente de las fuerzas gravitacionales entre Neptuno y Urano, y entre Urano y el Sol, cuando Neptuno y Urano están lo más cerca posible uno del otro (y por tanto alineados con el Sol). La masa del Sol es 333 000 veces la de la Tierra,

la de Urano es 14,5 veces la de la Tierra y la de Neptuno es 17,1 veces la de la Tierra. SSM

96 •• Se cree que hay un agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia. Un dato que conduce a esta conclusión es que recientemente se ha observado un movimiento estelar cerca del centro de la galaxia. Si una de esas estrellas se moviera en órbita elíptica, con un semieje mayor de 5,5 días-luz, y con un periodo de 15,2 años, ¿cuál sería la masa del supuesto agujero negro?

97 •• Cuatro planetas idénticos están distribuidos en un cuadrado, tal como se muestra en la figura 11.29. Si la masa de cada planeta es M y el lado del cuadrado es a, ¿cuál ha de ser la velocidad de los planetas si se mueven alrededor del centro del cuadrado bajo la influencia de su atracción mutua? SSM

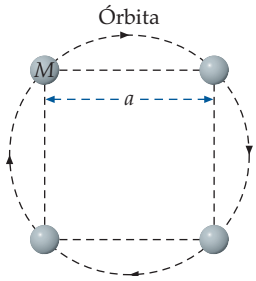


FIGURA 11.29 Problema 97

98 •• Como muestra la figura 11.30, se perfora un pozo de pequeño diámetro desde la superficie de la Tierra hasta su centro. Despreciamos la rotación de la Tierra y la resistencia del aire y consideramos que la Tierra es una esfera uniforme. (*a*) ¿Cuánto trabajo se necesitaría para trasladar un objeto pequeño de masa m desde el centro de la Tierra a su superficie? (*b*) Si se dejase caer el objeto por la abertura del agujero en la superficie terrestre, ¿con qué velocidad llegaría al centro? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de escape de una partícula de masa m proyectada desde el centro de la Tierra? Expresar las respuestas en función de m, g y R_T.

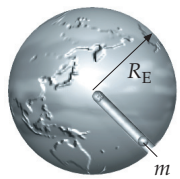


FIGURA 11.30 Problema 98

99 •• Una corteza esférica gruesa de masa M y densidad uniforme tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2. Hallar el campo gravitatorio g_r, en función de r para $0 < r < \infty$. Esquematizar un gráfico de g_r en función de r.

100 •• (*a*) Dibujar una gráfica que nos dé un campo gravitatorio g_x en función de x debido a un anillo uniforme de masa M y de radio R cuyo eje sea el eje x. (*b*) ¿En qué puntos es máximo el módulo de g_x?

101 ••• Determinar el módulo del campo gravitatorio a una distancia r de un hilo infinitamente largo cuya masa por unidad de longitud es λ.

102 ••• Una cuestión importante referida al sistema solar es saber si cada uno de los anillos de Saturno es sólido o, por el contrario, está formado por una infinidad de pequeños satélites. Podría hacerse una simple observación que resolviera este enigma: la medida de la velocidad de una porción interna y de otra porción externa de un anillo. Si la porción interna del anillo se mueve más lentamente que la porción externa, entonces el anillo es sólido; en caso contrario, estaría formado por satélites separados. Sea Δr la anchura radial del anillo, R la distancia promedio del anillo al centro de Saturno y v_{mg} la velocidad media del anillo. (*a*) Si el anillo es sólido, demostrar que $v_{fuera} - v_{dentro} \approx v_{mg}\,(\Delta r/R)$, donde v_{fuera} es la velocidad en la zona más externa del anillo y v_{dentro} es la velocidad en la zona más interna del anillo. (*b*) Si, en cambio, el anillo está formado por trozos pequeños de materia sólida, demostrar que $\Delta v \approx -\frac{1}{2}(v_{mg}(\Delta r/R))$. (Suponer que $\Delta r \ll R$.)

103 ••• En este problema vamos a determinar la energía potencial gravitatoria de la varilla del ejemplo 11.8 y de una masa puntual m_0 que está sobre el eje x en $x = x_0$, siendo $x_0 \geq \frac{1}{2}L$. (*a*) Demostrar que la energía potencial gravitatoria de un elemento de la varilla dm (que se muestra en la figura 11.14) y una partícula puntual m_0 situada sobre el eje x en $x_0 \geq \frac{1}{2}L$ viene dada por

$$dU = -\frac{Gm_0\,dm}{x_0 - x_s} = \frac{GMm_0}{L(x_0 - x_s)}\,dx_s$$

donde $U = 0$ para $x_0 = \infty$. (*b*) Integrar el resultado de la parte (*a*) en toda la longitud de la varilla para hallar la energía potencial total del sistema. Escribir el resultado como una función general $U(x_0)$ haciendo que x_0 sea igual a un punto genérico x. (*c*) Calcular la fuerza ejercida sobre m_0 en un punto x a partir de $F_x = -dU/dx$, y comparar el resultado con m_0g, donde g es el campo en x_0 calculado en el ejemplo 11.8. SSM

104 ••• Una esfera uniforme de masa M está cerca de una varilla delgada y uniforme de masa m y longitud L, como se indica en la figura 11.31. Hallar la fuerza gravitatoria de atracción ejercida por la esfera sobre la varilla.

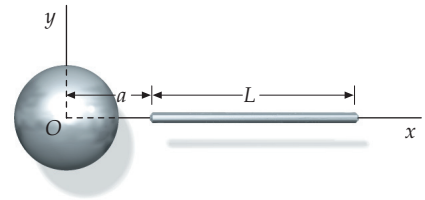


FIGURA 11.31 Problema 104

105 ••• Una varilla uniforme de masa $M = 20$ kg y longitud $L = 5$ m se dobla en forma de semicircunferencia. ¿Cuál es la fuerza gravitatoria ejercida por la varilla sobre una masa puntual $m = 0{,}1$ kg situada en el centro del arco?

106 ••• Las mareas se producen como consecuencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por el Sol y la Luna sobre los océanos de la Tierra. (*a*) Demostrar que el cociente entre la fuerza ejercida por el Sol y la ejercida por la Luna es $M_S r_m^2/M_m r_S^2$, donde M_s y M_L son las masas del Sol y la Luna, y r_s y r_L son las distancias de la Tierra al Sol y a la Luna. Calcular este cociente. (*b*) A pesar de que el Sol ejerce una fuerza mucho mayor sobre el océano que la ejercida por la Luna, ésta produce un efecto mucho mayor sobre las mareas porque el hecho importante es la diferencia de fuerzas entre un lado y otro de la Tierra. Diferenciar la expresión $F = Gm_1m_2/r^2$ para calcular la variación de F que se produce para una pequeña variación de r. Demostrar que $dF/F = -2\,dr/r$. (*c*) La protuberancia de marea oceánica (es decir, la elongación del agua líquida del océano que causa dos regiones opuestas de mayor y menor altura) está causada por la diferencia de las fuerzas gravitacionales sobre los océanos, que existen entre dos lados de la Tierra. Demostrar que para una pequeña variación de la distancia, la variación de la fuerza

ejercida por el Sol está relacionada con la variación de la fuerza ejercida por la Luna por $\Delta F_S/\Delta F_m \approx (M_S r_m^3)/(M_m r_S^3)$. Calcular esta relación. ¿Cuál es su conclusión? ¿Cuál de los objetos (Sol o Luna) es el principal causante de las mareas oceánicas terrestres?

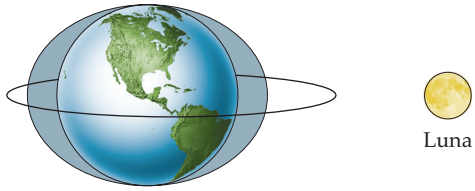


FIGURA 11.32 Problema 106 Las protuberancias de marea (exageradas en la figura) son debidas a la diferencia de la atracción gravitacional de la Luna en lados opuestos de la Tierra

107 ••• PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA La nave de la Federación Unida *Excelsior* suelta dos sondas automáticas en la superficie de una estrella de neutrones con el objetivo de explorarla. La masa de la estrella de neutrones es la misma que la del Sol pero, en cambio, tiene sólo 10 km de diámetro. Las sondas están unidas entre sí por un cable de acero de 1 m de longitud y se sueltan verticalmente, es decir, una por encima de la otra. (*a*) Explicar por qué parece que hay una fuerza que separa las sondas una de otra (véase el problema 106). (*b*) ¿A qué distancia de la superficie de la estrella llegarán antes de que el cable se rompa? Suponer que el cable se rompe cuando alcanza la tensión de 25 000 N y que cada una de las sondas tiene una masa de 1 kg.

CAPÍTULO 12

SOBRE LAS GRÚAS DE LA CONSTRUCCIÓN ACTÚAN FUERZAS Y MOMENTOS DE FUERZA ENORMES, COMO EN LA QUE SE MUESTRA EN LA IMAGEN. LAS GRÚAS DEBEN SER RÍGIDAS Y ESTAR BIEN SUJETAS AL SUELO PARA EVITAR QUE ESAS FUERZAS Y MOMENTOS LAS DERRUMBEN. *(Eric M. Anderson/Tower Cranes of America, Inc.)*

Equilibrio estático y elasticidad

12.1 Condiciones de equilibrio
12.2 Centro de gravedad
12.3 Ejemplos de equilibrio estático
12.4 Equilibrio estático en un sistema acelerado
12.5 Estabilidad del equilibrio de rotación
12.6 Problemas indeterminados
12.7 Tensión y deformación

? Las grúas forman parte del paisaje de las ciudades de todo el mundo. El modelo que se muestra en la imagen tiene 81 m de altura. Se utilizan contrapesos para contrarrestar la carga y evitar que vuelquen. (Véase el ejemplo 12.5.)

En este capítulo, estudiamos las fuerzas y momentos de fuerza que son necesarios para que un cuerpo se mantenga estático (estacionario). Por ejemplo, las fuerzas ejercidas por los cables de un puente colgante deben ser conocidas a fin de fabricarlos con la suficiente resistencia para soportar el puente. De igual modo, las grúas deben diseñarse de modo que no vuelquen al levantar un peso.

En este capítulo, estudiaremos el equilibrio de cuerpos rígidos y analizaremos brevemente las deformaciones y fuerzas elásticas que surgen cuando los sólidos se encuentran bajo una tensión.

12.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Una condición necesaria para que una partícula en reposo permanezca en ese estado es que la fuerza resultante que actúa sobre ella sea nula. Del mismo modo, el centro de masas de un cuerpo rígido permanece en reposo si la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo es cero. Sin embargo, aunque su centro de masas se encuentre en reposo, un cuerpo puede girar. Si hay rotación alrededor de cualquier punto, el cuerpo no está en *equilibrio estático*. Así pues, para que el equilibrio estático exista, el momento resultante que actúa sobre un cuerpo debe ser cero respecto a *cualquier* eje. Con frecuencia, esta condición resulta útil para la resolución de problemas, pues nos permite elegir cualquier eje para el cálculo de los momentos.

Por tanto, las dos condiciones necesarias para que un cuerpo rígido se encuentre en equilibrio estático son:

1. La fuerza externa resultante que actúa sobre el cuerpo debe ser cero:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \qquad 12.1$$

2. El momento externo resultante respecto a cualquier punto debe ser cero:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \qquad 12.2$$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

12.2 CENTRO DE GRAVEDAD

En la sección 4 del capítulo 9, se introdujo el concepto de centro de gravedad en función del momento de fuerza respecto a un eje. Aquí introducimos dicho concepto en función del momento de fuerza respecto a un punto. La figura 12.1*a* muestra un cuerpo rígido en equilibrio estático que suponemos está formado por muchas partículas pequeñas y un punto O. El peso de la partícula i es $\vec{F}_{gi}$, y el peso total del cuerpo $\vec{F}_g = \Sigma \vec{F}_{gi}$. Si $\vec{r}_i$ es el vector posición de la partícula i relativo al punto O, el momento $\vec{\tau}_i$ debido a $\vec{F}_{gi}$ respecto del punto O viene dado por la expresión $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{gi}$. Entonces, el momento gravitatorio neto respecto de O vale $\vec{\tau}_{\text{neto}} = \Sigma(\vec{r}_i \times \vec{F}_{gi})$. El momento gravitatorio neto respecto de cualquier punto se puede calcular como si todo el peso del cuerpo $\vec{F}_g$ estuviera aplicado en un único punto, el centro de gravedad (véase la figura 12.1*b*). Es decir

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \vec{r}_{\text{cg}} \times \vec{F}_g \qquad 12.3$$

CENTRO DE GRAVEDAD

donde $\vec{r}_{\text{cg}}$ es el vector posición del centro de gravedad relativo a O.

Si el campo gravitatorio $\vec{g}$ es uniforme en el cuerpo (como ocurre habitualmente en objetos cuyas dimensiones no alcanzan las dimensiones astronómicas), se escribe $\vec{F}_{gi} = m_i \vec{g}$. Obteniendo en ambos términos el sumatorio para todas las partículas, se obtiene que $\vec{F}_g = M\vec{g}$, donde $M = \Sigma m_i$ es la masa del cuerpo. El momento neto es la suma de los momentos individuales, es decir,

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{gi}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) = \sum_i (m_i \vec{r}_i \times \vec{g})$$

Si en el término de la derecha extraemos $\vec{g}$ como factor común

$$\vec{\tau}_{\text{neto}} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g}$$

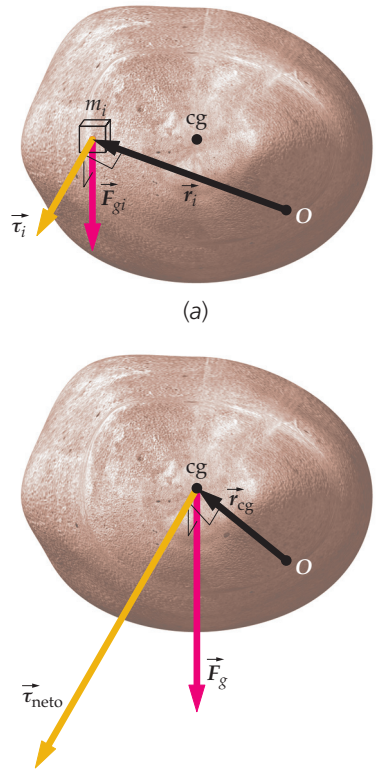


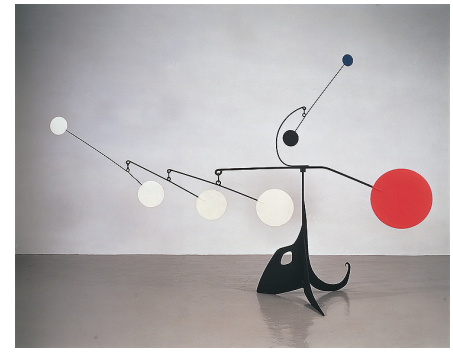
FIGURA 12.1 La dirección del momento de fuerza se obtiene aplicando la regla de la mano derecha para los productos vectoriales. (*a*) $\vec{\tau}_i$ es el momento de la fuerza gravitacional $\vec{F}_{gi}$ respecto a O del i-ésimo elemento de masa. (*b*) El momento de la fuerza gravitacional neto $\vec{\tau}$ respecto a O se puede calcular considerando que la fuerza $\vec{F}_g$ se aplica sobre un punto llamado centro de gravedad.

y sustituyendo por $\Sigma m_i \vec{r}_i$ usando la definición de centro de masas ($M\vec{r}_{cm} = \Sigma m_i \vec{r}_i$), se obtiene

$$\vec{\tau}_{neto} = M\vec{r}_{cm} \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_g \qquad 12.4$$

Las ecuaciones 12.3 y 12.4 son válidas para cualquier punto O siempre que $\vec{r}_{cg} = \vec{r}_{cm}$, es decir, si el cuerpo está en un campo gravitatorio uniforme, pues en él el centro de masas y el centro de gravedad coinciden.

Si O está situado justo encima del centro de gravedad, $\vec{r}_{cg}$ y $\vec{F}_g$ van en la misma dirección (hacia abajo) y, por lo tanto, se cumple $\vec{\tau}_{neto} = \vec{r}_{cg} \times \vec{F}_g = 0$. Por ejemplo, cuando un móvil como el de la fotografía se cuelga con su centro de gravedad directamente por debajo del punto de suspensión, el momento neto sobre el objeto respecto al punto de suspensión es cero, por lo que está en equilibrio estático.



El centro de gravedad del móvil de Calder está situado justamente debajo del punto de suspensión. *(Copyright © 2002 Estate of Alexander Calder/ Artists Rights Society (ARS), New York.)*

12.3 EJEMPLOS DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

En la mayoría de los ejemplos y problemas de este capítulo, todas las fuerzas son perpendiculares al eje z. Por ello, en dichos problemas lo mejor es calcular los momentos respecto a un eje paralelo al eje z, en lugar de hacerlo respecto a un punto. La dirección positiva del eje z se elige perpendicular y dirigida hacia fuera del papel, lo cual equivale a elegir la dirección de las agujas del reloj como dirección negativa y la opuesta a la dirección del movimiento de las agujas del reloj como dirección positiva.

Ejemplo 12.1 Caminando sobre una tabla

Una tabla uniforme de $L = 3$ m de longitud y de $M = 35$ kg de masa está colocada sobre dos balanzas situadas a una distancia $d = 0{,}5$ m de cada uno de los extremos, tal como se muestra en la figura 12.2. (*a*) Calcular qué lectura mostrarán las balanzas cuando María, de $m = 45$ kg de masa, se sitúe en el extremo izquierdo de la tabla. (*b*) Sergio se sube en el otro extremo de la tabla y camina hacia María, que salta al suelo cuando la tabla empieza a inclinarse. ¿Cuál es la masa de Sergio si cuando llega al extremo izquierdo de la tabla la balanza situada a la derecha marca cero?

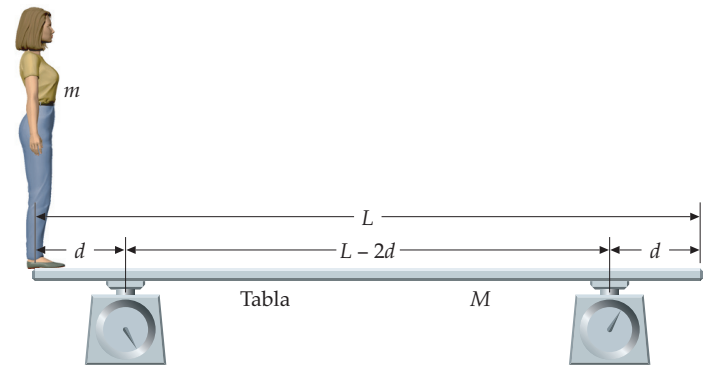


FIGURA 12.2

PLANTEAMIENTO La lectura de las balanzas es el módulo de las fuerzas que se ejercen María y Sergio sobre la tabla. Para determinar el módulo de estas fuerzas, se aplican las dos condiciones de equilibrio.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar el diagrama de fuerzas cuando María está sobre la tabla (véase la figura 12.3). Las fuerzas $\vec{F}_I$ y $\vec{F}_D$ son las fuerzas ejercidas por la balanza de la izquierda y de la derecha, respectivamente:

2. Se toma la dirección hacia arriba positiva y se aplica la condición de que la fuerza neta es cero:

$$\Sigma F_y = 0$$
$$F_I + F_D - Mg - mg = 0$$

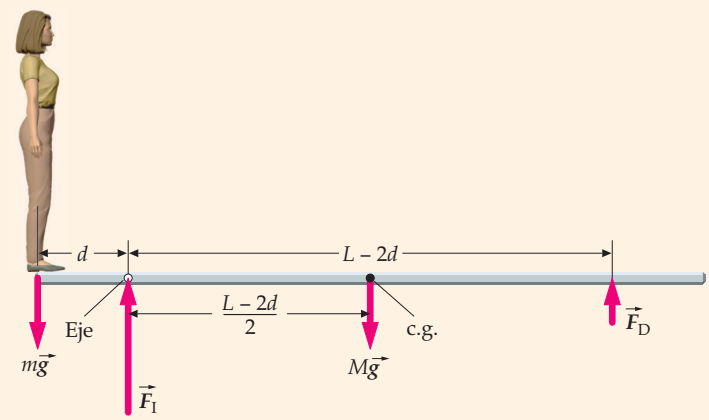


FIGURA 12.3

3. Calcular el momento neto respecto al eje dirigido hacia fuera del papel (considerando que el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj es el sentido positivo) en el punto de aplicación de $\vec{F}_I$:

$$\Sigma\tau = F_I(0) + F_D(L - 2d) - Mg\frac{L - 2d}{2} + mgd$$

4. Imponer que el momento total es cero y despejar para F_D:

$$0 = F_D(L - 2d) - Mg\frac{L - 2d}{2} + mgd$$

$$\text{por lo tanto,} \quad F_D = \left(\frac{1}{2}M - \frac{d}{L - 2d}m\right)g$$

5. Sustituir este resultado de F_D en la expresión del paso 2 y despejar F_I:

$$F_I = Mg + mg - \left(\frac{1}{2}M - \frac{d}{L - 2d}m\right)g = \left(\frac{1}{2}M + \frac{L - d}{L - 2d}m\right)g$$

6. Con el objetivo de obtener los valores numéricos de las fuerzas, sustituir los datos del problema:

$$F_I = \left(\frac{1}{2}35\text{ kg} - \frac{0{,}50\text{ m}}{1{,}5\text{ m}}45\text{ kg}\right)(9{,}81\text{N/kg})$$
$$= 61{,}3\text{ N} = \boxed{61\text{ N}}$$

$$F_D = \left(\frac{1}{2}35\text{ kg} + \frac{2{,}5\text{ m}}{2{,}0\text{ m}}45\text{kg}\right)(9{,}81\text{ N/kg})$$
$$= 723\text{ N} = \boxed{7{,}2 \times 10^2\text{ N}}$$

(*b*) Usando el resultado del paso 4 del apartado (*a*), poner $F_D = 0$ y despejar m:

$$0 = \left(\frac{1}{2}M - \frac{d}{L - 2d}m\right)g$$

$$\text{por lo tanto,} \quad m = \frac{L - 2d}{2d}M = \frac{2{,}0\text{ m}}{1{,}0\text{ m}}35\text{ kg} = \boxed{70\text{ kg}}$$

COMPROBACIÓN La suma de las dos fuerzas del paso 6 del apartado (*a*) debe coincidir con la suma del peso de María más el peso de la tabla. El peso total es $(M + m)g = (35\text{ kg} + 45\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) = 785\text{ N}$. La suma de las fuerzas $F_I + F_D = 723{,}5\text{ N} + 61{,}3\text{ N} = 785\text{ N}$. En el apartado (*b*), Sergio está a 0,5 m del eje y el centro de gravedad de la tabla está a 1 m del eje, cuando el sistema equilibrado con $F_D = 0$ y sin María sobre la tabla. Por tanto, esperamos que la masa de Sergio sea el doble de la masa de la tabla.

El ejemplo 12.1 también puede resolverse utilizando un eje que pase a través de la masa m, pero, en este caso, tanto F_I como F_D aparecen en la ecuación de los momentos y, por ello, el álgebra es un poco más compleja. En general, un problema estático se simplifica calculando los momentos alrededor de un eje sobre la línea de acción de una de las fuerzas desconocidas, como el eje que pasa por el punto de aplicación de la fuerza F_I en el caso del ejemplo.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Elección del eje

PLANTEAMIENTO Recordar las condiciones de equilibrio ($\Sigma\vec{F} = 0$ y $\Sigma\tau = 0$).

SOLUCIÓN

1. Para obtener una solución algebraica sencilla, elegir un eje sobre la línea de acción de la fuerza de la que se tenga menos información.
2. Luego, igualar la suma de momentos de fuerza, respecto a ese eje, a cero.

COMPROBACIÓN Intente encontrar formas alternativas de resolver el problema para comprobar el resultado.

Ejemplo 12.2 La fuerza sobre el codo

Un peso de 6 kg se sostiene en la mano formando el brazo y el antebrazo un ángulo de 90°, como se muestra en la figura 12.4. El músculo bíceps ejerce una fuerza $\vec{F}_m$ cuyo punto de aplicación dista 3,4 cm del punto pivote O, en la articulación del codo. Tratar el antebrazo y la mano como si fueran una barra uniforme de masa $m_h = 1$ kg. (*a*) ¿Cuál es el módulo de $\vec{F}_m$ si la distancia del peso al punto pivote es 30 cm? (*b*) Determinar la fuerza ejercida sobre la articulación del codo por la parte superior del brazo.

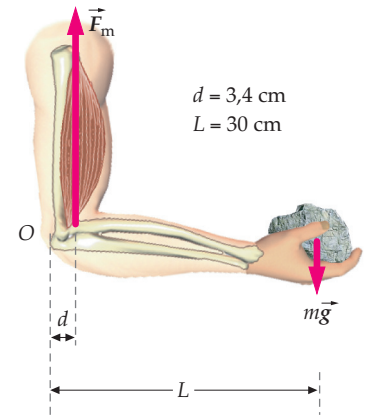


FIGURA 12.4

PLANTEAMIENTO Para determinar las dos fuerzas, aplicar al antebrazo las dos condiciones que se deben cumplir para que haya equilibrio estático ($\Sigma\vec{F} = 0$ y $\Sigma\tau = 0$).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Se dibuja el diagrama de fuerzas para el antebrazo considerando que éste es una barra horizontal (figura 12.5):

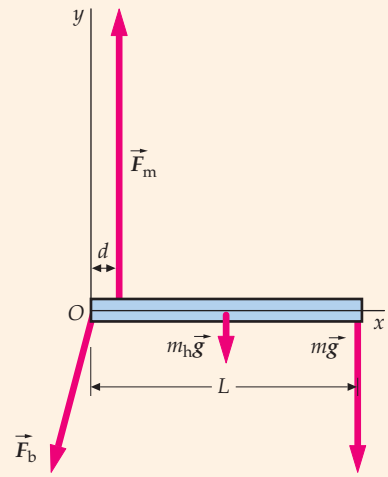


FIGURA 12.5

2. La fuerza de la cual tenemos menos información es la ejercida por la parte superior del brazo en la unión del codo $\vec{F}_b$ (no sabemos ni su módulo ni su dirección). Aplicamos $\Sigma\tau = 0$ alrededor de un eje dirigido hacia fuera del papel y que pasa por el punto de aplicación de $\vec{F}_b$:

$$F_b(0) - m_h g\frac{L}{2} + F_m d - mgL = 0$$

por lo tanto,

$$F_m = \left(\frac{1}{2}m_h + m\right)g\frac{L}{d}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1{,}0\text{ kg}) + 6{,}0\text{ kg}\right)(9{,}81\text{ N/kg})\frac{30\text{ cm}}{3{,}4\text{ cm}}$$

$$= 563\text{ N} = \boxed{5{,}6 \times 10^2\text{ N}}$$

(*b*) Aplicamos $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ para obtener $\vec{F}_b$:

$$F_{bx} + 0 + 0 + 0 = 0$$

y $$F_{by} + F_m - m_h g - mg = 0$$

con lo que $$F_{bx} = 0$$

y $$F_{by} = (m + m_h)g - F_m$$
$$= (7{,}0\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg}) - 563\text{ N}$$
$$= -494\text{ N}$$

Por consiguiente,

$$\vec{F}_b = \boxed{4{,}9 \times 10^2\text{ N, hacia abajo}}$$

COMPROBACIÓN F_b puede determinarse en un solo paso escogiendo como pivote el punto donde el bíceps se une al antebrazo. Igualando a cero el momento resultante, se obtiene $F_b(3{,}4\text{ cm}) + F_m(0) - (6\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(30\text{ cm} - 3{,}4\text{ cm}) - (1\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(15\text{ cm} - 3{,}4\text{ cm}) = 0$. Esta ecuación da el mismo resultado que el paso (*b*). Por lo tanto, $F_b = 490$ N.

OBSERVACIÓN (1) La fuerza que debe ejercer el músculo es 9,6 veces el peso del objeto. Además, cuando el músculo tira hacia arriba, el brazo superior empuja hacia abajo para mantener el antebrazo en equilibrio. La fuerza ejercida por el brazo superior es 8,4 veces mayor que el peso del objeto. (2) Este ejemplo y este ejercicio demuestran que podemos elegir el punto pivote donde nos convenga más para simplificar los cálculos.

Ejemplo 12.3 Colgando un anuncio *Inténtelo usted mismo*

La directora de la librería del campus ha encargado un nuevo rótulo para anunciar su establecimiento. El rótulo tiene una masa de 20 kg y ha de colocarse colgado de una barra rígida que está sujeta a la pared mediante un cable (véase la figura 12.6). Para saber qué cable se necesita, la directora pide ayuda a un estudiante de física para que le calcule la tensión del cable. También le pide que calcule la fuerza que la barra ejercerá sobre la pared. La barra tiene una longitud de 2 m y una masa de 4 kg, y el cable pende de la pared de un punto situado 1 m por encima de la barra.

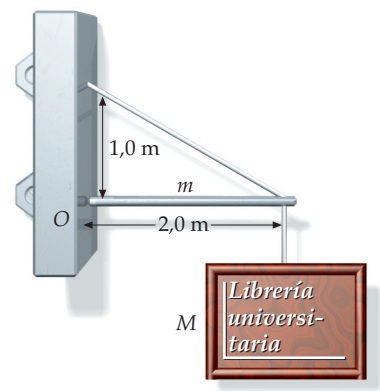


FIGURA 12.6

PLANTEAMIENTO Para que la barra esté en equilibrio, tienen que cumplirse tres condiciones: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma\tau = 0$, donde los momentos se calcularán respecto a un eje que pasa por la línea de acción de la que tenemos menos información. La fuerza ejercida por la barra sobre la pared es igual, pero opuesta a la fuerza ejercida por la pared sobre la barra.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Se dibuja el diagrama de fuerzas de la barra (figura 12.7).	
2. Se impone la condición $\Sigma\tau = 0$ respecto a un eje perpendicular a la página que pasa por el punto O, que va sobre la línea de acción de fuerza que hace la pared sobre la barra.	$TL\,\text{sen}\,\theta - MgL - mg\frac{L}{2} = 0$ por lo tanto, $T = \frac{(M + \frac{1}{2}m)g}{\text{sen}\,\theta}$
3. Se usa la trigonometría para despejar θ.	$\theta = \text{arctg}\frac{1}{2} = 26{,}6°$
4. Utilizando el resultado del paso 2, se despeja T.	$T = 483\ \text{N} = \boxed{4{,}8 \times 10^2\ \text{N}}$
5. Se impone $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$; entonces, usando los valores calculados de T y de θ, se despejan F_x y F_y.	$F_x + T_x = 0$ $F_y + T_y - Mg - mg = 0$ por lo tanto, $F_x = 432\ \text{N}$, $F_y = 19{,}2\ \text{N}$
6. Se despeja la fuerza $\vec{F}'$ ejercida por la barra sobre la pared. La fuerza ejercida por la barra sobre la pared y la fuerza ejercida por la pared sobre la barra son un par de fuerzas 3*L*N:	$\vec{F}' = -\vec{F} = \boxed{-4{,}3 \times 10^2\ \text{N}\,\hat{i} - 19\ \text{N}\,\hat{j}}$

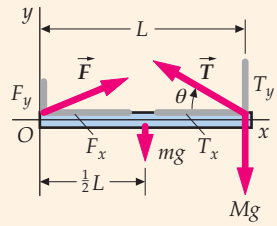


FIGURA 12.7

COMPROBACIÓN Las componentes x e y de la fuerza que ejerce la barra sobre la pared son negativas, como era de esperar.

Ejemplo 12.4 La rueda que sube un escalón — *Inténtelo usted mismo*

Una rueda de masa M y radio R descansa sobre una superficie horizontal contra un escalón de altura h ($h < R$). La rueda tiene que subir el escalón mediante la fuerza horizontal $\vec{F}$ aplicada al eje de la rueda, como indica la figura 12.8. Determinar la fuerza mínima $F_{\text{mín}}$ necesaria para elevar la rueda sobre el escalón.

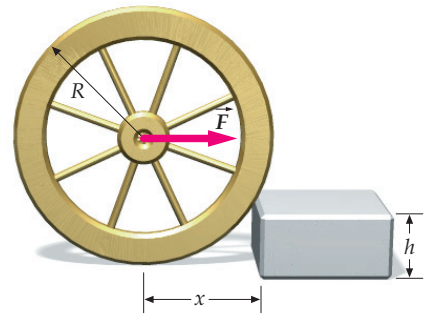


FIGURA 12.8

PLANTEAMIENTO Si el módulo de F es menor que $F_{\text{mín}}$, la superficie de debajo de la rueda ejerce una fuerza normal dirigida hacia arriba sobre la rueda. Cuando F crece, esta fuerza normal disminuye. Aplicar la condición de equilibrio estático para determinar el valor de F para el cual la rueda todavía permanece en sus sitio cuando la fuerza normal es cero.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la rueda (figura 12.9).	
2. Aplicar la condición $\Sigma\tau = 0$ a la rueda. Se desconoce tanto la dirección como el módulo de $\vec{F}'$, por lo que conviene calcular los momentos alrededor de un eje que pase por el punto de aplicación de esta fuerza. Obtener expresiones para los brazos de palanca a partir del diagrama de fuerzas y despejar $F_{\text{mín}}$.	$\Sigma\tau = F_{\text{mín}}(R - h) - Mgx = 0$ por lo tanto, $F_{\text{mín}} = \frac{Mgx}{R - h}$
3. Usar el teorema de Pitágoras para expresar x en función de h y R.	$x = \sqrt{h(2R - h)}$
4. Igualar los módulos de los momentos y despejar F.	$F_{\text{mín}} = \boxed{\frac{\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}Mg}$

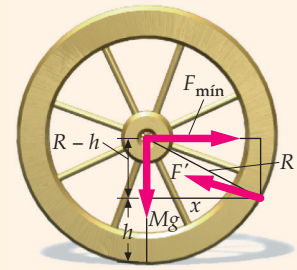


FIGURA 12.9

COMPROBACIÓN Calculamos $F_{mín}$ para los casos límites de $h = 0$ y $h = R$. Como para $h = 0$ no hay bordillo, esperamos que $F_{mín} = 0$, mientras que para $h = R$ no debería ser posible subir el bordillo. El resultado del paso 4 da $F_{mín} = 0$ si $h = 0$ y $F_{mín} \to \infty$ si $h \to R$, como era de esperar.

OBSERVACIÓN Aplicando $\Sigma\tau = 0$ respecto a un eje que pasa por el centro de la rueda vemos que $\vec{F}'$ está dirigida directamente hacia el centro de la rueda, ya que de otro modo habría un momento neto resultante distinto a cero.

Ejemplo 12.5 Equilibrio de una grúa

La figura 12.10 muestra una grúa torre modelo K-10000. Los elementos horizontales que se extienden como brazos a cada lado de la torre se llaman plumas. La torre tiene una anchura de 12 m. La pluma delantera, cuya masa es de $m_{FJ} = 80$ t (1 t = 1000 kg), mide 80 m. La pluma de contrapeso mide 44 m y su masa es de $m_{cwJ} = 31$ t, el contrapeso fijo tiene una masa $m_{cf} = 100$ t, el contrapeso móvil exterior tiene una masa $m_{cme} = 40$ t, el contrapeso móvil interno tiene una masa $m_{cmi} = 83$ t y la torre tiene una masa $m_T = 100$ t. Se suspende una masa $m_L = 100$ t del centro de la pluma delantera. ¿Está compensada la grúa? En caso negativo, ¿se podría mover la carga para que lo estuviera?

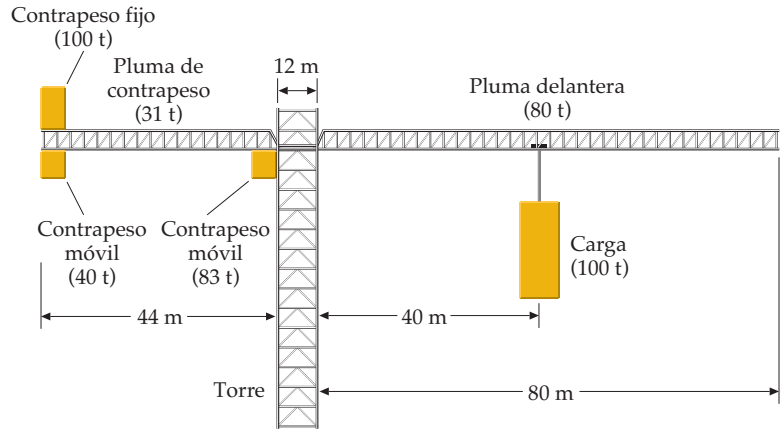


FIGURA 12.10

PLANTEAMIENTO La grúa está compensada si el centro de gravedad, y por tanto su centro de masas, queda dentro de la torre. Supongamos que cada pluma es una barra uniforme y que cada contrapeso es una masa puntual. Calculamos la componente x del centro de masas de la grúa y la carga, situando la dirección positiva del eje x hacia la derecha en la figura 12.11.

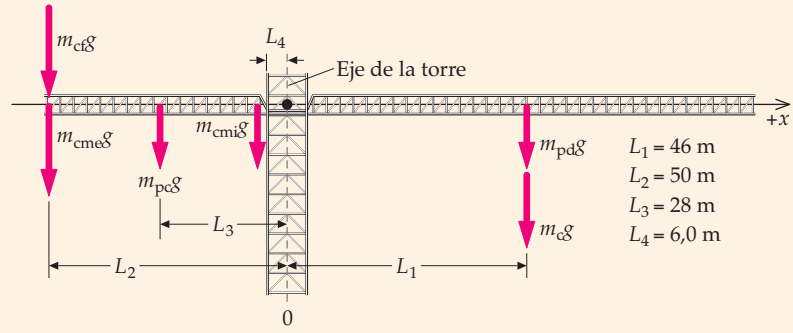


FIGURA 12.11

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la grúa y la carga (figura 12.11). Dibujar el eje x con el origen en el centro de la torre:

2. Calculamos el centro de masas del sistema:

$$Mx_{cm} = (m_{FJ} + m_L)L_1 + m_T(0) - (m_{cf} + m_{cme})L_2 - m_{pc}L_3 - m_{cmi}L_4$$

por tanto,

$$x_{cm} = \frac{(180\text{ t})(46\text{ m}) + 0 - (140\text{ t})(50\text{ m}) - (31\text{ t})(28\text{ m}) - (83\text{ t})(6{,}0\text{ m})}{180\text{ t} + 100\text{ t} + 140\text{ t} + 31\text{ t} + 83\text{ t}}$$

$$= -0{,}16\text{ m}$$

3. Si el centro de masas queda fuera de la torre, ésta no estará compensada:

El centro de gravedad está situado a 16 cm a la izquierda del eje vertical de la torre. Como el centro de masas queda en el interior de la torre, cuya anchura es de 12 m,

la grúa está compensada.

COMPROBACIÓN El extremo izquierdo de la pluma de contrapeso está en $x = -50$ m, y el extremo derecho de la pluma delantera está en $x = 86$ m. Entonces, el resultado del paso 2 es razonable, puesto que está dentro del intervalo $-50\text{ m} < x < 86\text{ m}$.

OBSERVACIÓN Las torres suelen estar ancladas sobre una plataforma giratoria que está firmemente sujeta al suelo.

Ejemplo 12.6 La escalera apoyada en la pared

Una escalera uniforme de 5 m pesa 60 N y está apoyada contra una pared vertical sin rozamiento (figura 12.12). El pie de la escalera está a 3 m de distancia de la pared. ¿Cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento estático necesario entre el suelo y la escalera para que ésta no se deslice?

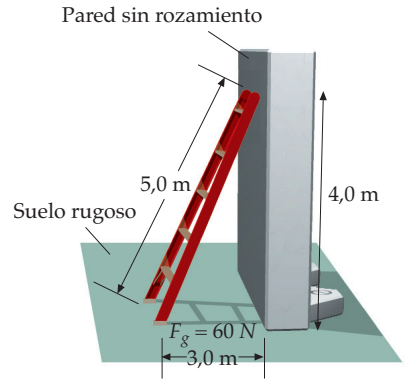


FIGURA 12.12

PLANTEAMIENTO Son necesarias tres condiciones para que la escalera se encuentre en equilibrio: $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma\tau = 0$. Para despejar μ_e aplicar estas condiciones junto con $f_e \leq \mu_e F_n$.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas de la escalera tal como se muestra en la figura 12.13. Las fuerzas que actúan sobre la escalera son la fuerza de la gravedad, $\vec{F}_g$, la fuerza $\vec{F}_1$ ejercida por la pared (al no haber rozamiento es solamente una fuerza normal), y la fuerza ejercida por el suelo, que consiste en una componente normal F_n y una componente de rozamiento estático f_e:

2. El coeficiente de rozamiento estático mínimo está relacionado con la fuerza de rozamiento f_e y la fuerza normal F_n: $\mu_e \geq \dfrac{f_e}{F_n}$ por lo tanto, $\mu_{e\text{mín}} = \dfrac{f_e}{F_n}$

3. Establecer que $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$: $f_e - F_1 = 0$ y $F_n - F_g = 0$

4. Despejar f_e y F_n: $f_e = F_1$ y $F_n = F_g = 60$ N

5. Aplicar $\Sigma\tau = 0$ respecto a un eje dirigido hacia fuera del papel situado en el pie de la escalera, el punto de aplicación de la fuerza de la cual tenemos menos información: $F_1(4{,}0\text{ m}) - F_g(1{,}5\text{ m}) = 0$

6. Despejar la fuerza F_1: $F_1 = \dfrac{F_g(1{,}5\text{ m})}{4{,}0\text{ m}} = \dfrac{(60\text{ N})(1{,}5\text{ m})}{4{,}0\text{ m}} = 22{,}5\text{ N}$

7. Utilizar este resultado de F_1 y $f_e = F_1$ (paso 4) para calcular f_e: $f_e = F_1 = 22{,}5$ N

8. Utilizar estos resultados de f_e y F_n para obtener el valor mínimo de $\mu_{e\text{ mín}}$ del paso 2: $\mu_{e\text{mín}} = \dfrac{f_e}{F_n} = \dfrac{22{,}5\text{ N}}{60\text{ N}} = 0{,}375 = \boxed{0{,}38}$

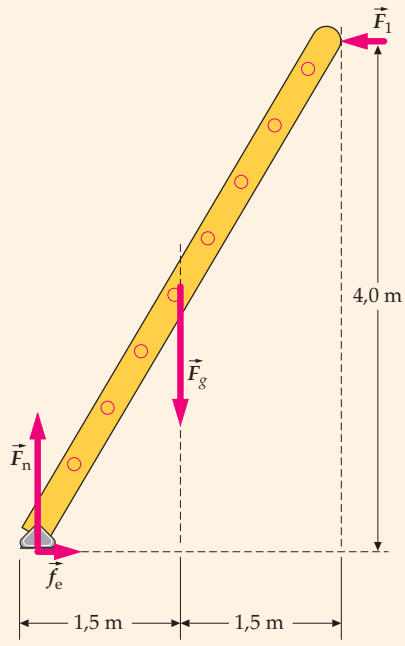


FIGURA 12.13

COMPROBACIÓN Hay otra forma de ver este problema. En el diagrama de fuerzas de la escalera que muestra la figura 12.14, las líneas de acción del peso $\vec{F}_g$ y $\vec{F}_1$ ejercida por la pared se cortan en el punto P. Esto significa que el momento de cada una de dichas fuezas respecto a un punto P se anula. Como la suma de todos los momentos respecto a P debe ser igual a cero, el momento de $\vec{F}_2$ respecto a P deberá ser cero. Esto significa que la línea de acción de $\vec{F}_2$ deberá pasar también por el punto P. En consecuencia, tg $\theta' = 4{,}0\text{ m}/1{,}5\text{ m} = F_n/f_e$ y, por tanto, $f_e/F_n = 1{,}5/4{,}0 = 0{,}375$, que es el mismo que el obtenido en el paso 8.

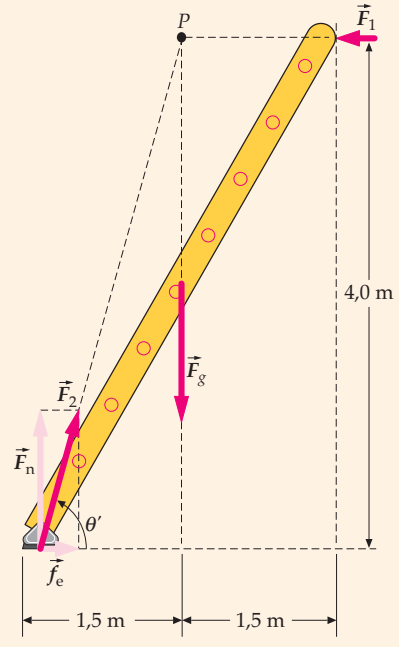


FIGURA 12.14

! Si un objeto está en equilibrio estático bajo la influencia de tres fuerzas, donde las líneas de acción de dos de ellas se cortan en un punto, las líneas de acción de las tres fuerzas se cortan en el mismo punto.

PROBLEMA PRÁCTICO 12.1

Demostrar que si un objeto está en equilibrio estático bajo la influencia de tres fuerzas, donde las líneas de acción de dos de ellas se cortan en un punto, las líneas de acción de las tres fuerzas se cortan en el mismo punto.

PAR DE FUERZAS

Las fuerzas $\vec{F}_n$ y $\vec{F}_g$ en la figura 12.13 del ejemplo 12.6 son iguales y opuestas. Este sistema recibe el nombre de **par de fuerzas** y tiende a producir una rotación, aunque su fuerza resultante es cero. Las fuerzas $\vec{f}_e$ y $\vec{F}_1$ en estas figuras también constituyen un par. La figura 12.15 muestra un par formado por las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ separadas por la distancia D. El momento producido por este par respecto a un punto arbitrario O es

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \qquad 12.5$$

Este resultado no depende de la elección del punto O.

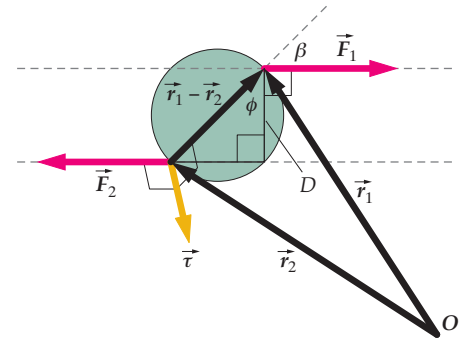


FIGURA 12.15 El momento $\vec{\tau}$ producido por las dos fuerzas va hacia el interior de la página-perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas. D es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de las fuerzas.

El momento producido por un par de fuerzas es el mismo respecto a cualquier punto del espacio.

El módulo de este momento es

$$\tau = FD \qquad 12.6$$

donde F es el módulo de una de las fuerzas y D es la distancia entre las líneas de acción de ambas fuerzas.

PROBLEMA PRÁCTICO 12.2
Demostrar que el módulo de $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$ (ver ecuación 12.5) es FD (ver ecuación 12.6), donde D (ver figura 12.15) es la distancia entre las líneas de acción de las dos fuerzas y F es el módulo de cualquiera de las dos fuerzas.

Ejemplo 12.7 Volcando un bloque

Al visitar una cantera de mármoles usted se da cuenta de que hay un billete de $ 100 debajo de un bloque de mármol (figura 12.16) de masa m, altura H y sección transversal cuadrada de lado L. Entonces, intenta llevarse el billete pero está enganchado. Empuja el bloque con una fuerza horizontal a una distancia h sobre el suelo. ¿Qué fuerza debe aplicar para que el bloque se levante ligeramente y pueda retirar el billete? Suponer que el rozamiento impide el posible deslizamiento del bloque.

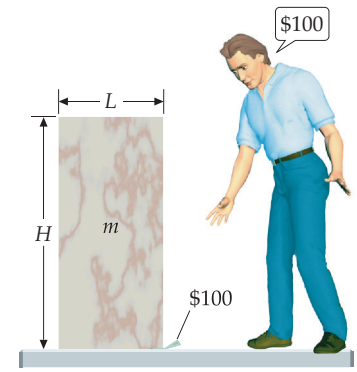


FIGURA 12.16

PLANTEAMIENTO Dibujar el diagrama de fuerzas sobre el bloque y aplicar las condiciones para el equilibrio. Si hay pares de fuerzas, utilizar la ecuación 12.6 para determinar el momento.

SOLUCIÓN

1. Suponer que el bloque está justo en el límite de ser levantado. Dibujar el diagrama de fuerzas sobre el bloque (figura 12.17). Dibujar la normal en el borde izquierdo (ver el comentario al final del ejemplo):

2. Aplicar $\Sigma F_x = ma_x$ y $\Sigma F_y = ma_y$ al bloque, donde $a_x = a_y = 0$: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ap} = f_e$ y $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow m\vec{g} = \vec{F}_n$

3. Identificar los pares de fuerzas: $\vec{F}_{ap}$ y $\vec{f}_e$ forman el par 1 y $m\vec{g}$ y $\vec{F}_n$ forman el par 2

4. Elegir el sentido antihorario como sentido positivo de giro y, utilizando la ecuación 12.6, calcular el momento de cada par de fuerzas: $\tau_1 = +F_{ap}h$ y $\tau_2 = -mg\frac{1}{2}L$

5. Utilizando $\Sigma\tau = 0$, despejar F_{ap}: $F_{ap}h - mg\frac{1}{2}L = 0$

   por lo tanto, $F_{ap} = \boxed{\frac{L}{2h}mg}$

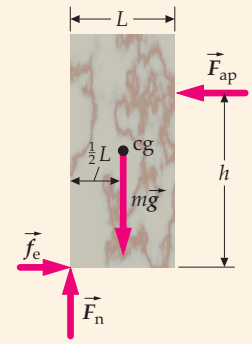


FIGURA 12.17

COMPROBACIÓN Es de esperar que cuanto mayor sea la altura a la que se empuje el bloque, menor será la fuerza necesaria para hacer rotar al bloque. El resultado del paso 5 muestra cómo F_{ap} decrece cuando h aumenta.

OBSERVACIÓN La fuerza de reacción está uniformemente distribuida a lo largo de la superficie del bloque que está en contacto con el suelo, antes de empezar a empujar. Conforme empuja el bloque, el centroide (centro efectivo) de la distribución de la fuerza normal se desplaza hacia la izquierda. Justo cuando la fuerza aplicada es tan grande que el bloque empieza a levantarse, el centroide de la fuerza normal se desplaza al borde izquierdo de la parte inferior del bloque.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 12.1

Hay una solución de mínimo esfuerzo para este problema. Existe un eje respecto al cual podemos calcular la suma de momentos e igualar a cero, de forma que nos proporciona directamente el resultado. ¿Cuál es?

12.4 EQUILIBRIO ESTÁTICO EN UN SISTEMA ACELERADO

Por sistema acelerado, entendemos un sistema de referencia que está acelerando, pero no rotando, respecto a un sistema de referencia inercial. Si consideramos un objeto en reposo en un sistema de referencia acelerado, la fuerza resultante no es cero. Para que el objeto se encuentre en reposo respecto a un sistema acelerado debe tener la misma aceleración que el sistema. Las dos condiciones para que un sistema se encuentre en equilibrio estático en un sistema de referencia acelerado son:

1. $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$
   donde $\vec{a}_{cm}$ es la aceleración del centro de masas, que es la aceleración del sistema de referencia.

2. $\Sigma \vec{\tau}_{cm} = 0$
   La suma de los momentos respecto al centro de masas debe ser cero.

La segunda condición resulta de la validez de la segunda ley de Newton para la rotación, $\Sigma \vec{\tau}_{cm} = I_{cm}\vec{\alpha}$, aplicada a los momentos alrededor del centro de masas, esté o no esté acelerado el centro de masas.*

Ejemplo 12.8 Moviendo una caja

Un camión transporta una caja uniforme de masa m, altura h y una sección cuadrada de lado L (figura 12.18*a*). ¿Cuál es la máxima aceleración que el camión puede tomar sin que vuelque la caja? Suponer que la caja vuelca antes de resbalar.

PLANTEAMIENTO Hay tres fuerzas que actúan sobre la caja, la fuerza gravitacional, la fuerza de rozamiento estático y la normal. La aceleración de la caja es debida a la fuerza de rozamiento, como indica la figura 12.18*b*. Esta fuerza ejerce también un momento antihorario respecto al centro de masas de la caja. La única fuerza que ejerce un momento respecto al centro de masas de la caja es la fuerza normal. Si la caja y el camión no aceleran, la fuerza normal se distribuye uniformemente por la cara inferior de la caja. Si la aceleración es pequeña, esta distribución se desplaza y el punto efectivo de aplicación de la fuerza normal (punto donde se puede considerar aplicada toda la fuerza normal para calcular su momento) se mueve hacia la izquierda y da lugar a un momento de balanceo respecto al centro de masas. El máximo momento de balanceo que esta fuerza puede ejercer tiene lugar cuando pasa por el borde de la caja, como se muestra en la figura.

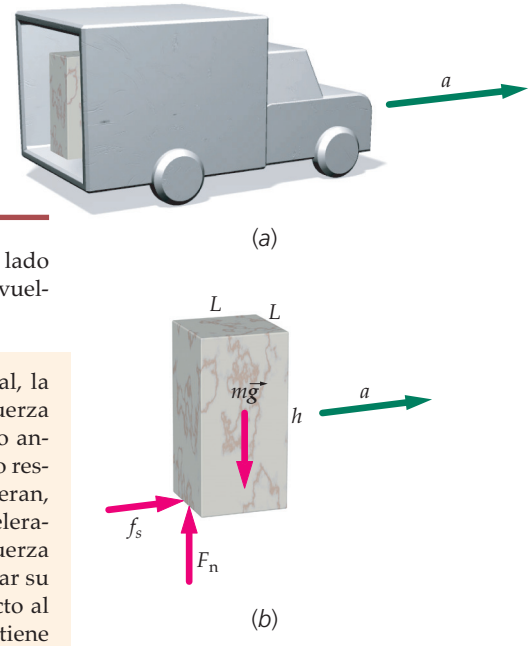


FIGURA 12.18

* Véase el análisis relacionado con la ecuación 9.30.

SOLUCIÓN

1. Dibujar el diagrama de fuerzas para la caja (figura 12.19):
2. Aplicar $\Sigma F_y = ma_{cmy}$ a la caja y despejar la fuerza normal: $F_n - mg = 0$ es decir, $F_n = mg$
3. Aplicar $\Sigma F_x = ma_{cmx}$: $f_e = ma$
4. Aplicar $\Sigma\tau_{cm} = 0$: $f_e \frac{h}{2} - F_n d = 0$, donde $d \leq \frac{1}{2}L$
5. Si $d = \frac{1}{2}L$, entonces la aceleración es máxima. Sustituir $\frac{1}{2}L$ en lugar de d, $ma_{máx}$ en lugar de f_e, y mg en lugar de F_n, y despejar $a_{máx}$: $ma_{máx}\frac{h}{2} - mg\frac{L}{2} = 0$ por tanto, $a_{máx} = \boxed{\frac{L}{h}g}$

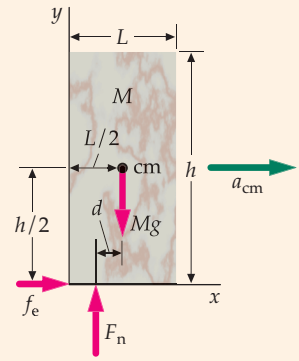


FIGURA 12.19

COMPROBACIÓN Es de esperar que $a_{máx}$ sea mayor para una caja baja y ancha (esto es, pequeña h y grande L) que para una caja alta y estrecha (h grande y pequeña L). El resultado del paso 5 confirma este argumento.

12.5 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO DE ROTACIÓN

El equilibrio de rotación de un cuerpo puede clasificarse según tres categorías: estable, inestable e indiferente. El **equilibrio de rotación estable** tiene lugar cuando los momentos que surgen de un pequeño desplazamiento angular del cuerpo le obligan a recuperar su orientación de equilibrio. El equilibrio estable viene ilustrado en la figura 12.20*a*. Cuando el cono gira ligeramente alrededor de un extremo, el momento resultante respecto al punto pivote tiende a restaurar el cono a su orientación original. Obsérvese que esta ligera rotación eleva el centro de gravedad, incrementando la energía potencial del cono.

El **equilibrio de rotación inestable**, ilustrado en la figura 12.20*b*, tiene lugar cuando los momentos que surgen de un pequeño desplazamiento angular del objeto le obligan a separarse de su orientación de equilibrio. Una ligera inclinación del cono ocasiona su caída, porque el momento debido a su peso le aparta de su orientación inicial. En este caso, la rotación hace descender el centro de gravedad y la energía potencial del cono disminuye.

El cono que descansa sobre la superficie horizontal de la figura 12.20*c* ilustra el **equilibrio de rotación indiferente**. Si se hace rodar el cono ligeramente, no existe

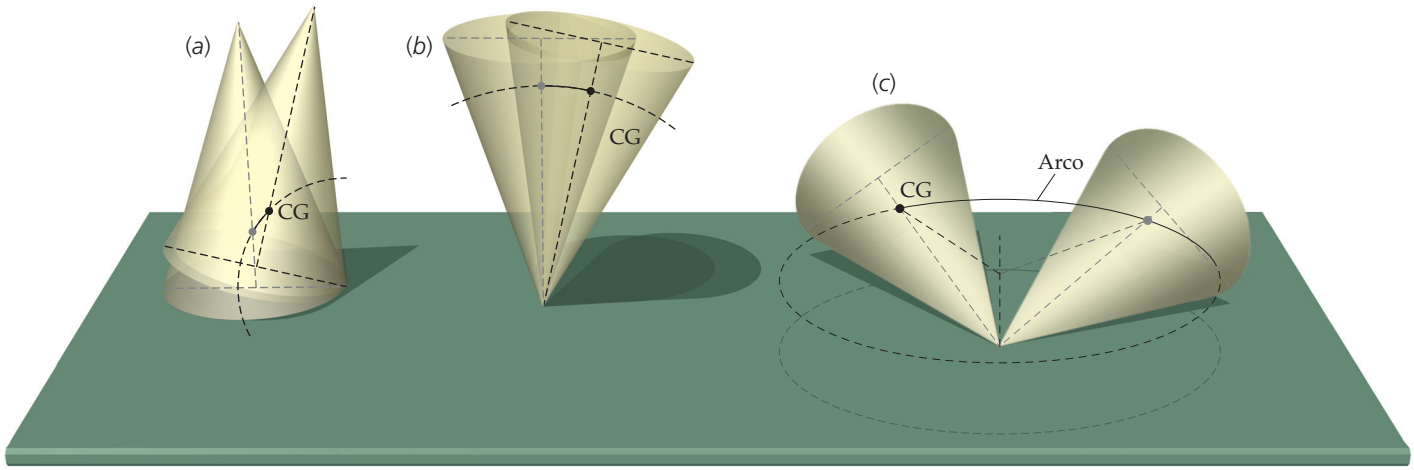


FIGURA 12.20 Si un pequeño movimiento hace que el centro de gravedad suba, como en (*a*), el equilibrio es estable. Si un pequeño movimiento baja el centro de gravedad, como en (*b*), el equilibrio es inestable. Si un pequeño movimiento ni sube ni baja el centro de gravedad, como en (*c*), el equilibrio es indiferente.

momento fuerza que le obligue a recuperar su orientación original ni a alejarse de ella. Cuando el cono gira, la altura del centro de gravedad permanece invariable, de modo que la energía potencial no se modifica.

En resumen, si un sistema se perturba ligeramente respecto a su posición de equilibrio, este equilibrio es estable si el sistema vuelve a su posición original, inestable si se aleja del equilibrio, e indiferente si no hay momentos que lo desplacen en alguna dirección.

Como la expresión "perturbar ligeramente" es un término relativo, la estabilidad es también relativa. Un caso de equilibrio puede ser más o menos estable que otro. Por ejemplo, se hace balancear una barra por un extremo, como en la figura 12.21*a*. En este caso, si la perturbación es muy pequeña (figura 12.21*b*) la barra volverá a ocupar su orientación original, pero si la perturbación es suficientemente grande para que la vertical que pasa por el centro de gravedad se salga de la base de soporte (figura 12.21*c*) la barra volcará.

Podemos mejorar la estabilidad de un sistema bajando su centro de gravedad o ampliando su base de soporte. La figura 12.22 muestra una barra no uniforme que tiene su centro de gravedad próximo a un extremo. Si la barra se sitúa verticalmente sobre su extremo más pesado, de modo que su centro de gravedad esté bajo (figura 12.22*a*), es mucho más estable que si está de pie sobre el otro extremo y el centro de gravedad queda más alto (figura 12.22*b*).

En la figura 12.23, el centro de gravedad está por debajo del punto de soporte del sistema. Este sistema es estable para cualquier desplazamiento, pues el momento resultante siempre hace girar el sistema hacia su posición de equilibrio.

Un ser humano de pie, o caminando erecto, tiene dificultad en mantener su equilibrio porque el centro de gravedad está alto y debe mantenerse siempre sobre la base de soporte, los pies, que es relativamente pequeña. Esta es la razón por la cual los niños tardan aproximadamente un año en aprender a andar. Un animal que camina sobre sus cuatro patas aprende a andar más rápidamente porque su base de sustentación es mayor y su centro de gravedad está más bajo. Los gatitos recién nacidos andan casi inmediatamente.

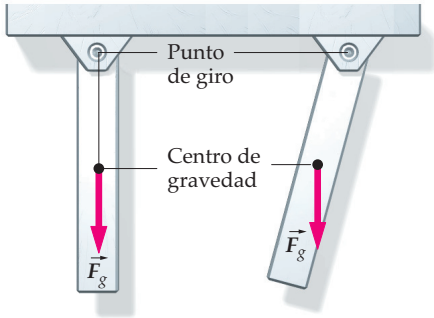


FIGURA 12.23

12.6 PROBLEMAS INDETERMINADOS

Cuando los cuerpos no son rígidos, sino deformables, es necesaria una mayor información para determinar las fuerzas que requiere el equilibrio. Consideremos una camioneta en reposo sobre una superficie horizontal. En su maletero hay un cuerpo muy pesado. Queremos saber cuál es la fuerza de soporte vertical ejercida por la calzada sobre cada uno de los neumáticos. Consideremos el sistema compuesto por la camioneta más el cuerpo del maletero y supongamos que conocemos la localización de cada uno de los neumáticos, del peso del sistema y la del centro de gravedad. Esta información, ¿es suficiente para calcular las fuerzas normales en cada rueda? La respuesta es no. Tenemos cuatro magnitudes indeterminadas por lo que necesitamos de cuatro ecuaciones para resolverlas. Como el sistema está en equilibrio, las condiciones del equilibrio sólo nos aportan tres ecuaciones independientes. Supongamos que el pavimento está en el plano *xy*. La primera condición del equilibrio es que la suma de las fuerzas externas sea cero. Esto sólo nos da una

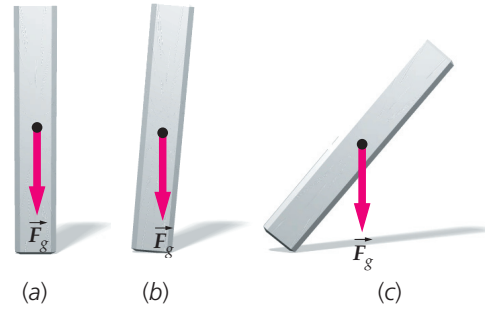


FIGURA 12.21 La estabilidad del equilibrio es relativa. Si se hace girar la barra en (*a*) ligeramente, como indica (*b*), vuelve a su posición original de equilibrio siempre que la vertical que pasa por el centro de gravedad no sobresalga de la base de sustentación. (*c*) Si la rotación es demasiado grande, el centro de gravedad sobrepasa la base de sustentación y la barra vuelca.

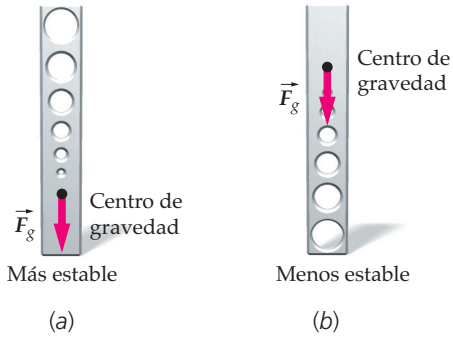


FIGURA 12.22 Cuando una barra no uniforme descansa sobre su extremo más pesado con su centro de gravedad a poca altura, como en (*a*), el equilibrio es más estable que cuando su centro de gravedad es alto, como ocurre en (*b*).

El niño pequeño es relativamente inestable (si lo comparamos con un gatito). *(Photodisk.)*

ecuación ($\Sigma F_z = 0$), pues todas las fuerzas son verticales. La segunda condición de equilibrio es que la suma de todos los momentos de fuerza externos respecto a un punto cualquiera sea cero. Esto nos da dos ecuaciones adicionales, $\Sigma\tau_x = 0$ y $\Sigma\tau_y = 0$, pues no hay momentos en la dirección vertical. Hay dos fuerzas externas actuando sobre la camioneta: la fuerza de la gravedad y las fuerzas normales sobre los neumáticos. Si elegimos uno de los neumáticos como origen, el momento ejercido por todas las fuerzas respecto a este punto tiene componentes x e y, pero no componente z, porque no hay fuerzas horizontales.

Por tanto, obtenemos dos ecuaciones estableciendo que el momento neto sea cero, y una tercera ecuación estableciendo que la fuerza neta vertical sea nula. Necesitamos otra ecuación para determinar la fuerza ejercida por la calzada sobre cada una de las cuatro ruedas. Si extraemos aire de uno de los neumáticos o aumentamos la presión de otro, la camioneta sigue en equilibrio, pero la fuerza ejercida sobre cada neumático cambia. Evidentemente, las fuerzas sobre los neumáticos en este problema no están determinados por la información recibida. Los neumáticos no son cuerpos rígidos. En cierto modo, todo objeto es deformable.

12.7 TENSIÓN Y DEFORMACIÓN

Si un objeto sólido está sometido a fuerzas que tienden a alargarlo, cortarlo (deformación de cizalladura) o comprimirlo, la forma del objeto varía. Si el objeto recupera su forma original después de suprimir las fuerzas, se dice que el objeto es **elástico**. La mayoría de los cuerpos tienen un comportamiento elástico al verse sometidos a la acción de fuerzas, con tal de que éstas no superen un cierto valor máximo denominado **límite elástico**. Si las fuerzas son demasiado grandes, el objeto no recupera su forma original, sino que se deforma permanentemente.

La figura 12.24 muestra una barra sólida de longitud L sometida a una tracción o **fuerza tensora** $\boldsymbol{F}$ que actúa igualmente hacia la derecha y hacia la izquierda. La barra está en equilibrio, pero las fuerzas que actúan sobre ella tienden a incrementar su longitud. La variación relativa de la longitud de la barra, $\Delta L/L$, recibe el nombre de **deformación**:

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta L}{L} \qquad 12.7$$

El cociente entre la fuerza F y el área de la sección transversal A de la barra se llama **tensión de tracción** (o simplemente tensión):

$$\text{Tensión} = \frac{F}{A} \qquad 12.8$$

La figura 12.25 muestra una representación gráfica de la tensión en función de la deformación para una barra sólida típica. El gráfico es lineal hasta el punto A. Hasta este punto, que se conoce como el límite lineal, la tensión es proporcional a la deformación. El hecho comprobado de que la deformación cambie linealmente con la tensión se conoce con el nombre de ley de Hooke. El punto B de la figura 12.25 es el límite elástico del material. Si se alarga la barra por encima de este punto, se deforma permanentemente. Si la tensión a la que se somete el material es aún mayor, finalmente se rompe, como está indicado en el punto C. El cociente entre la tensión y la deformación en la zona lineal del gráfico es una constante denominada **módulo de Young** Y:

$$Y = \frac{\text{tensión}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \qquad 12.9$$

DEFINICIÓN: MÓDULO DE YOUNG

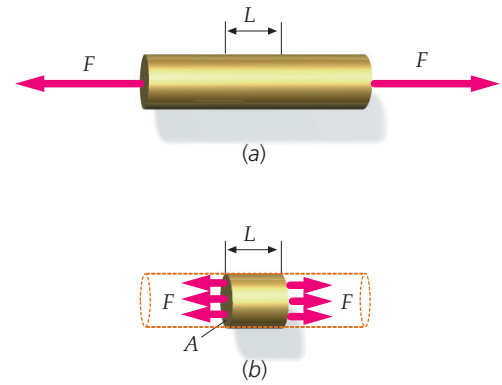


FIGURA 12.24 (*a*) Barra sólida sometida a fuerzas deformadoras F que actúan en sus extremos. (*b*) Pequeña sección de la barra de longitud L. Los elementos de la barra a la izquierda y a la derecha de esta sección ejercen fuerzas sobre ella. Si la sección no está muy próxima a un extremo de la barra, estas fuerzas se distribuyen por igual sobre el área transversal. La fuerza por unidad de área es la tensión.

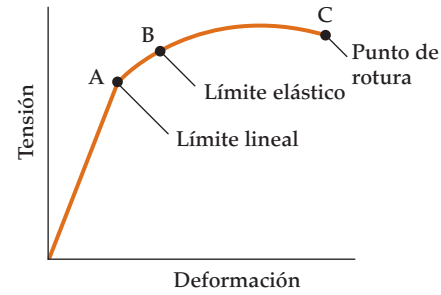


FIGURA 12.25 Tensión en función de la deformación. Hasta el punto A, la deformación es proporcional a la tensión. El punto B, límite elástico, es el punto a partir del cual la barra no recuperará su longitud original cuando se suprima la tensión. En el punto C, la barra se rompe.

Tabla 12.1 Módulo de Young *Y* y resistencia de diversos materiales†

Material	*Y*, GN/m²‡	Resistencia a la tracción MN/m²	Resistencia a la compresión MN/m²
Acero	200	520	520
Aluminio	70	90	
Cobre	110	230	
Hierro (forjado)	190	390	
Hormigón	23	2	17
Hueso			
Por tracción	16	200	
Por compresión	9		270
Latón	90	370	
Plomo	16	12	

† Estos valores son representativos. El valor real para una muestra concreta puede ser diferente.
‡ 1 GN = 10^3 MN = 1×10^9 N.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Proporciones directas o inversas**

Las dimensiones del módulo de Young son fuerza dividido por área. En la tabla 12.1 se relacionan valores aproximados del módulo de Young para diversos materiales.

PROBLEMA PRÁCTICO 12.3
El músculo bíceps del brazo derecho de cierta persona tiene un área máxima de su sección de 12 cm² = $1{,}2 \times 10^{-3}$ m². ¿Cuál es la tensión en el músculo si ejerce una fuerza de 300 N?

Si se somete una barra a la acción de fuerzas que tienden a comprimirla en lugar de alargarla, la tensión recibe el nombre de **tensión de compresión**. En muchos materiales, el módulo de Young para la tensión de compresión es el mismo que para la tensión de tracción. Obsérvese que para una tensión de compresión, el valor de ΔL de la ecuación 12.7 se refiere a la disminución de la longitud de la barra. Si la tensión de tracción o de compresión es demasiado grande, la barra se rompe. La tensión a la que se produce la rotura se denomina **resistencia a la tracción** o, en el caso de compresión, **resistencia a la compresión**. En la tabla 12.1, también se encuentran relacionados valores aproximados de las resistencias a la tracción y a la compresión para diversos materiales. Obsérvese que el módulo de Young de los huesos es muy distinto según se trate de deformaciones por tracción o por compresión, al contrario que en otras muchas sustancias. Este hecho tiene importancia biológica, ya que el principal objetivo de los huesos es resistir a las cargas por compresión ejercidas por músculos contráctiles.

Para determinar la resistencia a la tracción, la barra se tensa hasta que se rompe. *(Vince Streano/CORBIS.)*

Ejemplo 12.9 La seguridad en un ascensor

Póngalo en su contexto

En un trabajo de verano para una compañía de ingeniería, usted recibe el encargo de comprobar la seguridad de un ascensor en un nuevo edificio de oficinas. El ascensor puede llevar una carga máxima de 1000 kg (incluyendo su propia masa), y está suspendido de un cable de acero de 3,0 cm de diámetro y 300 m de longitud cuando está del todo desenrollado. El cable, dentro de las normas de seguridad, puede estirarse como máximo 3 cm. Su trabajo consiste en determinar si el ascensor, tal como se ha diseñado, es seguro o no, teniendo en cuenta que la aceleración máxima del sistema es de 1,5 m/s².

PLANTEAMIENTO Sea L la longitud sin deformar del cable, F la fuerza que actúa sobre él y A su área transversal. El alargamiento del cable ΔL está relacionado con el módulo de Young por la expresión $Y = (F/A)/(\Delta L/L)$. Según la tabla 12.1, el valor numérico del módulo de Young del acero es $Y = 2{,}0 \times 10^{11}$ N/m².

SOLUCIÓN

1. El alargamiento del cable, ΔL, se deduce del módulo de Young:

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad \text{por lo tanto,} \quad \Delta L = \frac{FL}{AY}$$

2. Para determinar la fuerza que actúa sobre el cable, se aplica la segunda ley de Newton al ascensor. Hay dos fuerzas que actúan sobre el ascensor, la fuerza F del cable y el peso:

$$F - mg = ma_y$$
$$\text{es decir,} \quad F_{máx} = m(g + a_{y\,máx}) = (1000\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg} + 1{,}5\ \text{N/kg})$$
$$= 1{,}13 \times 10^4\ \text{N}$$

3. Sustituir el resultado del paso 1 y obtener la deformación máxima del cable:

$$\Delta L = \frac{F_{máx}L}{AY} = \frac{F_{máx}L}{\pi r^2 Y} = \frac{(1{,}13 \times 10^4\ \text{N})(300\ \text{m})}{\pi(0{,}015\ \text{m})^2(2{,}0 \times 10^{11}\ \text{N/m}^2)}$$
$$= 2{,}40\ \text{cm}$$

4. Informar sobre los resultados obtenidos al jefe:

> De acuerdo con mis cálculos, el cable se alargará como mucho 2,4 cm, sólo un 20% por debajo del límite de 3,0 cm. Sin embargo, en el pie de la tabla 12.1 se indica que los valores del módulo de Young son valores meramente representativos y que los valores reales dependen de cada muestra en concreto. Por ello, recomiendo consultar con un ingeniero para obtener una evaluación profesional.

COMPROBACIÓN El resultado para ΔL, ¿tiene las dimensiones correctas? El módulo de Young tiene dimensiones de fuerza por unidad de área de forma que AY tiene dimensiones de fuerza. Por tanto, las dimensiones de $F_{máx}$ del numerador se anulan con las de AY y las dimensiones de ΔL son las de L.

PROBLEMA PRÁCTICO 12.4 Un alambre de 1,5 m de largo tiene una sección recta de área 2,4 mm^2. Cuelga verticalmente y se estira 0,32 mm cuando se le ata en su extremo inferior un bloque de 10 kg. Hallar (*a*) la tensión, (*b*) la deformación y (*c*) el módulo de Young para este alambre.

En la figura 12.26 se aplica una fuerza F_c tangencialmente en la parte superior de un taco de gelatina. Estas fuerzas reciben el nombre de **fuerzas de cizalladura**. El cociente entre la fuerza de cizalladura F_c y el área recibe el nombre de **tensión de cizalladura**:

$$\text{Tensión de cizalladura} = \frac{F_c}{A} \qquad 12.10$$

Una tensión de cizalladura tiende a deformar un libro del modo que se indica en la figura 12.26. El cociente $\Delta X/L$ recibe el nombre de **deformación de cizalladura**:

$$\text{Deformación de cizalladura} = \frac{\Delta X}{L} = \text{tg}\,\theta \qquad 12.11$$

donde θ es el ángulo de cizalladura indicado en la figura. El cociente entre la tensión de cizalladura y la deformación de cizalladura recibe el nombre de **módulo de cizalladura** M_c:

$$M_c = \frac{\text{tensión de cizalladura}}{\text{deformación de cizalladura}} = \frac{F_c/A}{\Delta X/L} = \frac{F_c/A}{\text{tg}\,\theta} \qquad 12.12$$

DEFINICIÓN: MÓDULO DE CIZALLADURA

El módulo de cizalladura se conoce también como **módulo de torsión**. El hecho de que este módulo sea, aproximadamente, constante cuando las tensiones son pequeñas implica que la deformación de cizalladura varía linealmente con la tensión correspondiente (ley de Hooke para las tensiones de torsión). En una balanza de torsión, como la utilizada en el aparato de Cavendish para la medición de la constante universal de la gravitación G, el momento aplicado (que está relacionado con la tensión) es proporcional al ángulo de torsión (que es igual a la deformación en el caso de ángulos pequeños). En la tabla 12.2, se relacionan los valores aproximados del módulo de cizalladura para varios materiales.

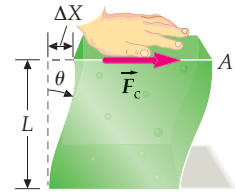


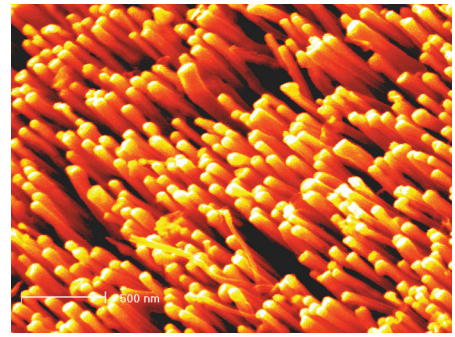
FIGURA 12.26 La aplicación de la fuerza horizontal $\vec{F}_c$ sobre la gelatina produce una tensión de cizalladura definida como la fuerza ejercida por unidad de área. El cociente $\Delta X/L = \text{tg}\,\theta$ es la deformación de cizalladura.

Tabla 12.2 Valores aproximados del módulo de cizalladura M_c de varios materiales

Material	M_c, GN/m^2
Acero	84
Aluminio	30
Cobre	42
Hierro	70
Latón	36
Plomo	5,6
Tungsteno	150

Temas de actualidad en Física

Nanotubos de carbono: pequeños y fuertes



Los nanotubos de carbono se producen en grandes cantidades. *(Gentileza de Prof. Zhong Lin Wang, Georgia Tech.)*

La forma más común del carbono puro es el grafito. La estructura de red de los átomos de carbono del grafito tiene forma hexagonal. La estructura de red del carbono también puede formar tubos huecos con un diámetro de unos pocos nanómetros y pocos micrómetros de longitud. Debido a su pequeño tamaño, se les conoce como *nanotubos*. Las paredes de los nanotubos pueden estar formadas por una o varias capas de átomos.

Los nanotubos pueden tener diferentes propiedades, dependiendo de la orientación de la estructura de red y del diámetro del tubo. Se han llegado a identificar más de 300 tipos distintos de nanotubos. Cada método de producción[1] origina entre 10 y 50 tipos distintos en una sola vez.[2] La mayor parte de los nanotubos se venden en lotes que contienen entre un 65% y un 95% de nanotubos; por ello, aislar un grupo grande de nanotubos sin impurezas es un proceso complejo.[3,4] El coste de los nanotubos es por gramo y los tipos de nanotubos de mayor pureza tienen un precio más elevado. (Las impurezas son formas diferentes de carbono.) Los nanotubos son muy distintos[5] a las fibras de carbono que se utilizan frecuentemente en compuestos. Las fibras de carbono son un tipo muy especializado de grafito manufacturado, pero no son tubos huecos.

Debido al pequeño tamaño de los nanotubos se tuvieron que diseñar nuevos métodos para medir sus propiedades mecánicas como la resistencia a la tracción o el módulo de Young.[6,7] El valor del módulo de Young de los nanotubos con pared de una sola capa[8] va de 0,32 a 1,47 TN/m^2, siendo el valor medio[9] de 1,25 TN/m^2. Estos valores del módulo de Young son más de cinco veces superiores al del acero cuando comparamos muestras del mismo volumen, llegando a ser la diferencia mucho mayor si comparamos muestras del mismo peso. Los nanotubos con paredes de múltiples capas tienen una mayor dispersión en el módulo de Young[10] (éste oscila entre los 270 GN/m^2 y los 950 GN/m^2), y su resistencia a la tracción va de 11 GN/m^2 a 63 GN/m^2. Los nanotubos de carbono tienen mayor resistencia a la tracción y un módulo de Young mucho mayor que las fibras[11] Kevlar^{TM} al comparar muestras del mismo peso.

Los nanotubos de carbono no sólo sufren deformaciones muy pequeñas sino que además pueden ejercer grandes tensiones. Cuando los nanotubos son tratados térmicamente pueden llegar a producir presiones de 40,53 GN/m^2 sobre los cristales metálicos que tienen a su alrededor.[12] ¡Eso significa una décima parte de la presión en el núcleo de la Tierra! Cuando los tubos se contraen estrujan los cristales metálicos convirtiéndolos es finos hilos metálicos.

Aunque los nanotubos son intrínsecamente muy fuertes, los hilos,[13] fibras[14] y las cintas[15] fabricadas a partir de ellos no lo son tanto, aunque sus módulos de Young y la resistencia a la tracción siguen siendo muy grandes. La gran resistencia de los nanotubos procede de la estructura de red regular de los átomos de carbono. Si la red tiene defectos, entonces el nanotubo se hace más débil.[16] (Esto explica la gran dispersión de los resultados en las medidas de resistencia de los nanotubos de carbono.) Para aplicaciones de nivel medio se necesitan billones de nanotubos lo que implica que estadísticamente no es posible que la resistencia por unidad de masa o volumen sea la misma que la que tienen los nanotubos individualmente.[17] Sin embargo, se puede aumentar la resistencia de otros materiales añadiendo una pequeña cantidad de nanotubos. Por ejemplo, si se añade un 5% de nanotubos a un material, el compuesto puede aumentar su resistencia a la tracción y la dureza en más del doble, si comparamos las muestras con el mismo peso.[18] Los nanotubos, al ser tan fuertes y a la vez ligeros, tienen un gran futuro.

---

1 Guice, C., "Dynamics of Nanotube Synthesis," *Penn State McNair Journal 2003*, 115–119.
2 Kumar, Satish, in Goho, Alexandra, "Nice Threads: The Golden Secret Behind Spinning Carbon-Nanotube Fibers," *Science News*, June 5, 2004, p. 363+.
3 Benavides, J. M., "Method for Manufacturing of High Quality Carbon Nanotubes,." U.S. Patent 7,008,605, Mar. 7, 2006.
4 Harutyunyan et al., "Method of Purifying Nanotubes and Nanofibers Using Electromagnetic Radiation," U. S. Patent 7,014,737, Mar 21, 2006.
5 Ajayan, P. M., Charlier, J. C., and Rinzle, A. G., "Carbon Nanotubes: From Macromolecules to Nanotechnology," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Dec. 7, 1999, 14199–14200.
6 Pasquali et al., "Method for Determining the Length of Single-Walled Carbon Nanotubes," U.S. Patent 6,962,092, Nov. 8, 2005.
7 Yu, M. F., Lourie, O., Dyer, M., Motini, K, Kelly, T., and Ruoff, R., "Strength and Breaking Mechanism of Multiwalled Carbon Nanotubes Under Tensile Load," *Science*, Jan. 28, 2000, 637–640.
8 Krishan, A., Dujardin, E., Ebbesen, T. W., Treacy, M. M. J., and Yianilos, P. N., "Young's Modulus of Single-Walled Nanotubes," *Physical Review Letters B*, Nov. 15, 1998, 14013–1409.
9 Yu, M. F., Files, B., Arepalli, S., and Ruoff, R., "Tensile Loading of Ropes of Single Wall Carbon Nanotubes and Their Mechanical Properties," *Physical Review Letters*, June 12, 2000, 5552–5555.
10 Yu et al., op. cit.
11 Tang, Benjamin, "Fiber Reinforced Polymer Composites Applications in USA DOT - Federal Highway Administration," *First Korea/USA Road Workshop Proceedings*, Jan. 28–29, 1997 http://www.fhwa.dot.gov/bridge/frp/frp197.htm
12 Sun, L., Bahhart, F., Krasheninnikov, A. V., Rodriguez-Manzo, J. A., Terrones, M., and Ajayan, P. M., "Carbon Nanotubes as High-Pressure Cylinders and Nanoextruders," *Science*, May 26, 2006, 1199–1202.
13 Ericson et al., "Macroscopic, Neat, Single-Walled Carbon Nanotube Fibers," *Science*, Sept. 3, 2004, 1447–1450.
14 Li, Y. L., Kinloch, I. A., and Windle, A. H., "Direct Spinning of Carbon Nanotube Fibers from Chemical Vapor Deposition Synthesis," *Science*, Apr. 9, 2004, 276–278.
15 Zhang et al., "Strong, Transparent, Multifunctional Carbon Nanotube Sheets," *Science*, Aug. 19, 2005, 1215–1219.
16 Mielke, S., Diego, T., Zhang, S., Li, J.-L., Xiao, S., Car, R., Ruoff, R., Schatz, G., and Belytschko, T., "The Role of Vacancy Defects and Holes in the Fracture of Carbon Nanotubes," *Chemical Physical Letters*, Apr. 16, 2004, 413–420.
17 Pugno, N., "On the Strength of the Carbon Nanotube-Based Space Elevator Cable: From Nano- to Mega-Mechanics," *Journal of Physics: Condensed Matter, Special Issue: Nanoscience and Nanotechnology*, (Prepublication), July 2006.
18 Andrews, D., Jacques, D., Rao, A. M., Rantell, T., Derbyshire, F., Chen, Y., Chen, J., and Haddon, R. C., "Nanotube Composite Carbon Fibers," *Applied Physics Letters*, Aug. 30, 1999, 1329–1331.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Equilibrio de un cuerpo rígido	
Condiciones	**1.** La fuerza externa resultante que actúa sobre el cuerpo debe ser cero: $\Sigma\vec{F} = 0$ (12.1) **2.** El momento externo resultante alrededor de cualquier punto debe ser nulo: $\Sigma\vec{\tau} = 0$ (12.2) (La suma de los momentos alrededor de cualquier eje es cero.)
Estabilidad del equilibrio	El equilibrio de un cuerpo puede clasificarse como estable, inestable o indiferente. Un objeto en reposo sobre una superficie estará en equilibrio si la vertical que pasa por su centro de gravedad cae dentro de su base de soporte. La estabilidad puede mejorarse bajando el centro de gravedad o incrementando el tamaño de la base.
2. Centro de gravedad	La fuerza de gravedad ejercida sobre diversas partes de un objeto puede reemplazarse por una sola fuerza, el peso total del objeto, F_g que actúe en el centro de gravedad. $\vec{\tau}_{\text{neto}} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{gi}) = \vec{r}_{\text{cg}} \times \vec{F}_g$ (12.3) Cuando la aceleración es la misma en todos los puntos de un cuerpo, el centro de gravedad coincide con el centro de masas.
3. Par de fuerzas	Dos fuerzas iguales y opuestas (antiparalelas) constituyen un par. El momento del par es el mismo para cualquier punto del espacio. $\vec{\tau} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$ de modo que $\tau = FD$ (12.5, 12.6) donde D es la distancia entre las líneas de acción de las fuerzas.
4. Sistema de referencia acelerado	Las condiciones para que haya equilibrio estático en un sistema de referencia acelerado son: **1.** $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{\text{cm}}$, donde $\vec{a}_{\text{cm}}$ es la aceleración del centro de masas, que coincide con la aceleración del sistema de referencia. **2.** $\Sigma\vec{\tau}_{\text{cm}} = 0$ La suma de los momentos respecto del centro de masas debe ser cero.
5. Tensión y deformación	
Módulo de Young	$Y = \dfrac{\text{tensión}}{\text{deformación}} = \dfrac{F/A}{\Delta L/L}$ (12.9)
Módulo de cizalladura	$M_c = \dfrac{\text{tensión de cizalladura}}{\text{deformación de cizalladura}} = \dfrac{F_c/A}{\Delta X/L} = \dfrac{F_c/A}{\text{tg}\,\theta}$ (12.12)

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

12.1 Un eje horizontal que pasa por el borde más bajo del bloque en el lado opuesto sobre el que se empuja (figura 12.17). Los momentos respecto a este eje debido a las fuerzas de rozamiento son individualmente cero.

Respuestas a los problemas prácticos

12.1 Las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ actúan sobre el objeto. El objeto está en equilibrio; por tanto, los momentos de esas fuerzas respecto a cualquier punto deben sumar cero. Sea P el punto de intersección de las líneas de acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Entonces, los momentos respecto a P debido a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ deben ser cero y, en consecuencia, también lo será el momento de $\vec{F}_3$. De ahí se sigue que la línea de acción de $\vec{F}_3$ debe pasar por P.

12.2 El ángulo entre $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\vec{F}_1$ es β(figura 12.15); por tanto, $|\vec{\tau}| = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| F \operatorname{sen}\beta$. Y como $D = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \operatorname{sen}\beta$, entonces $|\vec{\tau}| = FD$.

12.3 Tensión $= F/A = 2{,}5 \times 10^5\ \text{N/m}^2$. La tensión máxima que puede ejercerse es, aproximadamente, la misma para todos los músculos humanos. Las mayores fuerzas las ejercen los músculos con mayor área de sección transversal.

12.4 (*a*) $4{,}1 \times 10^7\ \text{N/m}^2$, (*b*) $2{,}1 \times 10^{-4}$, (*c*) $190\ \text{GN/m}^2$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso: SSM

(*a*) $\sum_i \vec{F}_i = 0$ es suficiente para que exista el equilibrio estático.

(*b*) $\sum_i \vec{F}_i = 0$ es necesario para que exista el equilibrio estático.

(*c*) En equilibrio estático, el momento resultante respecto a cualquier punto es nulo.

(*d*) Un objeto en equilibrio no puede moverse.

2 • Verdadero o falso:

(*a*) El centro de gravedad se encuentra siempre en el centro geométrico de un cuerpo.

(*b*) El centro de gravedad debe estar localizado dentro del cuerpo.

(*c*) El centro de gravedad de un bastón está localizado entre los dos extremos.

(*d*) El momento producido por la fuerza de la gravedad respecto al centro de gravedad es siempre cero.

3 • La barra horizontal de la figura 12.27 permanecerá horizontal si (*a*) $L_1 = L_2$ y $R_1 = R_2$, (*b*) $M_1R_1 = M_2R_2$, (*c*) $M_2R_1 = M_1R_2$, (*d*) $L_1M_1 = L_2M_2$, (*e*) $R_1L_1 = R_2L_2$.

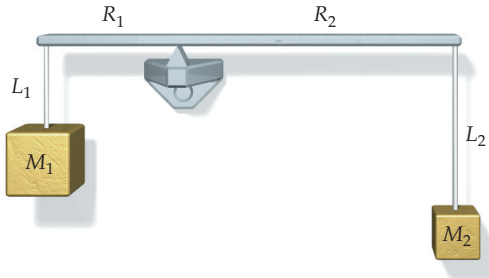


FIGURA 12.27 Problema 3

4 • Una persona está sentada en una silla con la espalda erecta. Si intenta levantarse sin inclinarse hacia delante, no puede hacerlo. ¿Por qué?

5 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Su trabajo consiste en cavar agujeros para clavar postes que van a aguantar carteles que anuncian el restaurante Mosca's. Explicar por qué cuanto más alto sea el poste, más hondo debería ser el agujero.

6 • Un padre de masa M y su hijo de masa m caminan sobre un balancín hacia sus extremos opuestos. Conforme caminan, el balancín se mantiene en perfecta posición horizontal. ¿Qué podemos decir de la relación entre las velocidades del padre y del hijo?

7 • Los termos de viaje que la gente suele colocar sobre el salpicadero del coche están hechos con una base ancha y un extremo superior más estrecho. ¿Por qué esos termos se diseñan con esa forma en lugar de hacerlos cilíndricos, como la mayoría de los termos?

8 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Los navegantes de la foto utilizan una técnica, llamada *hiking-out*. ¿Con qué propósito la utilizan? Si el viento fuese más fuerte, ¿qué necesitarían para mantener el velero estable?

Los navegantes haciendo *hiking-out*. *(Peter Andrews/Reuters/Corbis.)*

9 •• Un hilo de aluminio y otro de acero de la misma longitud L y diámetro D están unidos, extremo con extremo, para formar un hilo de longitud $2L$. El hilo se cuelga del techo por uno de sus extremos mientras que del otro extremo se cuelga un objeto de masa M. Despreciando las masas de los hilos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? (*a*) La parte de aluminio se alargará la misma cantidad que la de acero. (*b*) Las tensiones en el hilo de acero y en el de aluminio son iguales. (*c*) La tensión en el hilo de aluminio será mayor que en el hilo de acero. (*d*) Ninguna de las anteriores. SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

10 •• Un gran cajón que pesa 4500 N descansa sobre cuatro bloques de 12 cm de altura sobre una superficie horizontal (figura 12.28). El cajón tiene 2 m de longitud, 1,2 m de altura y 1,2 m de ancho. Una persona debe levantar un extremo del cajón mediante una larga barra de acero. El punto de apoyo de la barra está a 10 cm del extremo que sube el cajón. Estimar la longitud de la barra de acero necesaria para que una persona pueda levantar el extremo del cajón.

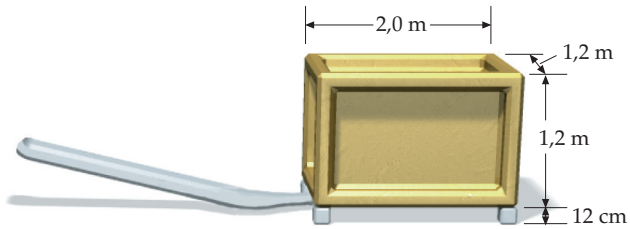


FIGURA 12.28 Problema 10

11 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Consideremos un modelo atómico para el módulo de Young que consiste en muchos átomos colocados en una distribución cúbica y separados una distancia a. Imaginemos que cada átomo está conectado con sus 6 átomos vecinos por pequeños muelles de constante elástica k. (*a*) Demostrar que este material, si está sometido a tensión, tiene un módulo de Young igual a k/a. (*b*) A partir de la tabla 12.1, y suponiendo que $a \approx 1$ nm, estimar el valor típico para la "constante del muelle atómico" k en un metal. SSM

12 •• Calcular la fuerza que debe hacer el deltoides (músculo de la parte superior del hombro) para mantener su brazo extendido en posición horizontal. Para ello, determinar los momentos respecto a la articulación del hombro. Luego, estimar la fuerza que debe hacer para sostener sobre la mano una masa de 10 lb.

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

13 • Una muleta presiona contra la acera con una fuerza $\vec{F}_m$ a lo largo de su propia dirección, como indica la figura 12.29. Esta fuerza está equilibrada por una fuerza normal $\vec{F}_n$ y una fuerza de rozamiento $\vec{f}_e$, como se indica en la figura. (*a*) Demostrar que cuando la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo, el coeficiente de rozamiento depende del ángulo θ según la relación $\mu_e = \text{tg}\,\theta$. (*b*) Explicar cómo se aplica este resultado a las fuerzas que actúan sobre el pie cuando no se utiliza la muleta. (*c*) ¿Por qué conviene dar pasos cortos al andar sobre superficies deslizantes?

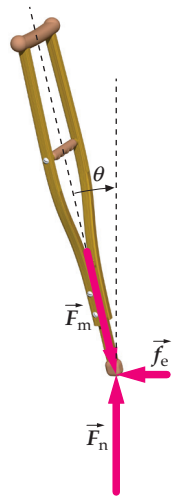


FIGURA 12.29
Problema 13

14 •• Una barra uniforme de masa M se suspende horizontalmente mediante dos varillas verticales. Una de las varillas está en el extremo izquierdo de la barra y la otra está a 2/3 del extremo izquierdo de la barra. (*a*) Determinar la tensión en cada varilla. (*b*) Se cuelga ahora un objeto mediante una cuerda de masa despreciable del extremo derecho de la barra. Entonces, se observa que la barra se mantiene horizontal pero que la tensión de la cuerda de la derecha desaparece. Determinar la masa del objeto.

CENTRO DE GRAVEDAD

15 • Un automóvil carga el 58 por ciento de su peso sobre las ruedas delanteras. La distancia entre las ruedas delanteras y traseras es de 2 m. Determinar el centro de gravedad del automóvil.

EQUILIBRIO ESTÁTICO

16 • La figura 12.30 muestra una palanca de masa despreciable a la que se aplica una fuerza f_{ap} para levantar una carga que ejerce una fuerza F. La ventaja mecánica de la palanca se define como $M = F/f_{ap\,mín}$, donde $f_{ap\ mín}$ es la fuerza mínima necesaria para subir la carga F. Demostrar que $M = x/X$, donde x es el brazo de palanca del momento (la distancia al pivote) para la fuerza aplicada y X el brazo de palanca del momento para la carga.

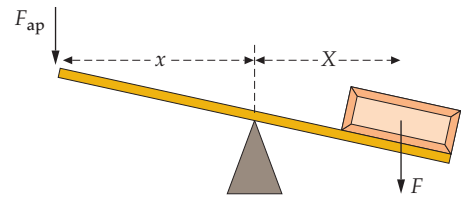


FIGURA 12.30 Problema 16

17 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La figura 12.31 muestra un balandro de 25 pies. El mástil es un palo uniforme de 120 kg apoyado sobre la cubierta y amarrado a proa y popa por cables del modo indicado. La tensión del cable de popa (dirigido a proa) es 1000 N. Determinar la tensión en el cable de proa y la fuerza que la cubierta ejerce sobre el mástil. (Suponer despreciables todas las fuerzas de rozamiento.) SSM

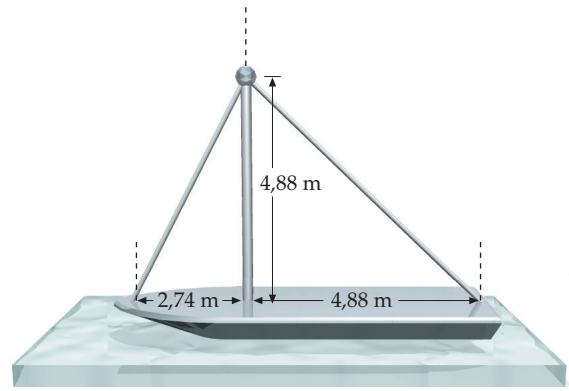


FIGURA 12.31 Problema 17

18 •• Una viga uniforme de 10 m y masa 300 kg se extiende sobre una repisa horizontal, como indica la figura 12.32. La viga no está sujeta, sino que simplemente descansa sobre la superficie. Un estudiante de 60 kg ha colocado la viga de tal modo que puede andar sobre ella hasta el extremo. ¿Qué distancia máxima x es admisible entre el borde de la repisa y el extremo de la viga?

FIGURA 12.32 Problema 18

19 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una tabla horizontal destinada a determinar centros de gravedad está apoyada sobre un fulcro en un extremo y en una balanza en el otro. Un estudiante yace horizontalmente sobre la tabla con la cabeza sobre el fulcro, como indica la figura 12.33. La balanza está a dos metros del fulcro. El estudiante tiene una masa de 70 kg y cuando está sobre la tabla, la balanza marca 250 N (la masa de la tabla es despreciable). ¿Dónde está localizado el centro de gravedad del estudiante respecto a sus pies? SSM

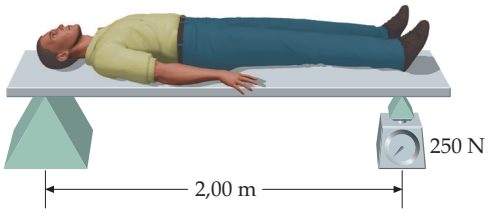


FIGURA 12.33 Problema 19

20 •• Un tablero de 3 m de longitud y 5 kg de masa está sujeto al suelo por uno de sus extremos con una bisagra. Se aplica una fuerza vertical $\vec{F}$ por el otro extremo con el fin de levantar el tablero, y la caja que descansa sobre él, un ángulo de 30°. La caja de 60 kg se encuentra en reposo sobre el tablero a 80 cm de la bisagra, como se indica en la figura 12.34. (*a*) Calcular el módulo de la fuerza $\vec{F}$. (*b*) Calcular la fuerza ejercida por la bisagra. (*c*) Calcular la fuerza $\vec{F}$ y la fuerza ejercida por la bisagra si la fuerza $\vec{F}$ se ejerce perpendicularmente al tablero.

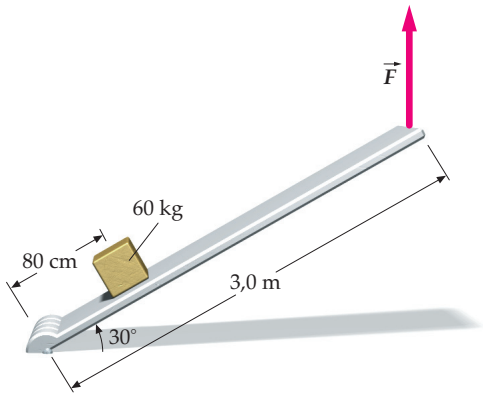


FIGURA 12.34 Problema 20

21 •• Un cilindro de masa M se apoya en un sistema sin rozamiento formado por un plano inclinado 30° con la horizontal a la izquierda y otro inclinado 60° a la derecha, como muestra la figura 12.35. Determinar la fuerza ejercida por cada plano sobre el cilindro.

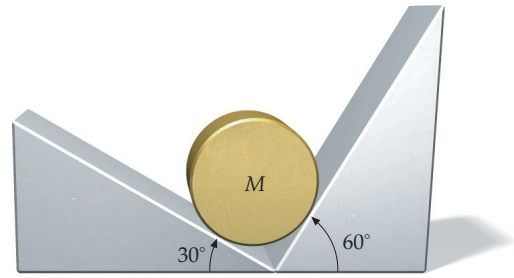


FIGURA 12.35 Problema 21

22 •• Una puerta uniforme de 18 kg, 2,0 m de alto y 0,8 m de ancho cuelga de dos bisagras situadas una a 20 cm de la parte superior y otra a 20 cm de la parte inferior. Si cada bisagra soporta la mitad del peso de la puerta, determinar el sentido y el módulo de las componentes horizontales de las fuerzas ejercidas por las dos bisagras sobre la puerta.

23 •• Calcular la fuerza ejercida por la articulación A sobre el puntal que se muestra en la figura 12.36 si se supone (*a*) que la barra no tiene peso y (*b*) que el peso de la barra es de 20 N.

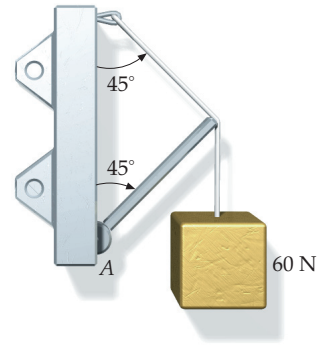


FIGURA 12.36 Problema 23

24 •• Han contratado a Julia para ayudar en los trabajos de pintura de unos adornos de un edificio. Para ello se ha de utilizar un aparato cuya seguridad Julia pone en duda. Se suspende horizontalmente una tabla de 5,0 m desde lo alto del edificio mediante dos cuerdas atadas a sus extremos. Julia sabe, por su experiencia previa, que las cuerdas que están usando se rompen cuando la tensión supera 1 kN. Su capataz de 80 kg intenta disipar la preocupación de la muchacha y empieza a pintar colocándose a 1 m del extremo de la tabla. Si la masa de Julia es de 60 kg y la de la tabla es de 20 kg, ¿qué posiciones puede ocupar Julia para que las cuerdas no se rompan estando sobre la tabla junto a su jefe?

25 •• Un cilindro de masa M y radio R rueda contra un escalón de altura h, como indica la figura 12.37. Cuando una fuerza F se aplica a la parte alta del cilindro, éste permanece en reposo. (*a*) ¿Cuál es la fuerza normal ejercida por el suelo sobre el cilindro? (*b*) ¿Y la fuerza horizontal ejercida por el borde del escalón sobre el cilindro? (*c*) ¿Cuál es la componente vertical de la fuerza ejercida por el borde del escalón sobre el cilindro? SSM

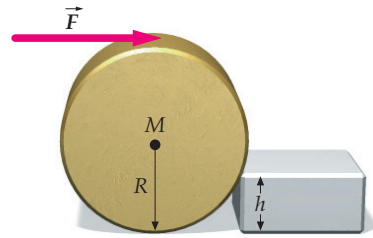


FIGURA 12.37 Problema 25

26 •• Determinar la fuerza horizontal mínima $\vec{F}$ del cilindro del problema 25 para que suba el escalón sin deslizarse sobre el borde.

27 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** La figura 12.38 muestra una mano sosteniendo un florete, una arma usada en el deporte de la esgrima. El centro de masas del florete que se indica en la figura 12.38, está a 24 cm del extremo de la empuñadura. El florete tiene 0,700 kg de masa y 110 cm de longitud. (*a*) Aplicar una de las condiciones para la existencia de equilibrio estático para determinar la fuerza (total) ejercida por la mano sobre el florete. (*b*) Aplicar la otra condición de equilibrio estático para determinar el momento ejercido por la mano sobre el florete. (*c*) La mano ejerce una fuerza que se aplica a lo largo de todo el florete. Representar las fuerzas ejercidas por la mano como dos fuerzas en direcciones opuestas cuyas líneas de acción están separadas por la anchura de la mano del luchador (≈ 10 cm). ¿Cuáles son los módulos y las direcciones de estas dos fuerzas?

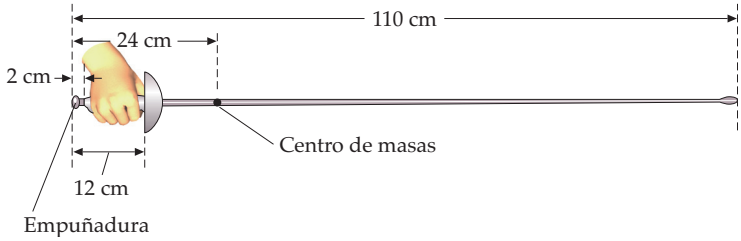


FIGURA 12.38 Problema 27

28 •• Una enorme puerta que pesa 200 N está soportada por bisagras en la parte superior e inferior y además está sujeta por un cable, como muestra la figura 12.39. (*a*) ¿Cuál debe ser la tensión en el cable para que la fuerza sobre la bisagra superior no tenga componente horizontal? (*b*) ¿Cuál es la fuerza horizontal sobre la bisagra inferior? (*c*) ¿Cuáles son las fuerzas verticales sobre las bisagras?

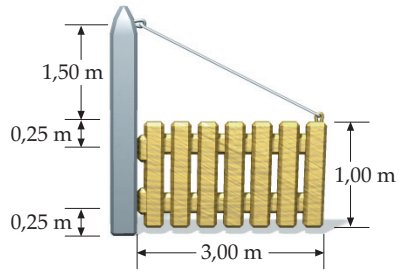


FIGURA 12.39 Problema 28

29 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Tal como se muestra en la figura 12.40, una barca en un río caudaloso, que fluye rápidamente hacia la derecha, está amarrada al extremo de un muelle mediante una cadena de 5 m de longitud. Para dotar a la cadena de una cierta flexibilidad frente a las variaciones del régimen de flujo del río, se ata un peso de 100 N al centro de la misma. Si la fuerza de resistencia sobre el bote es de 50 N, (*a*) ¿cuál es la tensión de la cadena? (*b*) ¿A qué distancia del muelle estará la barca? (*c*) Si la tensión máxima que soporta la cadena es de 500 N, ¿cuál es el valor mínimo de la fuerza que el río puede ejercer sobre la barca para que rompa la cadena?

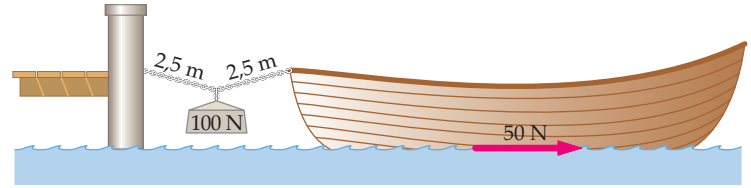


FIGURA 12.40 Problema 29

30 •• Romeo sujeta una escalera uniforme de 10 m de longitud y la apoya sobre la pared (sin rozamiento) de la casa de los Capuleto. La masa de la escalera es de 22 kg y descansa sobre el suelo en un punto que dista 2,8 m de la pared. Cuando Romeo, cuya masa es de 70 kg, sube el 90% del tramo de escalera, ésta empieza a deslizarse. ¿Cuál es el coeficiente estático de rozamiento entre el suelo y la escalera?

31 •• Dos fuerzas de 80 N se aplican sobre las esquinas opuestas de una placa rectangular, como se muestra en la figura 12.41. (*a*) Hallar el momento producido por este par de fuerzas utilizando la ecuación 12.6. (*b*) Demostrar que el resultado es el mismo que si se calcula el momento respecto a la esquina inferior izquierda. SSM

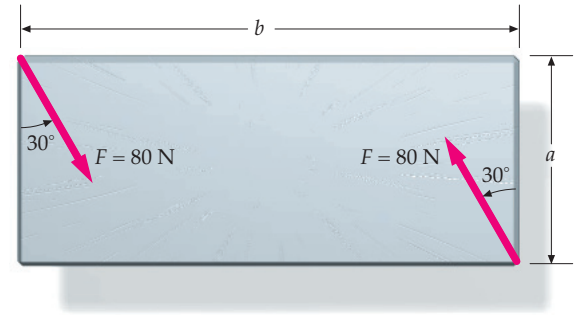


FIGURA 12.41 Problema 31

32 •• Un cubo uniforme de lado a y masa M descansa sobre una superficie horizontal. Una fuerza $\vec{F}$ se aplica en la parte superior del cubo, como muestra la figura 12.42. Esta fuerza no es suficiente para mover o levantar el cubo. (*a*) Demostrar que la fuerza de rozamiento estático ejercida por la superficie y la fuerza aplicada constituyen un par, y determinar el momento ejercido por este par. (*b*) Otro par, constituido por la fuerza normal ejercida por la superficie y el peso del cubo, equilibran el par anterior. Utilizar este hecho para determinar el punto efectivo de aplicación de la fuerza normal cuando $F = Mg/3$. (*c*) ¿Cuál es el valor máximo de $\vec{F}$ (en módulo), para el cual no se levanta el cubo?

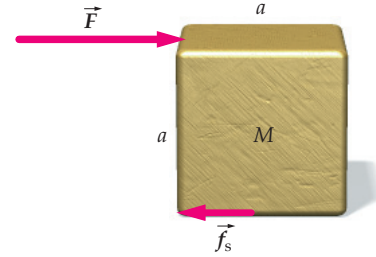


FIGURA 12.42 Problema 32

33 •• Una escalera de masa despreciable y longitud L se apoya contra una pared pulida formando un ángulo θ con el suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la escalera y el suelo es μ_e. Un hombre de masa M sube por la escalera. ¿Qué altura h puede ascender antes de que la escalera se deslice? SSM

34 •• Una escalera uniforme de longitud L y masa m se apoya contra una pared vertical sin rozamiento y su extremo inferior sobre el suelo. Forma un ángulo de 60° con el suelo horizontal. El coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y el suelo es 0,45. Una persona, cuya masa es cuatro veces mayor que la de la escalera, sube por ella. ¿A qué altura llegará antes de que comience a deslizarse?

35 •• Una escalera de masa m y longitud L se apoya contra una pared vertical sin rozamiento formando un ángulo θ con la horizontal. El centro de masas se encuentra a una altura h del suelo. Una fuerza F tira horizontalmente de la escalera hacia fuera en su punto medio. Determinar el coeficiente mínimo de rozamiento estático μ_e para el cual el extremo superior de la escalera se separará de la pared, antes de que el extremo inferior se deslice.

36 •• Un hombre que pesa 900 N está sentado en la parte superior de una escalera de peso despreciable que descansa sobre un suelo sin rozamiento (figura 12.43). Hay un travesaño a mitad de altura de la escalera. El ángulo que forma la escalera en la parte superior es $\theta = 30°$. (*a*) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el suelo sobre cada pata de la escalera? (*b*) Hallar la tensión del travesaño. (*c*) Si colocamos el travesaño en un punto más bajo de la escalera (manteniendo ésta el mismo ángulo θ), ¿sería su tensión mayor o menor?

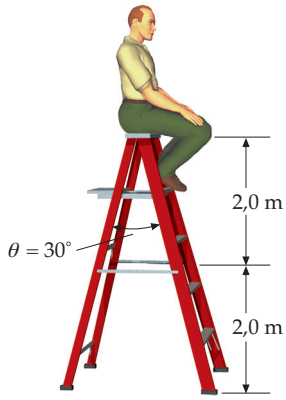


FIGURA 12.43 **Problema 36**

37 •• Una escalera uniforme se apoya contra una pared vertical sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento estático entre la escalera y el suelo es 0,3. ¿Cuál es el menor ángulo para el cual la escalera permanece fija sin deslizarse?

38 ••• Un tronco uniforme de masa 100 kg, longitud 4 m y radio 12 cm se mantiene en posición inclinada, como indica la figura 12.44. El coeficiente de rozamiento estático entre el tronco y la superficie horizontal es 0,6. El tronco está a punto de deslizarse hacia la derecha. Determinar la tensión en el alambre de soporte y el ángulo que el alambre forma con la pared vertical.

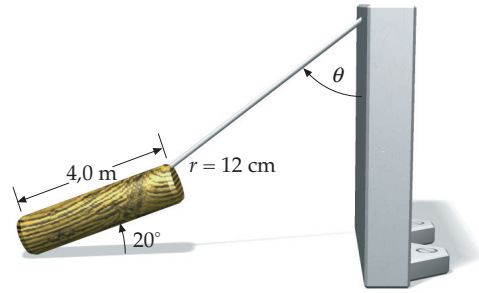


FIGURA 12.44 **Problema 38**

39 ••• Un bloque rectangular grande y uniforme se sitúa sobre un plano inclinado, como indica la figura 12.45. Una cuerda sujeta la parte superior del bloque para evitar que caiga por el plano. ¿Cuál es el ángulo máximo θ para el cual el bloque no se desliza por el plano inclinado? Sea $b/a = 4$ y $\mu_e = 0{,}8$. SSM

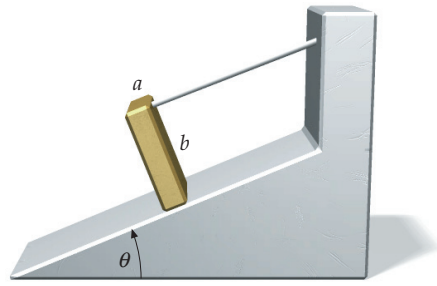


FIGURA 12.45
Problema 39

TENSIÓN Y DEFORMACIÓN

40 • Se cuelga una bola de 50 kg de un alambre de acero de 5 m de longitud y 2 mm de radio. ¿Cuánto se alargará el alambre?

41 • La resistencia a la tracción de un alambre de cobre es aproximadamente de 3×10^8 N/m^2. (*a*) ¿Cuál es la carga máxima que puede colgarse de un alambre de cobre de 0,42 mm? (*b*) ¿Si se cuelga la mitad de esta carga máxima del alambre de cobre, en qué porcentaje se alargará su longitud? SSM

42 • Un alambre de acero de 0,6 mm de diámetro y 1,2 m de longitud soporta una masa de 4 kg. ¿Cuál será el alargamiento del alambre bajo esta carga?

43 • Mientras los pies de un corredor tocan el suelo, una fuerza de cizalladura actúa sobre la suela de su zapato de 8 mm de espesor según se indica en la figura 12.46. Si la fuerza de 25 N se distribuye a lo largo de un área de 15 cm^2, calcular el ángulo θ de cizalladura, sabiendo que el módulo de cizalladura de la suela es de $1{,}9 \times 10^5$ N/m^2. SSM

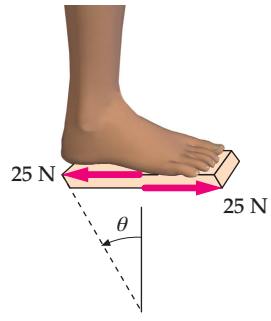


FIGURA 12.46
Problema 43

44 •• Un alambre de acero de longitud 1,5 m y diámetro 1 mm se suelda a un alambre de aluminio de dimensiones idénticas para formar un alambre de 3,0 m. ¿Cuál es el cambio en la longitud del alambre compuesto cuando soporta una masa de 5 kg? (Despreciar los efectos de las masas de los alambres cuando cambian de longitud.)

45 •• Dos fuerzas iguales en módulo pero con direcciones opuestas se aplican en ambos extremos de un alambre largo de longitud L y sección transversal A. Demostrar que si el alambre se considera como un muelle, la constante de fuerza k viene dada por $k = AY/L$ y la energía almacenada en el alambre es $U = \frac{1}{2}F\Delta L$, donde Y es el módulo de Young y ΔL el incremento de longitud del alambre. SSM

46 •• La cuerda E de acero de un violín está sometida a una tensión de 53 N. El diámetro de la cuerda es 0,20 mm y su longitud tensada es 35,0 cm. Determinar (*a*) la longitud sin tensar de esta cuerda y (*b*) el trabajo necesario para tensar la cuerda.

47 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, HOJA DE CÁLCULO** Una cinta de caucho de sección 3 mm × 1,5 mm se dispone verticalmente y varias masas se cuelgan de ella. Un estudiante obtiene los siguientes datos de la longitud de la cinta en función de la carga

Carga, kg	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
Longitud, cm	5,0	5,6	6,2	6,9	7,8	8,8

(*a*) Utilizar una **hoja de cálculo** o **una calculadora gráfica** para determinar el módulo de Young de la cinta de caucho para el rango de cargas que aquí se muestran. Ayuda: probablemente es mejor representar F/A frente a $\Delta L/L$. ¿Por qué?

(*b*) Determinar la energía almacenada en la cinta cuando la carga es de 0,15 kg. (Véase problema 45.)

(*c*) Calcular la energía almacenada en la cinta cuando la carga es de 0,3 kg. ¿Es el doble del valor calculado en el apartado anterior? Explique la respuesta.

48 •• Un gran espejo cuelga de un clavo, como se muestra en la figura 12.47. El alambre de acero que lo soporta tiene un diámetro de 0,2 mm y una longitud sin deformar de 1,7 m. La distancia entre los puntos de soporte en la parte superior del marco del espejo es 1,5 m. La masa del espejo es 2,4 kg. ¿Cuál es la distancia entre el clavo y la parte superior del marco cuando el espejo está colgado?

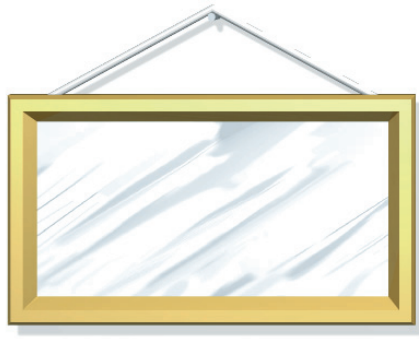


FIGURA 12.47 Problema 48

49 •• Dos masas, M_1 y M_2, están sujetas a sendos cables que tienen igual longitud cuando no soportan ninguna carga. El alambre que soporta a M_1 es de aluminio de 0,7 mm de diámetro y el que soporta a M_2 es de acero de 0,5 mm de diámetro. ¿Cuál es la relación M_1/M_2 si los dos cables se alargan por igual?

50 •• Una pelota de 0,5 kg se sujeta a un alambre de aluminio de diámetro 1,6 mm y longitud sin deformar 0,7 m. El otro extremo del alambre está fijo a un poste. La pelota gira alrededor del poste en un plano horizontal con una velocidad de rotación tal que el ángulo que forman el alambre y la horizontal es 5,0°. Determinar la tensión del alambre y el aumento de su longitud.

51 •• Hay que construir un cable de un ascensor a partir de un nuevo material compuesto desarrollado por los Laboratorios Acme. En el laboratorio, una muestra del cable de 2 m de longitud y de 0,2 mm^2 de área transversal se rompe cuando se la somete a una tensión de 1000 N. El cable del ascensor tendrá una longitud de 20 m y un área transversal de 1,2 mm^2 y deberá aguantar una carga de 20 000 N. ¿Aguantará? SSM

52 •• Cuando se estira en una dirección un material cuya densidad se mantiene constante, el material se contrae en una o en las dos direcciones transversales. Sea un bloque rectangular de longitud x, anchura y y altura z que se estira de modo que se alarga hasta $x' = x + \Delta x$. Si $\Delta x \ll x$ e $\Delta y/y = \Delta z/z$, demostrar que entonces $\Delta y/y = -\frac{1}{2}\Delta x/x$.

53 •• Se tiene un alambre de sección circular de radio r y longitud L. Si el alambre está fabricado de un material cuya densidad permanece constante cuando se tensa, demostrar que $\Delta r/r = -\frac{1}{2}\Delta L/L$, suponiendo que $\Delta L \ll L$. (Véase el problema 52.) SSM

54 ••• Según la tabla 12.1, la resistencia a la tracción de la mayor parte de los materiales resulta ser dos o tres órdenes de magnitud inferior al módulo de Young. En consecuencia, estos materiales, por ejemplo, el aluminio, se romperán antes de que la deformación exceda un 1%. Entre los materiales hechos por el hombre, el nailon es uno de los que tiene mayor estabilidad (puede soportar deformaciones de hasta 0,2 antes de romperse). Pero la tela de araña supera a cualquiera de éstos. Ciertas formas pueden soportar deformaciones de hasta 10 veces antes de romperse. (*a*) Si un hilo como éste tiene una sección transversal circular de radio r_0 y una longitud sin estirar L_0, determinar el radio r cuando se alarga hasta $L = 10L_0$. (*b*) Si el módulo de Young del hilo de araña es Y, calcular la tensión que se requiere para romper el hilo en función de Y y r_0.

PROBLEMAS GENERALES

55 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Una bola de bolera pesa 16 lb. Se desea sostener la bola de forma que el codo forme un ángulo recto. Suponer que el bíceps se une al antebrazo a 2,5 cm de distancia respecto a la articulación del codo y que realiza una fuerza vertical hacia arriba formando un ángulo recto con el antebrazo. La bola se sostiene a 38 cm respecto a la articulación del codo. La masa del antebrazo es de 5 kg y el centro de gravedad se halla a 19 cm de la articulación del codo. ¿Cuánta fuerza debe realizar el bíceps para sostener la bola en esa posición? SSM

56 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En un laboratorio de Biología se desea medir la localización del centro de gravedad en función del peso de una persona. Para ello, usted se ofrece voluntario y lo colocan sobre una tabla de 2 m de longitud y 5 kg de masa (figura 12.48). Su altura es de 188 cm y la balanza izquierda marca 445 N mientras que la derecha marca

400 N. ¿Dónde se halla su centro de gravedad respecto a sus pies? Suponer que las balanzas están colocadas de forma que distan lo mismo de los bordes de la tabla y están separadas una distancia de 178 cm entre sí. Las balanzas se han calibrado a cero antes de subirle a la tabla.

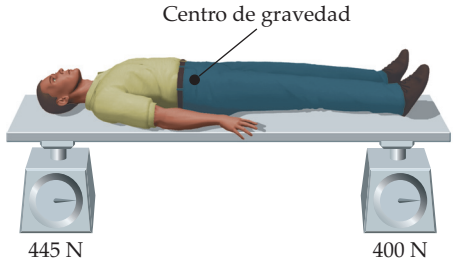


FIGURA 12.48 Problema 56

57 •• La figura 12.49 muestra un móvil formado por cuatro objetos que cuelgan de tres barras de masa despreciable. Determinar el valor de las masas de cada uno de los objetos cuando el móvil está en equilibrio. *Sugerencia: hallar primero la masa de* m_1.

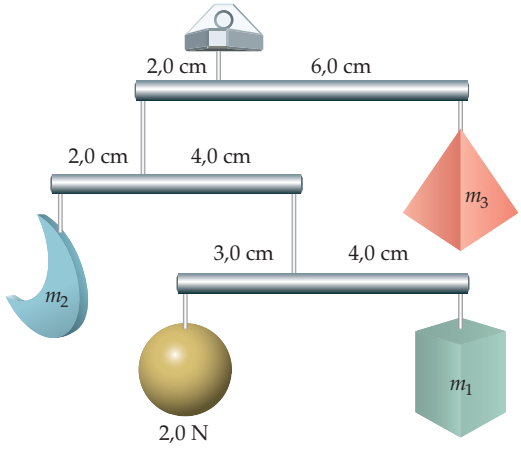


FIGURA 12.49 Problema 57

58 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una viga de acero del modelo W12 × 22 tiene un peso de 22 lb por pie. Un negocio de la ciudad quiere que usted le coloque el letrero colgado del extremo de la viga que mide 4 m de longitud (figura 12.50). Usted lo sujeta mediante un cable de acero de 5 m de longitud que se sujeta a la viga por un extremo y al muro por el otro extremo. En un principio, usted no incrustó la viga en la pared sino que únicamente se sostenía por el rozamiento con la misma. (*a*) ¿Cuál ha de ser el valor mínimo del coeficiente de rozamiento para que la viga se sostenga en esa posición? (*b*) ¿Cuál es la tensión del cable en ese caso?

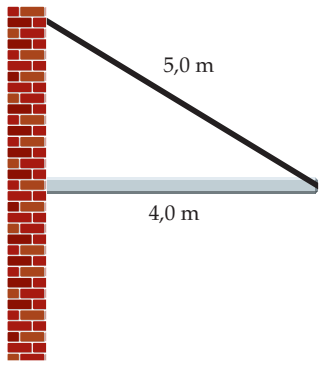


FIGURA 12.50
Problema 58

59 ••• Considerar una viga rígida de 2,5 m de longitud que se sostiene por una bisagra colocada en el extremo superior de un poste de 1,25 m de altura (figura 12.51). Uno de sus extremos se conecta a un muelle de constante $k = 1250$ N/m que está sujeto al suelo por su otro extremo. Cuando la viga está en posición horizontal, el muelle está en posición vertical y en reposo. Si se cuelga un cuerpo del extremo opuesto de la viga, ésta gira 17,5° respecto al eje horizontal hasta mantenerse en equilibrio, ¿cuál será la masa del cuerpo? SSM

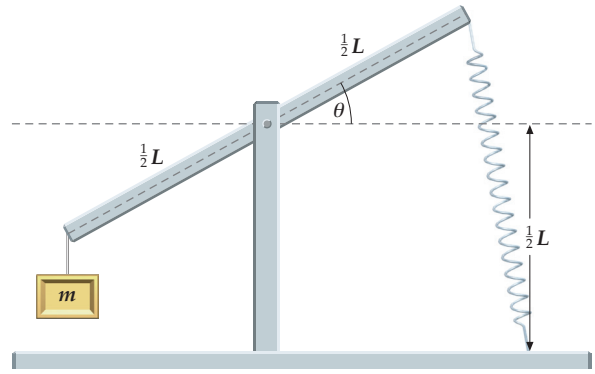


FIGURA 12.51 Problema 59

60 •• Una polea y un polispasto se utilizan para soportar un cuerpo de masa m como indica la figura 12.52. El cuerpo sube a velocidad constante. Cuando un trozo de cuerda de longitud L pasa por la rueda de la polea superior, la altura de la polea inferior aumenta h. (*a*) ¿Cuánto vale el cociente L/h? (*b*) Suponer que el bloque y el conjunto de poleas no tienen masa ni ejercen rozamiento. Demostrar que $FL = Mgh$ aplicando el principio trabajo-energía al sistema.

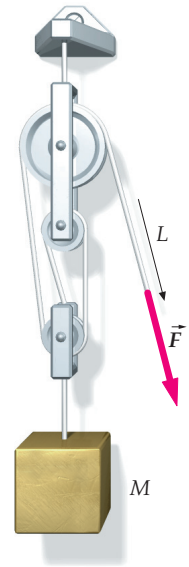


FIGURA 12.52
Problema 60

61 •• Una placa que tiene la forma de un triángulo equilátero de masa M se suspende de un vértice. Otra masa m se suspende de otro de los vértices del triángulo. ¿Cuál debe ser la relación m/M para que la base del triángulo forme un ángulo de 6,0° con la horizontal?

62 •• Un lápiz de sección hexagonal se sitúa sobre un bloc de notas (figura 12.53). Determinar el coeficiente mínimo de rozamiento estático μ_e para que el lápiz ruede hacia abajo sin deslizarse cuando el papel se inclina.

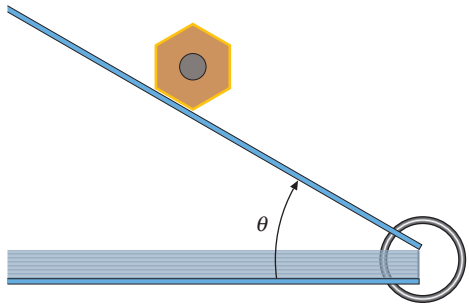


FIGURA 12.53 Problema 62

63 •• Una caja uniforme de 8 kg de masa y dos veces más alta que ancha, descansa sobre el suelo de un camión. ¿Cuál es el máximo coeficiente de rozamiento estático entre la caja y el suelo para que la caja se deslice hacia atrás en lugar de volcar cuando el camión acelera en una carretera horizontal?

64 •• Una balanza tiene brazos desiguales. Por ello, un bloque de 1,5 kg situado en el platillo izquierdo equilibra otro bloque de 1,95 kg situado en el platillo derecho (figura 12.54). Si el bloque de 1,95 kg se quita del platillo derecho y el de 1,5 kg se coloca en el derecho, ¿cuál será la masa que hay que colocar en el platillo izquierdo que equilibre la balanza?

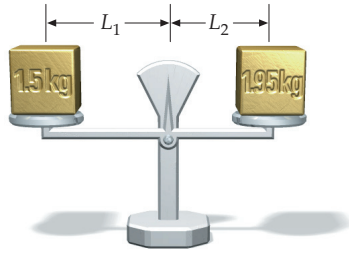


FIGURA 12.54 Problema 64

65 •• Un cubo de masa M se apoya contra una pared sin rozamiento formando un ángulo θ con el suelo, como indica la figura 12.55. Determinar el coeficiente mínimo de rozamiento estático μ_e entre el cubo y el suelo que permite que el cubo permanezca en reposo. SSM

FIGURA 12.55 Problema 65

66 •• La figura 12.56 muestra una regla unida mediante una bisagra a una pared vertical y soportada mediante un alambre delgado. El alambre y la regla forman ángulos de 45° con la vertical. La masa de la regla es 5,0 kg. Cuando un bloque de M = 10,0 kg se suspende del punto medio de la regla, la tensión T del alambre soporte es de 52 N. Si el alambre se rompe cuando la tensión excede los 75 N, ¿cuál es la máxima distancia a lo largo de la regla que permite suspender el bloque de 10,0 kg sin que se rompa el alambre?

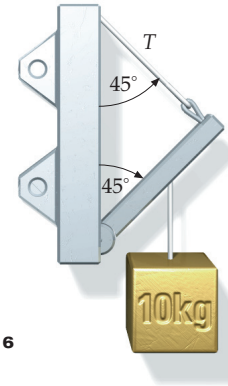


FIGURA 12.56 Problema 66

67 •• La figura 12.57 muestra una escalera de 20 kg apoyada contra una pared sin rozamiento y descansando sobre una superficie horizontal también sin rozamiento. Para evitar que la escalera se deslice, la parte inferior de la escalera se ata a la pared con un alambre delgado; la tensión del alambre es de 29,4 N. El alambre se romperá si la tensión supera los 200 N. (*a*) Si una persona de 80 kg asciende hasta la mitad de la escalera, ¿qué fuerza ejercerá ésta sobre la pared? (*b*) ¿Hasta qué altura puede ascender una persona de 80 kg con esta escalera? SSM

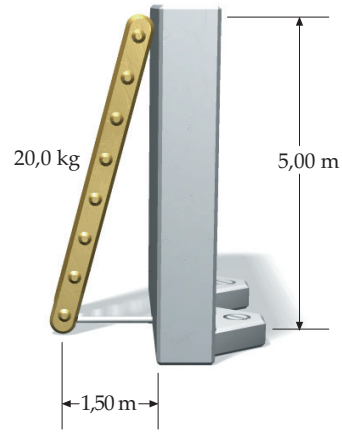


FIGURA 12.57 Problema 67

68 •• Un objeto de 360 kg pende de un cable sujeto a una barra de acero de 15 m de longitud que pivota en una pared vertical y se soporta mediante un cable, como indica la figura 12.58. La masa de la barra es de 85 kg. Con el cable sujeto a la barra a 5,0 m del extremo inferior, como se indica, determinar la tensión del cable y la fuerza ejercida por la pared sobre la barra de acero.

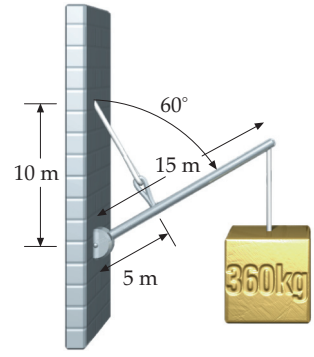


FIGURA 12.58 Problema 68

69 •• Repetir el problema 63 para el caso en que el camión acelera subiendo una pendiente que forma un ángulo de 9,0° con la horizontal.

70 •• Una barra delgada de 60 cm de longitud se equilibra sobre un pivote situado a 20 cm de un extremo cuando un objeto cuya masa de ($2m$ + 2 gramos) está en el extremo más próximo al pivote y otro objeto de masa m en el extremo opuesto (figura 12.59*a*). También se consigue el equilibrio si el objeto ($2m$ + 2 gramos) se reemplaza por el objeto m y en el otro extremo no se sitúa objeto alguno (figura 12.59*b*). Determinar la masa de la barra.

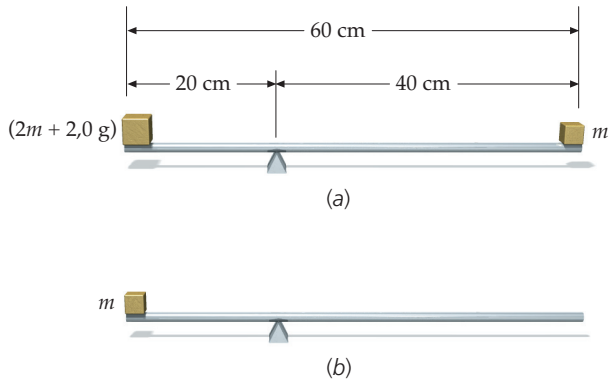


FIGURA 12.59 Problema 70

71 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Se tiene un gran número de ladrillos uniformes e idénticos, cada uno de longitud L. Si los apilamos uno encima de otro a lo largo, tal como se muestra en la figura 12.60, la longitud máxima que el ladrillo superior puede sobresalir sobre el que hay debajo es $L/2$. (*a*) Demostrar que si colocamos este conjunto de dos ladrillos de forma que sobresalgan encima de un tercer ladrillo, la máxima longitud que puede sobresalir el segundo ladrillo sobre el tercero es $L/4$. (*b*) Demostrar que, en general, si tenemos una pila de N ladrillos, la distancia máxima que puede sobresalir el ladrillo $(n - 1)$ (contado desde arriba) sobre el ladrillo n es L/n, siendo $n \leqslant N$. (*c*) Escribir un programa mediante una **hoja de cálculo** que calcule cuánto pueden sobresalir todos los ladrillos (la suma de cuánto sobresale cada uno) si se apilan N ladrillos, y calcular esta cifra para L = 1 m y N = 5, 10 y 100. (*d*) ¿Se aproxima esta suma a algún límite cuando $N \to \infty$? ¿Cuánto vale este límite? SSM

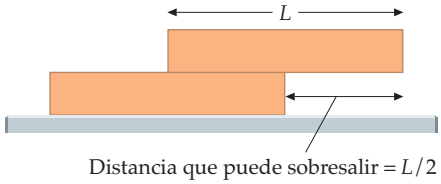


FIGURA 12.60 Problema 71

72 •• Una esfera uniforme de radio R y masa M se mantiene en reposo sobre un plano inclinado de ángulo θ mediante una cuerda horizontal, como muestra la figura 12.61. Sea R = 20 cm, M = 3 kg y θ = 30°. (*a*) Determinar la tensión en la cuerda. (*b*) ¿Cuál es la fuerza normal ejercida sobre la esfera por el plano inclinado? (*c*) ¿Cuál es la fuerza de rozamiento que actúa sobre la esfera?

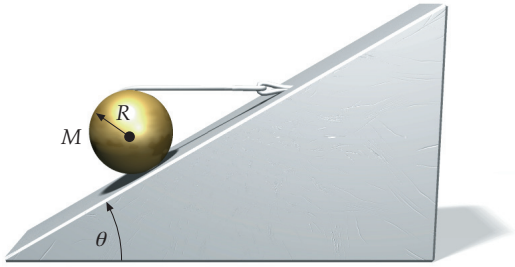


FIGURA 12.61 Problema 72

73 ••• Las patas de un trípode forman ángulos iguales de 90° entre sí en el vértice, donde se unen. Un bloque de 100 kg cuelga del vértice. ¿Cuáles son las fuerzas de compresión en las tres patas?

74 ••• La figura 12.62 muestra una viga uniforme de 20 cm de longitud descansando sobre un cilindro de 4 cm de radio. La masa de la viga es de 5,0 kg y la del cilindro de 8,0 kg. El coeficiente de rozamiento estático entre la viga y el cilindro es cero, mientras que los coeficientes de rozamiento estático entre el cilindro y el suelo y entre la viga y el suelo son mayores que cero. ¿Hay algún valor para estos coeficientes de rozamiento estático para los cuales el sistema esté en equilibrio estático? En caso afirmativo, ¿cuánto valen? En caso negativo, razonar la respuesta.

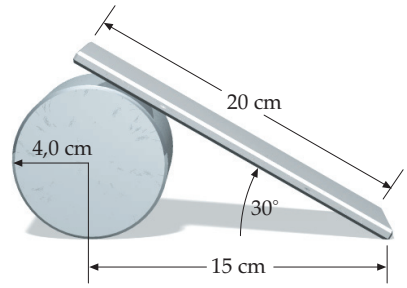


FIGURA 12.62 Problema 74

75 ••• Dos esferas sólidas pulidas (sin rozamiento) de radio r se sitúan dentro de un cilindro de radio R, como indica la figura 12.63. La masa de cada esfera es m. Determinar la fuerza ejercida por el fondo del cilindro sobre la esfera inferior, la fuerza ejercida por la pared del cilindro sobre cada una de las esferas y la fuerza ejercida por una esfera sobre la otra. Expresar todas las fuerzas en función de m, R y r. SSM

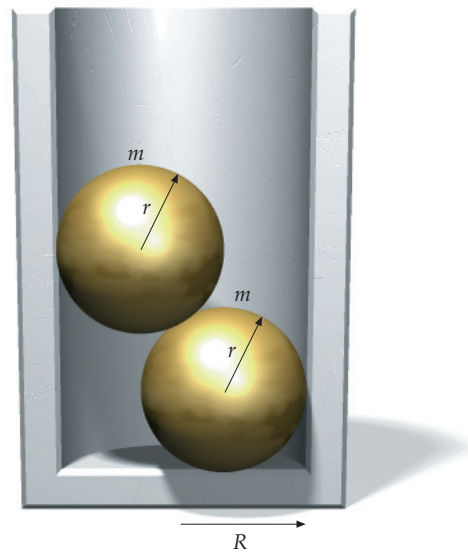


FIGURA 12.63 Problema 75

76 ••• Un cubo sólido de arista a equilibrado sobre un cilindro de diámetro d se encuentra en equilibrio inestable si $d << a$ y en equilibrio estable si $d >> a$ (figura 12.64). El cubo no se desliza sobre el cilindro. Determinar el valor mínimo de d/a para que el cubo se encuentre en equilibrio estable.

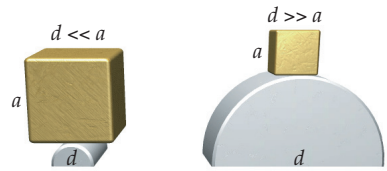


FIGURA 12.64 Problema 76

CAPÍTULO 13

En Escocia, las barcazas pueden viajar entre el canal Forth-Clyde y el canal Union gracias a la rueda de Falkirk. Cada una de las dos góndolas de la rueda levanta 300 toneladas de agua y puede acomodar hasta cuatro botes de 20 metros de largo a la vez. Sin embargo, para hacer rotar esta enorme rueda sólo es necesario un momento pequeño y una pequeña cantidad de energía. *(Powered by Light/Alan Spencer/Alamy.)*

Fluidos

13.1 Densidad
13.2 Presión en un fluido
13.3 Flotación y principio de Arquímedes
13.4 Fluidos en movimiento

El aire que llena nuestros pulmones, la sangre que fluye por nuestro cuerpo e incluso la lluvia que cae sobre nosotros son todos fluidos. Puede parecer raro que el aire sea un fluido, pero los fluidos incluyen tanto a los líquidos como a los gases. Los líquidos fluyen hasta ocupar las regiones más bajas del espacio en el que están contenidos, ya sea una botella de plástico, una esclusa de un canal, o tras una presa. A diferencia de los líquidos, los gases se expanden hasta llenar completamente sus contenedores. Comprender bien el comportamiento de los fluidos es entender el funcionamiento de nuestro organismo y nuestras interacciones con el mundo que nos rodea.

Los ingenieros civiles emplean el conocimiento de los fluidos para diseñar presas, que son más anchas en el fondo que en la parte superior. Los ingenieros aeronáuticos utilizan túneles de viento para observar el flujo de aire alrededor de los coches y de los aviones; esta información les ayuda a evaluar los aspectos aerodinámicos de cada vehículo en particular. Los profesionales sanitarios utilizan manómetros para medir la presión sanguínea.

Empezamos este capítulo estudiando los fluidos en reposo, considerando la densidad y la presión en los fluidos, así como la flotación y el principio de Arquímedes. A continuación, analizamos el flujo estacionario, dedicando especial atención al flujo laminar.

? ¿Por qué no se requiere ni un momento elevado y ni una gran cantidad de energía para hacer rotar la rueda de Falkirk? (Véase el ejemplo 13.8.)

13.1 DENSIDAD

En un gas, la distancia media entre dos moléculas es grande comparada con el tamaño de una molécula. Las moléculas interaccionan poco entre sí excepto durante sus breves colisiones. En un líquido o sólido, las moléculas están muy unidas y ejercen fuerzas entre sí que son comparables a las fuerzas que unen los átomos para formar moléculas. Las moléculas de un líquido forman transitoriamente enlaces de corto alcance que se rompen continuamente debido a la energía cinética interna de las moléculas y después vuelven a formarse. Estos enlaces mantienen unido el líquido; si no existieran, el líquido se vaporizaría inmediatamente y las moléculas escaparían en forma de vapor. La fuerza de los enlaces en un líquido depende del tipo de molécula. Por ejemplo, los enlaces entre las moléculas de helio son muy débiles y, por esta razón, el helio no se licua a la presión atmosférica a menos que la temperatura sea 4,2 K o inferior. El cociente entre la masa de un objeto y su volumen se denomina *densidad media*:

$$\text{Densidad media} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

DEFINICIÓN DE DENSIDAD MEDIA

Si la masa de una sustancia correspondiente a un pequeño elemento de volumen dV es dm, entonces la densidad de la sustancia en la localización correspondiente al elemento de volumen es

$$\rho = \frac{dm}{dV} \qquad 13.1$$

DEFINICIÓN: DENSIDAD

donde utilizaremos ρ para designar la densidad. Puesto que originalmente el gramo se definió como la masa de 1 cm^3 de agua líquida, la densidad de agua líquida en las unidades del sistema cgs (centímetro-gramo-segundo) es igual a 1 g/cm^3. Convirtiendo estas unidades en las unidades del SI (kilogramos por metro cúbico), obtenemos para la densidad del agua

$$\rho_a = \frac{1\text{ g}}{\text{cm}^3} \times \frac{\text{kg}}{10^3\text{ g}} \times \left(\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}\right)^3 = 1000\text{ kg/m}^3 \qquad 13.2$$

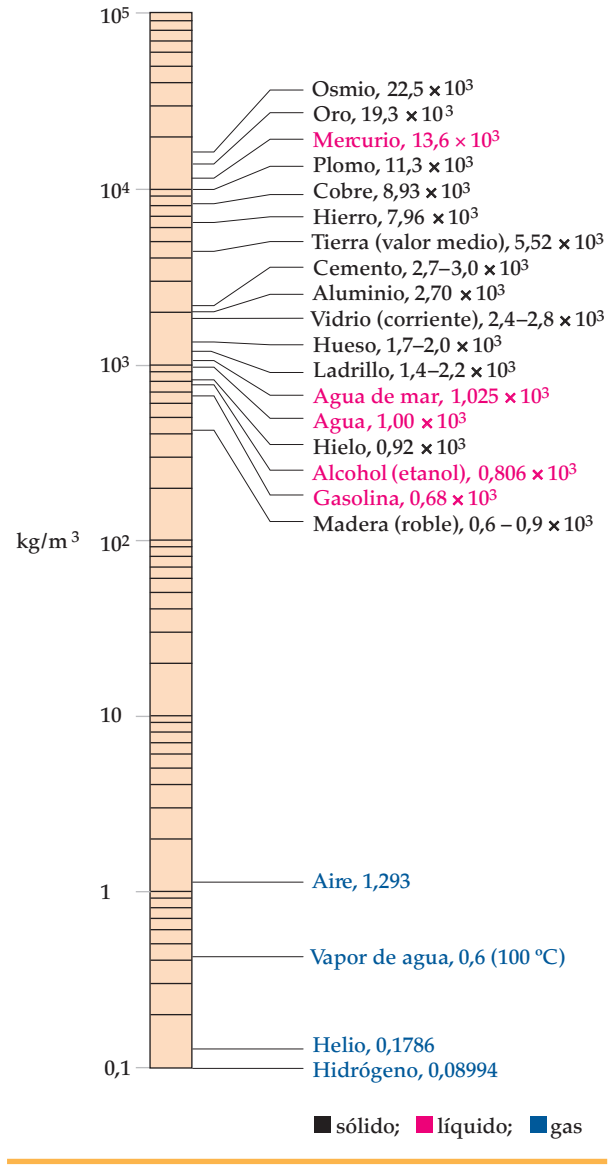
Las medidas precisas de la densidad deben tener en cuenta la temperatura, ya que las densidades de la mayor parte de los materiales, incluida el agua, varían con la temperatura. La ecuación 13.2 da el valor máximo de la densidad del agua, que se tiene a 4° C. La tabla 13.1 relaciona las densidades de algunas sustancias típicas.

Una unidad de volumen muy utilizada es el **litro** (L):

$$1\text{ L} = 10^3\text{ cm}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3$$

Expresada en estas unidades, el agua tiene una densidad de 1,00 kg/L. Cuando la densidad media de un objeto sólido es mayor que la del agua, se hunde en ella; cuando su densidad es menor que la del agua, flota. El cociente entre la densidad de una sustancia y la densidad del agua recibe el nombre de densidad específica de la sustancia. Por ejemplo, la densidad específica del aluminio es 2,7, lo cual significa que un volumen de aluminio tiene 2,7 veces la masa de un volumen igual de agua. Las densidades específicas de los objetos que se hunden en el agua están comprendidas en un intervalo entre 1 y 22,5 aproximadamente (correspondiente al elemento más denso, el osmio).

Tabla 13.1 Densidades de sustancias seleccionadas



Aunque la mayor parte de los sólidos y líquidos se dilatan ligeramente cuando se calientan y se contraen ligeramente cuando se ven sujetos a un incremento de presión externa, estas variaciones de volumen son relativamente pequeñas, por lo que podemos decir que la densidad de la mayor parte de los sólidos y líquidos es, aproximadamente, independiente de la temperatura y de la presión. En cambio, la densidad de un gas depende en gran medida de la temperatura y la presión. Por lo tanto, se debe especificar la temperatura y la presión cuando se den las densidades de los gases. Por convención, las condiciones estándar para las medidas de las propiedades físicas son presión atmosférica a nivel del mar y temperatura de 0 °C. Las densidades de las sustancias relacionadas en la tabla 13.1 se dan en condiciones estándar. Obsérvese que las densidades de los líquidos o sólidos son considerablemente mayores que las de los gases; por ejemplo, la densidad del agua es, aproximadamente, 800 veces mayor que la del aire en condiciones estándar.

Ejemplo 13.1 Cálculo de la densidad

Un frasco de 200 mL está lleno de agua a 4 °C. Cuando el frasco se calienta a 80 °C, se derraman 6 g de agua. ¿Cuál es la densidad del agua a 80 °C? (Suponer que la dilatación del frasco es despreciable.)

PLANTEAMIENTO La densidad del agua a 80 °C es $\rho' = m'/V$, donde $V = 200$ ml $= 200$ cm^3 es el volumen del frasco y m' es la masa que queda en el frasco después de derramarse los 6 g de agua. Hallaremos m' determinando en primer lugar la masa de agua que había originalmente en el frasco.

SOLUCIÓN

1. Sea ρ' la densidad del agua a 80 °C y sea m' la masa del agua en el frasco de volumen $V = 200$ mL. Relacionar ρ' con m' utilizando la definición de densidad: $\rho' = \dfrac{m'}{V}$
2. Calcular la masa original de agua en el frasco a 4 °C utilizando el valor de la densidad $\rho = 1{,}00$ g/cm^3: $m = \rho V = (1{,}00 \text{ kg/L})(0{,}200 \text{ L}) = 0{,}200 \text{ kg}$
3. Calcular la masa de agua remanente, m' después de derramar 6 g: $m' = m - 6 \text{ g} = 0{,}200 \text{ kg} - 0{,}006 \text{ kg} = 0{,}194 \text{ kg}$
4. Utilizar este valor de m' para determinar la densidad del agua a 80 °C: $\rho' = \dfrac{m'}{V} = \dfrac{0{,}194 \text{ kg}}{0{,}200 \text{ L}} = \boxed{0{,}970 \text{ kg/L}}$

COMPROBACIÓN La densidad del agua a 4 °C es 1 kg/L. Como la densidad del agua es máxima a 4 °C, es de esperar que a 80 °C la densidad sea inferior a 1 kg/L. Efectivamente, el resultado del paso 3 coincide con lo esperado.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.1 Un cubo macizo de metal de 8 cm de arista tiene una masa de 4,08 kg. (*a*) ¿Cuál es la densidad del cubo? (*b*) Si el cubo está hecho de uno solo de los elementos relacionados en la figura 13.1, ¿de qué elemento se trata?

PROBLEMA PRÁCTICO 13.2 Las dimensiones de un lingote de oro son 5 cm × 10 cm × 20 cm. ¿Cuál es su masa?

13.2 PRESIÓN EN UN FLUIDO

Cuando un fluido como el agua entra en contacto con la superficie de un sólido, el fluido ejerce una fuerza perpendicular a la superficie del cuerpo en cada punto de la superficie. Esta fuerza por unidad de área se denomina **presión** P del fluido:

$$P = \frac{F}{A} \qquad 13.3$$

DEFINICIÓN: PRESIÓN

La unidad de presión en el SI es el newton por metro cuadrado (N/m^2), que recibe el nombre de **pascal** (Pa):

$$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2 \qquad 13.4$$

En el sistema técnico inglés, la presión normalmente se expresa en libras por pulgada cuadrada (lb/in^2). Otra unidad común es la atmósfera (atm), que es aproximadamente la presión del aire a nivel del mar. Actualmente, la atmósfera se define como 101,325 kilopascales, que es aproximadamente igual a 14,70 lb/in^2:

$$1\ \text{atm} = 101{,}325\ \text{kPa} \approx 14{,}70\ \text{lb/in}^2 \qquad 13.5$$

Posteriormente, veremos otras unidades de presión de uso común.

La presión debida a un fluido que presiona contra un cuerpo tiende a comprimirlo. El cociente entre el cambio de presión y la disminución relativa de volumen ($-\Delta V/V$) se denomina **módulo de compresibilidad**:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad 13.6$$

DEFINICIÓN: MÓDULO DE COMPRESIBILIDAD

Como sucede con otros módulos elásticos, como el módulo de Young que se introdujo en la sección 12.7, el módulo de compresibilidad es un cociente entre una tensión y una deformación, donde ΔP hace el papel de tensión y $-\Delta V/V$ hace el papel de deformación. (Todos los materiales estables disminuyen de volumen cuando se les aumenta la presión. Por tanto, el signo de B en la ecuación 13.6 es siempre positivo.)

Cuanto más difícil de comprimir es un sólido, menor es su cambio relativo $-\Delta V/V$ para una determinada presión ΔP y, por lo tanto, mayor es su módulo de compresibilidad. La **compresibilidad** es la inversa del módulo de compresibilidad. Se puede determinar el módulo de compresibilidad en líquidos, gases y sólidos. Los líquidos y los sólidos son relativamente incompresibles; es decir, poseen valores grandes del módulo de compresibilidad B, siendo estos valores relativamente independientes de la temperatura y la presión. Por el contrario, los gases se pueden comprimir fácilmente, y los valores de B dependen fuertemente de la presión y la temperatura. La tabla 13.2 indica los valores del módulo de compresibilidad para diversos materiales.

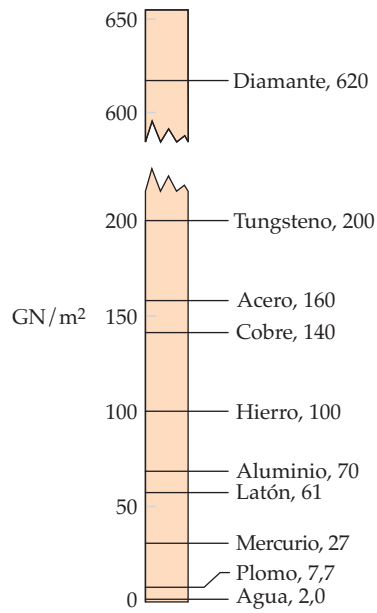
Como cualquier practicante de submarinismo sabe, la presión en un lago u océano aumenta cuando aumenta la profundidad. De forma semejante, la presión de la atmósfera disminuye al aumentar la altitud. En el caso de un líquido, cuya densidad es aproximadamente constante en todo su volumen, la presión aumenta linealmente con la profundidad. Podemos ver que esto es así considerando la columna de líquido de área transversal A indicada en la figura 13.1. La presión en la parte inferior de la columna debe ser mayor que la ejercida en su parte superior, puesto que debe soportar el peso de la columna de altura Δh. El peso de esta columna de líquido es

$$F_g = mg = (\rho V)g = \rho A\,\Delta h g$$

donde ρ y V son la densidad y el volumen del líquido. Si P_0 es la presión en la parte superior y P la presión en

> **!** La fuerza es una magnitud vectorial, pero la presión es una magnitud escalar. (La presión es el módulo de la fuerza por unidad de área.)

Tabla 13.2 Valores aproximados del módulo de compresibilidad B de varios materiales



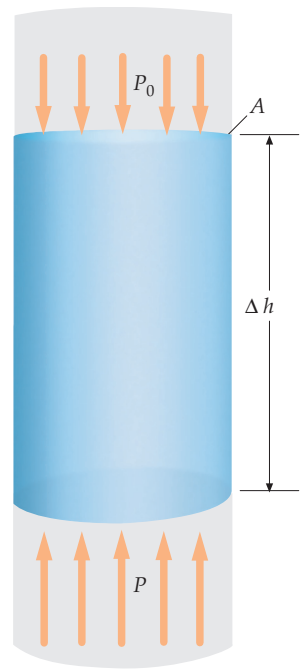


FIGURA 13.1

la inferior, la fuerza neta hacia arriba ejercida por esta diferencia de presiones es $PA - P_0A$. Igualando esta fuerza neta hacia arriba al peso de la columna, se tiene

$$PA - P_0A = (\rho A\,\Delta h g)$$

o bien

$$P = P_0 + \rho g\,\Delta h \quad (\rho \text{ constante}) \qquad 13.7$$

PROBLEMA PRÁCTICO 13.3
¿A qué profundidad por debajo de la superficie de un lago se encuentran dos buceadores si la presión es de 2 atm? (La presión en la superficie es de 1 atm.)

(Corbis.)

Ejemplo 13.2 Fuerza sobre una presa

Una presa rectangular de 30 m de anchura soporta una masa de agua que alcanza una altura de 25 m. Determinar la fuerza horizontal sobre la presa debida tanto al agua como a la presión atmosférica.

PLANTEAMIENTO Como la presión varía con la profundidad, para determinar la fuerza ejercida por el agua, no basta con multiplicar la presión por el área de la presa. En lugar de ésto, debemos considerar la fuerza ejercida sobre una capa de agua de anchura $L = 30$ m, altura dh y área $dA = L\,dh$ a una profundidad h (figura 13.2) e integrar desde $h = 0$ a $h = H = 25$ m. La presión del agua a la profundidad h es $P_{atm} + \rho gh$, donde P_{atm} es la presión atmosférica. Despreciar cualquier variación en la presión del aire sobre los 25 m de altura de la presa. La presión atmosférica puede omitirse, ya que se ejerce a ambos lados de la pared.

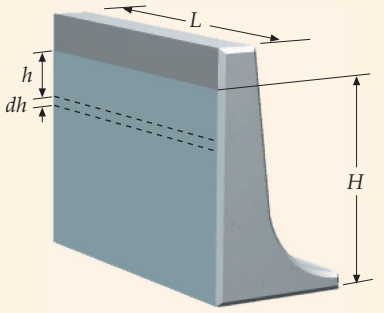


FIGURA 13.2

SOLUCIÓN

1. Expresar la fuerza dF sobre el elemento de longitud dh en función de la presión $P_{atm} + \rho gh$ ejercida por el agua sobre la presa:
$$dF = P\,dA = (P_{atm} + \rho gh)L\,dh$$

2. Integrar desde $h = 0$ a $h = H$ para hallar la componente horizontal de la fuerza del agua sobre la presa:
$$F = \int_{h=0}^{h=H} dF = \int_0^H (P_{atm} + \rho gh)L\,dh$$
$$= P_{atm}LH + \frac{1}{2}\rho gLH^2$$

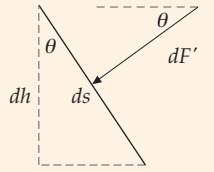


FIGURA 13.3

3. La cara exterior de la presa no es vertical. En la figura 13.3 se esquematiza el corte de una tira horizontal de longitud L y anchura ds, a lo ancho de la cara posterior; dh es la altura de la tira:

4. Relacionar la fuerza dF' ejercida sobre esa tira por el aire con la presión del aire y el área de la tira:
$$dF' = P_{atm}\,dA = P_{atm}L\,ds$$

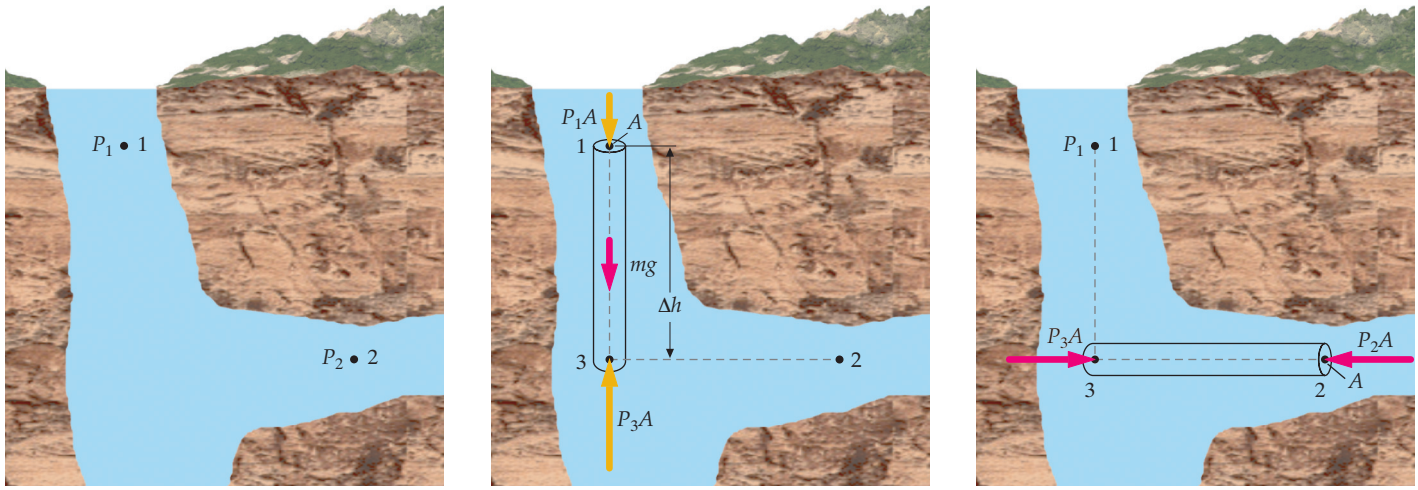
5. Expresar la componente horizontal de dF' en función de dh:
$$dF'_x = dF\cos\theta = P_{atm}L\,ds\cos\theta = P_{atm}L\,dh$$

6. Integrar de $h = 0$ a $h = H$ para hallar la componente horizontal ejercida por el aire sobre la cara exterior de la presa:
$$F' = \int_{h=0}^{h=H} dF' = \int_0^H P_{atm}L\,dh = P_{atm}LH$$

7. La fuerza horizontal neta que actúa sobre la presa es $F - F'_x$:
$$F - F'_x = (P_{atm}LH + \tfrac{1}{2}\rho gLH^2) - P_{atm}LH = \tfrac{1}{2}\rho gLH^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(1000\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{N/kg}))(30\ \text{m})(25\ \text{m})^2$$
$$= 9{,}20 \times 10^7\ \text{N} = \boxed{9{,}2 \times 10^7\ \text{N}}$$

COMPROBACIÓN Como era de esperar, la fuerza neta horizontal que actúa sobre la presa es independiente de la presión del aire. Esto se debe a que la presión del aire sobre la superficie del agua es la misma que la presión que el aire ejerce en la cara exterior de la presa.

OBSERVACIÓN Las presas habitualmente son más gruesas en el fondo que en la superficie, ya que la presión sobre la presa aumenta con la profundidad del agua.



(a) (b) (c)

FIGURA 13.4

La presión de todos los líquidos aumenta linealmente con la profundidad en cualquier recipiente, independientemente de su forma. Además, la presión es la misma en todos los puntos que están a una misma profundidad. Estas dos propiedades se pueden ver comparando la presión en el punto 1 de la figura 13.4*a* con la presión en el punto 2, que está situado en una cueva bajo el agua. Primero, comparamos la presión en los puntos 1 y 3, siendo este último un punto situado directamente debajo del punto 1 a la misma profundidad que el punto 2, tal como se muestra en la figura 13.4*b*. Consideremos las fuerzas verticales en la columna de agua de altura Δh y área transversal A que une los puntos 1 y 3. La fuerza hacia arriba sobre la columna, P_3A, compensa las dos fuerzas hacia abajo, P_1A y mg, donde $m = \rho A\,\Delta h$ es la masa del agua de la columna ($A\,\Delta h$ es el volumen de la columna). Es decir, $P_3A = P_1A + \rho A\,\Delta h g$. Dividiendo por A, resulta

$$P_3 = P_1 + \rho g\,\Delta h$$

Consideremos ahora las fuerzas que actúan sobre el cilindro horizontal de agua, también de área transversal A, que conecta los puntos 2 y 3 (figura 13.4*c*). Hay dos fuerzas con componentes que van en la dirección del eje del cilindro, P_3A y P_2A. El hecho de que estas dos fuerzas se compensen una a otra significa que $P_3 = P_2$. Se sigue entonces que

$$P_2 = P_1 + \rho g\,\Delta h$$

Así pues, si aumentamos P_0 presionando por ejemplo sobre la superficie superior con un émbolo, el aumento de presión es el mismo en todo el seno del líquido, lo cual se conoce como **principio de Pascal**, en honor de Blaise Pascal (1623-1662) y es válido tanto para líquidos como para gases:

> Un cambio de presión aplicado a un líquido encerrado dentro de un recipiente se transmite por igual a todos los puntos del fluido y a las propias paredes del recipiente.
>
> PRINCIPIO DE PASCAL

Una aplicación común del principio de Pascal lo constituye el elevador hidráulico indicado en la figura 13.5.

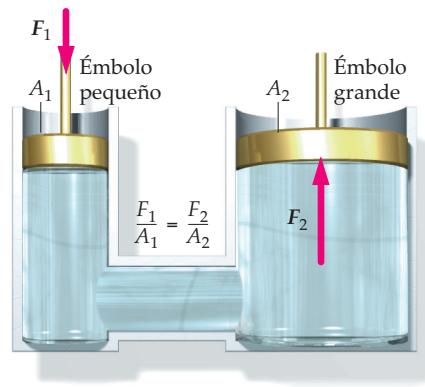


FIGURA 13.5 Prensa o elevador hidráulico. Una fuerza pequeña F_1 ejercida sobre el émbolo o pistón pequeño produce una variación de presión F_1/A_1 que se transmite por el líquido hasta el émbolo grande. Como las presiones en los pistones grande y pequeño son iguales, las fuerzas correspondientes cumplen la relación $F_2/A_2 = F_1/A_1$. Como el área del pistón grande es mucho mayor que el del pistón pequeño, la fuerza sobre el pistón grande $F_2 = (A_2/A_1)\,F_1$ es mucho mayor que F_1.

Ejemplo 13.3 La prensa hidráulica

El émbolo grande de una prensa hidráulica tiene un radio de 20 cm. ¿Qué fuerza debe aplicarse al émbolo pequeño de radio 2 cm para elevar un coche de masa 1500 kg?

PLANTEAMIENTO La presión P multiplicada por el área A_2 del pistón grande debe ser igual al peso mg del coche. La fuerza que debe ejercerse sobre el pistón pequeño F_1 es esta misma presión multiplicada por el área A_1 (véase figura 13.5).

SOLUCIÓN

1. La fuerza F_1 es la presión P multiplicada por el área A_1: $F_1 = PA_1$

2. La presión multiplicada por el área A_2 debe ser igual al peso del coche: $PA_2 = mg$ de modo que $P = \dfrac{mg}{A_2}$

3. Utilizar este resultado de P para calcular F_1:

$$F_1 = PA_1 = \frac{mg}{A_2}A_1 = mg\frac{A_1}{A_2} = mg\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}$$

$$= (1500\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})\left(\frac{2{,}0\text{ cm}}{20\text{ cm}}\right)^2$$

$$= 147\text{ N} = \boxed{150\text{ N}}$$

COMPROBACIÓN El radio difiere en un factor 10 por lo que las áreas diferirán en un factor 100. Entonces, la fuerzas también difieren en un factor 100.

En la figura 13.6, se muestra agua en un recipiente formado por secciones de diferentes formas. A primera vista, podría parecer que la presión en la sección 3, la sección que contiene la mayor cantidad de agua, sería la mayor, y que el agua, por lo tanto, se vería forzada a subir a una mayor altura en la sección 2, que es la sección con menor cantidad de agua. El hecho de que ésto no ocurra así se conoce con el nombre de la **paradoja hidrostática**. La presión sólo depende de la profundidad del agua, no de la forma del recipiente. A la misma profundidad, la presión es la misma en todas las partes del recipiente, como puede demostrarse experimentalmente. Aunque el agua de la sección 4 del contenedor pesa más que la de la sección 2, la parte de agua de la sección 4 que no está sobre la zona abierta está soportada por las paredes horizontales del contenedor. De hecho, el agua que hay por encima de la zona abierta en la sección 5 pesa menos que la que hay por encima en la sección 1. Sin embargo, el contenedor horizontal de la sección 5 ejerce una fuerza hacia abajo sobre el agua que compensa exactamente su menor peso.

¡ La presión sólo depende de la profundidad del agua y no de la forma del recipiente. De esta forma, la presión es la misma en todas las partes del recipiente que se hallan a la misma profundidad.

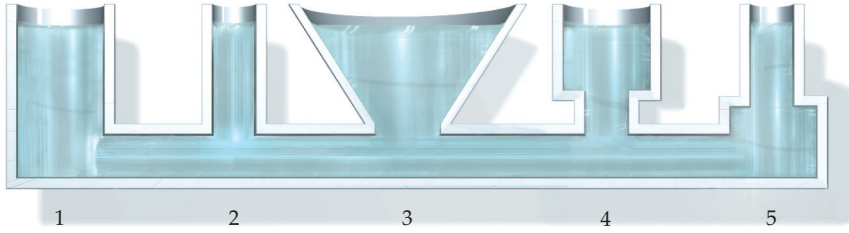


FIGURA 13.6 Paradoja hidrostática. El nivel del agua es el mismo en todos los recipientes con independencia de su forma. El peso de las porciones de agua que no quedan justo encima de la abertura (como sucede en los casos 3 y 4) es soportado por las paredes del recipiente.

Podemos utilizar el resultado de que la diferencia de presión crece linealmente con la profundidad para medir presiones desconocidas. En la figura 13.7, se muestra un medidor de presión simple, el manómetro de tubo abierto. La parte superior del tubo se encuentra abierta y, por lo tanto, a la presión atmosférica P_{atm}. El otro extremo del tubo se encuentra a la presión P que se desea medir. La diferencia $P - P_{atm}$, denominada **presión manométrica**, es igual a ρgh, donde ρ es la densidad del líquido en el tubo. Por ejemplo, la presión que se mide en la cámara de la rueda en un coche es la presión manométrica. Cuando la cámara se encuentra completamente deshinchada, la presión manométrica es igual a cero, y la presión absoluta de la cámara es igual a la presión atmosférica. La presión absoluta P se obtiene a partir de la presión manométrica sumándole la presión atmosférica:

$$P = P_{\text{manométrica}} + P_{\text{atm}} \qquad 13.8$$

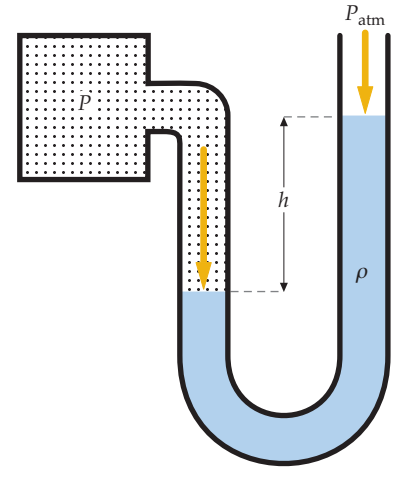


FIGURA 13.7 Manómetro de tubo abierto para medir una presión desconocida P. La diferencia $P - P_{atm}$ es igual a ρgh.

Medidor de la presión para neumáticos

Medidor de la presión para neumáticos. El pistón presiona la varilla hacia la derecha hasta que la fuerza del muelle más la fuerza de la presión atmosférica se equilibra con la fuerza ejercida por la presión del aire del interior del neumático.

Comprobando la presión de un neumático. *(Vanessa Vick/ Photo Researchers, Inc.)*

En la figura 13.8, se muestra un barómetro de mercurio utilizado para medir la presión atmosférica. La parte superior del tubo está cerrada y se le ha hecho el vacío de forma que la presión en su interior es igual a cero. El otro extremo se encuentra abierto y a la presión atmosférica P_{atm}. La presión P_{atm} es ρgh, donde ρ es la densidad del mercurio.

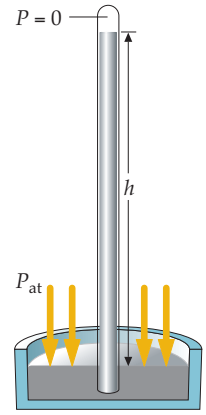


FIGURA 13.8 En el espacio del extremo superior del tubo no hay nada a excepción del vapor de mercurio. A temperatura ambiente, la presión de vapor del mercurio es inferior a 10^{-5} atm.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.4
A 0 °C, la densidad del mercurio es de 13,595 × 10^3 kg/m^3. ¿Cuál es la altura de la columna en un barómetro de mercurio si la presión es 1 atm = 101,325 kPa?

En la práctica, la presión se mide frecuentemente en milímetros de mercurio (unidad llamada comúnmente **torr** en honor del físico italiano Torricelli) o en pulgadas de mercurio (escrito como inHg). Estas unidades de presión se relacionan entre sí del modo siguiente:

$$1{,}00 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 760 \text{ torr}$$
$$= 29{,}9 \text{ inHg} = 101 \text{ kPa} = 14{,}7 \text{ lb/in}^2 \qquad 13.9$$

Otras unidades utilizadas comúnmente en los mapas meteorológicos son el **bar** y el **milibar**, definidos por

$$1 \text{ bar} = 10^3 \text{ milibares} = 100 \text{ kPa} \qquad 13.10$$

Una presión de 1 atm es, aproximadamente, un 1,01% más grande que la presión de un bar.

Ejemplo 13.4 Presión sanguínea en la aorta

La presión manométrica media en la aorta humana es de 100 mmHg, aproximadamente. Expresar esta presión sanguínea media en pascales.

PLANTEAMIENTO Utilizamos los factores de conversión de la ecuación 13.9.

SOLUCIÓN

Utilizamos uno de los factores de conversión que aparecen en la ecuación 13.9:

$$P = 100 \text{ mmHg} \times \frac{101 \text{ kPa}}{760 \text{ mmHg}} = \boxed{13{,}3 \text{ kPa}}$$

COMPROBACIÓN Esperamos que la presión sea una pequeña fracción de 1 atm. Una presión de 13,3 kPa sería razonable, pues 1 atm = 101 kPa.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.5 Expresar una presión de 45 kPa en (*a*) milímetros de mercurio y (*b*) atmósferas.

La relación entre la presión y la altura (o profundidad) es más complicada en un gas que en un líquido. La densidad de un líquido es esencialmente constante, mientras que la densidad de un gas es, aproximadamente, proporcional a la presión. Y la pre-

sión de una columna de aire disminuye al aumentar la altitud respecto a la superficie de la Tierra, como sucede con la presión de una columna de agua, pero, a diferencia de este caso, la disminución de presión con la altura no es lineal con la distancia.

Ejemplo 13.5 La ley barométrica

Si es cierta la hipótesis de que la densidad del aire es proporcional a la presión, entonces la presión debe disminuir exponencialmente con la altitud. A partir de esta hipótesis verificar esta predicción y calcular la altitud a la cual la presión es la mitad de su valor a nivel del mar.

PLANTEAMIENTO Aplicar la segunda ley de Newton a un elemento de aire que se encuentra a una altitud y y grosor vertical dy para obtener la expresión del cambio de presión debido a un cambio de altitud dy. Integrar esta expresión, teniendo en cuenta que la densidad es proporcional a la presión.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un elemento de aire, horizontal y en forma de disco a una altitud y y grosor dy, de área transversal A y masa dm. Indicar en el esquema todas las fuerzas que actúan sobre el elemento (figura 13.9):

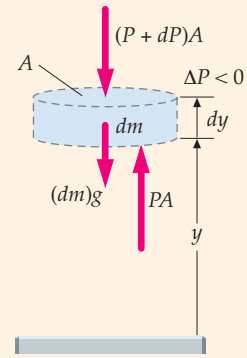


FIGURA 13.9 La presión es mayor por debajo del elemento de aire que por encima. Esta diferencia de presiones produce una fuerza vertical hacia arriba que compensa la fuerza gravitacional.

2. Aplicar la segunda ley de Newton sobre el disco. La aceleración es cero, luego la suma de fuerzas es cero: $PA - (P + dP)A - (dm)g = 0$

3. Simplificar la ecuación y sustituir dm por $\rho A dy$: $-A\,dP - \rho g A\,dy = 0$ luego $dP = -\rho g\,dy$

4. Suponemos que la densidad es proporcional a la presión y conocemos la densidad ρ_0 y la presión P_0 a nivel del mar ($y = 0$): $\dfrac{\rho}{P} = \dfrac{\rho_0}{P_0}$

5. Sustituimos ρ en el resultado del paso 3 y dividimos ambos lados por P para separar variables: $dP = -P\dfrac{\rho_0}{P_0} g\,dy$ o sea $\dfrac{dP}{P} = -\dfrac{\rho_0}{P_0} g\,dy$

6. Integramos de $y = 0$ a $y = y_f$. Sea $P = P_f$ cuando la altitud es y_f: $\displaystyle\int_{P_0}^{P_f} \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_0^{y_f} dy$

   por lo tanto, $\ln\dfrac{P_f}{P_0} = -\dfrac{\rho_0}{P_0} g y_f$

7. Despejamos P_f: $P_f = P_0 e^{-(\rho_0/P_0)gy_f}$ o bien $\boxed{P = P_0 e^{-(\rho_0/P_0)gy}}$

8. Calculamos h para el cual $P = \frac{1}{2}P_0$. Buscamos la densidad del aire a 1 atm en la tabla 13.1: $\frac{1}{2}P_0 = P_0 e^{-(\rho_0/P_0)gh} \Rightarrow h = \dfrac{P_0}{\rho_0 g}\ln 2$

   finalmente, $h = \dfrac{(1{,}01 \times 10^5\ \text{Pa})\ln 2}{(1{,}29\ \text{kg/m}^3)(9{,}81\ \text{N/kg})}$

   $= \boxed{5{,}5\ \text{km}}$

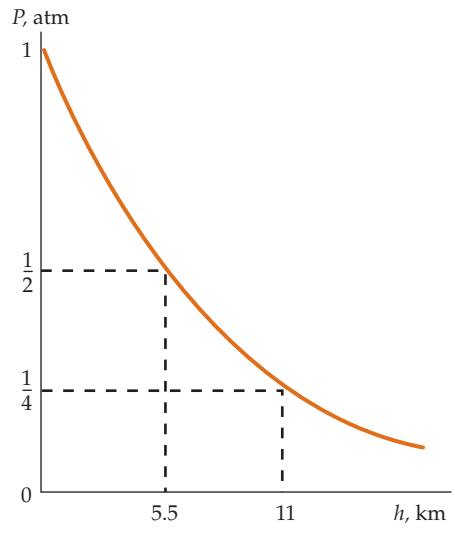


FIGURA 13.10 Variación de la presión con la altura por encima de la superficie terrestre. Por cada 5,5 km de incremento de altura, la presión se reduce a la mitad.

COMPROBACIÓN A una altitud de 5,5 km (unos 18 000 pies) muchas personas padecen de falta de oxígeno. Por tanto, que la presión a esa altura sea la mitad de la presión normal no es de extrañar.

OBSERVACIÓN El resultado del paso 7 muestra que la presión del aire decrece exponencialmente con la altitud. Este resultado implica que la presión del aire disminuye en una fracción constante para un incremento fijo dado de altura, como se ve en la figura 13.10. A una altitud de 5,5 km, aproximadamente, la presión del aire es la mitad del valor que tendría en la superficie del mar. Si ascendemos otros 5,5 km hasta una altitud de 11 km (altura típica de vuelo de un avión comercial), la presión se ha vuelto a reducir a la mitad, de modo que equivale a la cuarta parte de la que se tiene al nivel del mar, y así sucesivamente. Por ello, los aviones comerciales que vuelan a grandes alturas llevan sus cabinas presurizadas. Como la densidad del aire es proporcional a la presión, esta densidad también disminuye con la altura. Así, por ejemplo, se dispone de menos oxígeno en una montaña que a baja altitud; por ello, resulta tan difícil la realización de ejercicios físicos en montañas como los Andes, y ascender el Himalaya es peligroso.

13.3 FLOTACIÓN Y PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Si pesamos un objeto pesado sumergido en agua suspendiéndolo de un dinamómetro (figura 13.11*a*), el peso aparente del objeto (la lectura del dinamómetro) es inferior al peso del objeto. Esto es así porque el agua ejerce una fuerza hacia arriba que equilibra parcialmente la fuerza de la gravedad. Esta fuerza es aún más evidente cuando sumergimos un trozo de corcho. Cuando el corcho está completamente sumergido, experimenta una fuerza hacia arriba ejercida por la presión del agua, que es mayor que la fuerza de la gravedad, de manera que el corcho acelera hacia la superficie, donde flota parcialmente sumergido. La fuerza ejercida por un fluido sobre un cuerpo sumergido en él se denomina **fuerza ascensional** (o de flotación o empuje). Es igual en módulo al peso del fluido desplazado por el cuerpo. (La definición de fuerza ascensional se refinará más adelante en esta sección.)

> Todo cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional o de empuje igual al peso del fluido desplazado.
>
> PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Esta propiedad de los cuerpos se conoce con el nombre de **principio de Arquímedes**.

Podemos deducir el principio de Arquímedes a partir de las leyes de Newton considerando las fuerzas que actúan sobre una porción de un fluido y observando que, cuando está en equilibrio estático, la fuerza neta sobre la misma debe ser nula. La figura 13.11*b* muestra las fuerzas verticales que actúan sobre un objeto que se pesa mientras está sumergido, es decir, la fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$ dirigida hacia abajo; la fuerza del dinamómetro $\vec{F}_s$ que actúa hacia arriba; una fuerza $\vec{F}_1$ que actúa hacia abajo, debida a la presión del fluido sobre la superficie superior del objeto y una fuerza $\vec{F}_2$ que actúa hacia arriba debida a la presión del fluido sobre la superficie inferior del objeto. Como la lectura del dinamómetro indica una fuerza inferior a su peso, el módulo de la fuerza $\vec{F}_2$ debe ser mayor que el módulo de $\vec{F}_1$. El vector suma de estas dos fuerzas es la fuerza ascensional o de empuje $\vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (figura 13.11*c*). La fuerza ascensional tiene lugar porque la presión del fluido sobre la superficie inferior del cuerpo es mayor que la presión que actúa sobre la superficie de la parte superior del cuerpo.

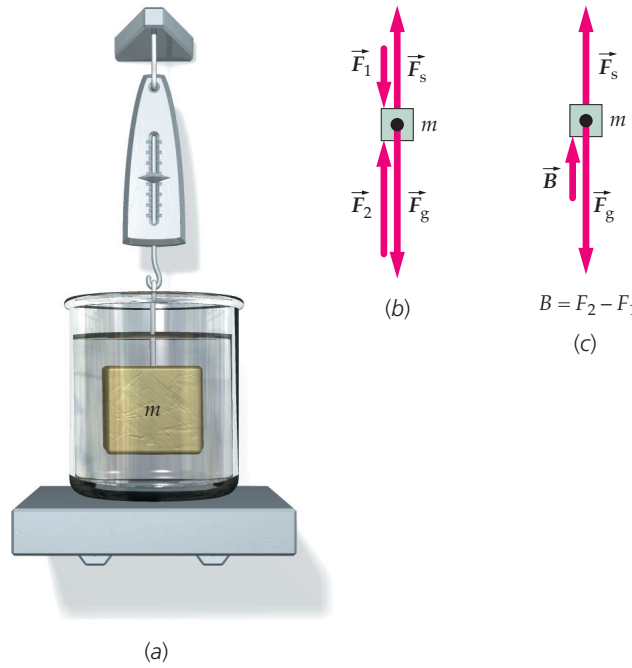


FIGURA 13.11 (*a*) Forma de pesar un objeto sumergido en un fluido. (*b*) Diagrama de fuerzas en el que puede verse el peso, $\vec{F}_g$, la fuerza ejercida por el muelle $\vec{F}_s$ y las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ ejercidas por el fluido que lo rodea. (*c*) La fuerza ascensional o de flotación $\vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ es la fuerza neta ejercida por el fluido sobre el objeto.

En la figura 13.12, se prescinde del dinamómetro y el objeto sumergido se ha reemplazado por un volumen igual de fluido (indicado por líneas de puntos) a la que nos referiremos como muestra de fluido. La fuerza ascensional $\vec{B} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ que actúa sobre la muestra de fluido es la misma que actuaba sobre nuestro objeto original. Esto se debe a que el fluido que rodea a la muestra de fluido y el fluido que rodea al objeto tienen la misma configuración; no hay ninguna razón para suponer que la presión del fluido que lo rodea no sea la misma en los puntos correspondientes en ambos recipientes. Como este volumen de fluido está en equilibrio, la fuerza resultante que actúa sobre él debe ser cero. La fuerza ascensional o de empuje es igual al peso del fluido en este volumen:

$$B = F_{gf} \qquad 13.11$$

Obsérvese que este resultado no depende de la forma del objeto sumergido. Si consideramos una porción cualquiera de forma irregular del fluido como nuestra muestra de fluido, sobre ella deberá actuar una fuerza ascensional debida al fluido que la rodea y que resulta ser igual al peso de dicha porción. Por lo tanto, hemos deducido el principio de Arquímedes.

El rey Hierón II había encomendado a Arquímedes (287-212 a.C.) la tarea de determinar si una corona fabricada para él estaba hecha toda ella de oro o si, por el contrario, contenía algún metal más barato como la plata. El problema consistía en

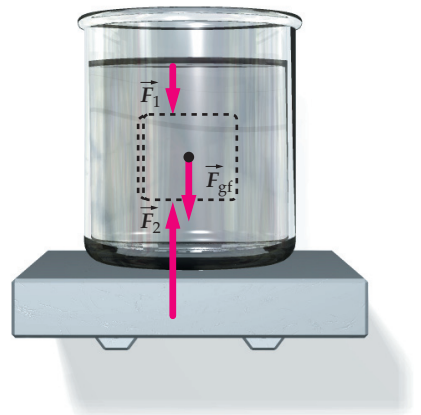
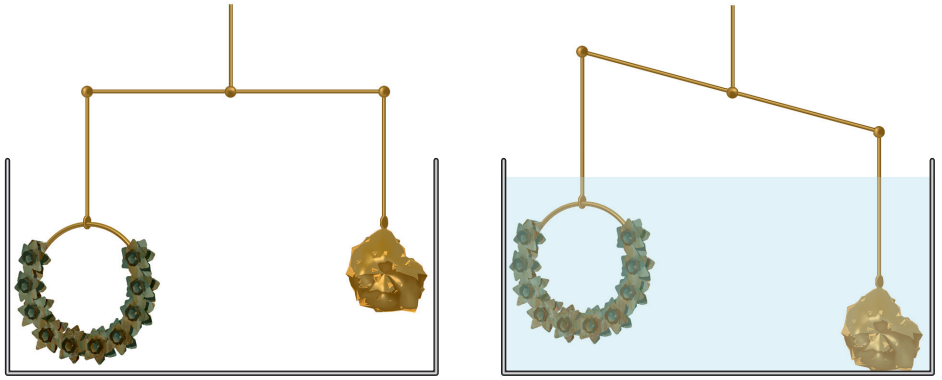


FIGURA 13.12 La misma situación que se daba en la figura 13.11, pero ahora el objeto ha sido sustituido por un volumen igual del fluido. Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, debidas a la presión del fluido, son las mismas que las fuerzas correspondientes ejercidas sobre el objeto en la figura 13.11. La fuerza ascensional o de empuje es igual al peso del fluido desplazado, F_{gf}.



(*a*) La corona y la pepita de oro tienen el mismo peso.

(*b*) La corona desplaza más agua que la pepita de oro.

FIGURA 13.13 (*a*) La corona y la pepita de oro tienen el mismo peso. (*b*) La corona desplaza más agua que la pepita de oro.

determinar la densidad de un objeto de forma irregular, como la corona, sin destruirlo. Según cuenta la historia, Arquímedes encontró la solución mientras se bañaba e inmediatamente echó a correr desnudo por las calles de Siracusa gritando "¡Eureka!" ("¡Lo encontré!"). Este genial descubrimiento precedió a las leyes de Newton, a partir de las cuales puede deducirse el principio de Arquímedes, en unos 1900 años. Arquímedes encontró lo que constituye un procedimiento simple y exacto para comparar la densidad de la corona con la densidad del oro utilizando una balanza. Puso la balanza en un cuenco y colocó la corona en un platillo y oro puro de igual masa en el otro. Entonces añadió agua al cuenco (figura 13.13*a*), sumergiendo la corona y el oro puro. La balanza osciló, elevando la corona (figura 13.13*b*) —indicando que la fuerza ascensional que actuaba sobre ésta era mayor que la que actuaba sobre el oro puro, porque el volumen del agua desplazado por la corona era mayor que el desplazado por el oro puro. La corona era menos densa que el oro puro.

El peso aparente $F_{g\,ap}$ de un objeto sumergido en un fluido es la diferencia entre su peso F_g y la fuerza ascensional B:

$$F_{g\,ap} = F_g - B \qquad 13.12$$

El globo de aire caliente y el bote necesitan empuje para flotar. *(Richard Hamilton Smith/ CORBIS.)*

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas utilizando el principio de Arquímedes

PLANTEAMIENTO Lea atentamente el enunciado del problema para analizar la situación. Hacer un dibujo de la situación puede ser útil.

SOLUCIÓN

1. Aplicar el principio de Arquímedes para relacionar el empuje con el peso del volumen desplazado.
2. Aplicar la segunda ley de Newton sobre el objeto y calcular la magnitud deseada.

COMPROBACIÓN Verifique que su respuesta tiene sentido.

Ejemplo 13.6 ¿Es realmente de oro? *Póngalo en su contexto*

Una amiga está preocupada por un anillo de oro que compró en un viaje reciente. El anillo era caro y nuestra amiga quiere saber si realmente es de oro o si es de otro material. Decidimos ayudarla usando nuestros conocimientos de Física. Pesamos el anillo y vemos que pesa 0,158 N. Usando una cuerda lo colgamos de una balanza, lo sumergimos en agua y entonces pesa 0,150 N. ¿Es de oro el anillo?

PLANTEAMIENTO Si el anillo es de oro puro, su densidad específica (su densidad relativa al agua) será de 19,3 (véase la tabla 13.1). Usando el principio de Arquímedes como referencia, determinar la densidad del anillo relativa a la del agua.

SOLUCIÓN

1. El peso F_g del anillo es igual a su densidad ρ_R por su volumen y por g. El empuje B sobre el anillo (cuando se sumerge) es igual a la densidad del agua ρ_a por Vg:

$$F_g = \rho_R V g$$
$$B = \rho_a V g$$

2. Dividimos la primera entre la segunda ecuación para obtener el cociente de densidades:

$$\frac{F_g}{B} = \frac{\rho_R V g}{\rho_a V g} = \frac{\rho_R}{\rho_a}$$

3. De acuerdo con la segunda ley de Newton, B es igual al peso menos el peso aparente al sumergirse:

$$F_{g\,ap} = F_g - B \Rightarrow B = F_g - F_{g\,ap}$$

4. Sustituimos en el resultado del paso 2:

$$\frac{F_g}{F_g - F_{g\,ap}} = \frac{\rho_R}{\rho_a}$$

5. Despejamos el cociente ρ_R/ρ_a:

$$\frac{\rho_R}{\rho_a} = \frac{F_g}{F_g - F_{g\,ap}} = \frac{0{,}158\ \text{N}}{0{,}158\ \text{N} - 0{,}150\ \text{N}} = \frac{0{,}158\ \text{N}}{0{,}008\ \text{N}}$$

6. El denominador tiene una sola cifra significativa, luego el cociente de densidades tiene una sola cifra significativa:

$$\frac{\rho_R}{\rho_a} = \frac{0{,}158\ \text{N}}{0{,}008\ \text{N}} = 19{,}3 = 20$$

el 2 del 20 es una cifra significativa, pero el 0 no lo es.

7. Comparar el cociente de densidades con el cociente entre la densidad del oro y la del agua, que es 19,3:

De acuedo con la medida, el cociente de densidades es 2×10^1.

El anillo puede ser de oro puro, pero la medida no es lo suficientemente precisa para estar seguro.

COMPROBACIÓN La incertidumbre del resultado es grande, como era de esperar. Cuando se restan dos números casi iguales hay menos cifras significativas en el resultado que en los números originales.

OBSERVACIÓN Se necesita una balanza de mayor precisión para poder dar una respuesta rigurosa.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.6 Un bloque de un material desconocido pesa 3 N y tiene un peso aparente de 1,89 N cuando se sumerge en agua. ¿De qué material se trata?

PROBLEMA PRÁCTICO 13.7 Un pedazo de plomo (densidad específica = 11,3) pesa 80 N en aire. ¿Cuánto pesa sumergido en agua?

REVISIÓN DEL EMPUJE

Supongamos que la densidad del bloque que se muestra en la figura 13.14 es mayor que la densidad del fluido del entorno, y que tanto el bloque como el plato de la balanza están completamente sumergidos en él. La fuerza gravitatoria que actúa sobre el bloque vale $\vec{F}_g$, su peso, y la balanza está ajustada, de modo que marca cero cuando el plato no aguanta el bloque (figura 13.14*b*). Si se coloca el bloque en el plato de la balanza (figura 13.14*a*), la lectura de la escala es el peso aparente $F_{g\,ap}$ del bloque. Cuando el bloque está sobre la balanza, éste está en contacto directo con el fluido, excepto en aquellos puntos de la base donde se apoya en el plato de la balanza. Si suponemos que éste no es completamente plano, sino que tiene rugosidades, el bloque se apoya únicamente en las regiones más altas del plato. (En las más bajas, el fondo del bloque está en contacto con el fluido.) Analicemos

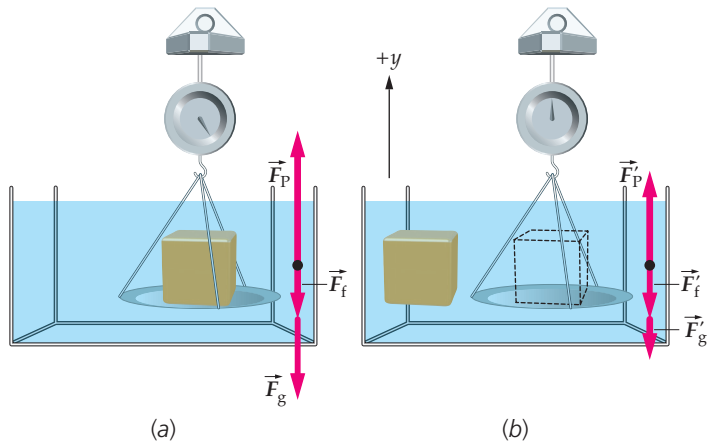


FIGURA 13.14

ahora esta situación para mostrar que la lectura de la balanza es igual al peso del bloque menos el peso de un volumen igual de fluido.

Mientras el bloque descansa sobre el plato de la balanza, la fuerza neta ejercida por el fluido sobre el bloque $\vec{F}_f$ resulta de una combinación de la fuerza hacia abajo ejercida por el fluido en la superficie superior del bloque y de la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido en aquellas regiones de la superficie inferior del bloque con las que está en contacto. (Hemos representado $\vec{F}_f$ hacia abajo. Sin embargo, si el fluido estuviera en contacto con una gran porción de la superficie inferior del bloque, esta fuerza $\vec{F}_f$ podría ir dirigida hacia arriba.) Las otras dos fuerzas verticales que actúan sobre el bloque son la fuerza gravitatoria $\vec{F}_g$ y la fuerza hacia arriba $\vec{F}_P$ ejercida por el plato en las regiones de contacto directo entre el bloque y el plato. En la figura 13.14*b* se representa el bloque fuera de la balanza, y en su lugar, la cantidad equivalente de fluido, de forma y tamaño idénticos (representado por la línea discontinua). Las mismas regiones que estaban en contacto con el bloque ahora lo están con la muestra de fluido y, en consecuencia, las fuerzas que actúan son la fuerza ejercida por el resto del fluido, $\vec{F}'_f$, la fuerza hacia arriba ejercida por el plato, $\vec{F}'_P$, y la fuerza gravitatoria $\vec{F}'_g$. Las fuerzas $\vec{F}_f$ y $\vec{F}'_f$ son iguales, ya que en cada punto de contacto entre el fluido y la muestra de fluido las fuerzas son exactamente las mismas que entre el fluido y el bloque.

Cuando el bloque está sobre el plato de la balanza, está en equilibrio y, por lo tanto,

$$F_{fy} + F_{Py} + F_{gy} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad F_{fy} + F_P - F_g = 0$$

y cuando el bloque se retira del plato de la balanza, la muestra de fluido que lo reemplaza está en equilibrio y, por lo tanto,

$$F'_{fy} + F'_P - F'_g = 0$$

Restando las dos ecuaciones anteriores, teniendo en cuenta que $F'_{fy} = F_{fy}$ y reagrupando los términos, nos queda

$$F_P - F'_P = F_g - F'_g$$

donde $F_P - F'_P$ corresponde al cambio de lectura cuando se saca el bloque del plato de la balanza. Por lo tanto, $F_P - F'_P$ es el módulo del peso aparente del bloque sumergido y, en consecuencia,

$$F_{g\,ap} = F_g - F'_g$$

Normalmente, se denomina a $F_g - F_{g\,ap}$ fuerza ascensional o empuje B, con lo cual resulta

$$B = F_g - F_{g\,ap} = F'_g$$

Esta expresión para la fuerza ascensional coincide con la de la ecuación 13.12, que se estableció cuando el fluido estaba en contacto directo con toda la superficie del objeto sumergido.

Ejemplo 13.7 ¿Cómo se puede medir la grasa corporal?

El porcentaje de grasa corporal de una persona puede estimarse midiendo la densidad de su cuerpo (la densidad media), teniendo en cuenta que la grasa es menos densa que los músculos y los huesos. La densidad de la grasa es $\approx 0{,}9 \times 10^3$ kg/m^3 y la densidad del tejido magro (todo el resto excepto la grasa) $\approx 1{,}1 \times 10^3$ kg/m^3. La medida de la densidad del cuerpo consiste en determinar el peso aparente cuando una persona está sumergida en agua, habiendo exhalado completamente el aire de sus pulmones. (En la práctica, se estima el aire que queda en los pulmones y se corrige su efecto.) Supongamos que el peso aparente de una persona cuando está sumergida en agua es el 5% de su peso. ¿Qué porcentaje del cuerpo de la persona es grasa?

PLANTEAMIENTO En una persona, el volumen total es la suma del volumen de grasa más el volumen de tejido magro, y la masa total es la suma de la masa de grasa más la masa de tejido magro. El volumen y la densidad están relacionados con la masa mediante la relación $m = \rho V$. La fracción de grasa se calcula dividiendo la masa de grasa entre la masa total e, igualmente, la fracción de tejido magro se calcula dividiendo la masa de tejido magro entre la masa total. Naturalmente, la fracción de grasa más la fracción de tejido magro deben sumar 1.

La determinación del porcentaje de grasa del cuerpo de este hombre se realiza pesándolo cuando está sumergido bajo el agua, es decir, midiendo su densidad. *(David Burnett/ Woodfin Camp and Assoc.)*

SOLUCIÓN

1. Determinar la razón de la densidad del cuerpo de la persona y la densidad del agua usando las ecuaciones 13.2 y 13.3:
$$\frac{\rho}{\rho_{\text{agua}}} = \frac{F_g}{F_g - F_{g\,\text{ap}}} = \frac{F_g}{F_g - 0{,}05F_g} = 1{,}05$$

2. El volumen corporal total es igual a la suma del volumen de grasa más el volumen de tejido magro:
$$V_{\text{tot}} = V_g + V_m$$

3. Como la densidad es igual a la masa dividida por el volumen, el volumen es la masa dividida por la densidad. Se sustituye esta relación en el paso anterior:
$$\frac{m_{\text{tot}}}{\rho} = \frac{m_g}{\rho_g} + \frac{m_m}{\rho_m}$$

4. La masa de grasa es $f_g m_{\text{tot}}$, donde f_g es la fracción de grasa y la masa de tejido magro es $f_m m_{\text{tot}}$, donde f_m es la fracción de tejido magro. Se sustituye m_g y m_m en los resultados del paso 3:
$$\frac{m_{\text{tot}}}{\rho} = \frac{f_g m_{\text{tot}}}{\rho_g} + \frac{f_m m_{\text{tot}}}{\rho_m}$$

5. La suma de la fracción de grasa más la fracción de tejido magro es igual a 1:
$$f_g + f_m = 1$$

6. Se dividen los dos términos del resultado del paso 4 por m_{tot} y se sustituye $1 - f_g$ por f_m:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{f_g}{\rho_g} + \frac{(1 - f_g)}{\rho_m}$$

7. Se despeja en el resultado del paso 6, f_g:
$$f_g = \frac{1 - (\rho_m/\rho)}{1 - (\rho_m/\rho_g)}$$

8. Se utiliza el resultado del paso 1 para sustituir la ρ del resultado del paso 7 y se despeja de nuevo f_g:
$$f_g = \frac{1 - (\rho_m/1{,}05\rho_{\text{agua}})}{1 - (\rho_m/\rho_g)} = \frac{1 - (1{,}1/1{,}05)}{1 - (1{,}1/0{,}90)} = 0{,}21$$

9. Se expresa la fracción de grasa como un porcentaje:
$$100\% \times f_g = \boxed{21\%}$$

COMPROBACIÓN La persona del enunciado es un hombre adulto que no tiene sobrepeso. Los médicos recomiendan que el porcentaje de grasa en un hombre adulto debe estar entre el 18% y el 25%. El resultado del paso 9 resulta aceptable.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.8 Si el peso aparente de Eduardo cuando se sumerge en agua es cero, ¿cuánto vale su porcentaje corporal de grasa?

Ejemplo 13.8 ¿Cuál pesa más? *Conceptual*

Considerar cinco frascos idénticos (figura 13.15). Los frascos están llenos de agua hasta el borde del frasco. Un barco de juguete flota sobre la superficie del agua del frasco *A*. Otro barco de juguete se encuentra hundido en el fondo del frasco *B*. Un cubito de hielo flota sobre la superficie del agua del frasco *C*. Un bloque de madera sumergida en el frasco *D* está sujeto con una cuerda al fondo. En el frasco *E* sólo hay agua. Los dos barcos, el cubito de hielo y el bloque de madera tienen la misma masa. La densidad del barco hundido es el doble de la del agua y la densidad del bloque de madera es la mitad de la del agua. Cada frasco descansa sobre una balanza. Ordene las lecturas de las balanzas de mayor a menor.

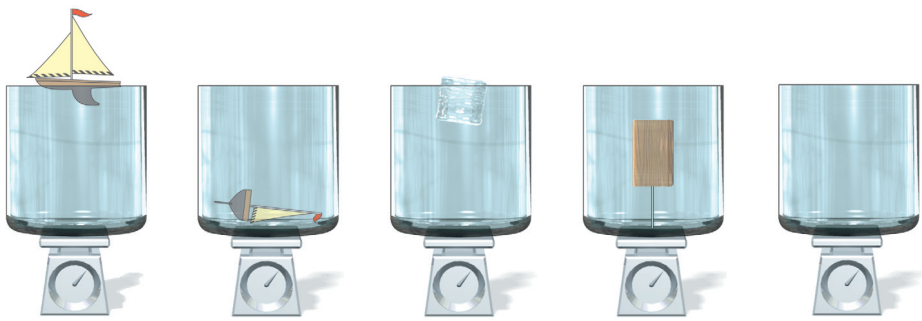


FIGURA 13.15

PLANTEAMIENTO La lectura de cada balanza es igual al peso total del sistema que descansa sobre ella. En cada caso, el sistema consiste en el frasco, el agua del frasco y uno de los objetos sumergidos o que flotan sobre el agua. El frasco que contiene más agua es el E. El empuje que recibe cada cuerpo es igual al peso de agua que desplaza; cada objeto sumergido desplaza su propio volumen mientras que cada objeto que flota desplaza su propio peso de agua. La cantidad de agua que hay en cada frasco es igual a la cantidad de agua que hay en el frasco E menos la cantidad de agua desplazada por cada objeto que flota o está sumergido.

SOLUCIÓN

1. Sea $F_{g\,A}$ la lectura de la balanza que tiene el frasco A, $F_{g\,B}$ la que tiene el frasco B, etc. Sea $F_{g\,ob}$ el peso de cada uno de los objetos (todos los objetos tienen el mismo peso). Un objeto que flote desplaza su propio peso de agua. Calcular el peso de agua desplazado por cada objeto:

   El peso de agua desplazado por el barco que flota y por el cubito de hielo es $F_{g\,ob}$.

2. Un cuerpo sumergido desplaza su propio volumen de agua. Calcular el peso de agua desplazado por cada objeto sumergido:

   El peso de agua desplazado por el bloque de madera sumergido es $2\,F_{g\,ob}$ mientras que el del barco sumergido es $F_{g\,ob}/2$.

3. En cada caso, el sistema consiste en un frasco, el agua del frasco y el objeto que se sumerge o flota en el agua. Además, el peso del agua de cada frasco es el mismo que el peso del agua del frasco E menos el peso del agua desplazado por cada objeto. Calcular el peso total de cada sistema:

Frasco	Peso
A	$F_{g\,sis} = (F_{g\,E} - F_{g\,obj}) + F_{g\,obj} = F_{g\,E}$
B	$F_{g\,sis} = (F_{g\,E} - \frac{1}{2}F_{g\,obj}) + F_{g\,obj} = F_{g\,E} + \frac{1}{2}F_{g\,obj}$
C	$F_{g\,sis} = (F_{g\,E} - F_{g\,obj}) + F_{g\,obj} = F_{g\,E}$
D	$F_{g\,sis} = (F_{g\,E} - 2F_{g\,obj}) + F_{g\,obj} = F_{g\,E} - F_{g\,obj}$
E	$F_{g\,sis} = (F_{g\,E} - 0) + 0 = F_{g\,E}$

4. La lectura de cada balanza es justamente el peso de cada sistema $F_{g\,sis}$, por tanto:

   La balanza que tiene el frasco con el barco hundido tiene la lectura más elevada, la que tiene el bloque de madera sumergido tiene la lectura más baja y el resto de balanzas marcan lo mismo.

COMPROBACIÓN La presión del agua en el fondo de cada frasco es la misma porque el agua tiene la misma profundidad en cada uno de ellos. Esto significa que la presión del agua sobre el fondo de los frascos cuyos objetos no descansan sobre el fondo (A, C, D y E) es la misma en cada uno de ellos. Sin embargo, el frasco D recibe una fuerza ascendente debido al empuje que sufre el bloque de madera atado al fondo, por lo que la lectura de la balanza del frasco D será menor que la correspondiente a los frascos A, C y E. Así mismo, en el frasco B el barco descansa sobre el fondo, lo que producirá una presión adicional sobre el fondo y será su balanza la que marcará una lectura mayor.

OBSERVACIÓN La rueda de Falkirk, mencionada al principio del capítulo, está perfectamente equilibrada por la misma razón que las lecturas de las balanzas A, C y E son iguales. La rueda se mantendrá en equilibrio siempre que las profundidades del agua de las dos góndolas sean iguales y las barcazas de las góndolas se mantengan a flote. Como la rueda se mantiene en equilibrio, es suficiente aplicar un pequeño esfuerzo para hacerla rotar.

El mayor iceberg visto en el océano Atlántico Norte tenía una altura de 168 m por encima del nivel del mar, casi la misma altura que el monumento a Washington. Este iceberg fue visto en la bahía Melville en 1957 en Groenlandia. *(Gentileza de U.S. Coast Guard International Ice Patrol.)*

Ejemplo 13.9 Un iceberg

Determinar la fracción de volumen de un iceberg que se encuentra bajo el nivel del mar.

PLANTEAMIENTO Sea V el volumen del iceberg y V_s el volumen que está sumergido. El peso del iceberg es $\rho_h V g$ y el empuje debido al agua del mar $\rho_a V_s g$. Las densidades del hielo ρ_h y del agua del mar ρ_a se recogen en la tabla 13.1.

SOLUCIÓN

1. Como el iceberg está en equilibrio, el empuje es igual al peso:

$$F_g = B$$
$$\rho_h V g = \rho_a V_s g$$

2. Despejando V_s/V:

$$f = \frac{V_s}{V} = \frac{\rho_h}{\rho_a} = \frac{0{,}92 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}{1{,}025 \times 10^3\ \text{kg/m}^3} = 0{,}898 = \boxed{0{,}90}$$

COMPROBACIÓN Todos hemos visto un cubito de hielo flotando en agua dulce. La mayor parte del cubito se encuentra sumergida. Es de esperar que más o menos pase lo mismo con un iceberg que flota en agua del mar. Como la densidad del agua del mar es entre un 2% y un 3% mayor que la densidad del agua dulce, el iceberg flota más en agua del mar que en agua dulce.

Reemplazando en el cálculo anterior ρ_a por ρ_f, la densidad del fluido, podemos determinar la fracción sumergida de un objeto flotante en cualquier fluido. En el ejemplo anterior, hemos visto que la fracción de un objeto flotante sumergido es igual al cociente entre la densidad del objeto y la densidad del fluido.

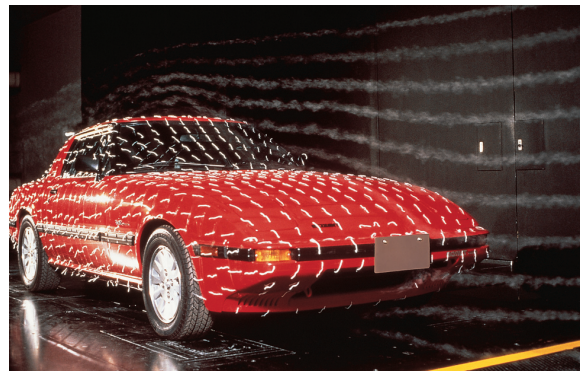
$$\frac{V_{\text{sum}}}{V} = \frac{\rho}{\rho_f} \qquad 13.13$$

Humo que sale de un cigarrillo encendido. Al principio, el humo asciende mediante un flujo regular, el flujo laminar, pero rápidamente este movimiento se hace turbulento, de tal forma que el humo forma remolinos irregulares. *(Estate of Harold E. Edgerton.)*

13.4 FLUIDOS EN MOVIMIENTO

El comportamiento de un fluido en movimiento puede ser en general muy complicado. Consideremos, por ejemplo, el humo que asciende de un cigarrillo encendido. Al principio, el humo se eleva con una forma regular, pero pronto aparecen turbulencias y el humo empieza a ondear de forma irregular. El flujo turbulento es muy difícil de estudiar, incluso de forma cualitativa. Si no existe turbulencia, el fluido fluye a lo largo de líneas de corriente. Existen programas de ordenador muy sofisticados que simulan las líneas de corriente de aire que fluyen alrededor de los cuerpos y que son de gran ayuda para los ingenieros que diseñan automóviles.

En la figura 13.16, se muestra un fluido que circula por un tubo cuya sección transversal decrece. El fluido fluye sin turbulencia de izquierda a derecha. La parte sombreada de la izquierda indica el volumen de fluido que pasa a través de la su-



El diseño de cuerpos aerodinámicos puede reducir enormemente las fuerzas de arrastre sobre cuerpos en movimiento, como sucede con los coches o los aviones. *(Takeski Takahara/Photo Researchers, Inc.)*

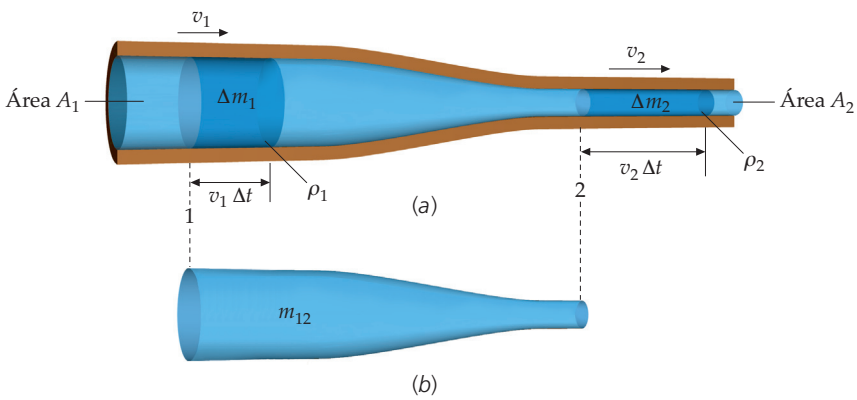


FIGURA 13.16

perficie transversal 1 en cierto intervalo de tiempo Δt. Si la densidad y la velocidad del fluido en esa región son ρ_1 y v_1, y el área de la sección transversal de dicha región es A_1, la masa Δm_1 que fluye a través de la región 1 es

$$\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$$

donde $\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$ es el volumen de fluido que fluye a través del área A_1 durante el tiempo Δt. La cantidad $I_M = \rho A v$ se denomina **flujo de masa** y tiene dimensiones de masa por unidad de tiempo. La masa Δm_2 de fluido que pasa a través del área A_2 durante el mismo tiempo Δt y señalada por la región sombreada a la derecha es

$$\Delta m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

donde ρ_2, v_2, y A_2 son la densidad y velocidad del fluido y el área de la sección transversal correspondientes a la región 2.

Si el flujo de masa a través del área transversal en 1 es mayor que el flujo en 2, entonces la masa de fluido aumentará. La tasa a la cual entra masa de fluido en la región comprendida entre las superficies 1 y 2, menos la tasa a la cual la masa de fluido sale de dicha región, es igual a la tasa de cambio de masa acumulada en la región comprendida entre 1 y 2. Esto es,

$$I_{M1} - I_{M2} = dm_{12}/dt \qquad 13.14$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

donde I_{M1} y I_{M2} son las tasas de circulación de masa a través de las regiones 1 y 2, respectivamente, y m_{12} la masa acumulada entre las dos regiones. La ecuación 13.14 se denomina **ecuación de continuidad**. El flujo en el cual el movimiento del fluido es constante (no cambia con el tiempo) en todos los puntos se denomina **flujo estacionario**. Si el flujo es estacionario, entonces dm_{12}/dt en la ecuación 13.14 es cero. Cuando el flujo es estacionario, el flujo de masa es el mismo a través de todas las áreas transversales y, además, es constante.

La cantidad $I_V = Av$ se denomina **caudal** o flujo volumétrico y tiene dimensiones de volumen por unidad de tiempo. En el flujo de un líquido incompresible, el caudal es el mismo a través de cualquier área de sección transversal perpendicular al flujo. Además, si el flujo es estacionario, el caudal es constante

$$I_V = Av \qquad 13.15$$

CAUDAL

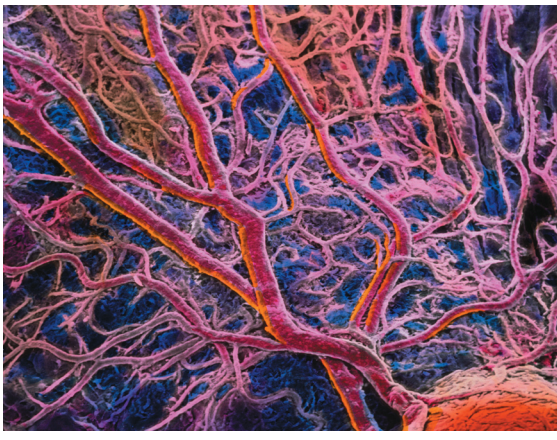
En un fluido incompresible, la densidad es igual a un valor fijo para todo el fluido. Los líquidos se consideran, casi siempre, incompresibles porque sus densidades prácticamente no varían.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.9

La sangre circula por la arteria aorta, de 1,0 cm de radio, a 30 cm/s. ¿Cuál es el caudal?

PROBLEMA PRÁCTICO 13.10

La sangre circula desde una porción de arteria gruesa de 0,3 cm de radio, donde su velocidad es 10 cm/s, a otra región donde el radio se ha reducido a 0,2 cm, debido a un engrosamiento de las paredes (arteriosclerosis). ¿Cuál es la velocidad de la sangre en la zona más estrecha?



Las arterias más grandes se ramifican en arterias más pequeñas, que a su vez se ramifican en otras, y así sucesivamente. *(P. Motta/ Photo Researchers Inc.)*

ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli relaciona la presión, la altura y la velocidad de un fluido incompresible e **ideal** cuyo flujo es estacionario y **laminar**. Ideal significa sin **viscosidad**, que es la propiedad de un fluido que produce resistencia a fluir. Durante el flujo laminar, las partículas de fluido se mueven a lo largo de **líneas de corriente** que son trayectorias rectilíneas o ligeramente curvadas que no se cruzan. Se puede deducir la ecuación de Bernoulli aplicando la segunda ley de Newton a una pequeña porción de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente. Conforme la porción entra en una región en la que se reduce la presión, la porción aumenta su velocidad a causa de que la presión tras la porción que la empuja supera la presión que hay frente a la porción.

Aplicando la segunda ley de Newton a una pequeña porción de aire (figura 13.17) de masa m que se mueve a lo largo de una línea de corriente horizontal, se tiene

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

El fluido tiene densidad ρ y la porción tiene área A y grosor $\Delta\ell$, de forma que el volumen y la masa de la porción son $A\,\Delta\ell$ y $m = \rho A\,\Delta\ell$. La fuerza F es debida a la presión P que hay detrás de la porción y ligeramente diferente a la presión que hay frente a ella $P + \Delta P$. Esta fuerza viene dada por

$$F = (P)(A) - (P + \Delta P)A = -A\,\Delta P$$

Dado que la porción es pequeña, se puede expresar ΔP mediante una aproximación diferencial

$$\frac{\Delta P}{\Delta\ell} = \frac{dP}{dx} \quad \text{o bien} \quad \Delta P = \frac{dP}{dx}\Delta\ell$$

Sustituyendo en la segunda ley de Newton, da

$$-A\frac{dP}{dx}\Delta\ell = \rho A\,\Delta\ell\,\frac{dv}{dt}$$

Simplificando, se obtiene

$$-dP = \rho\frac{dv}{dt}\,dx$$

Como $v = dx/dt$, se llega a

$$dP = -\rho v\,dv$$

Integrando a ambos lados,

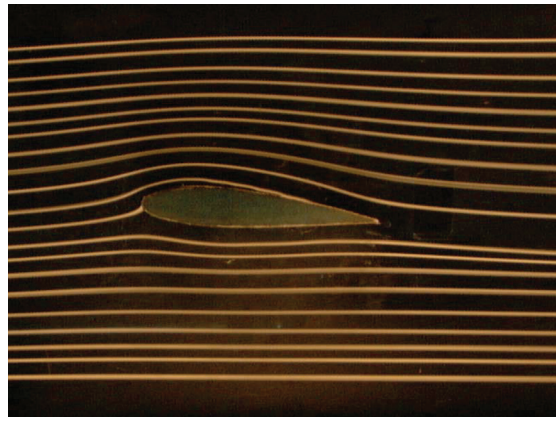
$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho\int_{v_1}^{v_2} v\,dv$$

Donde la densidad, si permanece constante, sale como factor fuera de la integral. Resolviendo las integrales, se tiene

$$P_2 - P_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Reagrupando términos, se obtiene la ecuación de Bernoulli a lo largo de una línea de corriente horizontal

$$P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \qquad 13.16$$



Las líneas de corriente se han hecho visibles gracias al rastro del humo. Las partículas de fluido siguen trayectorias suavemente curvadas. *(Holger Babinsky. 2003 Phys. Educ. 38 497-503.)*

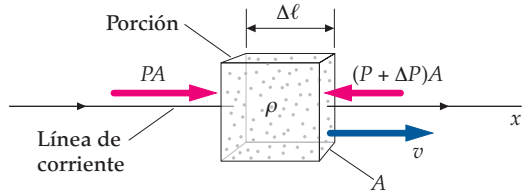


FIGURA 13.17 La porción pequeña se mueve a lo largo de la línea de corriente hacia la región de menor presión.

Si la línea de corriente no es horizontal, la ecuación de Bernoulli, deducida en el problema 13.63, es

$$P_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 \qquad 13.17a$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

donde h_1 y h_2 son las alturas inicial y final, respectivamente.

La ecuación de Bernoulli se puede reescribir de la forma

$$P + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \qquad 13.17b$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI

¡ La ecuación de Bernoulli relaciona la presión y la velocidad entre dos puntos que se encuentran sobre la misma línea de corriente de un fluido ideal.

Una aplicación especial de la ecuación de Bernoulli se da cuando el fluido está en reposo. Entonces $v_1 = v_2 = 0$, y se obtiene

$$P_1 - P_2 = \rho g h_2 - \rho g h_1 = \rho g\, \Delta h$$

Que es el mismo resultado que la ecuación 13.7.

Ejemplo 13.10 Ley de Torricelli

Un depósito grande de agua, abierto por arriba, tiene un orificio pequeño a una distancia Δh por debajo de la superficie del agua. Hallar la velocidad del agua cuando escapa por el orificio.

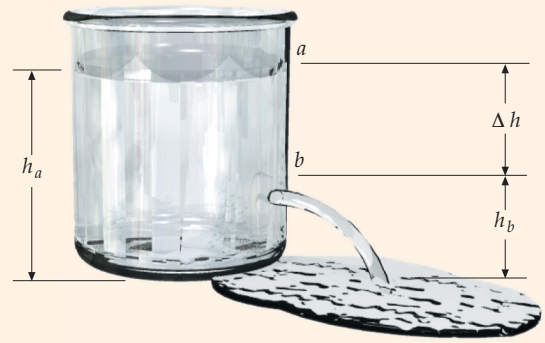


FIGURA 13.18

PLANTEAMIENTO Las líneas de corriente empiezan en la parte superior del agua y continúan a través del agujero. Apliquemos la ecuación de Bernoulli a los puntos *a* y *b* de la figura 13.18. Como el diámetro del orificio es mucho menor que el diámetro del depósito, podemos despreciar la velocidad del agua en su parte superior (punto *a*).

SOLUCIÓN

1. Según la ecuación de Bernoulli, con $v_a = 0$:
$$P_a + \rho g h_a + 0 = P_b + \rho g h_b + \tfrac{1}{2}\rho v_b^2$$
2. La presión en los puntos *a* y *b* es la misma, P_{atm}, ya que ambos están abiertos al aire:
$$P_a = P_{atm} \quad \text{y} \quad P_b = P_{atm}$$
$$\text{o} \quad P_{atm} + \rho g h_a + 0 = P_{atm} + \rho g h_b + \tfrac{1}{2}\rho v_b^2$$
3. Despejar la velocidad v_b del agua que fluye por el orificio:
$$v_b^2 = 2g(h_a - h_b) = 2g\,\Delta h$$
$$\text{por lo tanto,} \quad v_b = \boxed{\sqrt{2g\,\Delta h}}$$

COMPROBACIÓN Se puede resolver el problema directamente utilizando la conservación de la energía mecánica con el agua y la Tierra como sistema. La masa *m* del agua que sale por el agujero durante un tiempo dado es igual a la masa de agua que ha desaparecido de la parte superior del agua (descenso del nivel de agua). Entonces, la disminución de energía potencial $mg\,\Delta h$ hace crece la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$. Igualando y despejando *v*, se obtiene el resultado del paso 3.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.11 Si el agua que fluye por el orificio estuviera dirigida verticalmente hacia arriba, ¿qué altura alcanzaría?

En el ejemplo 13.10, el agua sale del orificio con una velocidad igual a la que tendría si cayese en caída libre una distancia *h*. Esta propiedad de un fluido se conoce como *ley de Torricelli*.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 13.1

En una piscina olímpica, el agua circula cíclicamente a través de un filtro propulsada por una bomba. El agua vuelve a entrar en la piscina a través de unas boquillas. El chorro de agua que sale por las boquillas llega casi al otro extremo de la piscina antes de disiparse. Conforme el agua pierde velocidad, ¿aumenta la presión tal como indica la ecuación de Bernoulli?

En la figura 13.19, se muestra agua que está circulando por una tubería horizontal que tiene una región de menor diámetro. Como ambas partes del tubo tienen la misma altura, entonces $h_1 = h_2$ en la ecuación 13.17*a*, y la ecuación de Bernoulli se reduce a

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \qquad 13.18$$

Cuando el fluido se introduce en el estrechamiento, al ser menor el área A, la velocidad v deberá, en consecuencia, ser mayor, para que se mantenga constante el producto Av. Pero, si la velocidad aumenta, la presión debe disminuir, puesto que $P + \frac{1}{2}\rho v^2$ debe permanecer constante. Por consiguiente, se reduce la presión en la parte estrecha.

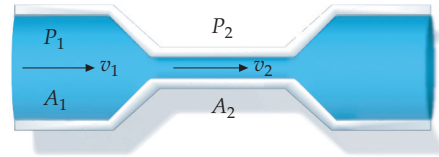


FIGURA 13.19 Estrechamiento en una tubería por la que circula un fluido. La presión es menor en la sección más estrecha de la tubería, que es donde el fluido se mueve más rápidamente.

> Cuando el aire u otro fluido pasa a través de un estrechamiento aumenta la velocidad del fluido y desciende su presión.
>
> EFECTO VENTURI

Esta propiedad de un fluido se conoce como **efecto Venturi** y el estrechamiento se conoce como **venturi**. La ecuación 13.18 tiene gran importancia, ya que simplifica los cálculos en muchas situaciones donde pueden ignorarse los cambios de altura. Los coches de carreras aprovechan el efecto Venturi para aumentar la fuerza hacia abajo que actúa sobre el coche. El resultado es un aumento de la fuerza normal que realiza el pavimento sobre el coche, lo que hace aumentar la fuerza de rozamiento estático necesario para una mayor maniobrabilidad del coche y un mejor control de la velocidad.

En la figura 13.20, se representan las líneas de corriente del flujo de un fluido. La dirección de las líneas denota la dirección del flujo y el espaciado entre ellas representa su velocidad. Cuanto menor es el espacio entre líneas, mayor es la velocidad. En el flujo horizontal, cuando la velocidad aumenta, la presión disminuye, por lo que cuando las líneas de corriente se juntan la presión disminuye.

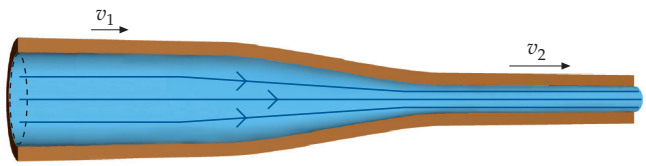


FIGURA 13.20

El alerón de este coche de Fórmula 1 lanza el aire hacia arriba aumentando así la fuerza hacia abajo sobre el coche para un mejor control a velocidades elevadas. Además, debido al efecto Venturi, se reduce la presión bajo el cuerpo del coche, lo que produce una fuerza hacia abajo que aumenta su estabilidad. *(Schlegelmilch/Corbis.)*

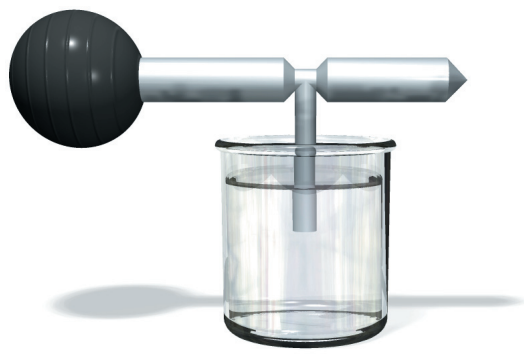


FIGURA 13.21 Pulverizador. Apretando el bulbo de la izquierda se obliga al aire a atravesar la parte estrecha del tubo, lo que hace que la presión se reduzca respecto a la presión atmosférica. Debido a la diferencia de presiones que resulta de ello, el líquido contenido en el vaso se ve forzado a introducirse en la corriente de aire a través del tubo vertical y emerge por la boquilla. Un efecto análogo tiene lugar en el carburador de un motor de gasolina.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 13.1

En el pulverizador de la figura 13.21, el tubo horizontal reduce su sección transversal justo en el punto donde se une al tubo vertical. ¿Este estrechamiento es funcional o simplemente se debe a que el tubo vertical es más estrecho?

Ejemplo 13.11 El tubo de venturi

Un *tubo de venturi* es un aparato para medir la velocidad de un fluido. Un fluido de densidad ρ_F circula por una tubería de área transversal A_1 que posee un estrechamiento de área A_2 (figura 13.22). Las dos partes de la conducción están conectadas por un manómetro, un tubo en forma de U, parcialmente lleno de un líquido de densidad ρ_L. Como la velocidad de flujo es mayor en el estrechamiento, la presión en esta sección es menor que en la parte ancha de la tubería. La diferencia de presión viene medida por la diferencia Δh de los niveles del líquido en el tubo en U. Expresar la velocidad v_1 en función de la altura medida Δh y las magnitudes conocidas ρ_F, ρ_L y $r = A_1/A_2$.

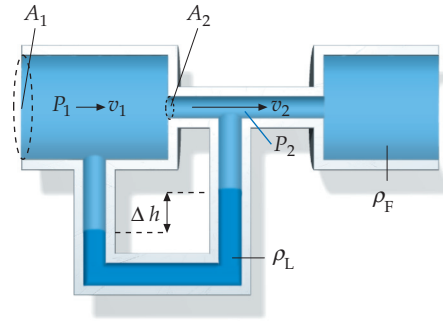


FIGURA 13.22 Un venturímetro.

PLANTEAMIENTO Las presiones P_1 y P_2 en las regiones más ancha y más estrecha de la tubería están relacionadas con las velocidades v_1 y v_2 por la ecuación de Bernoulli. La diferencia de presión está relacionada con la altura Δh. Mediante la ecuación de continuidad puede expresarse v_2 en función de v_1 y las áreas A_1 y A_2.

SOLUCIÓN

1. Expresar la ecuación de Bernoulli en una conducción horizontal para las regiones más ancha y más estrecha de la tubería:
$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho_F v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho_F v_2^2$$

2. Expresar la ecuación de continuidad para las dos regiones, y despejar v_2 en función de v_1 y las áreas A_1 y A_2:
$$v_2 A_2 = v_1 A_1$$
$$\text{de modo que} \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = r v_1$$

3. Sustituir el valor de v_2 en la ecuación del paso 1 y obtener una ecuación para $P_1 - P_2$:
$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho_F (v_2^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2}\rho_F (r^2 - 1) v_1^2$$

4. Escribir $P_1 - P_2$ en función de la diferencia de altura Δh del agua en las ramas del tubo en U. Esta diferencia de presión es igual a la caída de la presión en una columna del líquido de altura Δh menos la caída de presión de una columna del fluido de la misma altura:
$$P_1 - P_2 = \rho_L g\, \Delta h - \rho_F g\, \Delta h = (\rho_L - \rho_F) g\, \Delta h$$

5. Igualar las dos expresiones de $P_1 - P_2$ y despejar v_1 en función de Δh:
$$\tfrac{1}{2}\rho_F (r^2 - 1) v_1^2 = (\rho_L - \rho_F) g\, \Delta h$$
$$\text{de donde} \quad v_1 = \boxed{\sqrt{\frac{2(\rho_L - \rho_F) g\, \Delta h}{\rho_F (r^2 - 1)}}}$$

COMPROBACIÓN Veamos si las dimensiones del resultado del paso 5 son correctas. Un cociente entre densidades es adimensional como lo es el cociente entre áreas, r. Por tanto, las dimensiones de v_1 son las mismas que $\sqrt{2g\,\Delta h}$. Las dimensiones de g son de longitud sobre tiempo al cuadrado, de forma que gh tiene dimensiones de longitud al cuadrado entre tiempo al cuadrado. Al tomar la raíz cuadrada obtenemos las dimensiones de la velocidad.

PROBLEMA PRÁCTICO 13.12 Determinar v_1 si $\Delta h = 3$ cm, $r = 4$, el fluido es aire ($\rho_F = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$) y el líquido del tubo en U del tubo de venturi es agua ($\rho_a = 10^3\ \text{kg/m}^3$).

El aire es un fluido compresible por lo que el cálculo del problema práctico 13.12 no es tan exacto como el del ejemplo 13.10. Estrictamente hablando, la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad sólo se cumplen para fluidos incompresibles.

El ala de un avión es un perfil aerodinámico (figura 13.23) que en condiciones normales produce la curvatura de las líneas de corriente (siguiendo la propia curvatura de la superficie del perfil). Durante el análisis que vamos a hacer para probar que las líneas de corriente curvas producen sustentación (fuerza ascendente sobre el ala) vamos a despreciar cualquier variación de la presión debida a la gravedad del aire. Además, el análisis se hará en el sistema de referencia que se mueve con el ala.

Una porción de aire que se mueva a lo largo de la línea de corriente curvada se acelerará en la dirección centrípeta hacia el centro de curvatura de la línea de corriente. Para las líneas de corriente que están por encima del ala, la dirección de

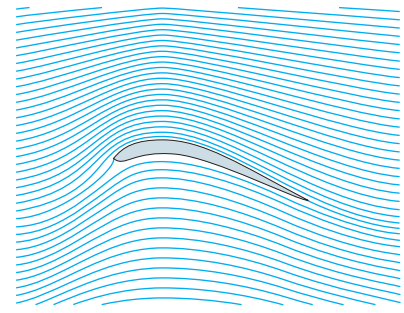


FIGURA 13.23 La función de un perfil aerodinámico es curvar las líneas de corriente. En condiciones normales, las líneas de corriente siguen la curvatura del perfil. El perfil que se muestra es muy delgado, como el ala de un ave rapaz. Es muy eficiente produciendo sustentación.

esta aceleración es más o menos hacia abajo. Por tanto, la fuerza neta sobre la porción de aire será hacia abajo. Esto significa que la presión del aire que está justo por encima de la porción es mayor que la presión del aire que está justo por debajo de la porción. Como consecuencia, la presión del aire es mayor en puntos que están más lejos del ala que en los puntos que están más cerca de la superficie del ala. La presión lejos del ala es la presión atmosférica; por tanto, la presión sobre la superficie superior del ala es menor que la atmosférica. Las porciones de aire en las líneas de corriente que pasan por debajo del ala también se aceleran hacia abajo. Entonces, como la presión del aire lejos de la parte inferior del ala es la atmosférica se concluye que la presión en la parte inferior del ala es superior a la atmosférica. La sustentación sobre el ala se debe a que la presión en la parte inferior del ala es mayor que en la parte superior.

Aplicando la segunda ley de Newton ($F = ma$) a una porción de aire (figura 13.24) con área A y grosor Δr moviéndose a velocidad v, tenemos

$$(P + \Delta P)(A) - PA = (\rho A\, \Delta r)\frac{v^2}{r}$$

donde r es la distancia de la porción al centro de curvatura de la línea de corriente, r es la densidad del aire, P es la presión sobre la superficie de la porción de aire que se encuentra más cerca del centro de curvatura, mientras que $P + \Delta P$ es la presión sobre la superficie opuesta de la porción. Simplificando y reagrupando,

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = \rho\frac{v^2}{r}$$

Cuando Δr es muy pequeño

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\frac{v^2}{r} \qquad 13.19$$

La derivada de esta ecuación representa el cambio de la presión en la dirección perpendicular a las líneas de corriente. Se ha introducido el símbolo de derivada parcial porque la presión también varía en la dirección tangente a las líneas de corriente.

Ahora mostraremos cómo varía la presión con la posición a lo largo de la línea de corriente. Consideremos una porción pequeña de aire que se mueve a lo largo de la línea de corriente que pasa sobre el ala. Cuando la porción está lejos, pero frente al ala, su presión es la atmosférica. Conforme la porción pasa por encima del ala, su presión diminuye y aumenta de velocidad. Supongamos que el punto 1 se encuentra frente al ala, pero lejos de ella, y el punto 2 se encuentra justo encima del ala, y que ambos están a lo largo de la misma línea de corriente. Las presiones en ambos puntos están relacionadas mediante la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad 13.20$$

(En este caso, la ecuación de Bernoulli es una mera aproximación, pues el aire es compresible y viscoso.) El punto 1 está lejos del ala y su presión P_1 será igual a la atmosférica, v_1 es la velocidad del aire en el punto 1. Como hemos visto antes, la presión P_2 sobre el ala es menor que la atmosférica. La ecuación 13.20 indica que si $P_2 < P_1$, entonces $v_1 < v_2$. Por tanto, la ecuación de Bernoulli predice que las porciones de aire aumentan de velocidad conforme pasan por encima del ala. Además, las porciones de aire que pasan por debajo del ala pierden velocidad.

Consideremos ahora una pelota de béisbol que rota mientras se mueve a través del aire en calma. La figura 13.25 muestra esta situación desde un sistema de referencia moviéndose con la pelota. Conforme la pelota rota tiende a arrastrar el aire de su alrededor. Como resultado, las líneas de corriente se curvan. El aire que rodea la pelota ejerce una presión sobre porciones de aire que se mueven a lo largo de las líneas de corriente. Si las líneas de corriente se curvan, habrá fuerzas de presión resultantes sobre las porciones en la dirección centrípeta. Entonces, como sucede con el ala, la presión justo encima de la pelota es menor que la presión por debajo de ella, que es la presión atmosférica. Las líneas de corriente que están justo por debajo de la pelota son casi rectas, así que la presión que hay debajo de la pe-

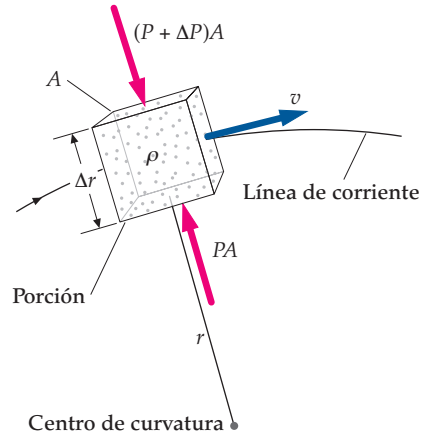


FIGURA 13.24 La fuerza centrípeta que actúa sobre la porción de aire que se mueve a lo largo de la línea de corriente se debe a la diferencia de presiones que hay a ambos lados de la porción.

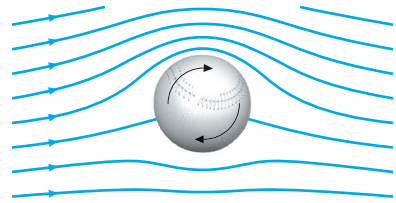


FIGURA 13.25 La pelota se mueve de derecha a izquierda, de forma que en el sistema de referencia de la pelota las líneas de corriente del aire se mueven de izquierda a derecha.

lota es prácticamente la misma que la que hay lejos de ella, que es igual a la atmosférica. Como la presión encima de la pelota es menor que la que hay debajo de ella, el aire ejercerá una fuerza ascendente sobre la pelota. De esta forma, no caerá al suelo tan rápido como si sólo actuara la gravedad sobre ella.

Aunque la ecuación de Bernoulli resulta muy útil para describir cualitativamente muchas de las características de un fluido en movimiento, normalmente resulta inadecuada cuando se compara cuantitativamente con los resultados experimentales. La explicación es que los gases como el aire no son incompresibles, y los líquidos como el agua poseen viscosidad; lo que invalida la suposición hecha de que se conserva la energía mecánica. Además, normalmente resulta difícil mantener el flujo estacionario sin que se produzca turbulencia, y este fenómeno influye en gran medida en los resultados.

* FLUJO VISCOSO

De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, si un fluido fluye estacionariamente por una tubería horizontal estrecha y de sección transversal constante, la presión será constante a lo largo de la tubería. En la práctica se observa una caída de presión según nos desplazamos en la dirección del flujo. Considerando este fenómeno de otro modo, podemos ver que se requiere una diferencia de presión para empujar y conseguir la circulación de un fluido a través de un tubo horizontal. Es necesaria esta diferencia de presión porque el fluido fluye a modo de capas muy finas y la capa de fluido que está en contacto con la pared interna del tubo es estacionaria debido a las fuerzas ejercidas por la pared sobre la capa. Conforme nos alejamos de la pared del tubo, la velocidad de cada capa es ligeramente superior a la de la anterior y cada capa es retenida por las fuerzas que ejercen sobre ella las capas que se mueven más lentamente que ella (de la misma manera, cada capa es arrastrada por la que está a su lado y se mueve a velocidad ligeramente superior). Estas fuerzas entre capas adyacentes se denominan **fuerzas viscosas**. Como resultado de su presencia, la velocidad del fluido tampoco es constante a lo largo del diámetro de la tubería siendo mayor cerca de su centro y tiende a cero en los bordes, donde el fluido entra en contacto con las paredes de la misma (figura 13.26). Sea P_1 la presión en el punto 1 y P_2 la presión en el punto 2 a la distancia L (siguiendo la dirección de la corriente) del anterior. La caída de presión $\Delta P = P_1 - P_2$ es proporcional al caudal:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = I_V R \qquad 13.21$$

DEFINICIÓN: RESISTENCIA

donde $I_V = vA$ es el caudal y la constante de proporcionalidad R es la resistencia al flujo, que depende de la longitud L del tubo, de su radio r y de la viscosidad del flujo.

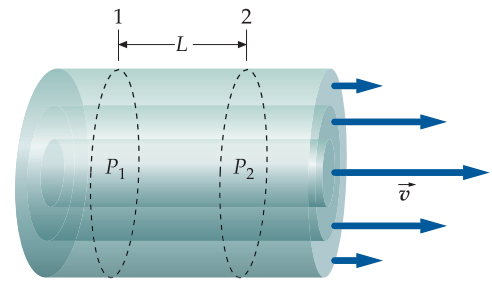


FIGURA 13.26 Cuando un fluido viscoso fluye por una tubería, su velocidad es mayor en el centro de la misma. Próximo a las paredes de la tubería el fluido tiende a permanecer en reposo.

Ejemplo 13.12 Resistencia al flujo sanguíneo

Cuando la sangre fluye procedente de la aorta a través de las arterias principales, las arteriolas, los capilares y las venas, hasta la aurícula derecha, la presión (manométrica) desciende, aproximadamente, desde 100 torr a cero. Si el caudal es de 0,8 L/s, hallar la resistencia total del sistema circulatorio.

PLANTEAMIENTO La resistencia está relacionada con la caída de presión y el caudal por la ecuación 13.21. Utilizaremos la ecuación 13.9 para convertir los torr en kPa.

SOLUCIÓN

Expresar la resistencia en función de la caída de presión y el caudal, y expresar todos los términos en unidades del SI:

$$R = \frac{\Delta P}{I_V} = \frac{100\ \text{torr}}{0{,}800\ \text{L/s}} \times \frac{101\ \text{kPa}}{760\ \text{torr}} \times \frac{1\ \text{L}}{10^3\ \text{cm}^3} \times \frac{1\ \text{cm}^3}{10^{-6}\ \text{m}^3}$$

$$= 16{,}61\ \text{kPa} \cdot \text{s/m}^3 = \boxed{16{,}6\ \text{kPa} \cdot \text{s/m}^3}$$

COMPROBACIÓN Recordando que 1 Pa = 1N/m² podríamos expresar el resultado en la forma 1,66 kN · s/m⁵. Las dimensiones de la resistencia del aire son las dimensiones de presión dividido por las de caudal. Las dimensiones de presión son las de fuerza dividido por las de longitud al cuadrado, y las de caudal son las de longitud al cubo dividido por las de tiempo. Entonces, las dimensiones de la resistencia son las dimensiones de presión por tiempo entre las dimensiones de longitud a la quinta potencia. Las unidades del resultado son correctas.

A continuación, definiremos el coeficiente de viscosidad de un fluido. En la figura 13.27, se muestra un fluido confinado entre dos placas paralelas, cada una de ellas de área A y separadas por una distancia z. Manteniendo la placa inferior en reposo, se tira de la placa superior con velocidad constante v mediante una fuerza $\vec{F}$. Es necesario ejercer esta fuerza para tirar de la placa superior porque el fluido próximo a la placa ejerce una fuerza viscosa de resistencia que se opone al movimiento. El fluido fluye a modo de finas láminas o **capas** y el movimiento se denomina **flujo laminar**. La velocidad del fluido entre las placas es prácticamente igual a v en un lugar próximo a la placa superior y próximo a cero cerca de la placa inferior, y varía linealmente con la distancia entre las placas. La fuerza $\vec{F}$ resulta ser directamente proporcional a v y A, e inversamente proporcional a la separación z entre las placas. La constante de proporcionalidad es el **coeficiente de viscosidad** η:

$$F = \eta \frac{vA}{z} \qquad 13.22$$

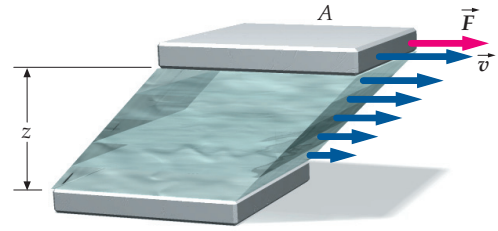


FIGURA 13.27 Fluido viscoso entre dos placas iguales de área A. Cuando se mueve la placa superior respecto a la placa inferior, cada capa de fluido ejerce una fuerza de arrastre sobre las capas adyacentes. La fuerza necesaria para desplazar la placa superior es proporcional a la velocidad v y al área A e inversamente proporcional a la separación entre las placas z.

La unidad de viscosidad en el SI es el N · s/m² = Pa · s. Una unidad antigua del sistema cgs, pero de uso común, es la dina/cm², llamada **poise** en honor del físico francés Poiseuille. Estas unidades están relacionadas por

$$1\ \text{Pa} \cdot \text{s} = 10\ \text{poise} \qquad 13.23$$

En la tabla 13.3, se muestran los coeficientes de viscosidad para varios fluidos a diferentes temperaturas. Generalmente, la viscosidad de un líquido aumenta cuando disminuye la temperatura. Así pues, en climas fríos, el aceite a utilizar para lubricar los motores de los automóviles debe tener un grado de viscosidad más bajo en invierno que en verano.

Tabla 13.3 **Coeficientes de viscosidad de varios fluidos**

Fluido	T, °C	η, mPa · s
Agua	0	1,8
	20	1,00
	60	0,65
Sangre	37	4,0
Aceite para motores (SAE 10W)	30	200
Glicerina	0	10 000
	20	1410
	60	81
Aire	20	0,018

Ley de Poiseuille Se puede demostrar que la resistencia R a la circulación de un fluido de la ecuación 13.21 para un flujo estacionario en un tubo circular de radio r es

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \qquad 13.24$$

Las ecuaciones 13.21 y 13.24 se pueden combinar para calcular la caída de presión en una longitud L de un tubo circular de radio r:

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I_V \qquad 13.25$$

LEY DE POISEUILLE

La ecuación 13.25 se conoce con el nombre de **ley de Poiseuille**. Obsérvese que la caída de presión depende de la inversa de r^4. Si el radio del tubo se reduce a la mitad, para un caudal y viscosidad dados, la presión se reduce 16 veces; es decir, se necesita una presión 16 veces mayor para impulsar el fluido a través del tubo con el mismo caudal. Por ello, si por alguna razón se reduce el diámetro de los vasos sanguíneos o arterias, o bien el caudal de la sangre disminuye mucho, o bien la presión sanguínea debe subir para mantener el mismo caudal. Para el agua que fluye por una manguera larga del jardín, abierta por un extremo y conectada a una fuente de presión constante por el otro extremo, la caída de presión es fija. La caída de presión es la que existe desde la fuente de agua hasta el extremo abierto de la

manguera a presión atmosférica. Del mismo modo, el flujo es proporcional a la cuarta potencia del radio. Si el radio se divide por la mitad, el flujo disminuye en un factor de 16. Por tanto, el caudal aumenta en un factor mayor que 5 cuando se cambia la manguera que tiene un diámetro de media pulgada por otra cuyo diámetro es de tres cuartos de pulgada. Esto es así porque $(0{,}75/0{,}5)^4 = 5{,}1$.

La ley de Poiseuille se aplica sólo al flujo laminar (no turbulento) de un fluido de viscosidad constante que es independiente de la velocidad del fluido. La sangre es un fluido complejo formado por partículas sólidas de diferentes formas suspendidas en un líquido. Los glóbulos rojos de la sangre, por ejemplo, son corpúsculos en forma de disco que están orientados al azar a velocidades bajas pero que, a velocidades altas, tienden a orientarse para facilitar el flujo. Así pues, la viscosidad de la sangre disminuye cuando aumenta la velocidad de flujo, de forma que no es estrictamente válida la ley de Poiseuille. Sin embargo, dicha ley es una buena aproximación que resulta útil cuando se quiere obtener una comprensión cualitativa del flujo sanguíneo.

En el capítulo 25, se estudiará el flujo de corriente eléctrica I por un hilo de metal. Una de las relaciones básicas de aquel capítulo es la ley de Ohm, $\Delta V = IR$, donde ΔV es la diferencia de potencial y R es la resistencia eléctrica del hilo. Como veremos, la ley de Ohm es análoga a la ley de Poiseuille $\Delta P = I_V R$.

TURBULENCIA: NÚMERO DE REYNOLDS

Cuando la velocidad de flujo de un fluido resulta suficientemente grande, se rompe el flujo laminar y se establece la turbulencia. La velocidad crítica por encima de la cual el flujo que fluye a través de un tubo presenta turbulencia depende de la densidad ρ, de la viscosidad del fluido η y del radio del tubo r. El flujo de un fluido puede caracterizarse mediante un número adimensional denominado **Número de Reynolds** N_R, que se define así:

$$N_R = \frac{2r\rho v}{\eta} \qquad 13.26$$

donde v es la velocidad media del fluido. Los experimentos han demostrado que el flujo será laminar si el número de Reynolds es inferior a 2000, aproximadamente, y será turbulento si sobrepasa los 3000. Entre estos valores el flujo es inestable y puede variar de un tipo de flujo a otro.

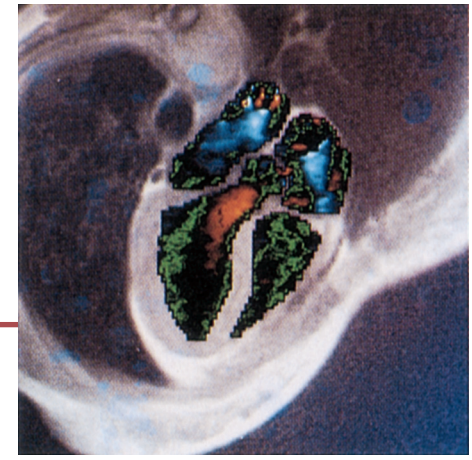


Foto en falso color de la turbulencia de la sangre que entra y sale del corazón según se muestra en una imagen obtenida por resonancia magnética (IRM). Se ve en rojo el chorro de sangre sistólico que, procedente del ventrículo izquierdo, entra en la aorta; y en azul, la sangre que en el proceso diastólico procede a llenar los ventrículos. *(Pickler International.)*

Ejemplo 13.13 Flujo sanguíneo en la aorta

Calcular el número de Reynolds para la sangre que circula a 30 cm/s por una aorta de 1,0 cm de radio. Suponer que la sangre tiene una viscosidad de 4 mPa · s y una densidad de 1060 kg/m^3.

PLANTEAMIENTO Como el número de Reynolds, N_R, es adimensional, podemos utilizar cualquier sistema de unidades con tal de que sea coherente.

SOLUCIÓN

Expresar la ecuación 13.26 del número de Reynolds con todas las magnitudes expresadas en unidades del SI:

$$N_R = \frac{2r\rho v}{\eta} = \frac{2(0{,}010\ \text{m})(1060\ \text{kg/m}^3)(0{,}30\ \text{m/s})}{4{,}0 \times 10^{-3}\ \text{Pa}\cdot\text{s}}$$

$$= 1590 = \boxed{1{,}6 \times 10^3}$$

COMPROBACIÓN Como el número de Reynolds es inferior a 2000, este flujo será laminar y no turbulento, como era de esperar.

Temas de actualidad en Física

Aerodinámica automotriz: rodar con el viento

La forma y los acabados de la carrocería de un coche pueden reducir el rozamiento y el aumento del gasto de combustible. Por ello, muchos turismos tienen forma de perfil de ala de avión. Sin embargo, la curvatura del flujo de aire crea, sobre el techo del coche, una región de baja presión. Esa baja presión produce sustentación, lo que reduce la fuerza normal que realiza la carretera. Esto hace la conducción más difícil, especialmente en las curvas. La sustentación es proporcional al cuadrado de la velocidad. A las velocidades que se alcanzan en una carrera de coches, la sustentación puede llegar a ser importante. La sustentación acaba produciendo una pérdida de tracción que en las curvas puede facilitar la salida de la pista.

Los ingenieros mecánicos llaman "fuerza de adherencia" a un aumento de la fuerza normal, es decir, como una sustentación negativa. Para poder aumentar la velocidad en las curvas, los equipos utilizan diferentes métodos a fin de aumentar la fuerza de adherencia de sus coches. Los Fórmula 1 y los Indy utilizan grandes alerones, con la forma de una ala de avión invertida, para crear una mayor presión sobre los neumáticos del coche y aumentar así la adherencia. Los alerones se introdujeron en 1972 en los coches Indy. El registro de velocidad aumentó en 32 km/h durante la primera vuelta.[1] Los coches Indy también redondean los bajos del coche para disminuir la presión. A velocidades de carrera, la fuerza de adherencia puede llegar a ser superior al peso del coche.[2,3] Algunos coches de carreras han llegado a utilizar ventiladores que extraen el aire de debajo del coche,[4] pero las reglas actuales no lo permiten.

Las modificaciones más visibles de los coches NASCAR son las aerodinámicas. Tienen faldones rígidos a los lados y *spoilers* muy bajos en el frontal. Un *spoiler* aumenta la anchura trasera del coche y, en algunas pistas, es necesario incluso uno en el techo. Los *spoiler* aumentan el arrastre e impiden que los coches sobrepasen los límites de velocidad establecidos por cuestiones de seguridad. En algunos casos, se colocan *flaps* en el techo que se abren cuando el coche se desestabiliza. Desde que se introdujeron en 1994,[5] se han prevenido numerosos accidentes.

En 1994, la Fórmula 1 prohibió redondear los bajos de los coches y requirió que fuesen planos. La idea fue reducir la velocidad en las carreras, a causa de la muerte de dos pilotos en una colisión.[6] Los equipos tuvieron dos semanas para poner en práctica esas reglas y averiguar cómo aumentar la fuerza de adherencia.[7] Todos los equipos utilizaron programas de modelización de dinámica de fluidos computacional (CFD), así como túneles de viento para hacer pruebas antes de ponerlas en práctica.

Los equipos de carreras no sólo utilizan túneles de viento o programas CFD para verificar sus diseños. Un grupo de investigación del Instituto Tecnológico de Georgia modelizan la turbulencia que hay detrás de los camiones y prueban sus modelos en túneles de viento de pequeña escala. Encontraron que añadiendo un sistema de rendijas y compresores de aire se podía disminuir el arrastre del camión en un 35% a las velocidades típicas de las autopistas.[8] Los ensayos[9] hechos a velocidades de carretera mostraban un ahorro del 8 o 9%[10] en el consumo de combustible. Tal vez, esta tecnología que ha permitido aumentar tanto la velocidad de los coches pueda utilizarse pronto para ahorrar muchos litros de gasolina al año.

La fuerza de arrastre aerodinámica se reduce a causa de los chorros de aire que circulan por la parte trasera de la carrocería de este prototipo cuando circula a gran velocidad. *(Gentileza de Georgia Institute of Technology.)*

1 Katz, J., *Race Car Aerodynamics: Designing for Speed*, 2nd ed. Cambridge, MA: Bentley, 2006, 4.
2 Simanaitis, D., "Technology Update: Automotive Aerodynamics," *Road and Track*, June 2002, 84+.
3 Robertson, C., quoted in "Fast Cars," *Nova*, PBS. Aug. 19, 1997. http://www.pbs.org/wgbh/nova/transcripts/2208fast.html as of June 2006.
4 Fuller, M. J., "A Brief History of Sports Car Racing," *Mulsanne's Corner*, http://www.mulsannescorner.com/history.htm 1996, as of June 2006.
5 Katz, J., op. cit., 191.
6 Butler, R., "Not So Fast!" *Professional Engineering*, Nov. 9, 2005, 37–38.
7 Zeimelis, K., and Wenz, C., "Science in the Fast Lane," *Nature*, Oct. 14, 2004, 736–738.
8 Weiss, P., "Aircraft Trick May Give Big Rigs a Gentle Lift," *Science News*, Oct. 28, 2000, 279.
9 Toon, John, "Low-Drag Trucks: Aerodynamic Improvements and Flow Control System Boost Fuel Efficiency in Heavy Trucks," *Georgia Institute of Technology Research News*, Jan. 5, 2004. http://gtresearchnews.gatech.edu/newsrelease/truckfuel.htm
10 Weiss, P., "Thrifty Trucks Go with the Flow," *Science News*, Jan. 29, 2005, 78.

Resumen

1. La densidad, la densidad específica y la presión son magnitudes importantes definidas en la estática y dinámica de fluidos.

2. El principio de Pascal, el principio de Arquímedes y la ecuación de Bernoulli se deducen de las leyes de Newton.

***3.** El efecto Venturi es un caso particular de la ecuación de Bernoulli.

4. Las líneas de corriente curvas vienen acompañadas de un gradiente de presiones transversal.

***5.** La ley de Poiseuille da cuenta de la caída de la presión a causa de la viscosidad; el número de Reynolds se utiliza para predecir si un flujo es laminar o turbulento.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES			
1. Densidad	La densidad de una sustancia es el cociente entre su masa y su volumen: $\rho = \frac{dm}{dV}$ (13.1). Las densidades de la mayoría de los sólidos y líquidos son, aproximadamente, independientes de la temperatura y de la presión, mientras que las de los gases dependen en gran medida de estas magnitudes.			
2. Densidad específica	La densidad específica de una sustancia es el número que resulta de dividir su densidad por la del agua.			
3. Presión	$P = \frac{F}{A}$ (13.3)			
Unidades	$1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$ (13.4); $1\ \text{atm} = 760\ \text{mmHg} = 760\ \text{torr} = 29{,}9\ \text{inHg} = 101{,}325\ \text{kPa} = 14{,}7\ \text{lb/in}^2$ (13.9); $1\ \text{bar} = 10^3\ \text{milibares} = 100\ \text{kPa}$ (13.10)			
Presión manométrica	La presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica: $P = P_{\text{manométrica}} + P_{\text{atm}}$			
En un líquido	$P = P_0 + \rho g\,\Delta h$ (ρ constante) (13.7)			
En un gas	En un gas como el aire, la presión disminuye exponencialmente con la altitud.			
Módulo de compresibilidad	$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$ (13.6)			
4. Principio de Pascal	Los cambios de presión aplicados a un fluido encerrado en un recipiente se transmiten sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente.			
5. Principio de Arquímedes	Un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido se ve sometido a una fuerza ascensional igual al peso del fluido desplazado.			
***6. Flujo de fluidos**				
Flujo de masa y ecuación de continuidad		$I_M = \rho A v$	Flujo de masa	
		$I_{M1} - I_{M2} = dm_{12}/dt$	Ecuación de continuidad	(13.14)
Caudal y ecuación de continuidad para fluidos incompresibles		$I_V = Av$	Caudal	
		$A_1 v_1 = A_2 v_3$	Fluido incompresible	
Ecuación de Bernoulli	A lo largo de una línea de corriente de un fluido ideal, incompresible y estacionario: $P + gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$ (13.17*b*)			
Efecto Venturi	Cuando el aire u otro fluido pasa a través de un paso estrecho, su velocidad aumenta y su presión disminuye.			

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Resistencia al flujo de fluidos	$\Delta P = I_V R$	13.21
Coeficiente de viscosidad	$\eta = \dfrac{F/A}{v/z}$	13.22
Ley de Poiseuille para el flujo viscoso	$\Delta P = RI_V = \dfrac{8\eta L}{\pi r^4} I_V$	13.25
Flujo laminar, flujo turbulento y número de Reynolds (opcional)	El flujo es laminar si el número de Reynolds N_R es menor que 2000 (aproximadamente) y turbulento si es mayor que 3000, donde N_R viene dado por $N_R = \dfrac{2r\rho v}{\eta}$	13.26

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

13.1 No. Los chorros de agua no se frenan debido a que entren en una región con mayor presión. Se frenan debido a las fuerzas viscosas que actúan sobre ellos. La ecuación de Bernoulli sólo es válida si las fuerzas viscosas pueden despreciarse.

13.2 El estrechamiento es funcional. La región estrecha es un venturi. Cuando se aprieta el bulbo, la presión en la parte estrecha disminuye por debajo de la presión atmosférica debido al efecto Venturi. Esto reduce la presión en el tubo vertical de forma que el líquido asciende.

Respuestas a los problemas prácticos

13.1 (*a*) 7,97 kg/L, (*b*) hierro

13.2 19 kg

13.3 Con $P_0 = 1{,}00$ atm $= 101$ kPa, $P = 2{,}00$ atm, $\rho = 1000$ kg/m^3, y $g = 9{,}81$ N/kg, tenemos, $\Delta h = \Delta P/\rho g = 10{,}3$ m. La presión a una profundidad de 10,3 es el doble que en la superficie.

13.4 $h = P/\rho g = 0{,}760$ m $= 760$ mm

13.5 (*a*) 338 mmHg, (*b*) 0,444 atm

13.6 La densidad específica del material es 2,7, que es la del aluminio.

13.7 72,9 N

13.8 45 por ciento

13.9 $I_V = vA = 9{,}4 \times 10^{-5}$ m^3/s. Es costumbre expresar el ritmo de bombeo del corazón en litros por minuto. Utilizando 1 m^3 = 1000 L y 1 min = 60 s, tenemos $I_V = 5{,}7$ L/min.

13.10 Si v_1 y v_2 son las velocidades inicial y final, y A_1 y A_2 son las áreas inicial y final, la ecuación 13.15 da

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi(0{,}30\text{ cm})^2}{\pi(0{,}20\text{ cm})^2}(10\text{ cm/s}) = 23\text{ cm/s}$$

13.11 El agua alcanzaría una altura h; es decir, el mismo nivel que el agua tiene en el depósito.

13.12 5,51 m/s

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Si la presión manométrica se duplica, la presión absoluta (*a*) se reduce a la mitad, (*b*) se duplica, (*c*) no se modifica, (*d*) aumenta en un factor mayor que 2, (*e*) aumenta en un factor menor que 2.

2 • Dos objetos esféricos difieren en masa y en tamaño. El objeto A tiene una masa que es ocho veces la masa del objeto B. El radio del objeto A es dos veces el radio del B. ¿Cómo están relacionadas sus densidades? (*a*) $\rho_A > \rho_B$, (*b*) $\rho_A < \rho_B$, (*c*) $\rho_A = \rho_B$, (*d*) falta información.

3 • Dos objetos difieren en masa y en tamaño. El objeto A tiene una masa que es ocho veces la masa del objeto B. La densidad del objeto A es cuatro veces la del B. ¿Cómo están relacionados sus volúmenes? (*a*) $V_A = \frac{1}{2}V_B$, (*b*) $V_A = V_B$, (*c*) $V_A = 2V_B$, (*d*) falta información. SSM

4 • Una esfera se construye encolando dos semiesferas. La densidad de cada una de ellas es uniforme, pero una tiene mayor densidad que la otra. Verdadero o falso: la densidad media de la esfera es la media aritmética de las dos densidades. Explicar con claridad los razonamientos.

5 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En numerosas películas de aventuras el héroe y la heroína escapan de los malos sumergiéndose bajo agua durante largos periodos de tiempo. Para conseguirlo, respiran a través de un junco vacío. Imaginar que en una película el agua está tan limpia que los protagonistas tienen que sumergirse por lo menos a 15 m de profundidad para no ser vistos. Explicar por qué no es posible rodar esa escena.

6 •• Dos objetos están en equilibrio como muestra la figura. Los objetos tienen el mismo volumen pero diferente masa. Suponer que todos los objetos de la figura son más densos que el agua y que, por tanto, ninguno de ellos flotaría en agua. ¿Se verá modificada la situación de equilibrio si se sumerge todo el sistema en agua? Explique la respuesta.

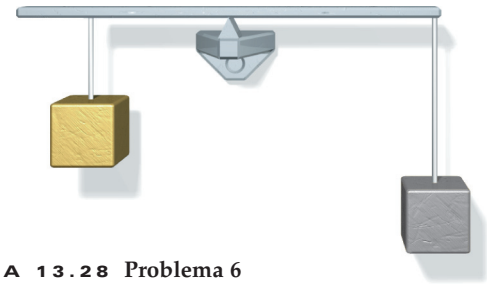


FIGURA 13.28 Problema 6

7 •• Un bloque de 200 g de plomo y otro de 200 g de cobre están cubiertos de agua, suspendidos de un hilo justo por encima del fondo de un acuario lleno de agua. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta? SSM

(*a*) La fuerza ascensional es mayor en el plomo que en el cobre.
(*b*) La fuerza ascensional es mayor en el cobre que en el plomo.
(*c*) La fuerza ascensional es la misma en ambos bloques.
(*d*) Se necesita más información para decidir entre las anteriores.

8 •• Un bloque de 20 cm^3 de plomo y otro de 20 cm^3 de cobre están cubiertos de agua, suspendidos de un hilo justo por encima del fondo de un acuario lleno de agua. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

(*a*) La fuerza ascensional es mayor en el plomo que en el cobre.
(*b*) La fuerza ascensional es mayor en el cobre que en el plomo.
(*c*) La fuerza ascensional es la misma en ambos bloques.
(*d*) Se necesita más información para decidir entre las anteriores.

9 •• Dos ladrillos se sumergen completamente en agua. El ladrillo 1 está hecho de plomo y tiene dimensiones rectangulares 2″ × 4″ × 8″. El ladrillo 2 está hecho de madera y tiene dimensiones rectangulares 1″ × 8″ × 8″. Verdadero o falso: el empuje sobre el ladrillo 2 es mayor que el empuje sobre el 1.

10 •• La figura 13.29 muestra un dispositivo que consiste en una botella de plástico flexible, cerrada y parcialmente llena de agua en cuyo interior hay un tubo de ensayo colocado boca abajo de modo que en su punto más alto tiene una burbuja de aire. Normalmente, el tubo flota, pero cuando se aprieta con fuerza la botella, el tubo se hunde. (*a*) Explicar los motivos. (*b*) Explicar la física que hay detrás del hecho de que un submarino puede hundirse silenciosamente simplemente dejando entrar agua en los tanques que hay cerca de la quilla. (*c*) Explicar por qué una persona que flota en el agua realiza pequeñas oscilaciones arriba y abajo conforme va respirando.

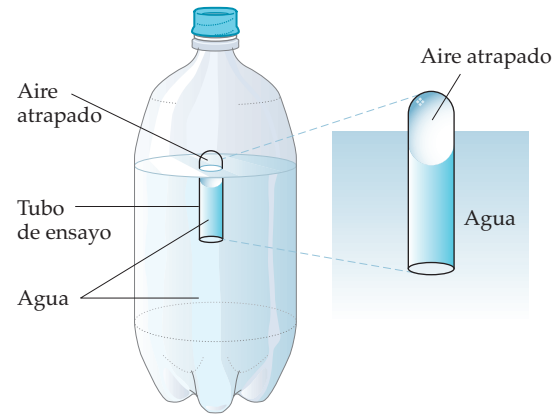


FIGURA 13.29 Problema 10

11 •• Un objeto tiene una densidad ligeramente inferior a la del agua, de modo que flota casi totalmente sumergido. Sin embargo, el objeto es más compresible que el agua. ¿Qué ocurre si se da al objeto un ligero impulso para sumergirlo totalmente?

12 •• En el ejemplo 13.11, el fluido acelera y adquiere una mayor velocidad cuando pasa a través de la parte estrecha del tubo. Identificar las fuerzas que actúan sobre el fluido en la entrada a la región estrecha para producir esta aceleración.

13 •• Un vaso con agua se acelera hacia la derecha sobre una superficie horizontal. ¿Cuál es el origen de la fuerza que produce la aceleración sobre un pequeño elemento de agua en mitad del vaso? Explicarlo mediante un diagrama. *Ayuda: la superficie del agua no permanecerá al mismo nivel debido a la aceleración del vaso. Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre el elemento de agua.* SSM

14 •• Una persona está sentada en un bote que flota en un estanque muy pequeño. Toma el ancla y la echa al agua. ¿Se modifica el nivel del agua en el estanque?

15 •• Una tubería horizontal se estrecha en una conducción pasando de un diámetro de 10 cm en la localización A a otro de 5 cm en la localización B. Para un fluido no viscoso incompresible que circula sin turbulencias por su interior desde la localización A a la B, ¿cómo son las velocidades en dichas localizaciones? (*a*) $v_A = v_B$, (*b*) $v_A = \frac{1}{2}v_B$, (*c*) $v_A = \frac{1}{4}v_B$, (*d*) $v_A = 2v_B$, (*e*) $v_A = 4v_B$.

16 •• Una tubería horizontal se estrecha en una conducción pasando de un diámetro de 10 cm en el punto A a otro de 5 cm en el punto B. Para un fluido no viscoso e incompresible que circula sin turbulencias por su interior desde el punto A al B, ¿cómo son las presiones en dichos puntos? (*a*) $P_A = P_B$, (*b*) $P_A = \frac{1}{2}P_B$, (*c*) $P_A = \frac{1}{4}P_B$, (*d*) $P_A = 2P_B$, (*e*) $P_A = 4P_B$, (f) faltan datos.

17 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La figura 13.30 muestra un esquema de un agujero construido por un perro de las praderas. La geometría de las dos entradas es tal que la entrada 1 está rodeada por un montículo mientas que en la entrada 2 el terreno es llano. Explicar cómo es posible que el túnel se mantenga ventilado e indicar la dirección del aire por el interior del túnel. SSM

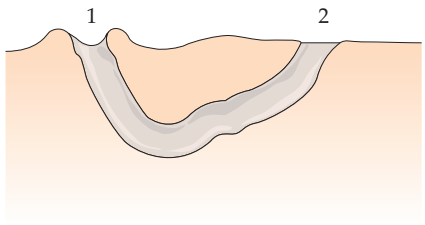


FIGURA 13.30 Problema 17

ESTIMACIÓN Y APROXIMACIÓN

18 •• Se desea colocar un dispositivo en un globo para tomar medidas de la presión del aire. El dispositivo tiene una masa de 25 kg. Estimar el diámetro que debe tener un globo lleno de helio para que sea capaz de elevar el dispositivo. Despreciar la masa del globo y el empuje sobre el dispositivo.

19 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Su amigo quiere iniciar un negocio para dar paseos en globos de aire caliente. El globo vacío, la cesta y los ocupantes tiene una masa total de 1000 kg. Si el globo tiene un diámetro de 22 m cuando está lleno de aire caliente, estimar la densidad necesaria del aire caliente. Despreciar el empuje de las personas y la cesta.

DENSIDAD

20 • Hallar la masa de una esfera de plomo de 2,00 cm de radio.

21 • Una habitación rectangular mide 4,0 m × 5,0 m × 4,0 m. En condiciones normales, ¿cuál sería la masa de aire que hay en la habitación? SSM

22 • Una estrella de neutrones tiene, aproximadamente, la misma masa que el Sol, pero su radio mide unos 10 km. ¿Qué cantidad de masa de esa materia cabría en una cucharita de café?

23 •• Una pelota de 50 g consiste en una corteza esférica de plástico llena de agua. La esfera tiene un radio exterior de 50 mm y un radio interior de 20 mm. ¿Cuál es la densidad del plástico?

24 •• Se llena un recipiente de 60 mL con mercurio a 0 °C (figura 13.31). Cuando se eleva su temperatura 80 °C, se salen 1,47 g de mercurio del recipiente. Suponiendo que el volumen del recipiente permanece constante, calcular el cambio en la densidad del mercurio a 80 °C si su densidad a 0 °C es de 13,645 kg/m^3.

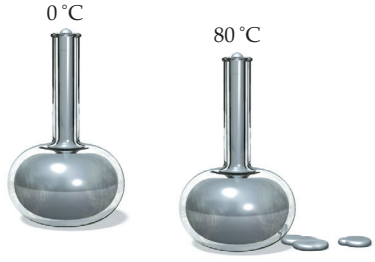


FIGURA 13.31 Problema 24

25 •• Una esfera está hecha de oro y tiene un radio r_0 y otra esfera está hecha de cobre y tiene un radio r_c. Si las esferas tienen la misma masa, ¿cuánto vale el cociente r_0/r_c?

26 ••• Desde 1983, la casa de la moneda americana está acuñando peniques que están hechos de zinc con un baño de cobre. La masa de estos peniques es de 2,5 g. Suponer que las monedas son cilindros uniformes de 1,23 mm de altura y 9,5 mm de radio. Suponer que el baño de cobre está uniformemente distribuido sobre toda la superficie. Si la densidad del zinc es 7140 kg/m^3 y la del cobre es 8930 kg/m^3 ¿Cuál es el grosor del baño de cobre?

PRESIÓN

27 • Las lecturas barométricas en los países de habla inglesa suelen venir dadas en pulgadas de mercurio (inHg). Hallar en inHg la presión de 101 kPa.

28 • La presión sobre la superficie de un lago es la presión atmosférica P_{atm} = 101 kPa. (*a*) ¿A qué profundidad la presión es el doble de la atmosférica? (*b*) Si la presión en la superficie de un recipiente profundo que contiene mercurio es P_{atm}, ¿a qué profundidad la presión es igual a $2P_{atm}$?

29 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Un avión vuela a 2400 m de altitud. Los oídos se equilibran durante el vuelo con frecuencia, de forma que la presión del aire del oído interno se iguala a la presión que hay en el exterior del avión. La trompa de Eustaquio permite el equilibrio, pero puede quedar obstruida. Si se obstruye, las presiones no se pueden igualar durante el descenso, de forma que la presión del oído interno se mantiene igual a la que tenía cuando estaba a 2400 m de altura. Cuando el avión aterriza, la cabina se presuriza con la presión a nivel del mar. Calcular la fuerza que actúa entonces sobre el tímpano del oído, debido a la diferencia de presiones, si el área del tímpano es de 0,5 cm^2.

30 • El eje de un recipiente cilíndrico está en posición vertical. Se llena el recipiente con masas iguales de agua y aceite. El aceite flota sobre la superficie del agua y la superficie del aceite está a una altura h del fondo del cilindro. La presión en el fondo del cilindro es de 10 kPa mayor que la presión sobre la superficie del aceite. Calcular h. La densidad del aceite es de 875 kg/m^3.

31 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Se utiliza un elevador hidráulico para levantar un automóvil de 1500 kg de masa. El radio del eje del elevador es 8 cm y el del pistón es de 1 cm. ¿Cuánta fuerza debe aplicarse al pistón para levantar el automóvil? *Ayuda: el eje del elevador es otro pistón.* SSM

32 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un coche de 1500 kg está apoyado sobre cuatro ruedas, que se encuentran infladas a una presión manométrica de 200 kPa. ¿Cuál es el área de contacto de cada rueda con el suelo, suponiendo que las cuatro ruedas soportan el peso por igual?

33 •• ¿Qué presión se necesita para reducir el volumen de 1 kg de agua desde 1,00 L a 0,99 L? ¿Se podría producir esta compresión en el océano, donde la máxima profundidad es de 11 km?

34 •• Una mujer está en una zapatería y mientras se prueba unos zapatos con tacones altos da un paso de forma que deja caer todo su peso sobre el tacón del zapato. Si su masa es de 56 kg y el área del tacón es de 1 cm^2, ¿cuál será la presión ejercida sobre el suelo? Comparar la respuesta con la presión ejercida por el pie de un elefante de 5000 kg que apoya sus cuatro patas sobre el suelo, suponiendo que su peso se reparte por igual entre sus cuatro patas y que el área de cada pata es de 400 cm^2.

35 •• En el siglo XVII, Blaise Pascal realizó el experimento indicado en la figura 13.32. Se llenó con agua un barril de vino al que se le conectó luego un tubo largo y se fue añadiendo agua por el tubo hasta que reventó el barril. El radio de la tapa del barril era de 20 cm y la altura del agua en el tubo era de 12 m. (*a*) Calcular la fuerza ejercida sobre la tapa debido al aumento de presión. (*b*) Si el tubo tenía un radio interior de 3 mm, ¿qué masa de agua del tubo produjo la presión que reventó el barril?

FIGURA 13.32
Problema 35

36 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Se hace fluir plasma sanguíneo desde una bolsa a través de un tubo hasta la vena de un paciente, en un punto en que la presión de la sangre es de 12 mmHg. La densidad específica del plasma a 37 °C es 1,03. ¿Cuál es la altura mínima a la que deberá estar la bolsa para que el plasma entre en la vena?

37 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Mucha gente cree que si se hace flotar la parte superior de un tubo *snorkel* (tubo de respiración) fuera del agua (figura 13.33), podrían respirar con él mientras están paseando bajo el agua. Sin embargo, la presión del agua se opone a la dilatación del pecho y al inflado de los pulmones. Supóngase que apenas se puede respirar si se está tumbado en el suelo con un peso de 400 N sobre el pecho. ¿A qué profundidad por debajo de la superficie del agua podría estar el pecho para poder respirar aún, si se supone que la superficie del pecho es de 0,09 m^2?

FIGURA 13.33
Problema 37

38 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En el ejemplo 13.3, una fuerza de 150 N se aplica a un pequeño pistón para levantar un coche que pesa 15 000 N. Demostrar que este hecho no viola la ley de conservación de la energía mecánica. Tenga en cuenta que cuando el coche se eleva una distancia h, el trabajo realizado por la fuerza de 150 N que actúa sobre el pistón pequeño es igual al trabajo realizado por el pistón grande sobre el coche.

39 •• Un pescador deja caer accidentalmente un plomo de pesca de 5 kg por la borda de un barco que está justo encima de la parte más profunda de la fosa de las Marianas, cerca de Filipinas. Calcular el porcentaje de cambio de volumen que sufre el plomo cuando cae al fondo de la fosa que está a 10,9 km de profundidad.

40 ••• El volumen de un cono de altura h y radio de la base r es $V = \pi r^2 h/3$. Se llena con agua una jarra que tiene la forma de un cono de 25 cm de altura que se apoya sobre su base de radio 15 cm. Se enrosca la tapa (base del cono) y se pone en posición vertical de forma que la jarra descansa sobre la base. (*a*) Hallar el volumen y el peso del agua contenida en el recipiente. (*b*) Suponiendo que la presión dentro de la jarra en la parte superior del cono es 1 atm, hallar la fuerza ejercida por el agua sobre la base del recipiente. Explicar cómo puede ser mayor esta fuerza que el peso del agua.

FLOTACIÓN

41 • Una pieza de cobre de 500 g (densidad específica 8,96) se sumerge en agua y se suspende de un dinamómetro (figura 13.34). ¿Qué fuerza indicará el índice del dinamómetro?

FIGURA 13.34
Problema 41

42 • Cuando una determinada roca se suspende de un dinamómetro, éste marca 60 N. Sin embargo, cuando la roca se sumerge en agua marca 40 N. ¿Cuál es la densidad de la roca?

43 • Un bloque de un material desconocido pesa 5 N en aire y 4,55 N cuando se sumerge en agua. (*a*) ¿Cuál es la densidad del material? (*b*) ¿De qué material está hecho el bloque? SSM

44 • Un trozo de metal pesa 90 N en aire y 56,6 N cuando se sumerge en agua. Determinar la densidad de este metal.

45 •• Un objeto flota en el agua con el 80% de su volumen por debajo de la superficie. El mismo objeto situado en otro líquido flota con el 72% de su volumen por debajo de la superficie. Determinar la densidad del objeto y la densidad específica del líquido.

46 •• Se ata un bloque de 5 kg de hierro a un dinamómetro y se sumerge en un fluido de densidad desconocida. La escala del dinamómetro marca 6,16 N. ¿Cuál es la densidad del fluido?

47 •• Un trozo de corcho pesa 0,285 N en aire. Cuando se mantiene sumergido bajo el agua mediante un dinamómetro, como se ve en la figura 13.35, la escala marca 0,855 N. Hallar la densidad del corcho.

FIGURA 13.35
Problema 47

48 •• En condiciones estándar, la densidad del aire es de 1,29 kg/m^3 y la del helio es de 0,178 kg/m^3. Un globo lleno de helio levanta una barquilla y su carga con un peso total de 2000 N. ¿Cuál deberá ser el volumen mínimo del globo?

49 •• Un objeto posee una fuerza ascensional neutra cuando su densidad iguala a la del líquido en donde se encuentra sumergido, de forma que ni flota ni se hunde. ¿Qué masa de plomo debería añadirse a un nadador de 85 kg y de densidad media 0,96 kg/L que bucea en agua dulce para que su fuerza ascensional fuese neutra? SSM

50 •• Un vaso de precipitados de masa 1 kg contiene 2 kg de agua y descansa sobre una balanza. Un bloque de 2 kg de aluminio (densidad 2,70 × 10^3 kg/m^3) suspendido de un dinamómetro se sumerge en agua (figura 13.36). Determinar las lecturas de ambas balanzas.

FIGURA 13.36
Problema 50

51 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Cuando en la base de una presa se forman grietas, el agua que se introduce en las grietas ejerce una fuerza ascensional que tiende a levantar la presa. Esto puede provocar su hundimiento. Estimar la fuerza ascensional ejercida por el agua que se introduce por algunas grietas de la base sobre una presa de 2 m de espesor y 5 m de longitud. El nivel del agua está a 5 m por encima de las grietas.

52 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un globo sonda meteorológico lleno de helio tiene una masa de 15 kg (globo más helio más instrumentos) y una forma esférica con un radio de 2,5 m. (*a*) Cuando se suelta el globo desde el nivel del mar, ¿cuál es la aceleración inicial a la que está sometido? (*b*) Si la fuerza de arrastre sobre el globo viene dada por $F_D = \frac{1}{2}\pi r^2 \rho v^2$, donde r es el radio del globo, ρ es la densidad del aire, y v es la velocidad a la que sube el globo, calcular la velocidad límite ascendente.

53 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un barco que navega por agua de mar (densidad específica 1,025) se encuentra de repente navegando por agua dulce, donde lógicamente se hunde ligeramente. Cuando en un puerto descarga 600 000 kg, vuelve a su posición original. Suponiendo que los laterales del barco son verticales en la línea de flotación, calcular la masa del barco antes de la descarga. SSM

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD Y ECUACIÓN DE BERNOULLI

***Nota:* para los problemas de esta sección, suponer que el flujo es laminar, estacionario y no-viscoso en todos los casos, excepto si se indica lo contrario.**

54 • A través de una manguera de 3 cm de diámetro fluye agua a una velocidad de 0,65 m/s. El diámetro de la boquilla es de 0,30 cm. (*a*) ¿A qué velocidad pasa el agua a través de la boquilla? (*b*) Si la bomba, situada en un extremo de la manguera, y la boquilla, en el otro extremo, tienen la misma altura y si la presión en la boquilla es la presión atmosférica (1 atm), ¿cuál es la presión en la bomba?

55 • Está fluyendo agua a 3 m/s por una tubería horizontal bajo una presión de 200 kPa. La tubería se estrecha hasta la mitad de su diámetro original. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del flujo en la sección estrecha? (*b*) ¿Cuál es la presión en la sección estrecha de la tubería? (*c*) ¿Qué relación existe entre el volumen de agua que fluye por la sección estrecha cada segundo con el que circula a través de la sección más ancha? SSM

56 •• La presión en una sección de 2 cm de diámetro de una tubería horizontal es de 142 kPa. El agua fluye a través de la tubería con un caudal de 2,80 L/s. ¿Cuál deberá ser el diámetro de una sección más estrecha de la tubería para que la presión se reduzca a 101 kPa? Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

57 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Por una aorta de 9 mm de radio fluye sangre a 30 cm/s. (*a*) Calcular el caudal en litros por minuto. (*b*) Aunque el área de la sección recta de un capilar es mucho menor que la de la aorta, existen muchos capilares, de forma que el área total de sus secciones rectas es mucho mayor. Si toda la sangre procedente de la aorta pasa a los capilares en donde la velocidad de flujo es de 1,0 mm/s, calcular dicha área total. SSM

58 •• El agua fluye a través de un tubo cónico de sección transversal circular que une dos tubos cilíndricos, uno de 0,45 m de radio en el lado izquierdo y otro de 0,25 m en el lado derecho. Si el agua fluye a 1,5 m/s cuando pasa por el tubo de 0,45 m de radio y el flujo es laminar, perfecto y estacionario, (*a*) ¿cuál es la velocidad del flujo de agua que pasará por el tubo de 0,25 m de radio? (*b*) ¿Cuál será la velocidad del flujo de agua en una posición del tubo cónico que está a una distancia x del extremo izquierdo del tubo cónico?

59 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El gran oleoducto de Alaska (800 millas de longitud y 8000 millones $ de inversión) tiene una capacidad máxima de 240 000 m^3 de crudo por día. Su radio externo es de 60 cm en la mayor parte de su recorrido. Determinar la presión P' en un punto donde la tubería tiene un radio igual a 30 cm. Tomar como presión en la sección de 60 cm el valor P = 180 kPa y como densidad del crudo, 800 kg/m^3.

60 •• A través de un tubo de venturi como el del ejemplo 13.11 fluye agua a lo largo de una tubería de diámetro 9,5 cm que en el estrechamiento se reduce a 5,6 cm. El manómetro en U está parcialmente lleno de mercurio. Determinar la velocidad del flujo de agua en la tubería de 9,5 cm de diámetro si la diferencia entre los niveles de mercurio del tubo en U es de 2,40 cm.

61 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una tubería flexible horizontal transporta agua fría a través de un aparato de laboratorio. Para mantener el aparato refrigerado se necesita que circule un caudal mínimo de 0,05 L/s. La sección transversal es circular y tiene un radio de 0,5 cm. Fuera del aparato la tubería se ensancha, siendo su radio de 1,25 cm. Calcular la caída de presión que debe haber para que se mantenga el caudal. SSM

62 •• La figura 13.37 muestra un tubo de Pitot estático, dispositivo que se usa para determinar la velocidad de un gas. El tubo interior está enfrentado al fluido cuya velocidad se quiere determinar, mientras que el cilindro agujereado, conectado con el otro extremo del tubo, es paralelo al flujo del gas. Demostrar que la velocidad del gas viene dada por $v^2 = 2gh(\rho_L - \rho_g)/\rho_g$, donde ρ es la densidad del líquido usado en el manómetro y ρ_g es la densidad del gas.

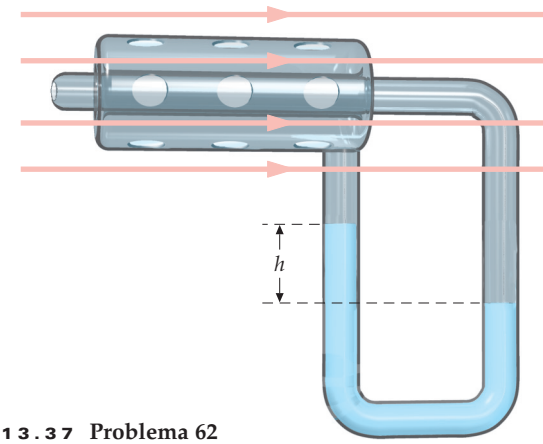


FIGURA 13.37 Problema 62

63 ••• Deducir la ecuación de Bernoulli teniendo en cuenta ahora que el fluido puede cambiar su altura durante el movimiento. Utilizando el teorema trabajo-energía demostrar que la ecuación 13.16 se convierte en $P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ (ecuación 13.17). SSM

64 ••• Un barril grande de cerveza de altura H y área transversal A_1 se llena con cerveza. La parte superior está abierta a la presión atmosférica. En la parte inferior existe una espita abierta de área A_2, mucho menor que A_1. (*a*) Demostrar que la velocidad de la cerveza que sale por la espita es, aproximadamente, $\sqrt{2gh}$ cuando la altura de la cerveza es h. (*b*) Demostrar que en la aproximación según la cual $A_2 \ll A_1$, la variación de altura h por unidad de tiempo de la cerveza viene dada por $dh/dt = -(A_2/A_1)(2gh)^{1/2}$. (*c*) Calcular h en función del tiempo si $h = H$ para $t = 0$. (*d*) Hallar el tiempo total necesario para vaciar el barril si $H = 2$ m, $A_1 = 0{,}8$ m^2, y $A_2 = (10^{-4})\,A_1$. Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

65 •• Un sifón es un dispositivo usado para transferir líquido de un recipiente a otro, tal como se muestra en la figura 13.38. Para empezar a funcionar, el tubo debe llenarse con líquido, pero, una vez lleno, el líquido fluirá hasta que las superficies del fluido de ambos recipientes estén al mismo nivel. (*a*) Usando la ecuación de Bernouilli, demostrar que la velocidad del agua en el tubo es $v = \sqrt{2gd}$. (*b*) ¿Cuál es la presión en el punto más alto del tubo? Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

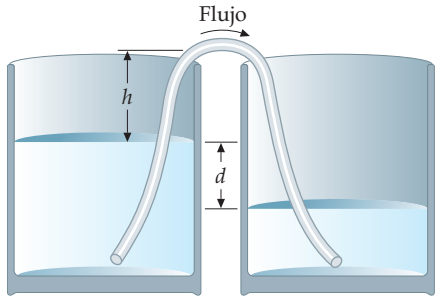


FIGURA 13.38 Problema 65

66 •• Una fuente diseñada para lanzar al aire una columna de agua de 12 m de altura, tiene una boquilla de 1 cm de diámetro al nivel del suelo. La bomba de agua está a 3 m por debajo del suelo. La tubería que la conecta a la boquilla tiene un diámetro de 2 cm. Hallar la presión que debe suministrar la bomba. Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

67 •• Un chorro de agua a 20 °C sale de un grifo (con sección transversal circular) con un caudal de 10,5 cm^3 verticalmente hacia abajo. (*a*) Si el diámetro del grifo es de 1,2 cm, ¿cuál es la velocidad del agua? (*b*) Conforme el agua cae, el chorro se hace cada vez más estrecho. ¿Cuál es el nuevo diámetro del chorro a 7,5 cm del grifo? (*c*) Si un flujo se vuelve turbulento cuando el número de Reynolds está por encima de 2300, ¿a qué distancia del grifo se vuelve turbulento este chorro? ¿Concuerda con nuestras observaciones cotidianas?

68 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** La brigada de bomberos quiere construir un sistema de bombeo para transportar agua del mar a la cima del acantilado que está a 12 m de altura. Si la bomba es capaz de producir una caída de presión de 150 kPa, ¿qué cantidad de agua (en L/s) se puede bombear para que salga por una manguera de 4 cm de radio?

69 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En la figura 13.39, H es la profundidad del líquido y h la distancia desde la superficie hasta el orificio de salida del agua. (*a*) Hallar la distancia x a la que el agua incide sobre el suelo en función de h y H. (*b*) Demostrar que existen dos valores de h que son equidistantes del punto $\frac{1}{2}H$, que dan la misma distancia x. (*c*) Demostrar que x es máxima cuando $h = \frac{1}{2}H$. ¿Cuál es el valor de esta distancia máxima x? Supóngase que el flujo es laminar y no viscoso.

FIGURA 13.39 Problema 69

*FLUJO VISCOSO

70 • Por un tubo horizontal con un diámetro interior de 1,2 mm y una longitud de 25 cm circula agua con un flujo de 0,30 mL/s. Hallar la diferencia de presiones que se necesita para impulsar el agua si su viscosidad es de 1,00 mPa · s. Supóngase que el flujo es laminar.

71 • Hallar el diámetro de un tubo que tendría un flujo de agua doble del indicado en el problema 70 si la diferencia de presiones ha de ser la misma.

72 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La sangre tarda aproximadamente 1,0 s en fluir por un capilar del sistema circulatorio humano de 1 mm de longitud. Si el diámetro del capilar es de 7 micrometros y la caída de presión de 2,60 kPa, calcular la viscosidad de la sangre. Supóngase que el flujo es laminar.

73 • Cuando se alcanza un número de Reynolds de 3×10^5 se produce una transición de forma que la fuerza de resistencia sobre una esfera disminuye bruscamente. Estimar la velocidad a la que se produce esta transición en una pelota de béisbol y comentar si este fenómeno puede o no jugar un papel en la física del juego. SSM

74 •• Un tubo horizontal de 1,5 cm y 25 m de longitud se conecta a una fuente de agua que mantiene una caída de presión de 10 kPa. ¿Cuál es la velocidad del agua si sale a 20 °C? ¿Y si sale a 60 °C?

75 •• Un gran tanque está lleno de aceite hasta una profundidad de 250 cm. La densidad del aceite es 860 kg/m^3 y su viscosidad 180 mPa · s. Si las paredes del tanque tienen 5 cm de grosor y se practica un agujero cilíndrico de 0,75 cm de radio en la base del tanque, ¿cuál es el caudal inicial en L/s que sale por el agujero?

76 ••• La ley de Stokes establece que la fuerza de resistencia sobre una esfera de radio a cuando el número de Reynolds es muy bajo viene dada por $F_D = 6\pi\eta a v$, donde η es la viscosidad del fluido por el que se mueve la esfera. Usando esta expresión, determinar la velocidad límite de ascenso en gaseosa de una burbuja esférica de dióxido de carbono de 1 mm de diámetro (densidad $1{,}1 \times 10^3$ kg/m^3; viscosidad 1,8 mPa · s). ¿Cuánto tiempo invertirá la burbuja en ascender hasta la superficie en un vaso típico de gaseosa de 20 cm de altura? ¿Este tiempo coincide con la experiencia habitual?

PROBLEMAS GENERALES

77 • Un grupo de adolescentes nada hacia una balsa de madera rectangular de 3 m de ancho por 2 m de largo y 9 cm de grosor. La madera tiene una densidad de 650 kg/m^3. ¿Cuántos chicos se pueden subir sobre la balsa sin que se hunda si cada uno tiene una masa de 75 kg? SSM

78 • Una pelota de ping-pong de 2,7 g está sujeta mediante una cuerda al fondo de una vasija. Cuando la vasija se llena con agua, de modo que la pelota está completamente sumergida, la tensión de la cuerda es 7 mN. Determinar el diámetro de la pelota.

79 • El agua de mar tiene un módulo de compresibilidad de $2{,}3 \times 10^9$ N/m^2. Hallar la densidad del agua de mar a una profundidad en donde la presión vale 800 atm si la densidad en la superficie es 1025 kg/m^3.

80 • Un bloque sólido cúbico de arista 0,6 m está suspendido de una balanza de muelle. Si el bloque se sumerge en agua, la balanza marca una lectura que es el 80% de la correspondiente al bloque en el aire. Determinar la densidad del bloque.

81 •• Un bloque de madera de masa 1,5 kg flota sobre el agua con el 68% de su volumen sumergido. Un bloque de plomo se sitúa sobre la madera y ésta se sumerge completamente. Determinar la masa del bloque de plomo. SSM

82 •• Un cubo de poliestireno, de 25 cm de arista, se pesa mediante una balanza de brazos iguales. La balanza está equilibrada cuando una masa de latón de 20 g se sitúa en el platillo opuesto de la balanza. Determinar la masa real del cubo de poliestireno. Despreciar el empuje sobre los brazos de la balanza, pero no sobre el cubo.

83 •• Una corteza esférica de cobre con un diámetro exterior de 12 cm flota sobre el agua con la mitad de su volumen por encima de la superficie del agua. Determinar el diámetro interior de la corteza. La cavidad del interior de la corteza está vacía.

84 •• Un vaso de 200 mL medio lleno de agua está equilibrado en el platillo izquierdo de una balanza cuando en el otro platillo colocamos una determinada cantidad de arena. Un cubo de 4 cm de arista se ata a una cuerda y se sumerge totalmente en el agua. El cubo no toca el fondo del vaso. Se añade un peso m al platillo derecho para recuperar el equilibrio. ¿Cuánto vale m?

85 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** El petróleo crudo a temperatura ambiente tiene una viscosidad aproximada de 0,8 Pa · s. Un oleoducto de 50 km ha de construirse desde un yacimiento de petróleo hasta la terminal de buques petroleros. El oleoducto tiene que distribuir petróleo a la terminal a razón de 500 L/s y el flujo debe ser laminar para minimizar la presión necesaria para impulsar el fluido a través de la tubería. Suponiendo que la densidad del crudo es de 700 kg/m^3, estimar el diámetro que el oleoducto debe tener. SSM

86 •• A través del tubo de la figura 13.40 fluye agua que sale a la atmósfera por C. El diámetro del tubo es 2,0 cm en A, 1,0 cm en B y 0,8 cm en C. La presión manométrica del tubo en A es 1,22 atm y el caudal, 0,8 L/s. Los tubos verticales están abiertos al aire. Determinar el nivel (sobre la línea media que se muestra) de las interfases líquido-aire en los dos tubos verticales. Supóngase que el flujo es laminar.

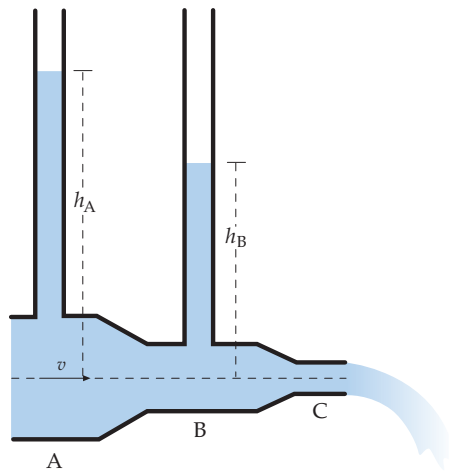


FIGURA 13.40
Problema 86

87 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un camión que distribuye gasóleo para calefacción tiene una manguera de 1 cm de radio. La densidad específica del aceite es de 0,875 y su coeficiente de viscosidad de 200 mPa · s. ¿Cuál es el mínimo tiempo que se necesita para llenar un depósito de 208 litros? SSM

88 •• Un tubo en U se llena de agua hasta que el nivel del líquido está a 28 cm por encima del fondo del tubo. En una de las ramas del tubo se vierte ahora un aceite de densidad específica 0,78 hasta que el nivel del agua en la otra rama se encuentra a 34 cm por encima del fondo del tubo. Determinar el nivel de las interfases aceite-aire y aceite-agua en la rama donde se hizo el vertido del aceite.

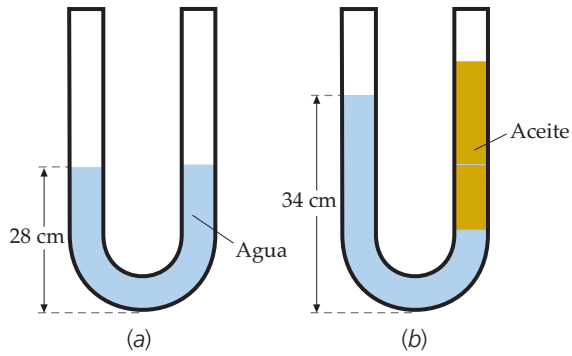


FIGURA 13.41 Problema 88

89 •• Un globo de helio puede levantar justamente una carga de 750 N. La capa externa del globo tiene una masa de 1,5 kg y un volumen despreciable. (*a*) ¿Cuál es el volumen del globo? (*b*) Si el volumen del globo fuese el doble del calculado en (*a*), ¿cuál sería la aceleración inicial del globo al transportar una carga de 900 N? SSM

90 •• Una esfera hueca de radio interior R y radio exterior $2R$ está formada de un material de densidad ρ_0 y flota en un líquido de densidad $2\rho_0$. El interior se llena ahora de material de densidad ρ' de tal modo que la esfera flota justamente totalmente sumergida. Determinar ρ'.

91 •• Como mencionábamos al tratar la ley barométrica, la disminución relativa de la presión atmosférica es proporcional al cambio de altura. En términos matemáticos, tenemos $dP/P = -Cdh$, donde C es una constante. (*a*) Demostrar que $P(h) = P_0 e^{-Ch}$, donde P_0 es la presión en $h = 0$, es una solución de la ecuación diferencial. (*b*) Sabiendo que la presión a la altura $h = 5{,}5$ km es la mitad que al nivel del mar, determinar la constante C.

92 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un submarino tiene una masa total de $2{,}4 \times 106$ kg, incluyendo la tripulación y el equipo. La nave consta de dos partes: la cabina presurizada, que tiene un volumen de 2×10^3 m^3, y los tanques de inmersión, que tienen un volumen de 4×10^2 m^3. Cuando el submarino navega sobre la superficie, los tanques de inmersión se llenan de aire a presión atmosférica; cuando navega sumergido, estos tanques se llenan de agua marina. (*a*) ¿Qué fracción del volumen del submarino está por encima de la superficie cuando los tanques están llenos de aire? (*b*) ¿Qué cantidad de agua debe admitirse en los tanques para que el submarino neutralice exactamente su peso con la fuerza ascensional? Despreciar la masa del aire en los tanques y utilizar el valor 1,025 para la densidad específica del agua del mar.

93 ••• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La mayoría de las especies de peces tienen un saco membranoso expandible, llamado vejiga natatoria. Cuando este órgano se llena con el oxígeno captado por sus branquias, el pez asciende, y cuando se vacía, el pez desciende. Un pez de agua dulce tiene una densidad media de 1,05 kg/L cuando su vejiga está vacía. ¿Qué volumen debe tener la vejiga para que el pez se mantenga a flote en el interior del agua? La masa del pez es de 825 g. Suponer que la densidad del oxígeno es igual a la del aire en condiciones estándar.

CAPÍTULO 14

LOS "MONSTER TRUCKS" PUEDEN PASAR SOBRE CUALQUIER COSA, PERO ¿QUÉ IMPIDE QUE SUS CONDUCTORES SALTEN DESPEDIDOS POR LA VENTANA? LOS MONSTER TRUCKS TIENEN UNOS ENORMES AMORTIGUADORES QUE AYUDAN A AMORTIGUAR SUS OSCILACIONES, PROPORCIONANDO UNA CONDUCCIÓN MÁS CÓMODA CUANDO PASAN SOBRE TERRENOS ANGOSTOS U OTROS CAMIONES. *(Jeff Greenberg/Photoedit.)*

Oscilaciones

14.1 Movimiento armónico simple
14.2 Energía del movimiento armónico simple
14.3 Algunos sistemas oscilantes
14.4 Oscilaciones amortiguadas
14.5 Oscilaciones forzadas y resonancia

? ¿Cómo puede un mecánico determinar qué tipo de amortiguador necesita? (Véase el ejemplo 14.13.)

En este capítulo, estudiaremos el movimiento oscilatorio. La cinemática del movimiento con aceleración constante se analizó en los capítulos 2 y 3. En este capítulo, presentamos la cinemática y la dinámica del movimiento con aceleración proporcional al desplazamiento respecto del equilibrio. Las oscilaciones se producen cuando se perturba un sistema y éste pierde su posición de equilibrio estable. Existen muchos ejemplos de oscilaciones presentes en la vida cotidiana: los barcos se balancean arriba y abajo, los péndulos de reloj oscilan a un lado y otro, y las cuerdas y lengüetas de los instrumentos musicales vibran al producir los sonidos.

Otros ejemplos, menos conocidos, son las oscilaciones de las moléculas de aire en las ondas sonoras y las oscilaciones de las corrientes eléctricas en los aparatos de radio y televisión.

En este capítulo, vamos a estudiar el movimiento armónico simple, la forma más básica de movimiento oscilatorio. También vamos a tratar las oscilaciones amortiguadas y forzadas.

14.1 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un tipo sencillo y muy frecuente en la naturaleza de movimiento oscilatorio es el **movimiento armónico simple**, como el de un cuerpo unido a un muelle (figura 14.1). En el equilibrio, el muelle no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Cuando éste se ve desplazado una distancia x de su posición de equilibrio, el muelle ejerce una fuerza $-kx$, que viene dada por la ley de Hooke:*

$$F_x = -kx \qquad 14.1$$

FUERZA RECUPERADORA LINEAL

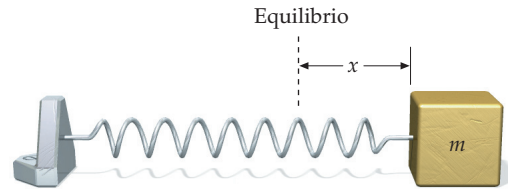


FIGURA 14.1 Cuerpo unido a un muelle que descansa sobre una mesa sin rozamiento. Se mide el desplazamiento x desde la posición de equilibrio. El desplazamiento es positivo si el muelle se estira y negativo si el muelle se comprime.

donde k es la constante del muelle, característica de su rigidez. El signo menos indica que se trata de una fuerza restauradora; es decir, que se opone al sentido del desplazamiento respecto al punto de equilibrio. Combinando la ecuación 14.1 con la segunda ley de Newton ($F_x = ma_x$), se tiene

$$-kx = ma_x$$

es decir

$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \left(\text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x\right) \qquad 14.2$$

La aceleración es proporcional al desplazamiento y el signo negativo indica que la aceleración y el desplazamiento tienen sentido contrario. Esta es la característica que define el movimiento armónico simple y puede utilizarse para identificar sistemas que presentan esta clase de movimiento.

Siempre que la aceleración de un objeto sea proporcional a su desplazamiento, pero con sentido opuesto, el objeto se moverá con movimiento armónico simple.

CONDICIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE EN FUNCIÓN DE LA ACELERACIÓN

El tiempo que emplea el objeto desplazado para realizar una oscilación completa alrededor de su posición de equilibrio se denomina **periodo** T. El recíproco es la **frecuencia** f, que es el número de oscilaciones por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} \qquad 14.3$$

La unidad de frecuencia es el ciclo por segundo (ciclo/s), que recibe el nombre de **hertz** (Hz). Por ejemplo, si el tiempo necesario para una oscilación completa es 0,25 s, la frecuencia es 4 Hz.

La figura 14.2 muestra cómo se puede obtener experimentalmente x en función de t para una masa sobre un muelle. La ecuación correspondiente a esta curva es

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \qquad 14.4$$

POSICIÓN EN UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

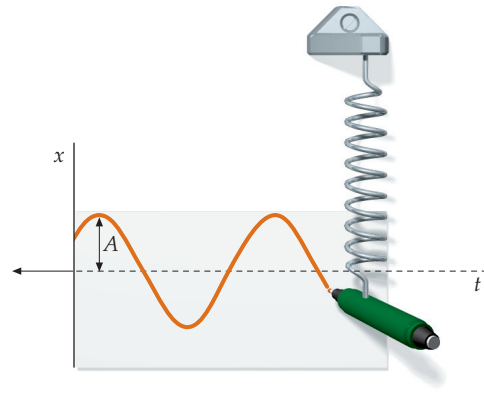


FIGURA 14.2 Una plumilla está sujeta a la masa de un muelle y el papel se mueve hacia la izquierda. Cuando el papel se mueve con velocidad constante, la plumilla va dibujando el desplazamiento x en función del tiempo t. (En este caso, hemos considerado x como positivo cuando el muelle se comprime.)

donde A, ω y δ son constantes. El desplazamiento máximo $x_{máx}$ respecto a la posición de equilibrio se denomina **amplitud** A. El argumento de la función coseno,

* La ley de Hooke se ha introducido en el capítulo 4, sección 5.

$\omega t + \delta$, se denomina **fase** de movimiento y la constante δ se denomina **constante de fase**. Esta constante corresponde a la fase cuando $t = 0$. (Obsérvese que $\cos(\omega t + \delta) = \text{sen}(\omega t + \delta + \pi/2)$; por lo tanto, expresar la ecuación como una función coseno o seno depende simplemente de la fase de la oscilación en el momento que elijamos como $t = 0$.) Si tenemos sólo un sistema oscilante, siempre podemos elegir $t = 0$ de modo que $\delta = 0$. Si tenemos dos sistemas oscilantes con igual amplitud y frecuencia, pero diferente fase, podemos elegir $\delta = 0$ para uno de ellos. Las ecuaciones de los dos sistemas son entonces

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t)$$

y

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \delta)$$

Si la diferencia de fase δ es 0 ó un número entero de veces 2π, entonces se dice que los sistemas están *en fase*. Si la diferencia de fase δ es π o un número entero impar de veces π, entonces se dice que los sistemas están *fuera de fase* en 180°.

Podemos demostrar que la ecuación 14.4 es una solución de la ecuación 14.2 derivando x dos veces respecto al tiempo. La primera derivada de x es la velocidad v_x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \,\text{sen}(\omega t + \delta) \qquad 14.5$$

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Derivando la velocidad respecto al tiempo, se obtiene la aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \qquad 14.6$$

Sustituyendo x por $A\cos(\omega t + \delta)$ (véase la ecuación 14.4), se obtiene

$$a_x = -\omega^2 x \qquad 14.7$$

ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Comparando $a_x = -\omega^2 x$ (ecuación 14.7) con $a_x = -(k/m)x$ (ecuación 14.2), vemos que $x = \text{A}\cos(\omega t + \delta)$ es una solución de la ecuación 14.2 (que puede escribirse de la forma $d^2x/dt^2 = -(k/m)x$) si

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 14.8$$

La amplitud A y la constante de fase δ pueden determinarse a partir de la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 del sistema. Haciendo $t = 0$ en $x = A\cos(\omega t + \delta)$, se obtiene

$$x_0 = A\cos\delta \qquad 14.9$$

De igual modo, haciendo $t = 0$ en $v_x = dx/dt = -A\omega \,\text{sen}(\omega t + \delta)$, resulta

$$v_{0x} = -A\omega \,\text{sen}\,\delta \qquad 14.10$$

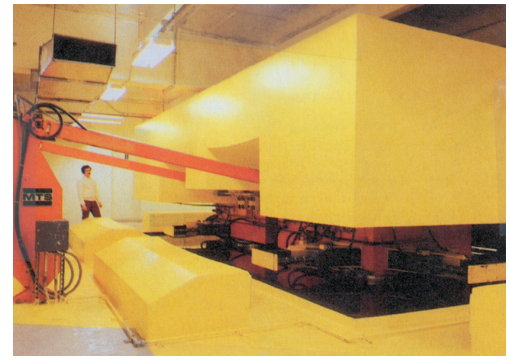
Estas ecuaciones pueden resolverse para A y δ en función de x_0, v_0 y ω.

El periodo T es el tiempo mínimo para el que se cumple la relación

$$x(t) = x(t + T)$$

para cualquier t. Teniendo en cuenta esta relación y la ecuación 14.4, se llega a

$$\begin{aligned} A\cos(\omega t + \delta) &= A\cos[\omega(t + T) + \delta] \\ &= A\cos(\omega t + \delta + \omega T) \end{aligned}$$



El balanceo debido a la acción de vientos fuertes en el edificio Citicorp de Nueva York se reduce mediante el amortiguador de la fotografía, instalado en uno de los pisos más altos. El amortiguador consiste en un bloque de 400 toneladas que está acoplado al edificio mediante un muelle cuya constante se elige de forma que la frecuencia natural del sistema muelle-bloque sea la misma que la frecuencia natural de balanceo del edificio. Si el viento hace oscilar el edificio, el oscilador y el edificio oscilan con una diferencia de fase de 180°, con lo cual se reduce la oscilación. *(Citibank.)*

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Trigonometría

La función coseno (y la función seno) repite su valor cuando la fase se incrementa en 2π, de modo que

$$\omega T = 2\pi \quad \text{o} \quad \omega = 2\pi\left(\frac{1}{T}\right)$$

La constante ω se denomina **frecuencia angular**. La unidad es el radián por segundo y sus dimensiones son la inversa del tiempo, las mismas que la velocidad angular, que también se designa por ω. Sustituyendo $2\pi/T$ por ω en la ecuación 14.4, se obtiene

$$x = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \delta\right)$$

Analizando esta relación se ve que cada vez que t aumenta en T, la fase crece 2π y, por lo tanto, esto indica que se ha completado un ciclo completo del movimiento.

La frecuencia es la recíproca del periodo

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi f \qquad 14.11$$

Como $\omega = \sqrt{k/m}$, la frecuencia y el periodo de un objeto ligado a un muelle están relacionados con la constante de fuerza k y la masa m por

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 14.12$$

La frecuencia crece cuando aumenta k (rigidez del muelle) y disminuye cuando aumenta la masa. La ecuación 14.12 proporciona una forma de medir la masa inercial de un astronauta en condiciones de ingravidez.

El astronauta Alan L. Bean midiendo la masa de su cuerpo durante el segundo viaje del *Skylab*. Lo hace sentándose en un asiento atado a un muelle y oscilando adelante y atrás. La masa total del astronauta más la del aparato está relacionada con su frecuencia de vibración por la ecuación 14.12. *(NASA.)*

PROBLEMA PRÁCTICO 14.1

Un objeto de 0,8 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m. (*a*) Determinar la frecuencia y el periodo del movimiento del objeto cuando se desplaza del equilibrio. (*b*) Repetir el apartado (*a*) pero con un objeto de 1,6 kg en lugar de uno de 0,8 kg. *Ayuda: revisar primero el ejemplo 14.4.*

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de movimiento armónico simple

PLANTEAMIENTO Elegir el origen del eje x en la posición de equilibrio. Para un muelle, elegir la dirección $+x$ de tal forma que x sea positivo cuando el muelle se alarga.

SOLUCIÓN No utilice las ecuaciones de la cinemática del movimiento con aceleración constante. Utilizar las que se han desarrollado para el movimiento armónico simple.

COMPROBACIÓN Asegúrese de que su calculadora está en el modo correcto de ángulos (grados o radianes) cuando calcule las funciones trigonométricas y resuelva los problemas.

Ejemplo 14.1 Movimiento de un bote sobre las olas

Un bote se balancea arriba y abajo. El desplazamiento vertical del bote y viene dado por

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2{,}0\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

(*a*) Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento. (*b*) ¿Dónde se encuentra el bote cuando $t = 1$ s? (*c*) Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier tiempo t. (*d*) Calcular los valores iniciales de la posición, la velocidad y la aceleración del bote.

Unos surferos esperando. *(David Pu'u/CORBIS.)*

PLANTEAMIENTO Para determinar las magnitudes solicitadas en (*a*), comparamos la ecuación del movimiento

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2{,}0\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

con la ecuación estándar del movimiento armónico simple (ecuación 14.4). La velocidad y la aceleración se determinan derivando $y(t)$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Comparar la ecuación correspondiente al desplazamiento vertical del bote con la ecuación 14.4, $y = A\cos(\omega t + \delta)$, para obtener A, ω y δ:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left(\frac{1}{2{,}0\text{ s}}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A = \boxed{1{,}2\text{ m}} \quad \omega = \boxed{0{,}50\text{ rad/s}} \quad \delta = \boxed{\pi/6\text{ rad}}$$

2. La frecuencia y el periodo se deducen a partir de ω:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{0{,}50\text{ rad/s}}{2\pi} = 0{,}0796\text{ Hz} = \boxed{0{,}080\text{ Hz}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}0796\text{ Hz}} = 12{,}6\text{ s} = \boxed{13\text{ s}}$$

(*b*) Hacer $t = 1$ s para determinar la posición del bote:

$$y = (1{,}2\text{ m})\cos\left[(0{,}50\text{ rad/s})(1{,}0\text{ s}) + \frac{\pi}{6}\right] = \boxed{0{,}62\text{ m}}$$

(*c*) La velocidad y la aceleración se obtienen derivando una y dos veces la posición respecto al tiempo:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \delta)] = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

$$= -(0{,}50\text{ rad/s})(1{,}2\text{ m})\,\text{sen}\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \boxed{-(0{,}60\text{ m/s})\,\text{sen}\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)] = -\omega^2 A\cos(\omega t + \delta)$$

$$= -(0{,}50\text{ rad/s})^2(1{,}2\text{ m})\cos\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \boxed{-(0{,}30\text{ m/s}^2)\cos\left[(0{,}50\text{ rad/s})t + \frac{\pi}{6}\right]}$$

(*d*) Hacer $t = 0$ para determinar y_0, v_{y0} y a_{y0}:

$$y_0 = (1{,}2\text{ m})\cos\frac{\pi}{6} = 1{,}04 = \boxed{1{,}0\text{ m}}$$

$$v_{0y} = -(0{,}60\text{ m/s})\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}30\text{ m/s}}$$

$$a_{0y} = -(0{,}30\text{ m/s}^2)\cos\frac{\pi}{6} = \boxed{-0{,}26\text{ m/s}^2}$$

COMPROBACIÓN Podemos comprobar si el resultado del apartado (*d*) es razonable utilizando la ecuación 14.7, en $t = 0$ con $y = 1{,}04$ m y $\omega = 0{,}5$ rad/s. Sustituyendo en la ecuación 14.7, se tiene que $a_{0y} = -(0{,}5\text{ rad/s})^2(1{,}04\text{ m}) = -0{,}26\text{ m/s}^2$ que es el mismo resultado que el obtenido en el apartado (*d*).

La figura 14.3 muestra dos masas idénticas sujetas a muelles iguales que descansan sobre una superficie sin rozamiento. Un muelle que se une al objeto 2 se estira 10 cm y el que se une al objeto 1 se estira 5 cm. Si se dejan en libertad al mismo tiempo, ¿cuál de los dos cuerpos alcanza primero la posición de equilibrio?

Según la ecuación 14.12, el periodo depende sólo de k y m, pero no de la amplitud. Como k y m tienen el mismo valor en ambos sistemas, los periodos son iguales. Por lo tanto, los objetos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo. El segundo objeto tiene que recorrer una distancia doble a la del primero para alcanzar el equilibrio, pero también posee una velocidad media doble. La figura 14.4 muestra un esquema de las funciones de posición de los dos objetos. La gráfica ilustra una propiedad general importante del movimiento armónico simple:

> En el movimiento armónico simple, la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud.

El hecho de que la frecuencia del movimiento armónico simple sea independiente de la amplitud tiene importantes consecuencias en muchos campos. En música, por ejemplo, significa que el tono (que corresponde a la frecuencia) de una nota que se toca en un piano no depende de la fuerza con que se toca la nota (es decir, de la intensidad de la misma que corresponde a la amplitud).† Si las variaciones de amplitud tuviesen un gran efecto sobre la frecuencia, los instrumentos musicales no serían armoniosos.

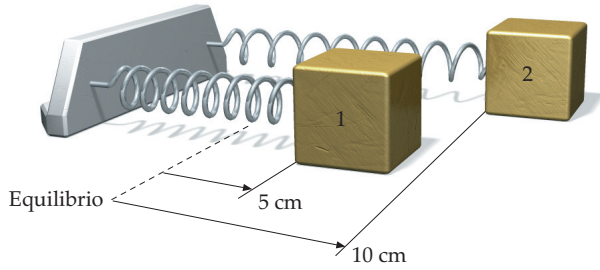


FIGURA 14.3 Dos sistemas masa-muelle idénticos.

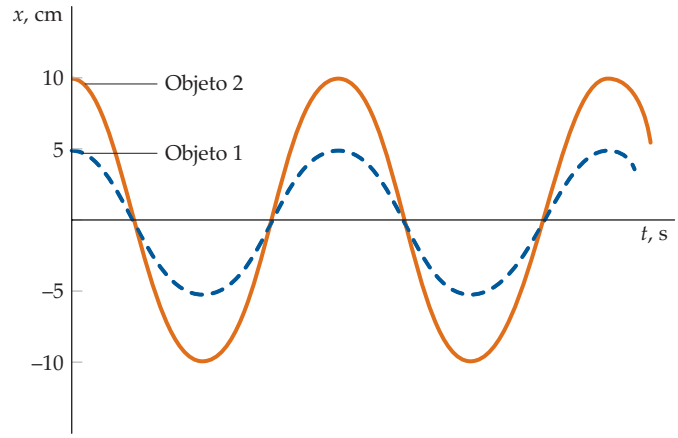


FIGURA 14.4 Posición x en función de t para los sistemas de la figura 14.3. Ambos alcanzan la posición de equilibrio al mismo tiempo.

Ejemplo 14.2 Un objeto que oscila

Un objeto oscila con frecuencia angular $\omega = 8{,}0$ rad/s. En $t = 0$, el objeto se encuentra en $x = 4$ cm con una velocidad inicial $v_x = -25$ cm/s. (*a*) Determinar la amplitud y la constante de fase para este movimiento. (*b*) Escribir x en función del tiempo.

PLANTEAMIENTO La posición y velocidad iniciales nos proporcionan dos ecuaciones a partir de las cuales se determinan la amplitud A y la constante de fase δ.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La posición inicial y la velocidad están relacionadas con la amplitud y con la constante de fase. La posición viene dada por la ecuación 14.4 y la velocidad se calcula derivando con respecto del tiempo:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \quad \text{y}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

2. Cuando $t = 0$, la posición y la velocidad valen:

$$x_0 = A\cos\delta \quad \text{y} \quad v_{0x} = -\omega A \operatorname{sen}\delta$$

3. Dividir estas ecuaciones para eliminar A:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\delta}{A\cos\delta} = -\omega \operatorname{tg}\delta$$

4. Reemplazando por los valores numéricos, se obtiene δ:

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{v_{0x}}{\omega x_0} \quad \text{por lo tanto,}$$

$$\delta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) = \operatorname{arctg}\left[-\frac{-25\text{ cm/s}}{(8{,}0\text{ rad/s})(4{,}0\text{ cm})}\right]$$

$$= 0{,}663\text{ rad} = \boxed{0{,}66\text{ rad}}$$

† En muchos instrumentos musicales existe una ligera dependencia de la frecuencia con la amplitud. El tono de la lengüeta de un oboe, por ejemplo, depende de la fuerza con que se sople el instrumento porque la vibración no es exactamente armónica simple. Sin embargo, este efecto puede ser corregido por un músico experto.

5. La amplitud puede determinarse utilizando la ecuación para x_0 o v_0. Aquí utilizamos la de x_0:

$$A = \frac{x_0}{\cos\delta} = \frac{4{,}0\text{ cm}}{\cos 0{,}663} = \boxed{5{,}1\text{ cm}}$$

(b) Comparando con la ecuación 14.4, se obtiene x:

$$x = \boxed{(5{,}1\text{ cm})\cos[(8{,}0\text{ s}^{-1})t + 0{,}66]}$$

COMPROBACIÓN Para ver si el resultado del apartado (b) es razonable, tomamos $t = 0$ y vemos que entonces $x = 4$ cm, lo que coincide con el dato del enunciado.

Cuando la constante de fase es $\delta = 0$, las ecuaciones 14.4, 14.5 y 14.6 se convierten en

$$x = A\cos\omega t \qquad 14.13a$$

$$v_x = -\omega A\,\text{sen}\,\omega t \qquad 14.13b$$

y

$$a_x = -\omega^2 A\cos\omega t \qquad 14.13c$$

Estas funciones vienen representadas en la figura 14.5.

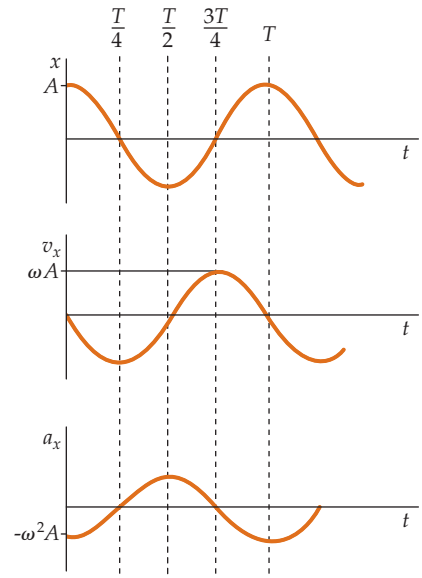


FIGURA 14.5 Gráficos de x, v_x y a_x en función del tiempo t para $\delta = 0$. En $t = 0$, el desplazamiento es máximo, la velocidad es cero y la aceleración es negativa e igual a $-\omega^2 A$. La velocidad se hace negativa cuando el objeto se mueve hacia atrás buscando su posición de equilibrio. Después de un cuarto de periodo ($t = T/4$), el objeto está en equilibrio, $x = 0$, $a_x = 0$ y la velocidad alcanza su valor máximo $-\omega A$. En $t = T/2$, el desplazamiento es $-A$, la velocidad es de nuevo cero y la aceleración $-\omega^2 A$. En $t = 3T/4$, $x = 0$, $a_x = 0$ y $v_x = +\omega A$.

Ejemplo 14.3 Objeto ligado a un muelle — *Inténtelo usted mismo*

Un objeto de 2 kg se sujeta a un muelle como indica la figura 14.1. La constante de fuerza del muelle es $k = 196$ N/m. El objeto se mantiene a una distancia de 5 cm de la posición de equilibrio y se deja en libertad en el tiempo $t = 0$. (a) Determinar la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el periodo T. (b) Expresar x en función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Para resolver el apartado (a) utilice las ecuaciones 14.8 y 14.12. Para el apartado (b) utilice la ecuación 14.4.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(a) 1. Calcular ω utilizando $\omega = \sqrt{k/m}$.	$\omega =$ 9,90 rad/s
2. Utilizar este resultado para determinar f y T.	$f =$ 1,58 Hz $\quad T =$ 0,635 s
3. Determinar A y δ a partir de las condiciones iniciales.	$A =$ 5,00 cm $\quad \delta =$ 0,00
(b) Expresar $x(t)$ utilizando los resultados de A, ω y δ.	$x =$ $(5{,}00\text{ cm})\cos[(9{,}90\text{ s}^{-1})t]$

COMPROBACIÓN Como el bloque partió del reposo, la velocidad deber ser cero cuando $t = 0$. Para verificar esto, tomamos la derivada del resultado del apartado (b) y resolvemos para $t = 0$. Efectivamente, hacemos los cálculos y nos da que la velocidad es cero.

Ejemplo 14.4 Velocidad y aceleración de un objeto en un muelle

Considerar un objeto ligado a un muelle cuya posición viene dada por la ecuación $x = (5\text{ cm})\cos(9{,}90\text{ s}^{-1}\,t)$. (*a*) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (*b*) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta velocidad máxima? (*c*) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto? (*d*) ¿En qué instante se alcanza por vez primera esta aceleración máxima?

PLANTEAMIENTO Como el objeto se deja libre desde el reposo, $\delta = 0$, y la posición, la velocidad y la aceleración vienen dadas por las ecuaciones 14.13*a*, *b* y *c*.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La posición se obtiene de la ecuación 14.13*a*, con $\delta = 0$. La velocidad se obtiene derivando con respecto del tiempo:

$$x = A\cos\omega t$$

$$\text{por lo tanto,}\quad v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}\,\omega t$$

2. La velocidad máxima tiene lugar cuando $|\text{sen}\,\omega t| = 1$:

$$v = \omega A|\text{sen}\,\omega t|$$

$$\text{y entonces,}\quad v_{\text{máx}} = \omega A = (9{,}90\text{ rad/s})(5{,}00\text{ cm}) = \boxed{49{,}5\text{ cm/s}}$$

(*b*) 1. $|\text{sen}\,\omega t| = 1$ se da por vez primera cuando $\omega t = \pi/2$:

$$|\text{sen}\,\omega t| = 1 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$$

2. Despejar t cuando $\omega t = \pi/2$:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(9{,}90\text{ s}^{-1})} = \boxed{0{,}159\text{ s}}$$

(*c*) 1. Determinar la aceleración derivando la velocidad obtenida en el paso 1 del apartado (*a*):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A\cos\omega t$$

2. La aceleración máxima corresponde a $\cos\omega t = -1$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (9{,}90\text{ rad/s})^2(5{,}00\text{ cm}) = \boxed{490\text{ cm/s}^2 \approx \tfrac{1}{2}g}$$

(*d*) La aceleración máxima tiene lugar cuando $|\cos\omega t| = 1$, lo que ocurre cuando $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$:

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{9{,}90\text{ s}^{-1}} = \boxed{0{,}317\text{ s}}$$

COMPROBACIÓN Esperamos que $|a_x|$ sea máxima cuando, después de $t = 0$, x alcance su valor máximo y esperamos que x sea mínima después de medio ciclo. Es decir, esperamos que $|a_x|$ sea máxima cuando $t = \frac{1}{2}T$, donde T es el periodo. El periodo y la frecuencia angular están relacionados a partir de la ecuación 14.11. Entonces, introduciendo ω en función de T se tiene $t = \pi/(2\pi/T) = \frac{1}{2}T$, como era de esperar.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MOVIMIENTO CIRCULAR

Existe una relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular con velocidad constante. Consideremos una partícula que se mueve con una velocidad cuyo módulo v es constante sobre una circunferencia de radio A, como se indica en la figura 14.6*a*. El desplazamiento angular de la partícula respecto al eje x viene dado por

$$\theta = \omega t + \delta \qquad 14.14$$

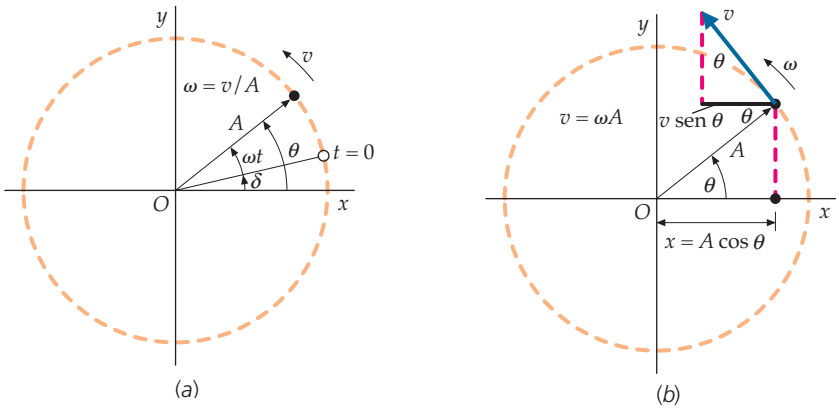


FIGURA 14.6 Una partícula se mueve en una trayectoria circular con velocidad constante. (*a*) La componente x de la posición describe un movimiento armónico simple, y (*b*) la componente x de la velocidad describe la velocidad de un movimiento armónico simple.

donde δ es el desplazamiento angular en el instante $t = 0$ y $\omega = v/A$ es la velocidad angular de la partícula. La componente x de la posición de la partícula viene dada por

$$x = A\cos\theta = A\cos(\omega t + \delta)$$

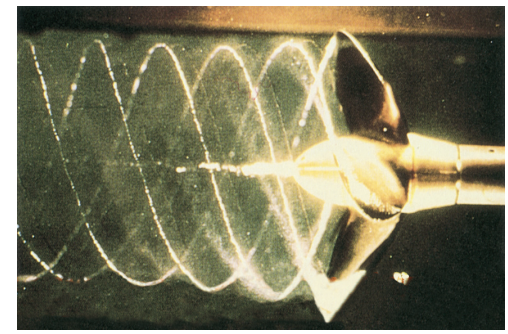
que coincide con la ecuación 14.4 del movimiento armónico simple.

Cuando una partícula se mueve con velocidad constante en una circunferencia, su proyección sobre el diámetro de la circunferencia se mueve con un movimiento armónico simple (figura 14.6).

La velocidad de una partícula que se mueve sobre una circunferencia es $r\omega$, donde r es el radio. En el caso de la partícula de la figura 14.6*b*, $r = A$, por lo que su velocidad es $A\omega$. La proyección del vector velocidad sobre el eje x da $v_x = -v\ \text{sen}\ \theta$. Sustituyendo los valores de v y de θ, se obtiene la ecuación

$$v_x = -v\,\text{sen}\,\theta = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \delta)$$

que coincide con la ecuación 14.5 del movimiento armónico simple. La relación entre el movimiento circular y el movimiento armónico simple se puede ver en la imagen del rastro de burbujas que genera una hélice bajo el agua.



Las burbujas de la espuma que genera una hélice en movimiento por el agua producen un patrón sinusoidal. *(Institute for Marine Dynamics.)*

14.2 ENERGÍA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Cuando un objeto oscila con movimiento armónico simple, las energías cinética y potencial del sistema varían con el tiempo. Su suma, la energía total $E = K + U$, es constante. Consideremos un objeto a una distancia x del equilibrio, sobre el que actúa una fuerza de restitución $-kx$. La energía potencial del sistema es

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

Esta es la ecuación 7.4. Para un movimiento armónico simple, $x = A\cos(\omega t + \delta)$, y sustituyendo en la ecuación anterior, queda

$$U = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) \qquad 14.15$$

ENERGÍA POTENCIAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía cinética del sistema es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2$$

donde m es la masa del objeto y v su velocidad. En el movimiento armónico simple, $v_x = -A\omega\ \text{sen}\ (\omega t + \delta)$. Sustituyendo, resulta

$$K = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\,\text{sen}^2(\omega t + \delta)$$

Teniendo en cuenta que $\omega^2 = k/m$, resulta

$$K = \tfrac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t + \delta) \qquad 14.16$$

ENERGÍA CINÉTICA DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

La energía mecánica total es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \delta) + \tfrac{1}{2}k\,A^2\,\text{sen}^2(\omega t + \delta)$$
$$= \tfrac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t + \delta) + \text{sen}^2(\omega t + \delta)]$$

Como $\text{sen}^2(\omega t + \delta) + \cos^2(\omega t + \delta) = 1$

$$E = U + K = \tfrac{1}{2}kA^2 \qquad 14.17$$

ENERGÍA TOTAL DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Esta ecuación pone en evidencia una importante propiedad general del movimiento armónico simple:

La energía total del movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud.

Para un objeto en su desplazamiento máximo, la energía total es toda energía potencial. Cuando el objeto se mueve hacia su posición de equilibrio, la energía cinética del sistema crece y la energía potencial disminuye. Cuando atraviesa la posición de equilibrio, la velocidad del objeto es máxima, la energía potencial del sistema es cero y la energía total es igual a la energía cinética.

Cuando el objeto sobrepasa el punto de equilibrio, su energía cinética comienza a decrecer y la energía potencial del sistema crece hasta que el objeto, de nuevo, se detiene momentáneamente en su desplazamiento máximo (ahora en el sentido opuesto). En todo momento, la suma de las energías potencial y cinética es constante. La figura 14.7*b* y *c* muestra los gráficos de U y K en función del tiempo. Ambas curvas tienen la misma forma, excepto que cuando una es cero, la otra pasa por un máximo. Sus valores medios en uno o más ciclos son iguales y como $U + K = E$, estos valores medios vienen dados por

$$U_m = K_m = \tfrac{1}{2}E \qquad 14.18$$

En la figura 14.8, se ha representado la energía potencial U en función de x. La energía total E_{total} es constante y está representada por una línea horizontal. Esta línea corta a la curva de la energía potencial en $x = A$ y $x = -A$. Éstos son los puntos en que los objetos, en su oscilación, cambian el sentido de la velocidad y vuelven hacia la posición de equilibrio. Dado que $U \leq E$, el movimiento está restringido a $-A \leq x \leq +A$.

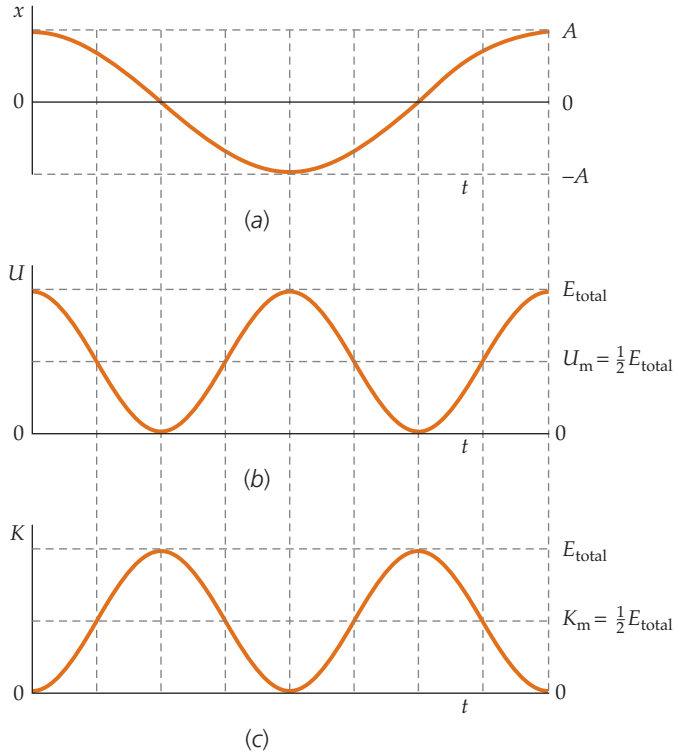


FIGURA 14.7 Gráficos de x, U y K en función de t.

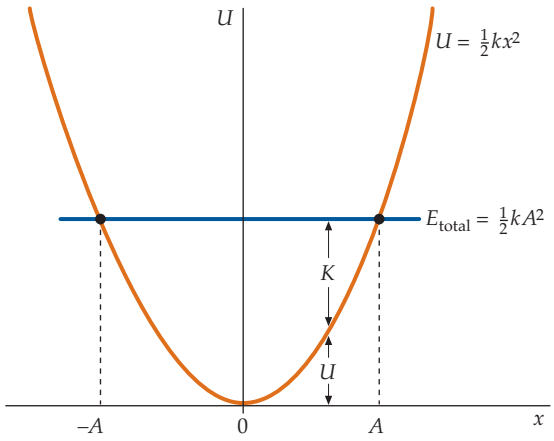


FIGURA 14.8 Función de la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ en el caso de un objeto de masa m unido a un muelle de masa despreciable de constante k. La línea horizontal representa la energía mecánica total E_{total} para una amplitud A. La energía cinética K está representada por la distancia vertical $K = E_{total} - U$. Como $E_{total} \geq U$, el movimiento está restringido a $-A \leq x \leq +A$.

Ejemplo 14.5 Velocidad y energía de un objeto que oscila

Un objeto de 3 kg ligado a un muelle oscila con una amplitud de 4 cm y un periodo de 2 s. (*a*) ¿Cuál es la energía total? (*b*) ¿Cuál es el módulo máximo de la velocidad del objeto? (*c*) ¿En qué posición x_1 el módulo de velocidad es igual a la mitad de su valor máximo?

PLANTEAMIENTO (*a*) La energía total puede determinarse a partir de la amplitud del movimiento y de la constante de fuerza del muelle; esta constante puede calcularse a partir de la masa del objeto y el periodo. (*b*) La velocidad máxima tiene lugar cuando la energía cinética es igual a la energía total. (*c*) Mediante el principio de conservación de la energía podemos relacionar la posición con el módulo de la velocidad.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Expresar la energía total E en función de la constante de fuerza k y de la amplitud A:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2$$

2. La constante de fuerza se relaciona con el periodo y la masa:

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

3. Sustituir los valores proporcionados para determinar la energía total E:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A^2 = \frac{1}{2}(3{,}0\text{ kg})\left(\frac{2\pi}{2{,}0\text{ s}}\right)^2(0{,}040\text{ m})^2$$

$$= 2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J} = \boxed{2{,}4 \times 10^{-2}\text{ J}}$$

(*b*) Para determinar $v_{máx}$, igualar la energía cinética con la energía total y despejar v:

$$\tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 = E$$

$$\text{con lo cual } v_{máx} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(2{,}37 \times 10^{-2}\text{ J})}{3{,}0\text{ kg}}} = 0{,}126\text{ m/s} = \boxed{0{,}13\text{ m/s}}$$

(*c*) 1. La conservación de la energía relaciona la posición x con la velocidad v:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

2. Sustituir $v = \frac{1}{2}v_{máx}$ y despejar x_1. Es conveniente determinar x en función de E, y a partir de $E = \frac{1}{2}kA^2$ deducir una expresión de x en función de A:

$$E = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}v_{máx})^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mv_{máx}^2) + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{4}E + \tfrac{1}{2}kx_1^2$$

$$\text{por lo tanto, } \tfrac{1}{2}kx_1^2 = E - \tfrac{1}{4}E = \tfrac{3}{4}E$$

$$\text{y } x_1 = \pm\sqrt{\frac{3E}{2k}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2k}\left(\frac{1}{2}kA^2\right)} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}A$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(4{,}0\text{ cm}) = \boxed{\pm 3{,}5\text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN Como era de esperar, el resultado del apartado 2(*c*) tiene dos posibles soluciones, una correspondiente al muelle alargado y otra al muelle comprimido. Además, el valor positivo es inferior a 4 cm (la amplitud).

PROBLEMA PRÁCTICO 14.2 Calcular ω para este ejemplo y determinar $v_{máx}$ a partir de la expresión $v_{máx} = \omega A$.

PROBLEMA PRÁCTICO 14.3 Un objeto de masa 2 kg está sujeto a un muelle de constante de fuerza 40 N/m. El objeto se mueve a 25 cm/s cuando pasa por la posición de equilibrio. (*a*) ¿Cuál es la energía total del objeto? (*b*) ¿Cuál es la amplitud del movimiento?

* MOVIMIENTO GENERAL PRÓXIMO AL EQUILIBRIO

En general, el movimiento armónico simple se produce cuando una partícula se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio estático. La figura 14.9 es un gráfico de la energía potencial U en función de x para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable y otra de equilibrio inestable. Como se vio en el capítulo 7, el máximo de energía potencial en x_2 de la figura 14.9 corresponde al equilibrio inestable, mientras que el mínimo en x_1 corresponde al equilibrio estable. Cualquier curva continua que presente un mínimo como el de la figura 14.9 puede aproximarse cerca del mínimo a una parábola. La curva de trazos de la figura es

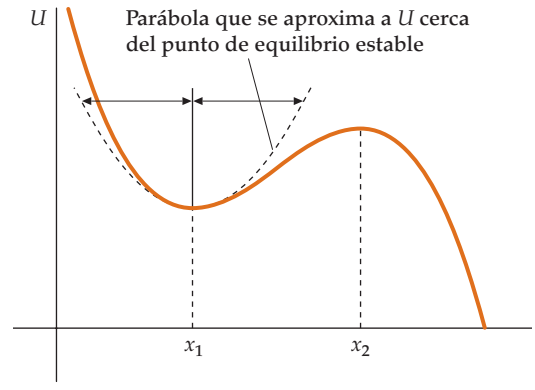


FIGURA 14.9 Gráfico de U en función de x para una fuerza que tiene una posición de equilibrio estable (x_1) y otra de equilibrio inestable (x_2).

una parábola que encaja, aproximadamente, con la curva de energía potencial cerca del punto de equilibrio estable. La ecuación general de una parábola que tiene un mínimo en el punto x_1 puede expresarse en la forma

$$U = A + B(x - x_1)^2 \qquad 14.19$$

donde A y B son constantes. La constante A es el valor de U en la posición de equilibrio $x = x_1$. La fuerza está relacionada con la curva de la energía potencial por $F_x = -dU/dx$. Por lo tanto,

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -2B(x - x_1)$$

Si hacemos $2B = k$, esta ecuación se reduce a

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -k(x - x_1) \qquad 14.20$$

De acuerdo con la ecuación 14.20, la fuerza es proporcional al desplazamiento respecto al equilibrio y está dirigida en sentido opuesto, de modo que el movimiento es armónico simple. En la figura 14.9, se representa la función energía potencial del sistema $U(x)$, que tiene una posición de equilibrio estable en $x = x_1$. La figura 14.10 muestra, en cambio, una función energía potencial que tiene una posición de equilibrio estable en $x = 0$. El sistema que responde a una función como la que se representa en esta figura es una partícula pequeña de masa m que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

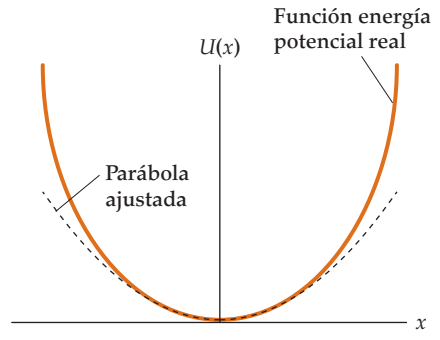


FIGURA 14.10 Dibujo de U respecto a x para una partícula pequeña que oscila en el fondo de un cuenco con forma esférica.

14.3 ALGUNOS SISTEMAS OSCILANTES

OBJETO COLGADO DE UN MUELLE VERTICAL

Cuando un objeto cuelga de un muelle vertical, además de la fuerza del muelle hay una fuerza vertical adicional hacia abajo que es el peso mg (figura 14.11). Si se elige la dirección hacia abajo como el sentido positivo del eje y, la fuerza del muelle sobre el objeto es $-ky$, donde y es el alargamiento del muelle. La fuerza neta sobre el objeto es

$$\Sigma F_y = -ky + mg \qquad 14.21$$

Esta ecuación puede simplificarse definiendo una nueva variable $y' = y - y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es la longitud que se alarga el muelle cuando el objeto está en equilibrio. Sustituyendo y por $y' + y_0$, da

$$\Sigma F_y = -k(y' + y_0) + mg$$

Pero $ky_0 = mg$, por lo que

$$\Sigma F_y = -ky' \qquad 14.22$$

La segunda ley de Newton ($\Sigma F_y = ma_y$) nos lleva a

$$-ky' = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Sin embargo, $y = y' + y_0$, donde $y_0 = mg/k$ es constante. Así, $d^2y/dt^2 = d^2y'/dt^2$; por lo tanto,

$$-ky' = m\frac{d^2y'}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{k}{m}y'$$

que es la ecuación 14.2 con y' reemplazando a x. La solución de esta ecuación nos es familiar:

$$y' = A\cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$.

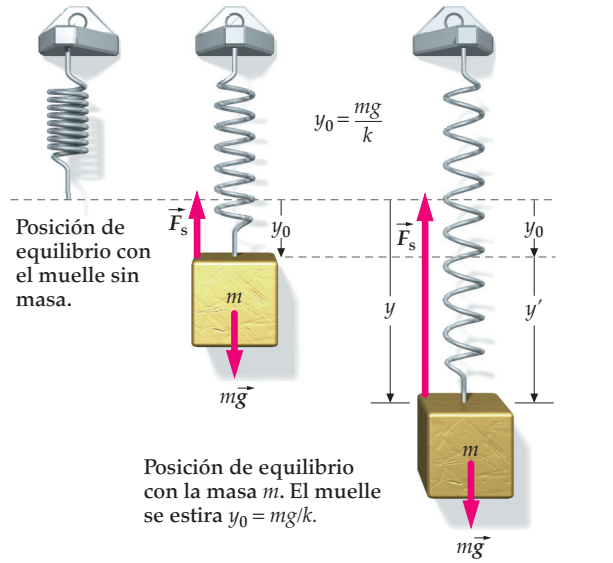


FIGURA 14.11 El problema de una masa colgada de un muelle vertical se simplifica si el desplazamiento (y') se mide desde la posición de equilibrio del muelle conectado a la masa.

Así pues, el efecto de la fuerza gravitatoria mg consiste meramente en desplazar la posición de equilibrio desde $y = 0$ hasta $y' = 0$. Cuando el objeto se pasa de su posición de equilibrio una cantidad y', la fuerza neta es $-ky'$. El objeto oscila respecto a la posición de equilibrio con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$, la misma frecuencia con la que se movería un objeto atado a un muelle horizontal.

Si una fuerza realiza un trabajo que es independiente del camino, se dice que la fuerza es conservativa. La fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por un muelle son conservativas, y la suma de estas fuerzas (ecuaciones 14.21 y 14.22) también lo es. La energía potencial U asociada con la suma de estas fuerzas es el trabajo realizado, con signo negativo, más una constante de integración arbitraria. Es decir,

$$U = -\int -ky'dy' = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0$$

donde la constante de integración U_0 es el valor de U en la posición de equilibrio ($y' = 0$). Por lo tanto,

$$U = \tfrac{1}{2}ky'^2 + U_0 \qquad 14.23$$

Ejemplo 14.6 Muelles de papel — *Póngalo en su contexto*

Confeccionamos adornos para una fiesta con muelles de papel. Hacemos un muelle de papel, y cuando colgamos de él una hoja de papel de color, lo alarga 8 cm. ¿Cuántas hojas de papel de color hay que colgar del muelle para que oscile con la frecuencia de 1 ciclo/s?

Muelle hecho con papel. *(Rhoda Peacher.)*

PLANTEAMIENTO La frecuencia depende del cociente entre la constante del muelle y la masa que cuelga de él (ecuación 14.12), pero no disponemos de ninguno de estos datos. Sin embargo, a partir de la información disponible se puede obtener el valor de este cociente usando la ley de Hooke (ecuación 14.1).

SOLUCIÓN

1. Escribir la frecuencia en función de la constante k y de la masa M (ecuación 14.12), donde M es la masa de N hojas de papel. Tenemos que determinar N:
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

2. Cuando se cuelga una hoja de papel de masa m, el muelle se alarga una distancia $y_0 = 8$ cm:
$$ky_0 = mg \quad \text{y entonces} \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{y_0}$$

3. La masa de N hojas de papel se calcula multiplicando por N la masa de una hoja m:
$$M = Nm$$

4. Se despeja k/M a partir de los resultados de los pasos 2 y 3:
$$\frac{k}{M} = \frac{k}{Nm} = \frac{1}{N}\frac{g}{y_0}$$

5. Se sustituye el resultado del paso 4 en el resultado del paso 1 y se despeja N:
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{N}\frac{g}{y_0}}$$
$$\text{por lo tanto,} \quad N = \frac{g}{(2\pi f)^2 y_0} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{4\pi^2(1{,}0\ \text{Hz})^2(0{,}080\ \text{m})} = 3{,}1$$

Hay que colgar tres hojas de papel de color.

COMPROBACIÓN Parece razonable que con tres o cuatro hojas de papel se pueda construir el muelle de papel.

OBSERVACIÓN Obsérvese que en este ejemplo no hemos usado el valor de m o de k, ya que la frecuencia depende del cociente k/m que resulta ser g/y_0. Además, se ha despreciado la masa del propio muelle, cosa que no es del todo correcta, pues bien podría ser del orden de la masa de tres o cuatro hojas de papel. El resultado del paso 5 es aproximado.

PROBLEMA PRÁCTICO 14.4 ¿Cuánto se alarga el muelle de papel cuando un adorno hecho con tres hojas de papel cuelga del muelle en equilibrio?

Ejemplo 14.7 Una cuenta de collar sobre un bloque

Un bloque descansa sobre un muelle y oscila verticalmente con una frecuencia de 4 Hz y una amplitud de 7 cm. Una bolita de collar se sitúa sobre el bloque oscilante justo cuando éste alcanza su punto más bajo. Suponiendo que la masa de la bolita es tan pequeña que no afecta al movimiento del bloque, ¿a qué distancia de la posición de equilibrio del bloque la bolita pierde contacto con éste?

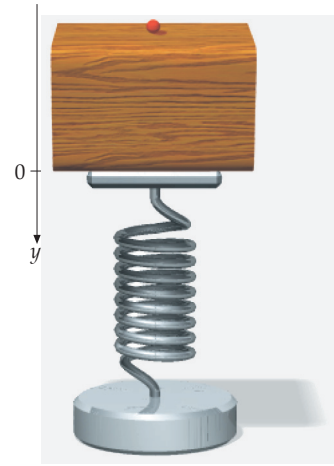


FIGURA 14.12

PLANTEAMIENTO Las fuerzas que actúan sobre la bola son su peso mg hacia abajo y la fuerza normal ejercida por el bloque hacia arriba. El módulo de esta fuerza normal cambia con las variaciones de la aceleración. A medida que el bloque se mueve hacia arriba, *por encima de la posición de equilibrio*, su aceleración y la de la bolita van *hacia abajo* y aumentan en módulo. Cuando la aceleración alcanza el valor g, la fuerza normal es cero. Si la aceleración hacia abajo a la que está sometido el bloque supera hacia abajo este valor, la bolita pierde contacto con el bloque.

SOLUCIÓN

1. Dibujar un esquema del sistema (figura 14.12). Incluir el eje de coordenadas y con el origen situado en la posición de equilibrio y con la dirección positiva dirigida hacia abajo:
2. Buscar el valor de y para el cual la aceleración es g dirigida hacia abajo. Usar la ecuación 14.7: $a_y = -\omega^2 y$ $g = -\omega^2 y$
3. Sustituir $2\pi f$ por ω y despejar y: $g = -(2\pi f)^2 y$

$$\text{por lo tanto,}\quad y = -\frac{g}{(2\pi f)^2} = -\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{[2\pi(4{,}00\ \text{Hz})]^2} = -0{,}0155\ \text{m} = \boxed{-1{,}55\ \text{cm}}$$

COMPROBACIÓN La bola se separa del bloque cuando y es negativa, lo cual se produce cuando la bolita está por encima de la posición de equilibrio, como era de esperar.

EL PÉNDULO SIMPLE

Un péndulo simple consta de una cuerda de longitud L y una lenteja de masa m. Cuando la lenteja se deja en libertad desde un ángulo inicial ϕ_0 con la vertical, oscila a un lado y a otro con un periodo T. Las unidades de longitud, masa y g son m, kg y m/s^2, respectivamente. Si dividimos L por g, los metros se anulan y queda segundos al cuadrado, lo que sugiere la forma $\sqrt{L/g}$. Si la fórmula del periodo contuviera la masa, la unidad kg debería cancelarse por alguna otra magnitud. Sin embargo, ninguna combinación de L y g puede anular las unidades de masa. Así pues, el periodo no puede depender de la masa de la lenteja. Como el ángulo ϕ_0 es adimensional, no podemos saber por análisis dimensional si es o no un factor del periodo. Más adelante veremos que para valores pequeños de ϕ_0, el periodo viene expresado por $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 14.1

Parece lógico suponer que el periodo de un péndulo simple depende de la masa m de la lenteja, la longitud L del péndulo, la aceleración debida a la gravedad g, y el ángulo inicial ϕ_0. Determinar una combinación simple de estas magnitudes que ofrezca las dimensiones correctas del periodo.

El péndulo de Foucault de la Universidad de Louisville. En 1851, Leon Foucault suspendió del techo del Panteón de París un péndulo de 67 m. Debido a la rotación de la Tierra, el Panteón rota en torno al péndulo (si el Panteón estuviera en el polo Norte, daría una vuelta completa una vez cada 24 h). La observación del edificio rotando en torno al plano del péndulo causó asombro e ilusionó al mundo. *(Gentileza de John Kielkopf/University of Louisville.)*

Las fuerzas que actúan sobre la lenteja son su peso $m\vec{g}$ y la tensión $\vec{T}$ de la cuerda (figura 14.13). Cuando la cuerda forma un ángulo ϕ con la vertical, el peso tiene las componentes mg cos ϕ a lo largo de la cuerda y mg sen ϕ tangencial al arco circular en el sentido de ϕ decreciente. Para la componente tangencial, la segunda ley de Newton ($\Sigma F_t = ma_t$) nos da

$$-mg \operatorname{sen}\phi = m\frac{d^2s}{dt^2} \qquad 14.24$$

donde la longitud del arco s está relacionada con el ángulo ϕ mediante $s = L\phi$. Derivando dos veces con respecto del tiempo ambos lados de la expresión $s = L\phi$, se obtiene

$$\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

Sustituyendo en la ecuación 14.24 $Ld^2\phi/dt^2$ por d^2s/dt^2, se obtiene

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\phi \qquad 14.25$$

Obsérvese que la masa m no aparece en la ecuación 14.25, es decir, el movimiento de un péndulo no depende de su masa. Para valores pequeños de ϕ, sen $\phi \approx \phi$, y

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\phi \qquad \phi \ll 1 \qquad 14.26$$

La ecuación 14.26 es de la misma forma que la ecuación 14.2 para un objeto ligado a un muelle. El movimiento de un péndulo es, por lo tanto, aproximadamente armónico simple para pequeños desplazamientos angulares.

La ecuación 14.26 también puede escribirse en la forma

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi, \qquad \text{donde } \omega^2 = \frac{g}{L} \qquad 14.27$$

El periodo del movimiento es entonces

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \text{(para pequeñas oscilaciones)} \qquad 14.28$$

PERIODO DE UN PÉNDULO SIMPLE

La solución de la ecuación 14.27 es

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

donde ϕ_0 es el desplazamiento angular máximo.

De acuerdo con la ecuación 14.28, cuanto mayor es la longitud del péndulo, mayor es el periodo, lo cual está de acuerdo con lo observado experimentalmente. Obsérvese también que la frecuencia y el periodo son independientes de la amplitud de la oscilación (para amplitudes pequeñas), siendo esta una característica general del movimiento armónico simple.

PROBLEMA PRÁCTICO 14.5
Determinar el periodo de un péndulo simple de 1 m de longitud que describe oscilaciones pequeñas.

La aceleración debida a la gravedad puede medirse fácilmente utilizando un péndulo simple que describe pequeñas oscilaciones. Únicamente es necesario medir la longitud L y el periodo T. Mediante la ecuación 14.28 se calcula g. (Para determinar T, habitualmente medimos el tiempo necesario para n oscilaciones y dividimos por n, lo cual minimiza el error de la medida.)

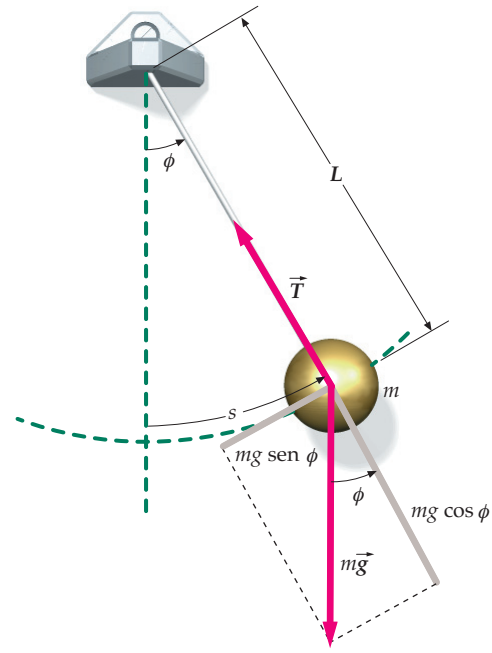


FIGURA 14.13 Fuerzas sobre la lenteja de un péndulo.

! ω es la frecuencia angular del movimiento del péndulo, no la velocidad angular.

Ejemplo 14.8 Cronometrando la carrera — *Conceptual*

En una práctica de laboratorio de física general sobre cinética en una dimensión, Liz y Bob se encargan de medir el tiempo que tarda una viga en recorrer varias distancias si se deja caer por un raíl de aire de 2 m de longitud (un raíl de aire es un raíl virtual que no produce rozamiento). Para ello, inclinan el raíl colocando un bloc de notas de 2 cm de grosor debajo de las patas de uno de los dos extremos. A continuación, sueltan la viga desde la mitad del raíl y observan que tarda 4,8 s en llegar al final del raíl. Repiten el experimento, pero ahora lo sueltan desde el extremo más alto y ven que tarda el mismo tiempo (4,8 s) en llegar al final del raíl. ¿Podría dar una explicación a este hecho?

PLANTEAMIENTO Si el raíl fuese perfectamente rectilíneo, la aceleración sería la misma en todos los puntos del raíl y el tiempo que tardaría la viga en llegar al final si se suelta en el otro extremo, sería mayor que el que tardaría si se suelta en la mitad del raíl. Sin embargo, si el raíl está ligeramente curvado, la aceleración no es la misma en todos los puntos del raíl, sino que depende del valor de la pendiente en cada punto.

SOLUCIÓN

1. Supongamos que el raíl está ligeramente curvado de tal modo que forma un arco circular cuyo centro de curvatura está justo encima del extremo más bajo del carril:

   En este caso, la viga se movería como una lenteja de un péndulo simple de longitud $L = R$, donde R es el radio de curvatura del raíl.

2. El periodo T del un péndulo es independiente de la amplitud para pequeñas oscilaciones:

   Los tiempos medidos por Liz y Bob serían iguales a una cuarta parte del periodo T del péndulo dado por la ecuación 14.28. Como el periodo del péndulo es independiente de la amplitud, los tiempos medidos serían iguales.

COMPROBACIÓN ¿La amplitud del péndulo es realmente pequeña cuando la viga parte del punto más alto del raíl? La respuesta sería afirmativa si R fuese mucho mayor que la longitud del raíl (2 m). Podemos calcular L a partir de la ecuación 14.28. Sustituyendo $T = 4{,}8$ s se tiene $R = L = 92$ m, lo que confirma la hipótesis de pequeñas amplitudes.

Este reloj se mantiene en hora gracias a un oscilador de torsión. *(Gentileza de Bill Master/Alibaba. http://yuning.en.alibaba.com.)*

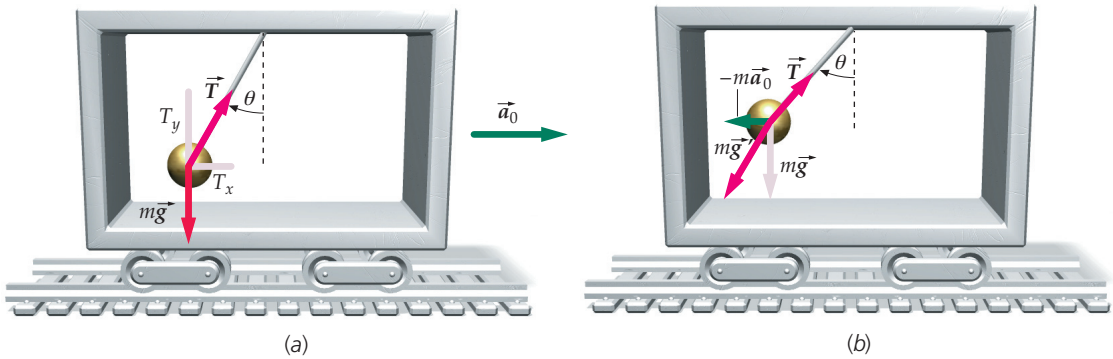
El péndulo en un sistema de referencia acelerado La figura 14.14*a* muestra un péndulo simple suspendido del techo de un furgón de ferrocarril que se mueve con aceleración $\vec{a}_0$ con respecto al suelo, hacia la derecha, siendo $\vec{a}$ la aceleración de la lenteja relativa al suelo. Aplicando la segunda ley de Newton a la lenteja, se obtiene

$$\Sigma\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \qquad 14.29$$

Si la lenteja permanece en reposo con respecto del furgón, $\vec{a} = \vec{a}_0$, entonces

$$\Sigma F_x = T \operatorname{sen}\theta_0 = ma_0$$
$$\Sigma F_y = T\cos\theta_0 - mg = 0$$

donde θ_0 es el ángulo de equilibrio, que según esto viene dado por $\operatorname{tg}\theta_0 = a_0/g$. Si la lenteja se mueve con respecto al furgón, entonces $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$, donde $\vec{a}'$ es la



(*a*) (*b*)

FIGURA 14.14 (*a*) Péndulo simple en equilibrio aparente en un furgón con movimiento acelerado. Las fuerzas que se muestran corresponden a un sistema estacionario exterior. (*b*) Fuerzas que actúan sobre la lenteja observadas en el sistema acelerado. Sumar la pseudofuerza $-m\vec{a}_0$ es equivalente a reemplazar $\vec{g}$ por $\vec{g}'$.

aceleración de la lenteja relativa al furgón. Sustituyendo $\vec{a}$ en la ecuación 14.29, se obtiene

$$\Sigma\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} = m(\vec{a}' + \vec{a}_0)$$

Restando $m\vec{a}_0$ en los dos términos de la expresión anterior, se llega a

$$\vec{T} + m\vec{g}' = m\vec{a}'$$

donde $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0$. Reemplazando $\vec{g}$ por $\vec{g}'$ y $\vec{a}$ por $\vec{a}'$ en la ecuación 14.29, se obtiene el movimiento de la lenteja relativa al furgón. En la figura 14.14*b*, se muestran los vectores $\vec{T}$ y $m\vec{g}'$. Si la cuerda se rompe y, por lo tanto, $\vec{T} = 0$, la ecuación anterior nos conduce a $\vec{a}' = \vec{g}'$, lo cual significa que $\vec{g}'$ es la aceleración de caída libre en el sistema de referencia del furgón. Si se desplaza ligeramente la lenteja de su posición de equilibrio, oscilará con un periodo T dado por la ecuación 14.28, donde g ha sido reemplazada por g'.

PROBLEMA PRÁCTICO 14.6

Un péndulo simple de longitud 1 m se encuentra en un furgón que se mueve horizontalmente con una aceleración $a_0 = 3\ \text{m/s}^2$. Determinar g' y el periodo T.

Oscilaciones de gran amplitud Cuando la amplitud de un péndulo se hace grande, su movimiento continúa siendo periódico, pero deja de ser armónico simple. Para determinar el periodo debe tenerse en cuenta una ligera dependencia con la amplitud. Para una amplitud angular cualquiera ϕ_0, se demuestra que el periodo viene dado por la expresión

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\text{sen}^4\frac{1}{2}\phi_0 + \cdots\right] \qquad 14.30$$

PERIODO PARA OSCILACIONES DE GRAN AMPLITUD

donde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ es el periodo correspondiente a amplitudes muy pequeñas. La figura 14.15 muestra T/T_0 en función de la amplitud ϕ_0.

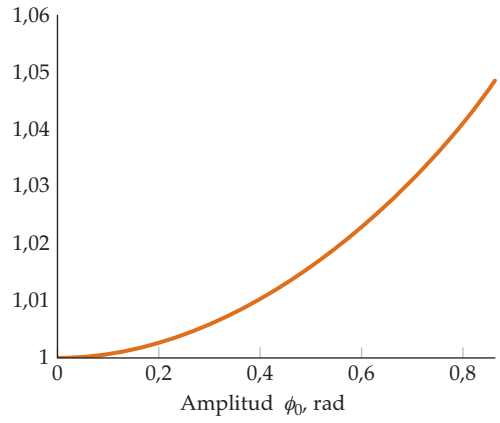


FIGURA 14.15 Obsérvese que los valores de las ordenadas van de 1 a 1,06. En un rango de ϕ entre 0 y 0,8 rad (46°), el periodo cambia en un 5%, aproximadamente.

Ejemplo 14.9 Un reloj de péndulo *Inténtelo usted mismo*

Un reloj de péndulo simple se calibra para que funcione con precisión con una amplitud angular de $\phi_0 = 10°$. Cuando la amplitud ha disminuido hasta ser muy pequeña, ¿el reloj se adelantará o se atrasará? ¿Cuánto se adelantará o se atrasará en un día si la amplitud sigue siendo muy pequeña?

PLANTEAMIENTO Para calcular el periodo cuando la amplitud angular es de 10°, consideramos sólo el primer término corrrector de la ecuación 14.30. Es decir,

$$T \approx T_0\left[1 + \frac{1}{2^2}\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\phi_0\right]$$

Esta ecuación nos dará una buena precisión, pues 10° es realmente un ángulo pequeño. La amplitud del péndulo decrece lentamente debido a los efectos del rozamiento con el aire.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
1. Utilizar la ecuación 14.30 para determinar si T_0 es mayor o menor que T.	T disminuye cuando ϕ_0 disminuye de modo que el reloj se adelanta.
2. Utilizar la ecuación 14.30 para determinar la variación relativa en porcentaje, $[(T - T_0)/T_0] \times 100\%$, para $\phi = 10°$. Considerar sólo el primer término de corrección.	0,190%
3. Determinar el número de minutos de un día.	Hay 1440 minutos en un día.
4. Combinar las pasos 2 y 3 para determinar la variación del número de minutos en un día según el reloj del ejemplo.	Se produce un adelanto de 2,73 minutos por día.

COMPROBACIÓN El primer término corrector de la ecuación 14.30 es $\frac{1}{4}\,\text{sen}^2(10{,}0°/2) = 1{,}90 \times 10^{-3}$, de forma que $T = 1{,}0019\,T_0$ y $(T - T_0)/T = 0{,}0019$. Este valor concuerda con el resultado del paso 2.

OBSERVACIÓN Para evitar que el reloj se adelante, el mecanismo de un reloj de péndulo se diseña de tal modo que mantenga la amplitud prácticamente constante.

* EL OSCILADOR DE TORSIÓN

El **oscilador de torsión** es un sistema que describe oscilaciones de rotación como una variante de un movimiento armónico simple. En la figura 14.16 se muestra un péndulo de torsión que consiste en un disco sólido suspendido de una varilla de acero. Si el desplazamiento angular del disco respecto a la posición de equilibrio es ϕ, entonces la varilla ejerce un momento (lineal) de fuerza sobre el disco dado por

$$\tau = -\kappa\phi \qquad 14.31$$

donde κ es la **constante de torsión** de la varilla. Sustituyendo el momento de 14.31 en la segunda ley Newton de la dinámica de rotación, se tiene

$$-\kappa\phi = I\alpha$$

donde la aceleración angular $\alpha = d^2\phi/dt^2$. Por tanto, $-\kappa\phi = I\alpha$ se convierte en

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\phi \qquad 14.32$$

que es idéntica a la ecuación 14.2, excepto con I en lugar de m, κ en lugar de k y ϕ en lugar de x. Entonces, la solución de la ecuación 14.32 podrá escribirse de la forma

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta) \qquad 14.33$$

donde $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ es la frecuencia angular, no la velocidad angular, del movimiento. El periodo es, por tanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad 14.34$$

PERIODO DE UN OSCILADOR DE TORSIÓN

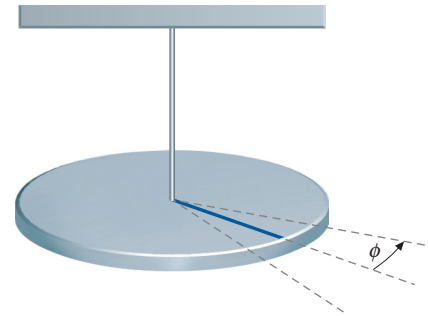
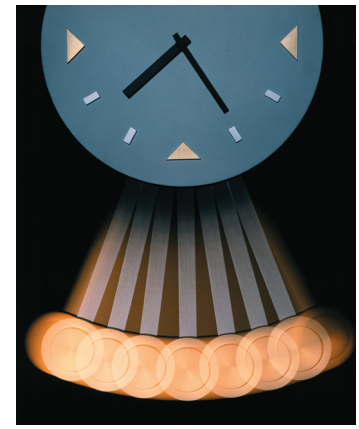


FIGURA 14.16 El péndulo de torsión consiste en un disco sólido suspendido de una varilla de acero.



Todos los relojes mecánicos se mantienen en hora debido a que el periodo de la parte oscilante del mecanismo permanece constante. El periodo de cualquier péndulo cambia con los cambios de amplitud. Sin embargo, los mecanismos motores de un reloj de péndulo mantienen su amplitud constante. *(Richard Menga/ Fundamental Photographers.)*

* EL PÉNDULO FÍSICO

Un cuerpo rígido que pueda girar libremente alrededor de un eje horizontal que no pase por su centro de masas oscilará cuando se desplace de su posición de equilibrio. Este sistema recibe el nombre de **péndulo físico**. Consideremos una figura plana con un eje de rotación situado a una distancia D del centro de masas y desplazada de su posición de equilibrio un ángulo ϕ (figura 14.17). El momento respecto al eje tiene como módulo MgD sen ϕ. Para valores suficientemente pequeños de ϕ, podemos simplificar utilizando la aproximación sen $\phi = \phi$. Por tanto, para pequeños ángulos, el momento es

$$\tau = -MgD\phi. \qquad 14.35$$

Comparando con la ecuación 14.31, se puede ver que para pequeños desplazamientos angulares, el péndulo físico es un oscilador de torsión cuya constante de torsión es

$$\kappa = MgD$$

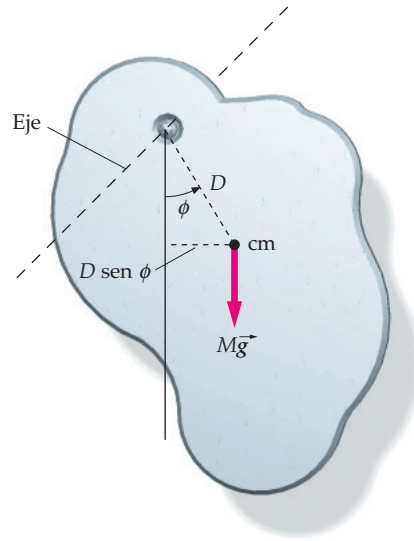


FIGURA 14.17 Péndulo físico.

Entonces, el movimiento del péndulo físico es descrito por la ecuación 14.33 con $\kappa = MgD$. El periodo es, por tanto,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}} \qquad 14.36$$

PERIODO DE UN PÉNDULO FÍSICO

Para grandes amplitudes, el periodo viene dado por la ecuación 14.30, con T_0 expresado por la ecuación 14.36. Para un péndulo simple de longitud L, el momento de inercia es $I = ML^2$ y $D = L$. La ecuación 14.36 nos da $T = 2\pi\sqrt{ML^2/(MgL)} = 2\pi\sqrt{L/g}$, igual que en la ecuación 14.28.

! El periodo de un péndulo físico depende de cómo se distribuye su masa, pero no de su propia masa M. Como el momento de inercia es proporcional a M, el cociente I/M es independiente de M.

Ejemplo 14.10 A ritmo de paseo *Póngalo en su contexto*

Un posible criterio para saber si el ritmo al que una persona camina resulta cómodo (ritmo de paseo), consiste en suponer que en ese caso cada pierna se puede considerar como si fuese un péndulo físico. ¿Es correcto este criterio?

PLANTEAMIENTO Un modelo sencillo consiste en suponer que la pierna es como una barra articulada por un extremo. Cada pierna oscila una vez cada dos pasos, de forma que el tiempo requerido para dar 10 pasos es $5T$, donde T es el periodo del péndulo. ¿Cuánto tiempo se tardaría en completar 10 pasos? Suponer que la pierna es uniforme y tiene 0,9 m de longitud.

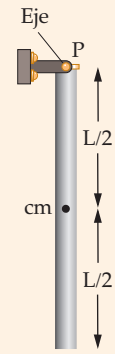


FIGURA 14.18 La distancia entre el eje de rotación y el centro de masas es $L/2$.

SOLUCIÓN

1. Dibujar una barra articulada por un extremo, indicando el centro de masas (figura 14.18):

2. El periodo viene dado por $T = 2\pi\sqrt{I/MgD}$ (ecuación 14.36):
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

3. El valor de I respecto al extremo se encuentra en la tabla 9.1 y D es la mitad de la longitud de la barra:
$$I = \tfrac{1}{3}ML^2 \quad \text{y} \quad D = \tfrac{1}{2}L$$

4. Aplicar los valores de I y D para determinar T:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{Mg(\frac{1}{2}L)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

5. La longitud es $L = 0{,}9$ m y el tiempo para dar los 10 pasos es $5T$:
$$5T = 5 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 10\pi\sqrt{\frac{2(0{,}90\text{ m})}{3(9{,}81\text{ m/s}^2)}} = 7{,}8\text{ s}$$

6. La pierna es más gruesa en la parte superior que en la inferior y la interpretación de paseo es un tanto relativa, por lo que el modelo es una aproximación de la realidad.

COMPROBACIÓN Los animales con largas patas, como los elefantes y las jirafas, parecen caminar a un ritmo más lento, casi de paseo, que aquellos que tienen las patas más cortas, como los ratones. Esto concuerda con el modelo descrito en este ejemplo.

Ejemplo 14.11 La barra oscilante

Una barra uniforme de masa M y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal perpendicular a la barra y que pasa por uno de sus extremos. Determinar el periodo de oscilación para pequeños desplazamientos angulares.

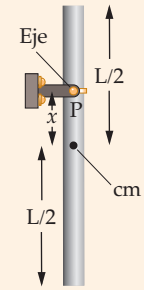


FIGURA 14.19 La distancia entre el eje de rotación y el centro de masas es x.

PLANTEAMIENTO El periodo viene dado por la ecuación 14.36. El centro de masas se encuentra en el centro de la barra, de modo que la distancia del centro de masas al eje de rotación es x (figura 14.19). El momento de inercia de una barra uniforme puede determinarse a partir del teorema de los ejes paralelos $I = I_{cm} + MD^2$ (ecuación 9.13), donde I_{cm} puede encontrarse en la tabla 9.1.

SOLUCIÓN

1. El periodo viene dado por la ecuación 14.36: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}}$

2. $D = x$, y el momento de inercia viene dado por el teorema de los ejes paralelos. El momento de inercia respecto al eje que pasa por el centro de masas se encuentra en la tabla 9.1: $D = x$, $I = I_{cm} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Mx^2$

3. Sustituir estos valores para determinar T: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{MgD}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{(\frac{1}{12}ML^2 + Mx^2)}{Mgx}}$

$$= \boxed{2\pi\sqrt{\frac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}}}$$

COMPROBACIÓN Cuando $x \to 0$, $T \to \infty$, como era de esperar. (Si el eje de rotación de la barra pasa por su centro de masas, la gravedad no ejerce un momento restaurador.) Cuando $x = L/2$, se obtiene $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$, el mismo resultado que se obtuvo en el paso 4 del ejemplo 14.10. Además, cuando $x \gg L$, la expresión del periodo se acerca a $T = 2\pi\sqrt{x/g}$, que se corresponde al periodo de un péndulo simple de longitud x (ecuación 14.28).

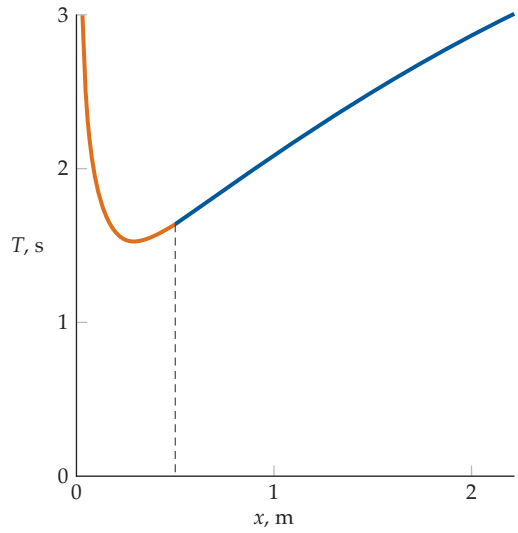


FIGURA 14.20 Representación gráfica del periodo en función de la distancia al centro de masas. Si $x > 0{,}5$ m, el pivote está fuera del extremo de la barra.

OBSERVACIÓN En la figura 14.20, se muestra el periodo T en función de la distancia x del centro de masas para una barra de longitud 1 m.

PROBLEMA PRÁCTICO 14.7 Demostrar que cuando $x = L/6$, el periodo es el mismo que cuando $x = L/2$.

Ejemplo 14.12 Revisión del ejercicio de la barra que oscila — *Inténtelo usted mismo*

Determinar el valor de x en el ejemplo 14.11 para que el periodo sea mínimo.

PLANTEAMIENTO En el valor de x para el cual T es un mínimo, $dT/dx = 0$.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. El periodo viene dado por el resultado del ejercicio 14.11 en el cual $T = 2\pi\sqrt{Z/g}$, donde $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$. Determinar el periodo cuando x se acerca a cero y a infinito.

Respuestas

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(\frac{1}{12}L^2 + x^2)}{gx}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{Z}{g}}$

donde $Z = (\frac{1}{12}L^2 + x^2)/x$

Cuando $x \to 0$, $Z \to \infty$, y $T \to \infty$.

Cuando $x \to \infty$, $Z \to \infty$, y $T \to \infty$.

2. El periodo tiende a infinito cuando x se acerca a cero y a infinito. En algún punto del intervalo $0 < x < \infty$, el periodo es un mínimo. Para determinar el mínimo, se impone $dT/dx = 0$ y se despeja x.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dZ}\frac{dZ}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} Z^{-1/2}\frac{dZ}{dx}$$

$Z > 0$ en todo el intervalo $0 < x < \infty$, con lo cual

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{dx} = 0.$$

$$\frac{dZ}{dx} = 0 \Rightarrow x = \boxed{\frac{L}{\sqrt{12}} = 0{,}289L}$$

COMPROBACIÓN Lo razonable es que la respuesta esté entre 0 y 0,5L. El resultado obtenido en el paso 2 concuerda con lo esperado.

14.4 OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Si un muelle o un péndulo oscilan libremente, siempre acaban parándose porque las fuerzas de rozamiento disipan su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento **amortiguado**. Si el amortiguamiento es muy grande, como por ejemplo en el caso de un péndulo que oscila en melaza, el oscilador ni tan siquiera ejecuta una oscilación completa, sino que se mueve hacia la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina **sobreamortiguado**. Si, por el contrario, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su madre deja de empujarle, el movimiento resultante se denomina **subamortiguado**. Cuando se da el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio, se dice que el sistema está **amortiguado críticamente**. (Cualquier amortiguamiento inferior produce un movimiento subamortiguado.)

Movimiento subamortiguado La fuerza de amortiguamiento ejercida por un oscilador como el que se muestra en la figura 14.21*a* puede representarse mediante la expresión empírica

$$\vec{F}_d = -b\vec{v}$$

donde b es una constante. Un sistema que cumple la ecuación anterior se dice que está *amortiguado linealmente*. El análisis siguiente corresponde a este tipo de movi-

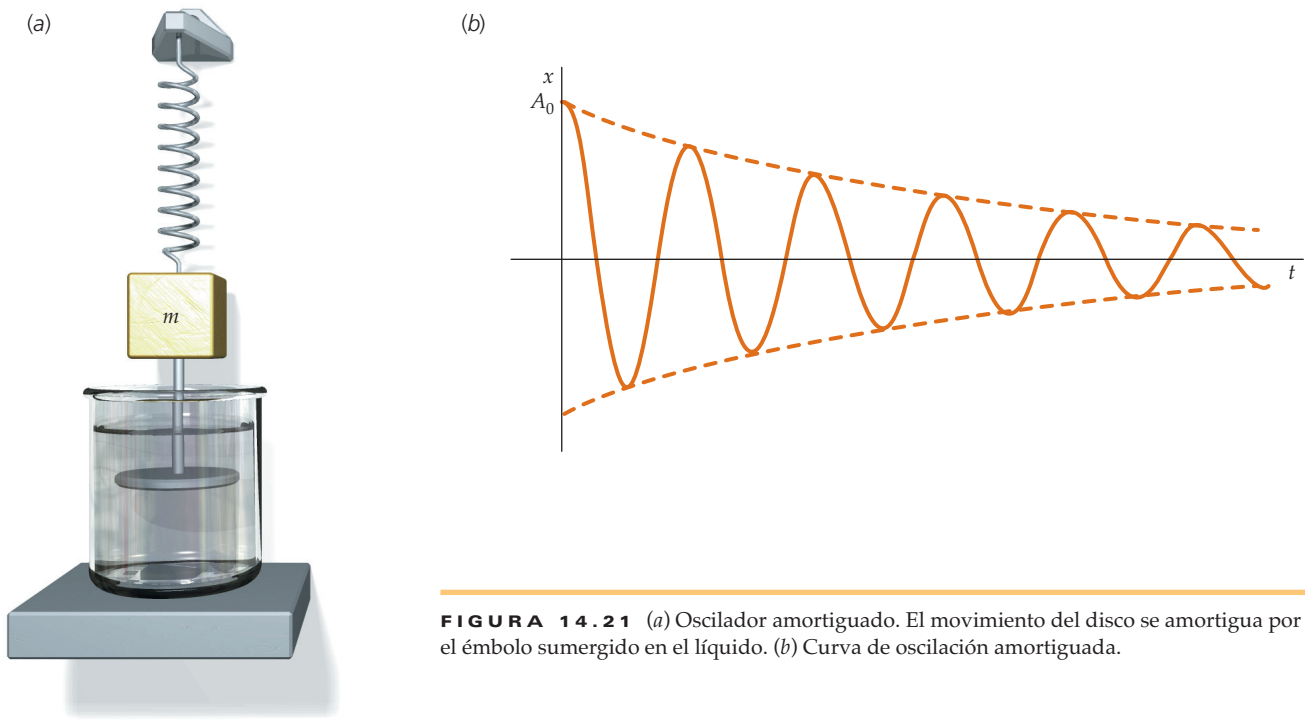


FIGURA 14.21 (*a*) Oscilador amortiguado. El movimiento del disco se amortigua por el émbolo sumergido en el líquido. (*b*) Curva de oscilación amortiguada.

miento. La fuerza de amortiguamiento se opone a la dirección del movimiento; por lo tanto, realiza un trabajo negativo y hace que la energía mecánica del sistema disminuya. Esta energía es proporcional al cuadrado de la amplitud (ecuación 14.17) y el cuadrado de la amplitud disminuye exponencialmente a medida que aumenta el tiempo. Por lo tanto,

$$A^2 = A_0^2 e^{-t/\tau} \qquad 14.37$$

DEFINICIÓN: CONSTANTE DE TIEMPO

donde A es la amplitud, A_0 es la amplitud cuando $t = 0$, y τ es el tiempo de extinción o constante de tiempo. La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e^{-1}.

El movimiento de un sistema amortiguado puede deducirse de la segunda ley de Newton. Para un objeto de masa m ligado a un muelle de constante de fuerza k, la fuerza neta es $-kx - b(dx/dt)$. Igualando la fuerza neta con el producto de la masa por la aceleración d^2x/dt^2, se obtiene

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

que puede reescribirse como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad 14.38$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR AMORTIGUADO

La solución exacta de esta ecuación puede obtenerse utilizando los métodos conocidos de las ecuaciones diferenciales. La solución para el caso subamortiguado es

$$x = A_0 e^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \delta) \qquad 14.39$$

donde A_0 es la amplitud máxima. La frecuencia ω' viene dada por

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} \qquad 14.40$$

donde ω_0 es la frecuencia cuando no hay amortiguamiento $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ para una masa ligada a un muelle. Para un amortiguamiento débil, $b/(2m\omega_0) << 1$ y ω' es, aproximadamente, igual a ω_0. Las curvas de trazos de la figura 14.21*b* corresponden a $x = A$ y $x = -A$, donde A viene dado por

$$A = A_0 e^{-(b/2m)t} \qquad 14.41$$

Elevando al cuadrado los dos términos de esta ecuación y comparando el resultado con la ecuación 14.37, tenemos

$$\tau = \frac{m}{b} \qquad 14.42$$

Si la *constante de amortiguamiento b* crece gradualmente, la frecuencia angular ω' disminuye hasta hacerse igual a cero en el valor crítico

$$b_c = 2m\omega_0 \qquad 14.43$$

Si b es igual o mayor que b_c, el sistema no oscila. Cuando b es mayor que b_c, el sistema es sobreamortiguado. Cuanto menor sea b, más rápidamente volverá el objeto al equilibrio. Cuando $b = b_c$, se dice que el sistema está amortiguado críticamente, y vuelve a su posición de equilibrio en el tiempo más breve posible sin oscilar. La figura 14.22 muestra el desplazamiento en función del tiempo correspondiente a un oscilador amortiguado críticamente y a un oscilador sobreamortiguado. En muchas aplicaciones prácticas se usa un amortiguador crítico o casi crítico para evitar las oscilaciones y lograr, no obstante, que el sistema vuelva al equilibrio rápidamente.

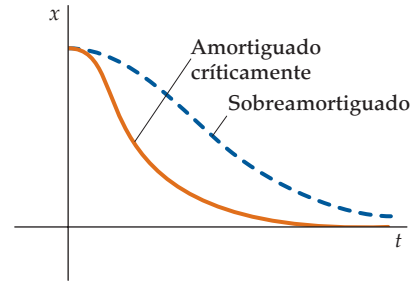


FIGURA 14.22 Representación gráfica del desplazamiento en función del tiempo en el caso de un oscilador amortiguado críticamente y otro sobreamortiguado.

Ejemplo 14.13 Masa suspendida de un turismo

La masa suspendida de un automóvil es la masa que soportan sus ballestas (no incluye la masa de las ruedas, ejes, frenos, etc.). Un turismo tiene una masa suspendida de 1100 kg y una masa no suspendida de 250 kg. Si se quitan los amortiguadores de forma que el coche descansa sobre las ballestas, éste empieza a oscilar con 1 Hz de frecuencia. ¿Cuánto vale la constante de amortiguamiento de cada uno de los cuatro amortiguadores si el coche, con los amortiguadores puestos, debe volver a la situación de reposo tras el mínimo número de oscilaciones?

PLANTEAMIENTO Como el coche ha de volver lo antes posible a la situación de reposo, sus amortiguadores deben comportarse como osciladores críticamente amortiguados. Utilizaremos $b_c = 2\,m\omega_0$ (ecuación 14.43) para hallar la constante de amortiguamiento crítico.

SOLUCIÓN

1. La constante de amortiguamiento crítico está relacionada con la frecuencia natural de oscilación ω_0 mediante $b_c = 2\,m\omega_0$: $b_c = 2m\omega_0$
2. Como las ruedas tocan con el suelo en todo momento, sólo hay que considerar los efectos inerciales (no gravitatorios) de la masa suspendida: $m = 1100$ kg
3. La frecuencia natural ω_0 viene dada en el enunciado: $\omega_0 = 1{,}0$ Hz
4. Calculamos la constante de amortiguamiento: $b = b_c = 2(1100\text{ kg})\cdot(1{,}0\text{ Hz}) = \boxed{2{,}2 \times 10^3\text{ kg/s}}$

COMPROBACIÓN La fuerza de amortiguamiento es $\vec{F} = -b\vec{v}$, así que bv tiene unidades de newtons en el SI. El valor de b obtenido en el paso 4 tiene unidades de kg/s, de forma que (kg/s)(m/s) = kg m/s^2, que son las unidades de fuerza en el SI.

OBSERVACIÓN Los amortiguadores óptimos para los vehículos son aquellos cuya constante de amortiguamiento es la crítica. Esta constante se calcula a partir de la masa suspendida y de la constante elástica k de los muelles.

En las llantas de las ruedas de los coches se colocan pesos para equilibrarlas. El objetivo de equilibrar las ruedas es evitar las vibraciones que producirían las oscilaciones de la dirección del vehículo. *(David Wrobel/ Visuals Unlimited.)*

Como la energía de un oscilador es proporcional al cuadrado de la amplitud, la energía de un oscilador subamortiguado (valor promediado en un ciclo) también disminuye exponencialmente con el tiempo:

$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(A_0e^{-(b/2m)t})^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2A_0^2e^{-(b/m)t} = E_0e^{-t/\tau} \qquad 14.44$$

donde $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2$ y $\tau = m/b$.

Un oscilador amortiguado se describe normalmente por su factor Q (o factor de calidad):

$$Q = \omega_0\tau \qquad 14.45$$

DEFINICIÓN: FACTOR Q

El factor Q es adimensional. (Como las dimensiones de ω_0 son las recíprocas del tiempo, $\omega_0\tau$ no tiene dimensiones.) Podemos relacionar Q con la pérdida relativa de energía por ciclo. Diferenciando la ecuación 14.44, se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = -(1/\tau)E_0 e^{-t/\tau} = -(1/\tau)E \quad \text{o} \quad \frac{dE}{E} = -\frac{dt}{\tau}$$

Si la amortiguación es suficientemente débil para que la pérdida de energía por ciclo sea pequeña, podemos reemplazar dE por ΔE y dt por el periodo T. Por lo tanto, $|\Delta E|/E$ en un ciclo (un periodo) viene dado por

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} = \frac{2\pi}{Q} \qquad 14.46$$

o sea,

$$Q = \frac{2\pi}{(|\Delta E|/E)_{\text{ciclo}}} \qquad \frac{|\Delta E|}{E} \ll 1 \qquad 14.47$$

INTERPRETACIÓN FÍSICA DE Q PARA UN AMORTIGUAMIENTO LEVE

Así pues, Q es inversamente proporcional a la pérdida relativa de energía por ciclo.

Ejemplo 14.14 Componiendo música

Cuando se pulsa la nota do-central en el piano (frecuencia 262 Hz), la mitad de su energía se pierde en 4 segundos. (*a*) ¿Cuál es el tiempo de extinción τ? (*b*) ¿Cuál es el factor Q de esta cuerda de piano? (*c*) ¿Cuál es la pérdida de energía relativa por ciclo?

PLANTEAMIENTO (*a*) Utilizamos $E = E_0 e^{-t/\tau}$ haciendo $E = \frac{1}{2}E_0$. (*b*) El valor Q puede determinarse entonces a partir del tiempo de extinción y de la frecuencia.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Igualar la energía de la nota pulsada en el tiempo $t = 4$ s con la mitad de su energía original:

$$E = E_0 e^{-t/\tau} \quad \text{de modo que} \quad \tfrac{1}{2}E_0 = E_0 e^{-(4{,}00\text{ s}/\tau)}$$
$$\tfrac{1}{2} = e^{-(4{,}00\text{ s}/\tau)}$$

2. Despejar el tiempo τ tomando logaritmos neperianos de la expresión anterior:

$$\ln\frac{1}{2} = -\frac{4{,}00\text{ s}}{\tau}$$

$$\text{por tanto,} \quad \tau = \frac{4{,}00\text{ s}}{\ln 2} = 5{,}771 = \boxed{5{,}77\text{ s}}$$

(*b*) Calcular Q a partir de τ y ω_0:

$$Q = \omega_0\tau = 2\pi f\tau$$
$$= 2\pi(262\text{ Hz})(5{,}771\text{ s}) = 9{,}500 \times 10^3 = \boxed{9{,}50 \times 10^3}$$

(*c*) La pérdida de energía relativa en un periodo viene dada por la ecuación 14.46 y la frecuencia por $f = 1/T$:

$$\left(\frac{|\Delta E|}{E}\right)_{\text{ciclo}} = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega_0\tau} = \frac{1}{f\tau} = \frac{1}{(262\text{ Hz})(5{,}771\text{ s})}$$
$$= 6{,}614 \times 10^{-4} = \boxed{6{,}61 \times 10^{-4}}$$

COMPROBACIÓN El factor Q también puede calcularse a partir de $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}} = 2\pi/(6{,}61 \times 10^{-4}) = 9{,}50 \times 10^3$. Obsérvese que la pérdida de energía relativa después de 4 s no coincide con el producto del número de ciclos (4×262) por la pérdida de energía relativa por ciclo, ya que el decrecimiento de energía relativa no es lineal, sino exponencial.

OBSERVACIÓN La figura 14.23 muestra la amplitud relativa A/A_0 y la energía relativa E/E_0 en función del tiempo de la oscilación de una cuerda de piano después de pulsar la nota do-central. Al cabo de los 4 s, la amplitud ha disminuido a unas 0,7 veces su valor inicial, y la energía, proporcional al cuadrado de la amplitud, se reduce hasta, aproximadamente, la mitad de su valor inicial.

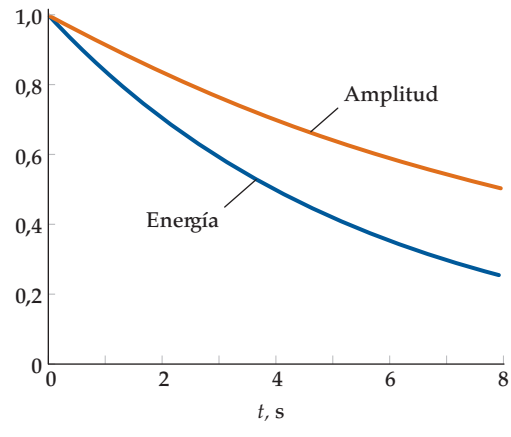


FIGURA 14.23 Representación de A/A_0 y de E/E_0 para una cuerda de piano pulsada.

Obsérvese que Q es bastante grande. Es fácil estimar τ y Q de diversos sistemas oscilantes. Al dar un pequeño golpe a un vaso de cristal, se puede observar el tiempo que tarda el sonido en extinguirse. Un tiempo mayor supone un mayor valor de τ y Q y menor amortiguamiento. Los vasos de vidrio del laboratorio suelen tener un Q elevado. Probar con una taza de plástico. ¿Cómo es el amortiguamiento comparado con el vaso del laboratorio?

En función de Q, la frecuencia exacta de un oscilador subamortiguado es

$$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad 14.48$$

Como b es pequeña (Q es grande) para un oscilador débilmente amortiguado (ejemplo 14.14), vemos que ω' es casi igual a ω_0.

Mediante consideraciones energéticas podemos entender cualitativamente el comportamiento de un oscilador amortiguado. La potencia disipada por la fuerza amortiguadora es igual a la variación instantánea de la energía mecánica total por unidad de tiempo

$$P = \frac{dE}{dt} = \vec{F}_d \cdot \vec{v} = -b\vec{v} \cdot \vec{v} = -bv^2 \qquad 14.49$$

En un oscilador ligeramente amortiguado, la energía mecánica total disminuye poco a poco con el tiempo. La energía cinética media es igual a la mitad de la energía total

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{m}} = \frac{1}{2}E \quad \text{o} \quad (v^2)_{\text{m}} = \frac{E}{m}$$

Si sustituimos $(v^2)_{\text{m}} = E/m$ por v^2 en la ecuación 14.49, resulta

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2 \approx -b(v^2)_{\text{m}} = -\frac{b}{m}E \qquad 14.50$$

Reordenando la ecuación 14.50, nos queda

$$\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt$$

ecuación que integrada tiene la solución

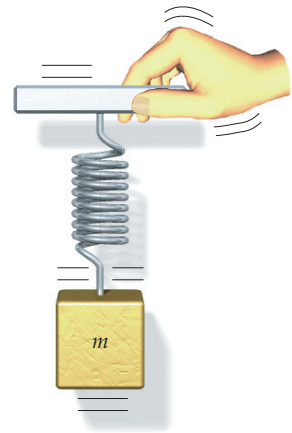
$$E = E_0e^{-(b/m)t} = E_0e^{-t/\tau}$$

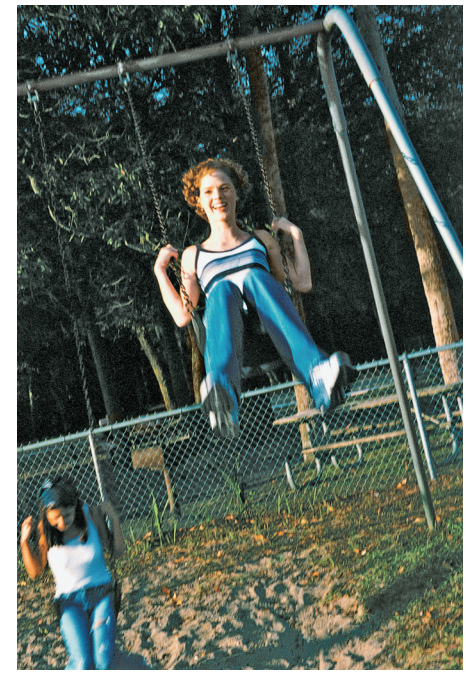
que es la ecuación 14.44.

14.5 OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Para mantener en marcha un sistema amortiguado, debemos ir suministrando energía al sistema. Cuando se lleva a cabo esto, se dice que el oscilador es forzado. Cuando usted se sentaba en un columpio y papá o mamá mantenía su oscilación empujándole una vez cada ciclo, ellos estaban forzando un oscilador. Así mismo, se puede forzar el oscilador del columpio mediante el suministro de energía que se realiza moviendo el cuerpo y las piernas hacia delante y hacia atrás. Si se introduce energía en el sistema a un ritmo mayor del que se disipa, la energía aumenta con el tiempo, lo cual se aprecia por un aumento de la amplitud del movimiento. Si la energía se introduce al mismo ritmo que se disipa, la amplitud permanece constante con el tiempo. En este caso, se dice que el oscilador está en estado estacionario.

Una manera de suministrar energía a un sistema formado por un objeto que cuelga de un muelle vertical es mover el punto de soporte hacia arriba y hacia abajo, con un movimiento armónico simple de frecuencia ω (figura 14.24). Al principio, el movimiento es





Dándose impulso en el columpio, la persona de la fotografía transfiere parte de su energía interna a la energía mecánica del oscilador. *(Eye Wire/ Getty.)*

FIGURA 14.24 Se puede ejercer una fuerza externa sobre un objeto sujeto a un muelle desplazando el punto del soporte hacia arriba y hacia abajo.

complicado, pero finalmente alcanza un estado estacionario en el que el sistema oscila con la misma frecuencia que la fuerza externa impulsora y con amplitud constante y, por lo tanto, con energía constante. En el estado estacionario, la energía introducida en el sistema por la fuerza impulsora durante un ciclo es igual a la disipada en el ciclo debido al amortiguamiento.

La amplitud, y, por lo tanto, la energía de un sistema en estado estacionario, no sólo depende de la amplitud del sistema impulsor sino también de su frecuencia. Se define la **frecuencia natural** de un oscilador, ω_0, como la que tendría si no estuviesen presentes ni el amortiguamiento ni el sistema impulsor. (Por ejemplo, la frecuencia angular natural de un muelle es $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.) Si la frecuencia impulsora es muy parecida a la frecuencia natural del sistema, éste oscilará con una amplitud relativamente grande. Por ejemplo, si el soporte de la figura 14.24 oscila con la frecuencia natural del sistema masa-muelle, la masa oscilará con una amplitud mucho mayor que si el soporte oscila con frecuencias mayores o menores. Este fenómeno se denomina **resonancia**. Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural del oscilador, la energía absorbida por éste en cada ciclo es máxima. Por ello, la frecuencia natural del sistema se denomina **frecuencia de resonancia** del sistema. (Matemáticamente es más conveniente utilizar la frecuencia angular ω que la frecuencia $f = \omega/(2\pi)$. Como ω y f son proporcionales, la mayoría de las afirmaciones concernientes a la frecuencia angular también son válidas para la frecuencia. Por ello, a partir de ahora, omitiremos la palabra angular cuando su omisión no provoque confusión.) En la figura 14.25, se muestra un diagrama de la potencia media transmitida a un oscilador en función de la frecuencia de la fuerza impulsora para dos valores diferentes del amortiguamiento. Estas curvas reciben el nombre de **curvas de resonancia**. Cuando el amortiguamiento es pequeño (el valor de Q es alto), la anchura del pico de la curva de resonancia es, en consecuencia, estrecha y se dice que la resonancia es aguda. Cuando el amortiguamiento es grande, la curva de resonancia es ancha. La anchura $\Delta\omega$ de cada curva de resonancia, indicada en la figura, es la anchura a la mitad de la altura máxima. Para un amortiguamiento relativamente pequeño, se puede demostrar que el cociente entre la anchura de resonancia y la frecuencia de resonancia es igual al valor inverso del factor Q (véase problema 106):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \qquad 14.51$$

ANCHURA DE RESONANCIA PARA UN AMORTIGUAMIENTO PEQUEÑO

Por lo tanto, el factor Q es una medida directa de la agudeza de la resonancia.

Puede hacerse un sencillo experimento que ponga en evidencia la resonancia. Se sostiene una regla por un extremo con dos dedos, de modo que actúe como un péndulo. (También se puede usar cualquier otro objeto similar, como un palo de golf.) Se suelta el otro extremo desde una cierta distancia angular y se observa la frecuencia natural del movimiento. Después, se mueve la mano adelante y atrás horizontalmente para darle impulso con la frecuencia natural de la regla. Aunque la amplitud del movimiento de la mano sea pequeña, la regla oscilará con una amplitud considerable. Si la mano se mueve adelante y atrás a una frecuencia el doble o triple de la frecuencia natural, se observará una disminución de la amplitud de la regla oscilante.

Existen muchos ejemplos conocidos de resonancia. Cuando nos sentamos en un columpio aprendemos intuitivamente a mover el cuerpo con la misma frecuencia que la natural del columpio. Muchas máquinas vibran porque tienen piezas en rotación que no están perfectamente equilibradas. (Observar, por ejemplo, una lavadora en el periodo de centrifugado.) Si se sujeta una de estas máquinas a una estructura que pueda vibrar, dicha estructura se convierte en un sistema oscilatorio forzado que puede iniciar su movimiento por la acción de la máquina. Los técnicos han hecho grandes esfuerzos para equilibrar las partes giratorias de estas máquinas u otras semejantes, amortiguando sus vibraciones y aislándolas de los edificios que las soportan.

Una copa de cristal con bajo amortiguamiento puede romperse mediante una onda sonora intensa con una frecuencia igual o muy próxima a la frecuencia natural de vibración del cristal. Este efecto se emplea a menudo en demostraciones de física utilizando un oscilador de audio y un amplificador adecuado.

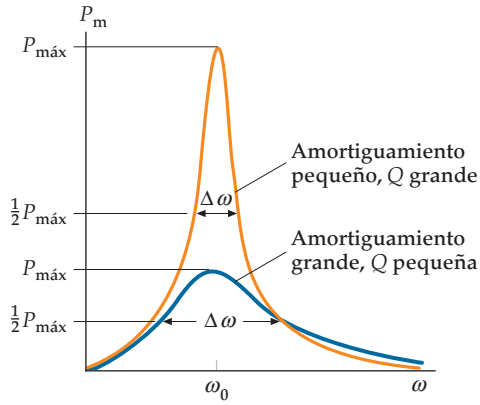
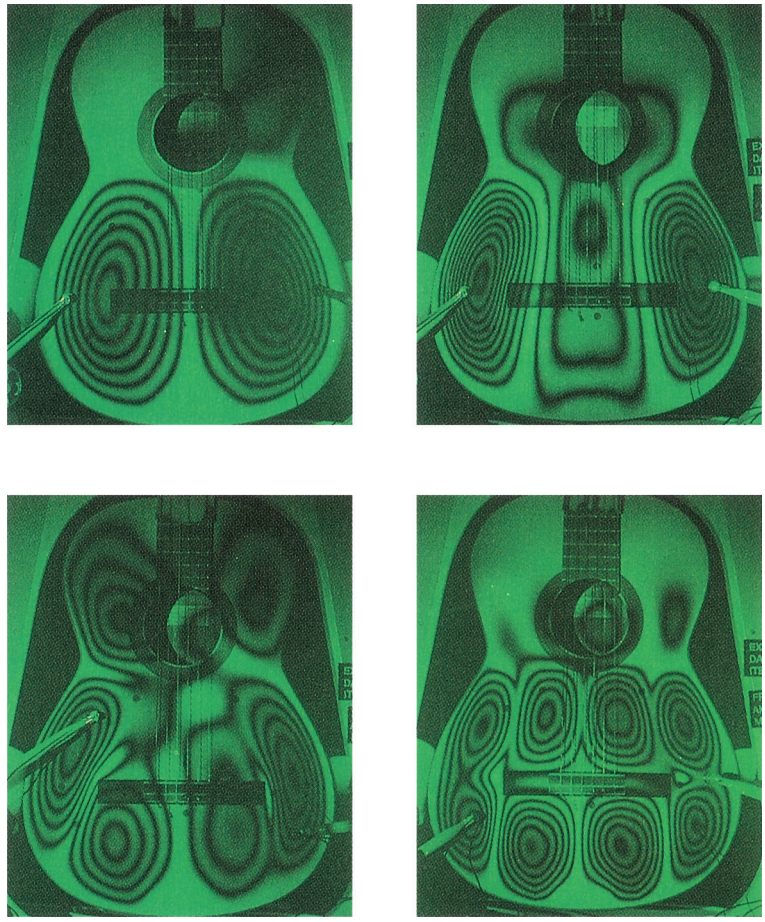


FIGURA 14.25 Resonancia en un oscilador. La anchura $\Delta\omega$ del pico de resonancia para un oscilador que tiene una Q grande (curva naranja) es pequeña comparada con la frecuencia natural ω_0. El pico de resonancia del oscilador que tiene Q pequeña (curva azul) con la misma frecuencia natural, posee una anchura considerablemente mayor que el oscilador con mayor Q.



Los objetos grandes tienen más de una frecuencia de resonancia. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se transmite la energía al cuerpo del instrumento. Las oscilaciones del cuerpo de la guitarra, acopladas a las oscilaciones de la masa del aire que encierra, producen los diagramas de resonancia que se indican en estas figuras. *(Royal Swedish Academy of Music.)*

* TRATAMIENTO MATEMÁTICO DE LA RESONANCIA

Vamos a estudiar matemáticamente el oscilador forzado suponiendo que, además de estar sometido a una fuerza restauradora y a una fuerza de amortiguamiento, está sujeto a una fuerza externa (fuerza impulsora) que varía armónicamente con el tiempo:

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos \omega t \qquad 14.52$$

donde F_0 y ω son el módulo y la frecuencia angular de la fuerza impulsora. Generalmente, esta frecuencia no está relacionada con la frecuencia angular natural del sistema ω_0.

La segunda ley de Newton aplicada a un objeto de masa m atado a un muelle de constante de fuerza k y sujeto a una fuerza amortiguadora $-bv_x$ y a una fuerza externa $F_0 \cos \omega t$, nos da

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$-kx - bv_x + F_0 \cos \omega t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

donde se ha considerado que $a_x = d^2x/dt^2$. Sustituyendo $m\omega_0^2$ por k (ecuación 14.8) y ordenando los términos, se obtiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t \qquad 14.53$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL DE UN OSCILADOR FORZADO

Abordaremos ahora la solución general de la ecuación 14.53 cualitativamente. La solución de la ecuación consta de dos partes, la solución transitoria y la solución estacionaria. La parte **transitoria** de la solución es idéntica a la de un oscilador amortiguado no forzado dada en la ecuación 14.39. Las constantes de esta solución dependen de las condiciones iniciales. Transcurrido cierto tiempo, esta parte de la solución se hace despreciable porque la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo. De este modo sólo queda la **solución estacionaria**, que puede escribirse en la forma

$$x = A\cos(\omega t - \delta) \qquad 14.54$$

POSICIÓN DE UN OSCILADOR FORZADO

donde la frecuencia angular ω es la misma que la de la fuerza impulsora. La amplitud A viene dada por

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \qquad 14.55$$

AMPLITUD DE UN OSCILADOR FORZADO

y la constante de fase δ viene dada por

$$\text{tg}\,\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad 14.56$$

CONSTANTE DE FASE DE UN OSCILADOR FORZADO

Comparando las ecuaciones 14.52 y 14.54, podemos ver que el desplazamiento del sistema y la fuerza impulsora oscilan con la misma frecuencia, pero difieren en fase en δ. Cuando la frecuencia impulsora ω tiende a cero, δ también tiende a cero, como puede verse a partir de la ecuación 14.56. En la resonancia, $\omega = \omega_0$ y $\delta = \pi/2$. Cuando ω es mucho mayor que ω_0, $\delta \approx \pi$. Al comienzo de este capítulo, hemos visto que el desplazamiento de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple viene dado por $x = A\cos(\omega t + \delta)$ (ecuación 14.4). Esta ecuación es idéntica a la ecuación 14.54 excepto en el signo que precede a la constante δ. La fase de un oscilador forzado siempre va retrasada con respecto a la fase de la fuerza impulsora. El signo negativo de la ecuación 14.54 asegura que δ siempre es positivo.

En el sencillo experimento de la regla impulsada por el movimiento de la mano adelante y atrás (ver la discusión tras la ecuación 14.51), obsérvese que, en la resonancia, la oscilación de la mano no está en fase ni en desfase de 180° con la oscilación de la regla. Si se mueve la mano adelante y atrás con una frecuencia varias veces la frecuencia natural de la regla, el movimiento en el estado estacionario de ésta se habrá desfasado respecto a la mano casi 180°.

La velocidad del objeto en estado estacionario se obtiene derivando x respecto a t:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}(\omega t - \delta)$$

En la resonancia, $\delta = \pi/2$, y la velocidad está en fase con la fuerza impulsora:

$$v_x = -\omega A\,\text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = +\omega A\cos\omega t$$

Así pues, vemos que en la resonancia, el objeto siempre se está moviendo en el sentido en que actúa la fuerza impulsora, como era de esperar, para lograr el máximo aporte de energía. La amplitud de velocidad ωA es máxima para $\omega = \omega_0$.

! En la resonancia, el objeto siempre se está moviendo en el sentido en que actúa la fuerza impulsora, como es lógico, para así lograr el máximo aporte de energía.

Ejemplo 14.15 Un objeto en un muelle — *Inténtelo usted mismo*

Un objeto de masa 1,5 kg situado sobre un muelle de constante de fuerza 600 N/m pierde el 3% de su energía en cada ciclo. El sistema viene impulsado por una fuerza sinusoidal con un valor máximo de $F_0 = 0{,}5$ N. (*a*) ¿Cuál es el valor de Q para este sistema? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia (angular) de resonancia? (*c*) Si la frecuencia impulsora varía, ¿cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la resonancia? (*d*) ¿Cuál es la amplitud en la resonancia? (*e*) ¿Cuál es la amplitud de la frecuencia impulsora si $\omega = 19$ rad/s?

PLANTEAMIENTO La pérdida de energía por ciclo es del 3%, por lo que la amortiguación es débil. El factor Q puede determinarse mediante la expresión $Q = 2\pi/(\Delta E/E)_{\text{ciclo}}$ (ecuación 14.47) y después utilizar este resultado y $\Delta\omega/\omega_0 = 1/Q$ (ecuación 14.49) para determinar la anchura de la resonancia $\Delta\omega$. La frecuencia de resonancia es la frecuencia natural. La amplitud puede determinarse a partir de la ecuación 14.55 tanto en resonancia como fuera de resonancia, con la constante de amortiguamiento calculada a partir de Q utilizando la definición de Q (ecuación 14.45) y $\tau = m/b$ (ecuación 14.42).

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) El amortiguamiento es débil. Relacionar Q con la pérdida de energía usando la ecuación 14.47 y despejar Q.	$Q \approx \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}} = \dfrac{2\pi}{0{,}030} = \boxed{210}$
(*b*) Relacionar la frecuencia de resonancia con la frecuencia natural del sistema.	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \boxed{20 \text{ rad/s}}$
(*c*) Relacionar la anchura de la resonancia $\Delta\omega$ con Q utilizando la ecuación 14.51.	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \boxed{0{,}096 \text{ rad/s}}$
(*d*) 1. Escribir una expresión para la amplitud A válida para cualquier frecuencia impulsora ω (ecuación 14.55).	$A(\omega) = \dfrac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$
2. Aplicar $\omega = \omega_0$ para el cálculo de A en la resonancia.	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{b\omega_0}$
3. Utilizar las ecuaciones 14.45 y 14.42 para relacionar la constante de amortiguamiento b con Q.	$b = \dfrac{m\omega_0}{Q} = 0{,}144 \text{ kg/s}$
4. Utilizar los resultados de los dos pasos previos para calcular la amplitud en la resonancia.	$A(\omega_0) = \dfrac{F_0}{b\omega_0} = \boxed{17 \text{ cm}}$
(*e*) Calcular la amplitud para $\omega = 19$ rad/s. (Podemos omitir las unidades para simplificar la ecuación. Como todas las magnitudes se expresan en unidades del SI, A se expresa en metros.)	$A(19) = \dfrac{0.5}{\sqrt{1{,}5^2(20^2 - 19^2)^2 + 0{,}144^2(19)^2}} = \boxed{0{,}85 \text{ cm}}$

COMPROBACIÓN Si ω se reduce a 1 rad/s, pasando de 20 rad/s a 19 rad/s, la amplitud disminuye en un factor 20. Esto no es sorprendente, ya que la anchura de la resonancia es sólo de 0,0957 rad/s.

OBSERVACIÓN Fuera de la resonancia, el término $b^2\omega^2$ es despreciable comparado con el otro término del denominador de la expresión de A. Cuando $\omega - \omega_0$ es superior en varias veces a la anchura $\Delta\omega$ a mitad de altura, como en este ejemplo, podemos despreciar el término $b^2\omega^2$ y calcular A según la expresión $A \approx F_0/[m(\omega_0^2 - \omega^2)]$. La figura 14.26 muestra la amplitud en función de la frecuencia impulsora ω. Obsérvese que la escala horizontal corresponde a un rango pequeño de ω.

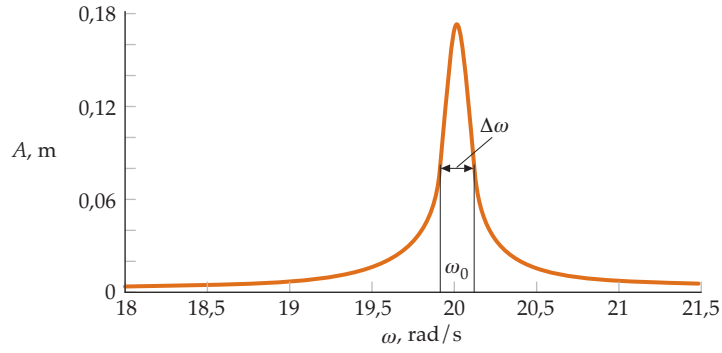


FIGURA 14.26

Temas de actualidad en Física

Moviéndose al compás: el Puente del Milenio

Los amortiguadores de masa fueron colocados bajo el puente poco tiempo después de su apertura. Los amortiguadores fueron puestos para evitar el exceso de balanceo que causa la multitud al caminar. *(Alamy.)*

En junio del año 2000 se inauguró el puente peatonal de Londres conocido como el Puente del Milenio. Entre 80 000 y 100 000 personas cruzaron el puente a lo largo del día de la inauguración. El puente empezó a balancearse al coincidir 2000 personas al mismo tiempo.[1] El balanceo lateral fue tan intenso que la gente tuvo que sujetarse a las barandas.[2] El "Puente Tembloroso"[3] fue cerrado al los tres días de su inauguración y no se volvió a abrir hasta febrero del 2002. El puente fue diseñado para soportar vientos extremadamente fuertes y resistir los golpes de las barcazas. Sin embargo, el movimiento lateral fue toda una sorpresa para sus arquitectos e ingenieros. Tras unos meses de estudio, los investigadores concluyeron que cuando las personas andan sobre el puente se produce una fuerza con una componente lateral, además de la componente vertical, hacia delante y hacia atrás.

La típica cadencia que se produce cuando una persona anda es tal que tanto el pie derecho como el izquierdo golpean el suelo a intervalos de un segundo, aproximadamente. La fuerza lateral que se produce es tal que cuando se pisa con el pie derecho se produce una fuerza lateral hacia la derecha y cuando se pisa con el pie izquierdo se produce otra fuerza hacia la izquierda, en ambos casos de unos 25 N.[4] En conclusión, cuando una persona anda, produce fuerzas laterales, hacia la derecha e izquierda, de unos 25 N con una frecuencia de 1 Hz.[5] Lamentablemente, las dos frecuencias naturales más bajas observadas del balanceo para el arco central de 144 m eran de 0,5 Hz y 1 Hz y para el arco sur la frecuencia natural era de 0,8 Hz. En consecuencia, las pisadas de la gente provocaron el movimiento del puente. Cuando el número de personas era pequeño, la resultante de la fuerza de las pisadas no era suficiente como para producir el balanceo, pero cuando había más de 200 personas[6] el amortiguamiento natural del puente no era suficiente como para resistir la fuerza combinada de las pisadas de tantas personas.

El balanceo aumentó a causa de la reacción humana. Los cálculos mostraron que la aceleración lateral máxima estaba comprendida entre $0{,}2g$ y $0{,}3g$,[7] lo bastante grande como para hacer perder el equilibrio de las personas. La reacción instintiva en estos casos es caminar dando pasos justamente con la misma frecuencia con la que se balancea el suelo, pero precisamente eso no hace más que aumentar la amplitud de la resonancia producida.

Las medidas realizadas condujeron a la colocación de una serie de amortiguadores. Se colocaron ocho amortiguadores de masa y 37 amortiguadores viscosos. Los amortiguadores de masa consisten en bloques de acero de 2,5 toneladas colgados de péndulos que oscilan con un desfase de 180° respecto al puente.[8] Los amortiguadores viscosos son muy parecidos a los que se utilizan en los automóviles. Funcionan haciendo mover un pistón arriba y abajo dentro de un líquido viscoso. Además, se colocaron también otros amortiguadores de masa para amortiguar las oscilaciones verticales. Durante los últimos ensayos que se hicieron antes de la reapertura, se comprobó que la aceleración lateral había pasado de $0{,}25g$ a $0{,}006g$, es decir, se había reducido en un 97%.[10] Después de eso, el puente ya no tuvo más problemas de balanceo.

Cualquier[11] puente cuya frecuencia natural de vibración lateral sea inferior a 1,3 Hz es susceptible de que los pasos de la multitud produzcan balanceo.[12] Muchos otros, algunos en Japón,[13] París y Ottawa, han tenido problemas parecidos, e incluso los puentes de las autopistas han mostrado problemas similares.[14] A partir de lo sucedido con el Puente del Milenio, los ingenieros perciben el fenómeno de la vibración de una manera diferente.

---

1 Dallard, P., et al., "The London Millennium Footbridge." *The Structural Engineer*, Nov. 20, 2001, Vol. 79, No. 22, 17–33.
2 Smith, Michael, "Bouncing Bridge May Be Closed 'for Weeks.'" *The Telegraph*, Jun. 13, 2000. http://www.telegraph.co.uk/news/main.jhtml?xml=/news/2000/06/13/nsway13.xml as of July 2006.
3 Binney, Magnus, "Throwing a Wobbly." *The Times*, Oct. 31, 2000, Features, 16.
4 "Oscillation," *The Millennium Bridge – Challenge*. Arup Engineering. http://www.arup.com/MillenniumBridge/challenge/oscillation.html as of July 2006.
5 Fitzpatrick, T., *Linking London: The Millennium Bridge*. London: The Royal Academy of Engineering, June 2001.
6 Roberts, T. M., "Lateral Pedestrian Excitation of Footbridge." *Journal of Bridge Engineering*, Jan./Feb. 2005, Vol. 10, No. 1, 107–112s.
7 Dallard et al., op. cit.
8 "Elegant, Filigran, and Not Moving." GERB Vibration Control Systems. http://gerb.com/images/both/projektbeispiele/pdf/millenium_bridge_en.pdf as of July 2006.
9 Taylor, D. P., "Damper Retrofit of the London Millenium Footbridge—A Case Study in Biodynamic Design." Taylor Devices. http://www.taylordevices.com/papers/damper/damper.pdf as of July 2006.
10 Ibid.
11 *Structural Safety 2000-2001: Thirteenth Report of SCOSS—The Standing Committee on Structural Safety.* London: Standing Committee on Structural Safety. May 2001, 24–26. http://www.scoss.org.uk/publications/rtf/13Report.pdf as of July 2006.
12 "Designing Footbridges with Eurocodes." *Eurocode News*, Mar. 2004, No. 2, 6.
13 Nakamura, S. I., "Model for Lateral Excitation of Footbridges by Synchronous Walking." *Journal of Structural Engineering*, Jan. 2004, 32–37.
14 Fitzpatrick, op. cit.

Resumen

1. El movimiento armónico simple tiene lugar cuando la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento respecto al equilibrio. Tiene numerosas aplicaciones en el estudio de las oscilaciones, ondas, circuitos eléctricos y de la dinámica molecular.

2. La resonancia es un fenómeno importante en múltiples áreas de la Física. Tiene lugar cuando la frecuencia de la fuerza impulsora es similar a la frecuencia natural del sistema oscilante.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Movimiento armónico simple	En el movimiento armónico simple, la fuerza neta y la aceleración son proporcionales al desplazamiento, pero tienen sentido contrario a éste.	
	$F_x = -kx = ma_x$	14.1
Función desplazamiento	$x = A\cos(\omega t + \delta)$	14.4
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	14.11
Energía mecánica	$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$	14.17
Movimiento circular	Cuando una partícula se mueve sobre una circunferencia con velocidad constante, su proyección sobre un diámetro de esa circunferencia se mueve con movimiento armónico simple.	
Movimiento general próximo al equilibrio	Si un objeto experimenta un pequeño desplazamiento a partir de cualquier posición de equilibrio estable, oscila alrededor de esta posición con movimiento armónico simple.	
2. Frecuencias angulares para diversos sistemas		
Masa ligada a un muelle	$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	14.8
Péndulo simple	$\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$	14.27
Oscilador de torsión	$\omega = \sqrt{\dfrac{\kappa}{I}}$	14.33
	donde I es el momento de inercia y κ la constante de torsión. Para pequeñas oscilaciones de un péndulo físico, $\kappa = MgD$, donde D es la distancia del centro de masas al eje de rotación e I es el momento de inercia respecto a dicho eje.	
3. Oscilaciones amortiguadas	En las oscilaciones de los sistemas reales, el movimiento está amortiguado debido a fuerzas disipativas. Si el amortiguamiento es mayor que cierto valor crítico, el sistema no oscila sino que regresa simplemente a su posición de equilibrio si ha sido perturbado. El movimiento de un sistema ligeramente amortiguado es muy semejante al movimiento armónico simple, pero tiene una amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo.	
Frecuencia	$\omega' = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$	14.48
Energía	$E = E_0 e^{-t/\tau}$	14.44
Amplitud	$A = A_0 e^{-(1/2)t/\tau}$	14.41
Tiempo de extinción o constante de tiempo	$\tau = \dfrac{m}{b}$	14.42
Factor Q (definición)	$Q = \omega_0\tau$	14.45
Factor Q para amortiguamiento débil	$Q \approx \dfrac{2\pi}{(\lvert\Delta E\rvert/E)_{\text{ciclo}}} \qquad \left(\dfrac{\lvert\Delta E\rvert}{E}\right)_{\text{ciclo}} \ll 1$	14.47
4. Oscilaciones forzadas	Cuando un sistema ligeramente amortiguado ($b < b_c$) se ve forzado a oscilar por la acción de una fuerza externa que varía sinusoidalmente con el tiempo, $F_{\text{ext}} = F_0\cos\omega t$, el sistema oscila con una frecuencia ω igual a la del sistema impulsor y con una amplitud A que depende de esta frecuencia.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Frecuencia de resonancia	$\omega = \omega_0$	
Anchura de resonancia para amortiguamiento débil	$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$	14.51
*Función desplazamiento	$x = A\cos(\omega t - \delta)$	14.54
*Amplitud	$A = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$	14.55
*Constante de fase	$\text{tg}\,\delta = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$	14.56

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

14.1 $\sqrt{L/g}$

Respuestas a los problemas prácticos

14.1 (*a*) $f = 3{,}6$ Hz, $T = 0{,}28$ s, (*b*) $f = 2{,}5$ Hz, $T = 0{,}40$ s

14.2 $\omega = 3{,}1$ rad/s, $v_{máx} = 0{,}13$ m/s

14.3 (*a*) $E = \frac{1}{2}mv_{máx}^2 = 0{,}0625$ J, (*b*) $A = \sqrt{2E_{total}/k} = 5{,}59$ cm

14.4 24 cm

14.5 2,01 s

14.6 $g' = 10{,}3$ m/s^2, $T = 1{,}96$ s

14.7 $T = \sqrt{\frac{2L}{3g}}$ para $x = L/6$ y para $x = L/2$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso:

(*a*) En el movimiento armónico simple, el periodo es proporcional al cuadrado de la amplitud.

(*b*) En el movimiento armónico simple, la frecuencia no depende de la amplitud.

(*c*) Si la aceleración de una partícula que se mueve en una dimensión es proporcional al desplazamiento, pero de sentido opuesto, el movimiento es armónico simple.

2 • Si la amplitud de un oscilador armónico simple se triplica, ¿en qué factor se modifica la energía?

3 •• Un objeto sujeto a un muelle tiene un movimiento armónico simple de amplitud 4,0 cm. Cuando el objeto se encuentra a 2,0 cm de la posición de equilibrio, ¿qué fracción de su energía total es energía potencial? (*a*) Un cuarto. (*b*) Un tercio. (*c*) La mitad. (*d*) Dos tercios. (*e*) Tres cuartos. SSM

4 •• Un objeto sujeto a un muelle tiene un movimiento armónico simple de amplitud 10 cm. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio se encuentra el objeto cuando sus energía cinética y potencial son iguales? (*a*) 5 cm. (*b*) 7,07 cm. (*c*) 9 cm. (*d*) No se puede saber a partir de estos datos.

5 •• Dos sistemas idénticos están formados por un muelle unido por un extremo a un bloque y con el otro extremo sujeto a la pared. Los muelles son horizontales y los bloques descansan sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Los bloques oscilan en movimientos armónicos simples de forma que la amplitud del movimiento del bloque A es cuatro veces mayor que la del B. ¿Cómo son sus respectivas velocidades? (*a*) $v_{A\,máx} = v_{B\,máx}$. (*b*) $v_{A\,máx} = 2v_{B\,máx}$. (*c*) $v_{A\,máx} = 4v_{B\,máx}$. (*d*) No se pueden comparar con los datos aportados.

6 •• Dos sistemas idénticos están formados por un muelle unido a un bloque y el otro extremo sujeto a la pared. Los muelles son horizontales y los bloques descansan sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Los bloques oscilan en movimientos armónicos simples con la misma amplitud, pero la constante elástica del A es cuatro veces la del B. ¿Cómo son sus respectivas velocidades? (*a*) $v_{A\,máx} = v_{B\,máx}$. (*b*) $v_{A\,máx} = 2v_{B\,máx}$. (*c*) $v_{A\,máx} = 4v_{B\,máx}$. (*d*) No se pueden comparar con los datos que se aportan.

7 •• Dos sistemas idénticos están formados por un muelle unido a un bloque por un extremo y con el otro extremo sujeto a la pared. Los muelles son horizontales y los bloques descansan sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Los bloques oscilan en movimientos armónicos simples con la misma amplitud, pero la masa del A es cuatro veces la del B. ¿Cómo son sus respectivas velocidades? (*a*) $v_{A\,máx} = v_{B\,máx}$. (*b*) $v_{A\,máx} = 2v_{B\,máx}$. (*c*) $v_{A\,máx} = v_{B\,máx}/2$. (*d*) No se pueden comparar con los datos que se aportan. SSM

8 •• Dos sistemas idénticos están formados por un muelle unido a un bloque y el otro extremo sujeto a la pared. Los muelles son horizontales y los bloques descansan sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Los bloques oscilan en movimientos armónicos simples con la misma amplitud, pero la masa del A es cuatro veces la del B. ¿Cómo son sus respectivas aceleraciones? (*a*) $a_{\text{A máx}} = a_{\text{B máx}}$. (*b*) $a_{\text{A máx}} = 2a_{\text{B máx}}$. (*c*) $a_{\text{A máx}} = \frac{1}{2}a_{\text{B máx}}$. (*d*) $a_{\text{A máx}} = \frac{1}{4}a_{\text{B máx}}$. (*e*) No se pueden comparar con los datos aportados.

9 •• En los cursos de física general, la masa del muelle de un movimiento armónico simple se desprecia porque suele ser mucho menor que la masa del objeto al que se une. ¿Cómo se modificarían el periodo, la frecuencia y la energía total si se considerara la masa del muelle? SSM

10 •• Dos sistemas muelle-masa oscilan con sendos periodos T_A y T_B. Si $T_A = 2T_B$ y los muelles son idénticos, sus respectivas masas verifican (*a*) $m_A = 4m_B$, (*b*) $m_A = m_B/\sqrt{2}$, (*c*) $m_A = m_B/2$, (*d*) $m_A = m_B/4$.

11 •• Dos sistemas masa-muelle oscilan con frecuencias f_A y f_B. Si $f_A = 2f_B$ y las constantes de los dos muelles son iguales, las masas de ambos sistemas cumplen la relación (*a*) $m_A = 4m_B$, (*b*) $m_A = m_B/\sqrt{2}$, (*c*) $m_A = m_B/2$, (*d*) $m_A = m_B/4$.

12 •• Dos sistemas masa-muelle *A* y *B* oscilan de modo que sus energías son iguales. Si $M_A = 2M_B$, ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (*a*) $A_A = A_B/4$. (*b*) $A_A = A_B/\sqrt{2}$. (*c*) $A_A = A_B$. (*d*) No se da suficiente información para determinar la relación de amplitudes.

13 •• Dos sistemas masa-muelle *A* y *B* oscilan de modo que sus energías son iguales. Si $k_A = 2k_B$, ¿cuál de las siguientes fórmulas relaciona las amplitudes de oscilación? (*a*) $A_A = A_B/4$. (*b*) $A_A = A_B/\sqrt{2}$. (*c*) $A_A = A_B$. (*d*) No hay suficiente información para determinar la relación de las amplitudes. SSM

14 •• Cuando sube la temperatura, la cuerda de un péndulo simple se alarga como consecuencia de la dilatación. ¿Cómo afectaría esto al funcionamiento de un reloj que funcionara con un péndulo simple?

15 •• Una lámpara que cuelga del techo del coche restaurante de un tren oscila con periodo T_0 cuando el tren está en reposo. El periodo será (emparejar las columnas derecha e izquierda)

1. mayor que T_0 cuando	A. el tren se mueve horizontalmente con velocidad constante.
2. menor que T_0 cuando	B. el tren se mueve por una curva de radio R con velocidad v.
3. igual a T_0 cuando	C. el tren asciende por una colina de inclinación θ a velocidad constante.
	D. el tren pasa por una colina de radio de curvatura R con velocidad constante.

16 •• El péndulo A tiene una lenteja de masa M_A y longitud L_A; el péndulo B tiene una lenteja de masa M_B y longitud L_B. Si el periodo de A es doble al de B, entonces (*a*) $L_A = 2L_B$ y $m_A = 2m_B$, (*b*) $L_A = 4L_B$ y $m_A = m_B$, (*c*) $L_A = 4L_B$, cualquiera que sea la relación m_A/m_B, (*d*) $L_A = \sqrt{2}L_B$, cualquiera que sea la relación m_A/m_B.

17 •• Dos péndulos simples tienen longitudes L_A y L_B y masas m_A y m_B. Si la frecuencia del A es un tercio de la del B, (*a*) $L_A = 3\,L_B$ y $m_A = 3\,m_B$, (*b*) $L_A = 9\,L_B$ y $m_A = m_B$, (*c*) $L_A = 9\,L_B$, independientemente del valor de m_A/m_B, (*d*) $L_A = \sqrt{3}L_B$, independientemente del valor de m_A/m_B. SSM

18 •• Dos péndulos simples tienen longitudes L_A y L_B y masas m_A y m_B. Si la única diferencia entre sus movimientos es que la amplitud del A es el doble de la del B, entonces (*a*) $L_A = L_B$ y $m_A = m_B$, (*b*) $L_A = 2\,L_B$ y $m_A = m_B$, (*c*) $L_A = L_B$, independientemente del valor de m_A/m_B (*d*) $L_A = \frac{1}{2}L_B$, cualquiera que sea el cociente m_A/m_B.

19 •• Verdadero o falso:

(*a*) La energía mecánica de un oscilador amortiguado (no forzado) decrece exponencialmente con el tiempo.

(*b*) La resonancia de un oscilador amortiguado forzado se produce cuando la frecuencia externa coincide exactamente con la frecuencia natural.

(*c*) Si el factor Q de un oscilador amortiguado es elevado, entonces su curva de resonancia será estrecha.

(*d*) La constante de tiempo τ de un oscilador muelle-masa con amortiguamiento lineal es independiente de su masa.

(*e*) El factor Q de un oscilador muelle-masa con amortiguamiento lineal es independiente de su masa.

20 •• Dos osciladores formados por el sistema muelle-masa tienen la misma constante de amortiguamiento y constante elástica. Sin embargo, la masa del sistema A es 4 veces la masa del sistema B. ¿Cómo están relacionadas sus constantes de tiempo? (*a*) $\tau_A = 4\,\tau_B$. (*b*) $\tau_A = 2\,\tau_B$. (*c*) $\tau_A = \tau_B$. (*d*) No se pueden comparar con los datos aportados.

21 •• Dos osciladores formados por el sistema muelle-masa tienen la misma constante de tiempo y constante elástica. Sin embargo, la masa del sistema A es 2 veces la masa del sistema B. ¿Cómo están relacionadas sus constantes de amortiguamiento? (*a*) $b_A = 4b_B$. (*b*) $b_A = 2b_B$. (*c*) $b_A = b_B$. (*d*) $b_A = \frac{1}{2}b_B$. (*e*) No se pueden comparar con estos datos.

22 •• Dos osciladores forzados formados por el sistema muelle-masa tienen la misma fuerza impulsora, constante de amortiguamiento y constante elástica. Sin embargo, la masa del sistema A es 4 veces la masa del sistema B. Si los sistemas están débilmente amortiguados ¿cómo están relacionadas sus frecuencias de resonancia? (*a*) $\omega_A = \omega_B$. (*b*) $\omega_A = 2\omega_B$. (*c*) $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_B$. (*d*) $\omega_A = \frac{1}{4}\omega_B$. (*e*) No se pueden comparar con los datos que se dan.

23 •• Dos osciladores forzados formados por el sistema muelle-masa tienen la misma fuerza impulsora, constante de amortiguamiento y masa. Sin embargo, la constante elástica del sistema A es 4 veces la del sistema B. Si los sistemas están débilmente amortiguados, ¿cómo están relacionadas sus frecuencias de resonancia? (*a*) $\omega_A = \omega_B$. (*b*) $\omega_A = 2\,\omega_B$. (*c*) $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_B$. (*d*) $\omega_A = \frac{1}{4}\omega_B$. (*e*) No se pueden comparar con los datos aportados. SSM

24 •• Dos osciladores forzados formados por el sistema muelle-masa tienen la misma fuerza impulsora, constante de amortiguamiento y constante elástica. Sin embargo, la longitud del sistema A es 4 veces la del sistema B. Si los sistemas están débilmente amortiguados ¿cómo están relacionadas sus frecuencias de resonancia? (*a*) $\omega_A = \omega_B$. (*b*) $\omega_A = 2\omega_B$. (*c*) $\omega_A = \frac{1}{2}\omega_B$. (*d*) $\omega_A = \frac{1}{4}\omega_B$. (*e*) No se pueden comparar con los datos que se aportan.

APROXIMACIONES Y ESTIMACIONES

25 • Estimar la anchura de la caja de un antiguo reloj de pendulo con respecto a la anchura de la lenteja del péndulo si el movimiento del péndulo es armónico simple. SSM

26 • Un pequeño saco de boxeo tiene el tamaño y peso de la cabeza de una persona. El saco está colgado de una pequeña cuerda. Estimar la frecuencia natural de oscilación del saco.

27 •• Un niño se está columpiando en un columpio. Si no se le suministra energía mecánica, la amplitud de su oscilación disminuye un factor $1/e$ cada ocho periodos. Estimar el factor Q para este sistema.

28 •• (*a*) Estimar el periodo natural de oscilación del vaivén de brazos de una persona cuando camina, suponiendo que no lleva ningún peso. (*b*) Estimar el periodo natural de oscilación si la persona mueve una cartera muy pesada. Obsérvese cómo camina la gente y estímese si estos dos cálculos se ajustan a lo que se percibe en la vida cotidiana.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Nota: a menos que se indique lo contrario, suponer que el movimiento de los objetos de esta sección es armónico simple.

29 • La posición de una partícula viene dada por $x = (7\text{ cm})\cos 6\pi t$, donde t viene dado en segundos. Determinar (*a*) la frecuencia, (*b*) el periodo y (*c*) la amplitud del movimiento de la partícula. (*d*) ¿Cuál es el primer instante después de $t = 0$ en el que la partícula está en su posición de equilibrio? ¿En qué sentido se está moviendo en ese instante?

30 • ¿Cuál es la constante de fase δ de la ecuación 14.4 si la posición de la partícula oscilante en el instante $t = 0$ es (*a*) 0, (*b*) $-A$, (*c*) A, (*d*) $A/2$?

31 • Una partícula de masa m parte del reposo en $x = +25$ cm y oscila alrededor de su posición de equilibrio en $x = 0$ con un periodo de 1,5 s. Escribir las ecuaciones para (*a*) la posición x en función del tiempo t, (*b*) la velocidad v_x en función de t y (*c*) la aceleración a_x en función de t. SSM

32 •• Hallar el módulo máximo de (*a*) la velocidad y (*b*) la aceleración de la partícula del problema 29. (*c*) ¿Cuál es la primera vez que la partícula está en $x = 0$ y moviéndose hacia la derecha?

33 •• Resolver el problema 31 para el caso en que la partícula está inicialmente en $x = 25$ cm y se está moviendo con velocidad $v_0 = +50$ cm/s.

34 •• Una partícula oscilante tiene un periodo de 8 s y una amplitud de 12 cm. En el tiempo $t = 0$, se encuentra en la posición de equilibrio. Determinar la distancia recorrida durante el intervalo (*a*) $t = 0$ a $t = 2$ s, (*b*) $t = 2$ s a $t = 4$ s, (*c*) $t = 0$ a $t = 1$ s y (*d*) $t = 1$ s a $t = 2$ s.

35 •• El periodo de una partícula oscilante es 8 s. En $t = 0$, la partícula está en reposo en $x = \text{A} = 10$ cm. (*a*) Hacer un gráfico de x en función de t. (*b*) Hallar la distancia recorrida en el primer, segundo, tercer y cuarto segundo después de $t = 0$.

36 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En las especificaciones militares es frecuente que exijan que los dispositivos electrónicos sean capaces de resistir aceleraciones de $10g = 98{,}1\text{ m/s}^2$. Para asegurarse de que sus productos cumplen con esta especificación, los fabricantes los someten a ensayos en una mesa vibrante que puede hacer vibrar un equipo a diversas frecuencias y amplitudes especificadas. Si un determinado dispositivo se somete a una vibración de 1,5 cm de amplitud, ¿cuál deberá ser su frecuencia para que cumpla con la especificación militar de los $10g$?

37 •• La posición de una partícula viene dada por $x = 2{,}5\cos \pi t$, donde x se expresa en metros y t en segundos. (*a*) Determinar la velocidad máxima y la aceleración máxima de la partícula. (*b*) Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $x = 1{,}5$ m. SSM

38 ••• (*a*) Demostrar que $A_0\cos(\omega t + \delta)$ puede escribirse también como $A_s\,\text{sen}(\omega t) + A_c\cos(\omega t)$, y determinar A_s y A_c en función de A_0 y δ. (*b*) Relacionar A_s y A_c con la posición y la velocidad iniciales de una partícula que experimenta un movimiento armónico simple.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MOVIMIENTO CIRCULAR

39 • Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 40 cm con una velocidad constante de 80 cm/s. Hallar (*a*) la frecuencia y el periodo del movimiento de la componente x de su posición. (*b*) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la partícula en función del tiempo t, suponiendo que la partícula está sobre el eje x en el instante $t = 0$. SSM

40 • Una partícula se mueve sobre una circunferencia de radio 15 cm, dando 1 revolución cada 3 s. (*a*) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la partícula? (*b*) ¿Cuál es su velocidad angular ω? (*c*) Escribir una ecuación para la componente x de la posición de la partícula en función de t, suponiendo que está sobre el eje x positivo en el instante $t = 0$.

LA ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

41 • Un objeto de 2,4 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza $k = 4{,}5$ kN/m. El otro extremo del muelle está quieto. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar su energía total.

42 • Determinar la energía total de un objeto de 3 kg que oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 10 cm y una frecuencia de 2,4 Hz.

43 • Un objeto de 1,5 kg oscila con movimiento armónico simple unido a un muelle de constante de fuerza $k = 500$ N/m. Su velocidad máxima es 70 cm/s. (*a*) ¿Cuál es la energía total? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la oscilación? SSM

44 • Un objeto de 3 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento está unido a un muelle de constante de fuerza 2 kN/m. El sistema tiene una energía total de 0,9 J. (*a*) ¿Cuál es la amplitud del movimiento? (*b*) ¿Cuál es su velocidad máxima?

45 • Un objeto que descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento oscila unido a un muelle con una amplitud de 4,5 cm. Su energía mecánica total es 1,4 J. ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle?

46 •• Un objeto de 3 kg descansa sobre una superficie horizontal sin rozamiento y oscila sobre un muelle con una amplitud de 8 cm. Su aceleración máxima es 3,50 m/s^2. Determinar la energía total.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MUELLES

47 • Un objeto de 2,4 kg está sujeto a un muelle horizontal de constante de fuerza $k = 4{,}5$ kN/m. El muelle se estira 10 cm desde el equilibrio y se deja en libertad. Determinar (*a*) la frecuencia del movimiento, (*b*) el periodo, (*c*) la amplitud, (*d*) la velocidad máxima y (*e*) la aceleración máxima. (*f*) ¿Cuándo alcanza el objeto por vez primera su posición de equilibrio? ¿Cuál es su aceleración en ese instante?

48 • Responder a las cuestiones del problema 47 para un objeto de 5 kg sujeto a un muelle de constante de fuerza $k = 700$ N/m, teniendo en cuenta que el muelle está inicialmente separado 8 cm de la posición de equilibrio.

49 • Un objeto de 3 kg sujeto a un muelle horizontal oscila con una amplitud $A = 10$ cm y una frecuencia $f = 2{,}4$ Hz. (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle? (*b*) ¿Cuál es el periodo del movimiento? (*c*) ¿Cuál es la velocidad máxima del objeto? (*d*) ¿Cuál es la aceleración máxima del objeto? SSM

50 • Al subir una persona de 85 kg a un coche de masa 2400 kg, sus ballestas descienden 2,35 cm. Suponiendo que empieza oscilando verticalmente y que no hay amortiguamiento, ¿con qué frecuencia vibrará el coche y el pasajero sobre las ballestas?

51 • Un objeto de 4,5 kg oscila sobre un muelle horizontal con una amplitud de 3,8 cm. Su aceleración máxima es de 26 m/s^2. Determinar (*a*) la constante de fuerza k, (*b*) la frecuencia y (*c*) el periodo del movimiento.

52 •• Un objeto de masa m está colgado de un muelle vertical de constante 1800 N/m. Cuando se estira de él hacia abajo separándolo 2,5 cm del equilibrio y se le deja en libertad desde el reposo, el objeto oscila con una frecuencia de 5,5 Hz. (*a*) Hallar m. (*b*) Hallar cuánto se estira el muelle a partir de su longitud natural cuando el objeto está en equilibrio. (*c*) Escribir expresiones para el desplazamiento x, la velocidad v_x y la aceleración a_x en función de t.

53 •• Un objeto de masa desconocida se cuelga verticalmente del extremo de un muelle sin deformación, y se suelta desde el reposo. Cae 3,42 cm antes de que quede en reposo por primera vez. Hallar el periodo del movimiento.

54 •• Una maleta de 20 kg de masa cuelga de dos cuerdas, tal como se muestra en la figura 14.27. Cada cuerda se alarga 5 cm cuando la maleta está en equilibrio. Si se estira la maleta un poco hacia abajo y se suelta, ¿cuál será la frecuencia de la oscilación?

FIGURA 14.27
Problema 54

55 •• Un bloque de 0,12 kg está suspendido de un muelle. Cuando una pequeña piedra de masa 30 g se sitúa sobre el bloque, el muelle se alarga 5 cm más. Con la piedra sobre el bloque, el muelle oscila con una amplitud de 12 cm. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del movimiento? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el bloque en recorrer la distancia entre el punto más bajo y el punto más alto? (*c*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la piedra cuando se encuentra en un punto de máximo desplazamiento hacia arriba?

56 •• Determinar en el problema 55 la máxima amplitud de oscilación para la cual la piedra permanece sobre el bloque.

57 •• Un objeto de masa 2,0 kg está sujeto en la parte superior de un muelle vertical que está anclado en el suelo. La longitud natural del muelle es de 8,0 cm y la longitud del muelle cuando el objeto está en equilibrio es de 5,0 cm. Cuando el objeto está en reposo en su posición de equilibrio, se le da un impulso hacia abajo con un martillo, de tal manera que la velocidad inicial es de 0,3 m/s. (*a*) ¿A que máxima altura, respecto al nivel del suelo, se elevará el objeto? (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar la máxima altura la primera vez? (*c*) ¿Volverá el muelle a estar sin compresión? ¿Qué velocidad inicial mínima debe darse al objeto para que el muelle no tenga compresión en un instante dado?

58 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En un torno, un bloque de 950 kg de masa cuelga del extremo de un cable de 150 GN/m^2 de módulo de Young, 1,5 cm^2 de área transversal y 2,5 m de longitud. (*a*) ¿Cuánto se alargará el cable? (*b*) Suponiendo que el cable se comporta como un muelle simple, ¿cuál es la frecuencia de oscilación del bloque en el extremo del cable?

PÉNDULOS SIMPLES

59 • Determinar la longitud de un péndulo simple si su frecuencia para pequeñas amplitudes es de 0,75 Hz. SSM

60 • Hallar la longitud de un péndulo simple si el periodo del péndulo es 5 s.

61 • ¿Cuál sería el periodo del péndulo del problema 60 en la Luna, donde la aceleración de la gravedad es un sexto de la correspondiente a la Tierra?

62 • Si el periodo de un péndulo de 70 cm de longitud es 1,68 s, ¿cuál es el valor de g en el sitio donde está situado el péndulo?

63 • Un péndulo colgado en el hueco de una escalera de un edificio de 10 pisos se compone de una masa grande suspendida de un alambre de 34,0 m de longitud. ¿Cuál es su periodo de oscilación?

64 •• Demostrar que la energía total de un péndulo simple que se mueve con oscilaciones de pequeña amplitud ϕ_0 es, aproximadamente, $E \approx \frac{1}{2}mgL\phi_0^2$. *Sugerencia: utilizar la aproximación* $\cos\phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$ *para valores pequeños de* ϕ.

65 ••• Un péndulo simple de longitud L está sujeto a un carro que se desliza sin rozamiento hacia abajo por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como muestra la figura 14.28. Determinar el periodo de oscilación del péndulo que está sobre el carro deslizante. SSM

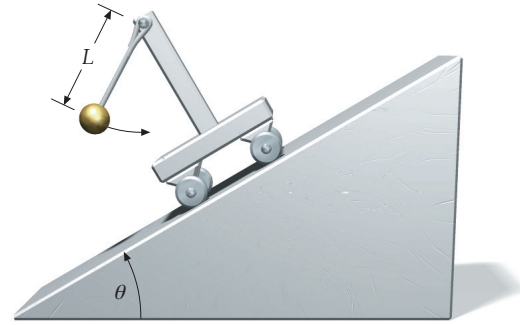


FIGURA 14.28 **Problema 65**

66 ••• Un péndulo simple de longitud L se libera partiendo del reposo desde un ángulo ϕ_0. (*a*) Suponiendo que el péndulo realiza un movimiento armónico simple, determinar su velocidad cuando pasa por la posición $\phi = 0$ utilizando la aproximación de pequeñas oscilaciones. (*b*) Considerando la conservación de la energía, determinar exactamente esta velocidad para cualquier ángulo. (*c*) Demostrar que los resultados de (*a*) y (*b*) coinciden cuando ϕ_0 es pequeño. (*d*) Determinar la diferencia entre estos resultados para $\phi_0 = 0{,}20$ rad y $L = 1$ m. (*e*) Determinar la diferencia entre estos resultados para $\phi_0 = 1{,}20$ rad y $L = 1$ m.

*PÉNDULOS FÍSICOS

67 • Un disco uniforme y delgado de 5 kg cuyo radio es de 20 cm, puede girar ligeramente en torno a un eje horizontal fijo perpendicular al disco y que pasa por su borde. El disco se desplaza ligeramente del equilibrio y se suelta. Hallar el periodo del movimiento armónico simple que se produce. SSM

68 • Un aro circular de 50 cm de radio se cuelga de una varilla horizontal delgada, a la que se permite oscilar en el plano del aro. ¿Cuál es el periodo de su oscilación, suponiendo que la amplitud es pequeña?

69 • Se suspende una figura plana de 3 kg de un punto situado a 10 cm de su centro de masas. Cuando está oscilando con amplitud pequeña, el periodo de oscilación es 2,6 s. Hallar el momento de inercia I respecto a un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por el punto de oscilación.

70 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO, CONCEPTUAL** Usted ha diseñando una gatera (puerta para gatos) que consiste en una pieza cuadrada de madera de 2,54 cm de grosor y 15,24 cm de lado con la bisagra en su parte superior. Para asegurarse de que el gato tiene suficiente tiempo de pasar a través de ella y no quedar atrapado, la puerta debería tener, a lo sumo, una frecuencia natural de 1 s. ¿Funcionará bien su diseño? En caso de respuesta negativa, indique las modificaciones que se deberían hacer.

71 •• Tenemos una regla y se nos pide que taladremos un agujero de tal modo que cuando pivotemos la regla sobre él, el periodo del péndulo sea un mínimo. ¿Dónde taladraremos el agujero?

72 •• La figura 14.29 muestra un disco uniforme de radio $R = 0{,}8$ m y masa 6 kg con un pequeño agujero a la distancia d del centro del disco que puede servir de punto de pivote. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que el periodo de este péndulo físico sea 2,5 s? (*b*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que este péndulo físico tenga el periodo menor posible? ¿Cuál es este periodo?

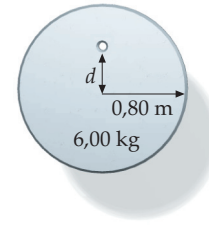


FIGURA 14.29
Problema 72

73 ••• Los puntos P_1 y P_2 de un objeto plano (figura 14.30) están a una distancia h_1 y h_2, respectivamente, del centro de masas. El objeto oscila con el mismo periodo T cuando rota libremente que si lo hace en torno a P_1 o a P_2. Ambos ejes son perpendiculares al plano del cuerpo. Demostrar que $h_1 + h_2 = gT^2/(4\pi^2)$, con $h_1 \neq h_2$. SSM

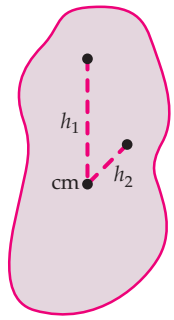


FIGURA 14.30
Problema 73

74 ••• Se construye un péndulo físico a partir de una lenteja esférica de radio r y masa m colgada de una cuerda (figura 14.31). La distancia desde el centro de la esfera al punto de suspensión es L. Cuando r es mucho menor que L, este péndulo suele considerarse como un péndulo simple de longitud L. (*a*) Demostrar que para pequeñas oscilaciones el periodo viene dado por $T = T_0\sqrt{1 + (2r^2/5L^2)}$, donde $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ es el periodo del péndulo simple de longitud L. (*b*) Demostrar que cuando r es mucho menor que L, el periodo vale, aproximadamente, $T \approx T_0(1 + r^2/5L^2)$. (*c*) Si $L = 1$ m y $r = 2$ cm, hallar el error cuando se utiliza la aproximación $T = T_0$ para este péndulo. ¿Qué tamaño deberá tener el radio de la lenteja para que el error sea del 1 por ciento?

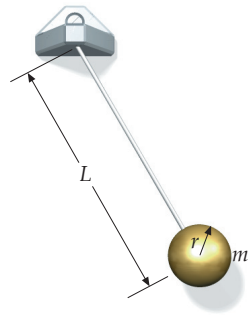


FIGURA 14.31
Problema 74

75 ••• La figura 14.32 muestra el péndulo de un reloj. La barra uniforme de longitud $L = 2{,}0$ m tiene una masa $m = 0{,}8$ kg. Sujeto a la barra hay un disco de masa $M = 1{,}2$ kg y radio 0,15 m. El reloj se ha construido de modo que funcione con total precisión si el periodo del péndulo es exactamente 3,50 s. (*a*) ¿Cuál debe ser la distancia d para que el periodo del péndulo sea 2,5 s? (*b*) Supongamos que el reloj de péndulo atrasase 5,0 min por día. ¿A qué distancia y en qué sentido debe desplazarse el disco para conseguir que el reloj marque correctamente el tiempo?

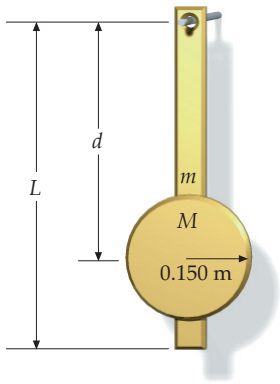


FIGURA 14.32
Problema 75

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

76 • Un objeto de 2 kg ligado a un muelle de constante $k = 400$ N/m oscila con una amplitud inicial de 3 cm. Hallar (*a*) el periodo y (*b*) la energía inicial total. (*c*) Si la energía disminuye en un 1 por ciento por periodo, hallar la constante de amortiguamiento b y el factor Q.

77 •• Demostrar que el cociente de las amplitudes de dos oscilaciones sucesivas en un oscilador subamortiguado es constante. SSM

78 •• Un oscilador tiene un periodo de 3 s. Su amplitud disminuye en un 5 por ciento durante cada ciclo. (*a*) ¿Cuánto disminuye su energía durante cada ciclo? (*b*) ¿Cuál es la constante de tiempo τ? (*c*) ¿Cuál es el factor Q?

79 •• Un oscilador lineal posee un factor Q igual a 20. (*a*) ¿En qué fracción disminuye la energía en cada ciclo? (*b*) Utilizar la ecuación 14.40 para determinar la diferencia en porcentaje entre ω' y ω_0. *Sugerencia: utilizar la aproximación* $(1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ *para valores pequeños de* x.

80 •• Un sistema masa-muelle amortiguado lineal oscila con una frecuencia de 200 Hz. La constante de tiempo del sistema es 2,0 s. En el tiempo $t = 0$, la amplitud de oscilación es 6,0 cm y la energía del sistema oscilante es 60 J. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de oscilación para $t = 2{,}0$ s y para $t = 4{,}0$ s? (*b*) ¿Cuánta energía se disipa en el primer intervalo de 2 s? ¿Y en el segundo intervalo de 2 s?

81 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Se ha establecido que cuando la Tierra vibra tiene un periodo de resonancia de 54 min y un factor Q de aproximadamente 400, y que después de un gran terremoto, la Tierra "tiembla" (se produce una vibración continua) durante dos meses. (*a*) Determinar el porcentaje de energía de vibración perdida debido a las fuerzas de amortiguamiento en cada ciclo. (*b*) Demostrar que después de n periodos, la energía es $E_n = (0{,}984)^n E_0$, siendo E_0 la energía inicial. (*c*) Si la energía inicial de vibración de un terremoto es E_0, ¿cuál es la energía al cabo de 2 días? SSM

82 ••• Un péndulo compacto que se usa en un experimento de física tiene una masa de 15 g y una longitud de 75 cm. Para que el péndulo comience a oscilar, un estudiante de física instala un ventilador, que produce un flujo horizontal de aire de velocidad 7 m/s hacia la lenteja. Con el ventilador en marcha, la lenteja está en equilibro cuando el péndulo está inclinado 5° respecto la dirección vertical. Cuando se para el ventilador, se deja que el péndulo oscile. (*a*) Si suponemos que la fuerza de resistencia a causa del aire viene dada por $-bv$, ¿cuál es la constante de tiempo o tiempo de extinción τ de las oscilaciones del péndulo? (*b*) ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la amplitud de la oscilación sea de 1°?

83 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Se trata de medir la viscosidad de ciertos aceites de la siguiente manera: la viscosidad de un fluido puede medirse determinando el tiempo que tardan en decaer las oscilaciones de un oscilador inmerso en ese fluido, cuando se conocen previamente las propiedades del oscilador. Como las velocidades a las que se moverá el oscilador no son grandes, sino más bien pequeñas, no habrá turbulencia y la fuerza de arrastre del fluido sobre una esfera de radio a que se mueve a velocidad v será $F_d = 6\pi a\eta v$, donde η es la viscosidad del fluido. Supongamos que el oscilador está formado por un muelle de constante elástica 350 N/cm y una esfera de oro de 6 cm de radio que cuelga del muelle. (*a*) ¿Cuál es la viscosidad del fluido si la constante de tiempo es de 2,8 s? (*b*) ¿Cuánto vale el factor Q? SSM

OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

84 • Un oscilador amortiguado pierde el 2 por ciento de su energía en cada ciclo. (*a*) ¿Cuál es su factor Q? (*b*) Si su frecuencia de resonancia es 300 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia $\Delta\omega$ cuando el oscilador está forzado?

85 • Determinar la frecuencia de resonancia de cada uno de los tres sistemas indicados en la figura 14.33.

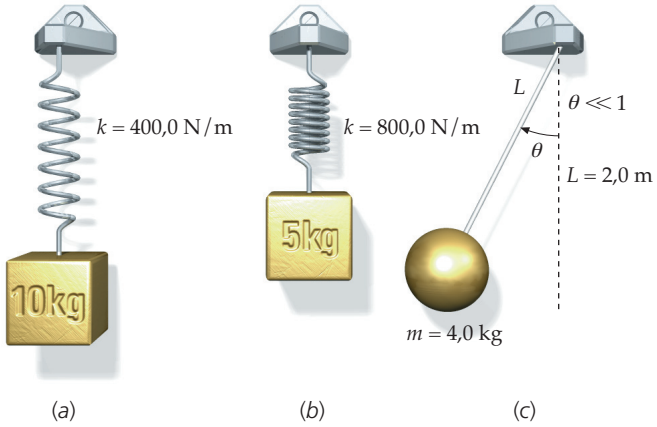


FIGURA 14.33 Problema 85

86 •• Un oscilador amortiguado pierde el 3,5 por ciento de su energía durante cada ciclo. (*a*) ¿Cuántos ciclos han de transcurrir antes de que se disipe la mitad de su energía? (*b*) ¿Cuál es el factor *Q*? (*c*) Si la frecuencia natural es 100 Hz, ¿cuál es la anchura de la curva de resonancia cuando el oscilador se ve forzado exteriormente?

87 •• Un objeto de 2 kg oscila sobre un muelle de constante de fuerza $k = 400$ N/m. La constante de amortiguamiento es $b = 2{,}00$ kg/s. Está forzado por una fuerza sinusoidal de valor máximo 10 N y frecuencia angular $\omega = 10$ rad/s. (*a*) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones? (*b*) Si se varía la frecuencia de la fuerza impulsora, ¿a qué frecuencia se producirá la resonancia? (*c*) Hallar la amplitud de las vibraciones en la resonancia. (*d*) ¿Cuál es la anchura $\Delta\omega$ de la curva de resonancia? SSM

88 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supongamos que tenemos el mismo oscilador que el del problema 83, pero ahora la constante elástica del muelle es de 35 N/cm. Se ha estudiado la viscosidad del etilenglicol con ese método y se ha determinado que su viscosidad es 19,9 mPa · s. Ahora decidimos forzar el sistema con una fuerza externa. (*a*) Si el módulo de la fuerza externa es 0,11 N y se alcanza la resonancia, ¿cuál sería el valor de la amplitud de la oscilación resultante? (*b*) Si el sistema no se forzara, pero se le permite oscilar, ¿qué porcentaje de energía se perdería por ciclo?

PROBLEMAS GENERALES

89 • **MÚLTIPLES PASOS** El desplazamiento de una partícula viene dado por $x = 0{,}4 \cos(3t + \pi/4)$, donde x se expresa en metros y t en segundos. (*a*) Hallar la frecuencia f y el periodo T del movimiento. (*b*) Obtener la expresión para la velocidad en función del tiempo. (*c*) ¿Cuál es su máxima velocidad?

90 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un astronauta llega a un nuevo planeta y lleva consigo un simple dispositivo para medir la aceleración de la gravedad allí. El radio del planeta es de 7550 km y el péndulo de 0,5 m de longitud tiene un periodo de 1 s. ¿Cuál es la masa del planeta?

91 •• Un reloj de péndulo funciona correctamente en la superficie de la Tierra. ¿En qué situación el error será mayor: si el reloj se baja a una mina de profundidad h o si se eleva a una altura h? Suponer que $h \ll R_T$.

92 •• La figura 14.34 muestra un péndulo de longitud L con una lenteja de masa M. La lenteja está unida a un muelle de constante k, como se indica. Cuando la lenteja está directamente por debajo del soporte del péndulo, el muelle tiene su longitud natural de equilibrio. (*a*) Deducir una expresión para el periodo de este sistema oscilante para vibraciones de pequeña amplitud. (*b*) Suponer que $M = 1$ kg y L es tal que en ausencia del muelle el periodo es 2,0 s. ¿Cuál es la constante de fuerza del muelle k si el periodo del sistema oscilante es 1,0 s?

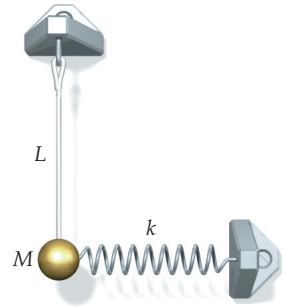


FIGURA 14.34 Problema 92

93 •• Una masa m_1 que se desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento está sujeta a un muelle de constante de fuerza k y oscila con amplitud A. Cuando el muelle está con su mayor deformación y la masa está instantáneamente en reposo, se coloca en la parte superior de m_1 otra masa m_2. (*a*) ¿Cuál es el menor valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e que permite que m_2 no se deslice sobre m_1? (*b*) Explicar cómo se modifican la energía total E, la amplitud A, la frecuencia angular ω y el periodo T al situar m_2 sobre m_1, suponiendo que el rozamiento es suficientemente grande para que no haya deslizamiento. SSM

94 •• Una caja de 100 kg de masa cuelga del techo de una habitación sujeta a un muelle de constante 500 N/m. El muelle tiene una longitud natural de 0,5 m. (*a*) Determinar la posición de equilibrio de la caja. (*b*) Un muelle idéntico se cuelga del techo y se sujeta a la misma caja, al lado del anterior. Determinar qué frecuencia tendrán las oscilaciones cuando se libere la caja. (*c*) ¿Cuál será la nueva posición de equilibrio de la caja cuando acabe parándose?

95 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La aceleración causada por la fuerza de la gravedad g varía con la situación geográfica, debido a la rotación de la Tierra y a que la Tierra no es exactamente esférica. Este hecho fue descubierto por primera vez durante el siglo XVII, cuando se observó que un reloj de péndulo cuidadosamente ajustado para marcar el tiempo correcto en París, se atrasaba alrededor de 90 s/día cerca del ecuador. (*a*) Demostrar que una pequeña variación en la aceleración de la gravedad Δg produce un pequeño cambio ΔT en el periodo de un péndulo dado por $\Delta T/T \approx -\frac{1}{2}\Delta g/g$. (*b*) ¿Qué variación de g se necesita para justificar un cambio de periodo de 90 s/día?

96 •• Un bloque pequeño de masa m_1 descansa sobre un pistón que está vibrando verticalmente con movimiento armónico simple dado por $y = A \operatorname{sen} \omega t$. (*a*) Demostrar que el bloque se separará del pistón si $\omega^2 A > g$. (*b*) Si $\omega^2 A = 3g$ y $A = 15$ cm, ¿en qué instante el bloque se separará del pistón?

97 •• Demostrar que en los dos casos de la figura 14.35*a* y *b*, el objeto oscila con una frecuencia $f = (1/2\pi)\sqrt{k_{ef}/m}$, donde k_{ef} viene dado por (*a*) $k_{ef} = k_1 + k_2$ y (*b*) $1/k_{ef} = 1/k_1 + 1/k_2$. (*Sugerencia: hallar la fuerza neta* F *sobre el objeto para un pequeño desplazamiento* x, *y escribir* $F = -k_{ef}\,x$. *Obsérvese que en (b) los muelles se deforman en cantidades diferentes cuya suma es* x.) SSM

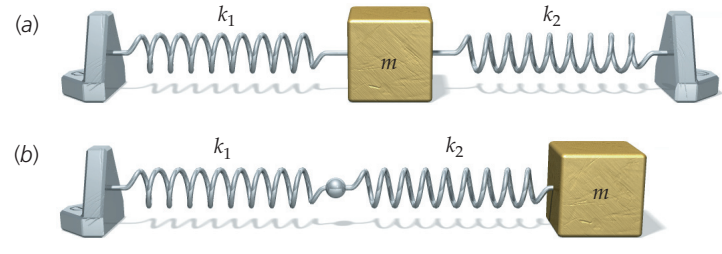


FIGURA 14.35 Problema 97

98 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Durante un terremoto, el suelo horizontal oscila con un movimiento armónico simple. Supongamos que el periodo es de 0,8 s. (*a*) Tras el terremoto, las imágenes registradas en los vídeos mostraban cómo una caja empezaba a deslizarse sobre el suelo

cuando la amplitud de las oscilaciones alcanzaba 10 cm. A partir de esos datos, determinar el coeficiente estático del suelo. (*b*) Si el coeficiente de rozamiento entre el suelo y la caja fuera de 0,4, ¿cuál sería la amplitud máxima de vibración antes de que la caja empezara a deslizarse?

99 •• Si atamos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 a los dos extremos de un muelle de constante k y los hacemos oscilar, demostrar que la frecuencia de oscilación es $\omega = (k/\mu)^{1/2}$, donde $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema.

100 •• Una de las formas de vibración de la molécula de HCl tiene una frecuencia de $8{,}969 \times 10^{13}$ Hz. Usando la relación deducida en el problema 99, determinar la constante k de la molécula de HCl.

101 •• Si se reemplaza el átomo de hidrógeno de la molécula de HCl por un átomo de deuterio, ¿cuál será la nueva frecuencia de vibración de la molécula? (El átomo de deuterio está formado por un protón y un neutrón.)

102 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Un bloque de masa m situado sobre una mesa horizontal está unido a un muelle de constante k, como se muestra en la figura 14.36. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la masa es μ_c. Se estira el muelle una longitud A siendo $kA > \mu_c mg$, y luego se le deja libre. (*a*) Aplicar la segunda ley de Newton al bloque para obtener una ecuación para su aceleración d^2x/dt^2 durante el primer medio ciclo, durante el cual el bloque se está moviendo hacia la izquierda. Demostrar que la ecuación resultante puede escribirse como $d^2x'/dt^2 = -\omega^2x'$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$ y $x' = x - x_0$, con $x_0 = \mu_k mg/k = \mu_k g/\omega^2$. (*b*) Repetir el apartado (*a*) para el segundo semiciclo, cuando el bloque se mueve hacia la derecha y demostrar que $d^2x''/dt^2 = -\omega^2x''$, si $x'' = x + x_0$ y x_0 tienen el mismo valor. (*c*) Utilizar una **hoja de cálculo** para hacer un gráfico de los primeros 5 semiciclos para $A = 10x_0$. Describir el movimiento, si lo hay, después del quinto semiciclo.

FIGURA 14.36 Problema 102

103 ••• La figura 14.37 muestra un semicilindro de masa M y radio R que descansa sobre una superficie horizontal. Si un lado del semicilindro se empuja ligeramente y luego se libera, el objeto oscilará alrededor de su posición de equilibrio. Determinar el periodo de esta oscilación. SSM

FIGURA 14.37 Problema 103

104 ••• Se perfora un túnel pequeño a través de la Tierra, como se indica en la figura 14.38. Suponer que las paredes carecen de rozamiento. (*a*) La fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre una partícula de masa m a una distancia r del centro de la misma cuando $r < R_T$ es $F_r = -(GmM_T/R_T^3)r$, donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente. (*a*) Demostrar que la fuerza neta sobre una partícula de masa m situada a una distancia x del centro del túnel viene dada por $F_x = -(GmM_T/R_T^3)x$ y que el movimiento de la partícula es, por consiguiente, armónico. (*b*) Demostrar que el periodo del movimiento viene dado por $T = 2\pi\sqrt{R_T/g}$. (*c*) Hallar su valor en minutos.

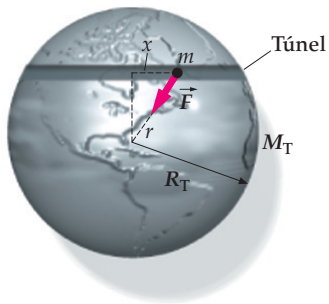


FIGURA 14.38 Problema 104

105 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En este problema hay que obtener la expresión correspondiente a la potencia media cedida por una fuerza impulsora a un oscilador forzado (figura 14.39).

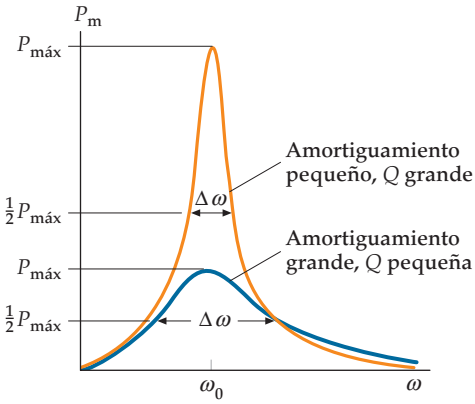


FIGURA 14.39 Problema 105

(*a*) Demostrar que la potencia instantánea cedida por la fuerza impulsora es $P = Fv = -A\omega F_0 \cos\omega t \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$.
(*b*) Utilizar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2$ para demostrar que esta última expresión puede escribirse $P = A\omega F_0 \operatorname{sen}\delta \cos^2\omega t - A\omega F_0 \cos\delta \cos\omega t \operatorname{sen}\omega t$.
(*c*) Demostrar que el valor medio del segundo término del resultado del apartado (*b*) calculado en uno o más periodos es cero y que, por lo tanto, $P_m = \frac{1}{2}A\omega F_0 \operatorname{sen}\delta$.
(*d*) A partir de la ecuación 14.56 para tg δ, construir un triángulo rectángulo en el que el cateto opuesto al ángulo δ sea $b\omega$ y el adyacente sea $m(\omega_0^2 - \omega^2)$, y utilizar este triángulo para demostrar que

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{b\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{b\omega A}{F_0}$$ SSM

(*e*) Utilizar este resultado de (*d*) para eliminar ωA, de forma que la potencia media cedida pueda escribirse

$$P_m = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{b}\operatorname{sen}^2\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{b\omega^2F_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}\right]$$

106 ••• **MÚLTIPLES PASOS** En este problema debe de utilizarse el resultado del problema 105 para deducir la ecuación 14.51, que relaciona la anchura de la curva de resonancia con el valor de Q cuando la resonancia es aguda. En la resonancia, el denominador de la fracción entre corchetes de la ecuación del problema 105*e* es $b^2\omega_0^2$ y P_m tiene un valor máximo. En el caso de una resonancia aguda, la variación de ω del numerador puede despreciarse. Entonces, la potencia cedida será la mitad de su valor máximo en los valores de ω para los cuales el denominador sea $2b^2\omega_0^2$.
(*a*) Demostrar entonces que ω satisface $m^2(\omega - \omega_0)^2(\omega + \omega_0)^2 \approx b^2\omega_0^2$.
(*b*) Utilizando la aproximación $\omega + \omega_2 \approx 2\omega_0$, demostrar que $\omega - \omega_0 \approx \pm b/2m$.
(*c*) Expresar b en función de Q.
(*d*) Combinar los resultados de (*b*) y (*c*) para demostrar que existen dos valores de ω para los que la potencia cedida es la mitad de la correspondiente a la resonancia y que vienen dados por

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}$$

Por consiguiente, $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0/Q$, que es equivalente a la ecuación 14.51.

107 ••• **HOJA DE CÁLCULO** El potencial de Morse, que frecuentemente se usa para representar las fuerzas interatómicas, puede escribirse de la forma $U(r) = D(1 - e^{-\beta(r - r_0)})^2$, donde r es la distancia entre los dos núcleos atómicos. (*a*) Usando una **hoja de cálculo** o una **calculadora gráfica**, representar gráficamente el potencial de Morse usando $D = 5$ eV, $\beta = 0{,}2$ nm^{-1} y $r_0 = 0{,}75$ nm. (*b*) Determinar a partir del potencial de Morse la separación de equilibrio y la constante k para pequeños desplazamientos del equilibrio. (*c*) Determinar una fórmula para la frecuencia de oscilación de una molécula diatómica homonuclear (es decir, con los dos átomos iguales) si cada átomo tiene una masa m.

CAPÍTULO 15

La grúa de un buque la Administración Nacional Americana de la Atmósfera y Océanos (NOAA) utiliza una boya DART para el estudio de los tsunamis en el Océano Pacífico Norte. En diciembre de 2004, el tsunami producido por el terremoto que tuvo lugar en el Océano Índico (también conocido como el terremoto Sumatra-Andaman) causó cientos de miles de muertos. Los dispositivos de detección de tsunamis como el DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis) pueden prevenir este tipo de catástrofes mediante la predicción del tiempo que tardarán las olas gigantes en llegar a tierra *(Gentileza de NOAA and the Harbor Branch Oceanographic Institution.)*

Movimiento ondulatorio

15.1 Movimiento ondulatorio simple
15.2 Ondas periódicas
15.3 Ondas en tres dimensiones
15.4 Ondas y barreras
15.5 Efecto Doppler

? ¿Por qué las ondas de un tsunami viajan más rápido que las ondas superficiales oceánicas? (Véase el ejemplo 15.2.)

En el capítulo 14, vimos el movimiento oscilatorio y objetos que se mueven periódicamente. En este capítulo, nos ocuparemos de la física de las ondas. Las ondas viajan a través de diferentes medios, tales como el agua, el aire y la tierra, y viajan a través del espacio donde no hay ningún medio sobre el que viajar. Basta pensar en las ondas oceánicas, la música, los terremotos y la luz solar. Las ondas transportan energía y momento, pero no transportan materia.

El estudio del movimiento ondulatorio ha dado lugar a muchos y fascinantes inventos. Los radares de la policía y los dispositivos que abren las puertas de los garages utilizan ondas electromagnéticas, pero con fines muy distintos; mientras unas se utilizan para determinar las velocidad de los conductores, las otras abren puertas a varios metros de distancia. Los equipamientos sonográficos que utilizan ondas ultrasónicas permiten obtener imágenes del feto en el útero de la madre. Entender cómo actúan las ondas cuando se encuentran con obstáculos ayuda a los arquitectos a diseñar los espacios con la mejor acústica para los conciertos.

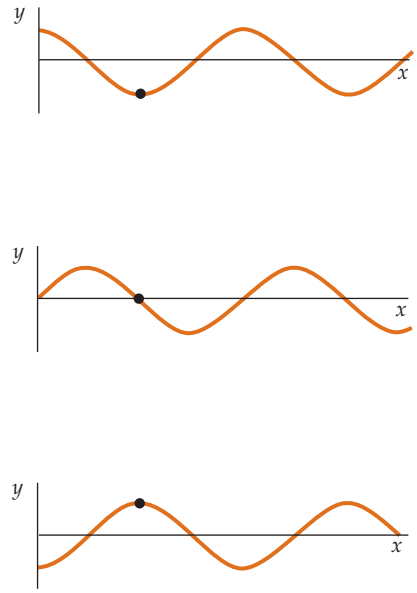
En este capítulo, seguimos analizando el movimiento oscilatorio estudiando las ondas periódicas, en especial las ondas armónicas. También estudiaremos cómo se mueven las ondas en tres dimensiones y exploraremos qué sucede cuando las ondas encuentran obstáculos. Finalmente, analizaremos el efecto Doppler y discutiremos su relevancia en el mundo que nos rodea.

15.1 MOVIMIENTO ONDULATORIO SIMPLE

ONDAS TRANSVERSALES Y LONGITUDINALES

Las ondas mecánicas se originan mediante una perturbación de un medio. Cuando se pulsa una cuerda tensa, la perturbación provocada se propaga a lo largo de ella en forma de un pulso ondulatorio. En este caso, la perturbación consiste en la variación de la forma de la cuerda a partir de su estado de equilibrio. Su propagación surge de la interacción de cada segmento de cuerda con los segmentos adyacentes. Los segmentos de la cuerda (el medio) se mueven en dirección perpendicular a la cuerda y, por lo tanto, perpendiculares a la dirección del movimiento del pulso. Una onda como esta en la que la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación se denomina **onda transversal** (figura 15.1). Una onda en la que la perturbación es paralela a la dirección de propagación se denomina **onda longitudinal** (figura 15.2). Las ondas sonoras son ejemplos de ondas longitudinales. Las moléculas de un gas, líquido o sólido a través del cual viaja el sonido, oscilan según la línea de propagación (moviéndose adelante y atrás), comprimiendo y enrareciendo alternativamente el medio.

(a)



(b)

FIGURA 15.1 (*a*) Pulso de una onda transversal en un muelle. La perturbación es perpendicular a la dirección del movimiento de la onda. (*b*) Tres dibujos sucesivos de una onda transversal que viaja hacia la derecha sobre un muelle. Un elemento de la cuerda (punto negro) se mueve hacia arriba y abajo conforme las crestas y las depresiones viajan hacia la derecha. *(Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

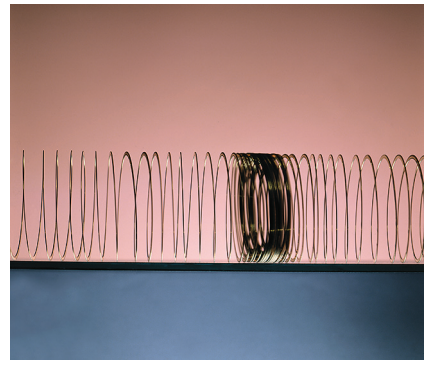


FIGURA 15.2 Pulso de una onda longitudinal en un muelle. La perturbación se desplaza en la dirección de movimiento de la onda. *(Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

PULSOS DE ONDA

En la figura 15.3*a* se muestra un pulso en una cuerda en el instante $t = 0$. La forma de la cuerda en este instante puede representarse por una función $y = f(x)$. Un cierto tiempo después (figura 15.3*b*), el pulso se ha desplazado por la cuerda, de modo que en un nuevo sistema de coordenadas con origen O' que se mueve con la velocidad del pulso, éste es estacionario. La cuerda se describe en este nuevo sistema por $f(x')$ en todo instante. Las coordenadas de los dos sistemas de referencia están relacionadas por

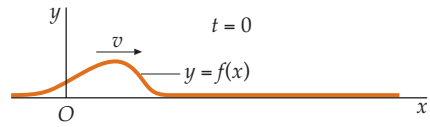
$$x' = x - vt$$

y, por lo tanto, $f(x') = f(x - vt)$. Así pues, el desplazamiento de la cuerda en el sistema original O puede escribirse

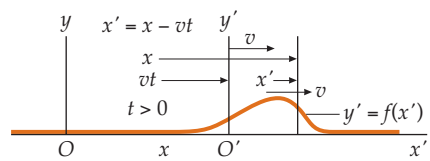
$$y = f(x - vt) \qquad \text{onda moviéndose en el sentido positivo de } x \qquad 15.1$$

Esta misma línea de razonamiento aplicada al caso de un pulso que se mueve hacia la izquierda conduce a

$$y = f(x + vt) \qquad \text{onda moviéndose en el sentido negativo de } x \qquad 15.2$$



(a)



(b)

FIGURA 15.3

En estas dos expresiones, v es el módulo de la velocidad de propagación de la onda. (Como v es el módulo de la velocidad, y no el vector velocidad, se trata de una cantidad positiva.) La función $y = f(x - vt)$ se denomina **función de onda**. En el caso de ondas en una cuerda, la función de onda representa el desplazamiento transversal de la cuerda. Para las ondas sonoras en el aire, la función de onda puede ser el desplazamiento longitudinal de las moléculas gaseosas o la presión del aire. Estas funciones de onda son soluciones de una ecuación diferencial llamada *ecuación de onda*, que puede deducirse de las leyes de Newton.

VELOCIDAD DE LAS ONDAS

Una propiedad general de las ondas es que su velocidad depende de las propiedades del medio siendo independiente del movimiento de la fuente de las ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido de la bocina de un coche depende sólo de las propiedades del aire y no del movimiento del coche.

En el caso de los pulsos de onda en una cuerda, es fácil demostrar que cuanto mayor es la tensión, más rápidamente se propagan las ondas. Además, las ondas se propagan más rápidamente en una cuerda ligera que en una cuerda pesada bajo la misma tensión. Veremos posteriormente que si F_T (usamos F_T para designar la tensión porque reservamos T para el periodo) es la tensión y μ la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud), la velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \qquad 15.3$$

VELOCIDAD DE LAS ONDAS EN UNA CUERDA

Ejemplo 15.1 El gusano que corre para salvar la vida

Un gusano está a 2,5 cm del extremo de la cuerda de un tendedero cuando la chica que está tendiendo su traje de baño en el otro extremo de la cuerda lo ve. La chica da un golpe a la cuerda de modo que por ésta se propaga un pulso de 3 cm de altura que se dirige hacia el animal. Si el gusano se mueve a 2,54 cm/s, ¿llegará al extremo de la cuerda antes que le alcance el movimiento generado por la chica? La cuerda tiene 25 m de longitud y una masa de 1 kg y se mantiene tensa gracias a un peso de 10 kg que cuelga de ella, tal como se muestra en la figura 15.4. La chica está tendiendo su traje de baño a una distancia de 5 m del extremo de la cuerda opuesto a la posición del gusano.

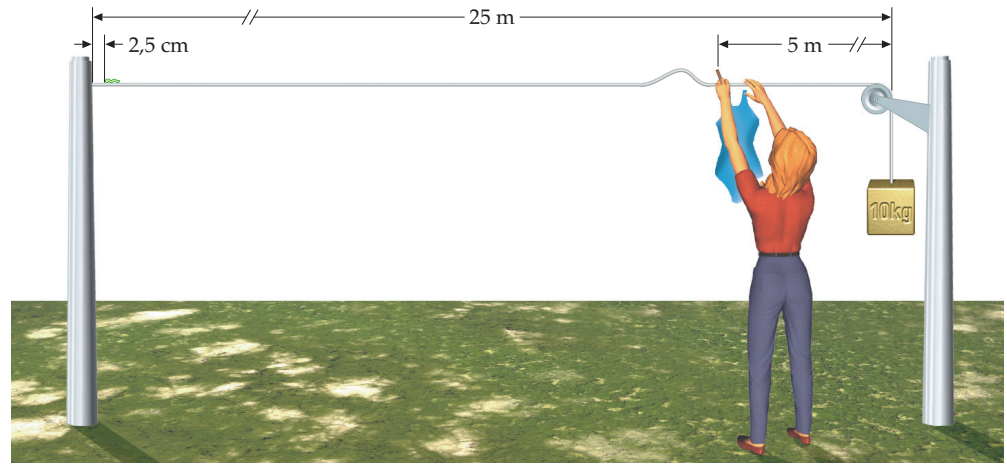


FIGURA 15.4

PLANTEAMIENTO Hay que saber a qué velocidad se mueve la onda. Para ello usamos la fórmula $v = \sqrt{F_T/\mu}$. Sea $m_s = 1{,}0$ kg la masa de la cuerda y $m = 10$ kg la masa del objeto que cuelga.

SOLUCIÓN

1. La velocidad está relacionada con la tensión F_T y la densidad de masa lineal m:
$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

2. Calcular la densidad de masa lineal y la tensión a partir de la información recibida:
$$\mu = \frac{m_s}{L} \qquad \text{y} \qquad F_T = mg$$

3. Aplicar estos valores a la expresión de v para calcular la velocidad:
$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_s}} = \sqrt{\frac{(10\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)(25\text{ m})}{1{,}0\text{ kg}}} = 49{,}5\text{ m/s}$$

4. A partir de la velocidad determinar el tiempo que tarda en recorrer los 20 m que le separan del otro extremo de la cuerda:
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{20\text{ m}}{49{,}5\text{ m/s}} = 0{,}40\text{ s}$$

5. Determinar el tiempo que invierte el gusano en moverse los 2,5 cm que le separan del extremo de la cuerda y, por lo tanto, de la salvación:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v'} = \frac{2{,}5\text{ cm}}{1\text{ in/s}} \times \frac{1\text{ in}}{2{,}54\text{ cm}} = 0{,}98\text{ s}$$

Como $\Delta t' > \Delta t$, el gusano no se escapa del pulso.

COMPROBACIÓN El pulso viaja a 49 m/s y el gusano a 0,025 m/s, es decir, el pulso va casi 2000 veces más rápido que el gusano.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.1 Demostrar que las unidades de $\sqrt{F_T/\mu}$ son m/s cuando F_T se expresa en newtons y μ en kg/m.

¡ El pulso del ejemplo 15.1 se mueve hacia la izquierda a 49 m/s; sin embargo, las partículas que forman la cuerda no lo hacen, sino que se mueven arriba y abajo conforme el pulso pasa a través de ellas.

Ejemplo 15.2 La velocidad de las ondas de gravedad superficiales

Las ondas de la superficie de los océanos son posibles gracias a la gravedad y se denominan *ondas de gravedad*. Las ondas de gravedad se denominan superficiales si la profundidad del agua es menor que la mitad de su longitud de onda. La velocidad de las ondas de gravedad superficiales depende de la profundidad de forma que $v = \sqrt{gh}$, donde h es la profundidad. Una onda de gravedad, en un océano de 5 km de profundidad, tiene una longitud de onda de 100 km. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la onda? (*b*) ¿Se trata de una onda superficial?

PLANTEAMIENTO Utilizamos $v = \sqrt{gh}$ para calcular la velocidad. Comprobar si la profundidad es menor que la mitad de su longitud de onda.

SOLUCIÓN

(*a*) Utilizando $v = \sqrt{gh}$, calculamos la velocidad de la onda:

$$v = \sqrt{gh} = \sqrt{(9{,}81\text{ m/s}^2)(5000\text{ m})} = \boxed{221\text{ m/s} = 797\text{ km/h}}$$

(*b*) La onda es superficial si la profundidad es menor que la mitad de su longitud de onda:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{5\text{ km}}{100\text{ km}} = \frac{1}{20}$$

La profundidad es igual a la longitud de onda dividida por 20, por lo que la onda es

$\boxed{\text{claramente superficial.}}$

COMPROBACIÓN Se sabe que los tsunamis viajan a velocidades de unos 800 km/h en el océano abierto, por lo que el resultado es lógico.

OBSERVACIÓN Supóngase que un tsunami es causado por un terremoto que levanta una placa del fondo del océano de unos 50 km de ancho a un metro de altura. Ese tsunami tendría una longitud de onda de unos 100 km y la amplitud de la onda sería de un metro, aproximadamente, en océano abierto. Las ondas oceánicas típicas tienen longitudes de onda de 100 m o menos, que son muy inferiores a las profundidades de océanos abiertos. Esas ondas son, por tanto, ondas de gravedad profundas y viajan a velocidades mucho menores de lo que lo hacen las ondas superficiales. En las aguas superficiales, como sucede con el agua cerca de la orilla, hay que tener en cuenta muchos otros factores que afectan al cálculo de la velocidad de las ondas.

En el caso de las ondas sonoras en un fluido como el aire o el agua, la velocidad v viene expresada por

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \qquad 15.4$$

donde ρ es la densidad del medio (en equilibrio) y B el módulo de compresibilidad* (ecuación 13.6). Comparando las ecuaciones 15.3 y 15.4, puede verse que, en general, la velocidad de las ondas depende de una propiedad elástica del medio (la tensión en el caso de las ondas de las cuerdas y el módulo de compresibilidad de las ondas sonoras) y de una propiedad inercial del mismo (la densidad de masa lineal o la densidad de masa volúmica).

* El módulo de compresibilidad es el cociente negativo entre el cambio en la presión y el cambio en el volumen (capítulo 13).

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

Para las ondas sonoras en un gas, tal como el aire, el módulo de compresibilidad* es proporcional a la presión, la cual a su vez es proporcional a la densidad ρ y a la temperatura absoluta T del gas. La relación B/ρ es, por lo tanto, independiente de la densidad y simplemente proporcional a la temperatura absoluta T. En el capítulo 17, demostraremos que, en este caso, la ecuación 15.4 es equivalente a

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad 15.5$$

VELOCIDAD DEL SONIDO EN UN GAS

En esta ecuación, T es la temperatura absoluta medida en kelvins (K) que está relacionada con la temperatura Celsius, t_C por

$$T = t_C + 273{,}15 \qquad 15.6$$

La constante adimensional γ depende del tipo de gas. Para moléculas diatómicas como el O_2 y N_2, γ tiene el valor 7/5, y como el O_2 y N_2 constituyen el 98% de la atmósfera, éste es el valor que corresponde también al aire. (Para moléculas monoatómicas como el He, γ posee el valor 5/3.)† La constante R es la constante universal de los gases,

$$R = 8{,}3145\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)} \qquad 15.7$$

y M la masa molar del gas (es decir, la masa de 1 mol del gas), que para el aire es

$$M = 29{,}0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}$$

Ejemplo 15.3 Velocidad del sonido en el aire *Inténtelo usted mismo*

Las carreras de atletismo de la primavera en un colegio del noreste americano empiezan a principios de abril, cuando la temperatura del aire es de unos 13 °C. A finales de temporada, el aire es mucho más cálido y su temperatura es de unos 33 °C. Calcular la velocidad del sonido en el aire producido por el pistoletazo de salida a (*a*) 13 °C y (*b*) 33 °C. Los corredores saldrán de sus puestos en cuanto vean salir el humo de la pistola en vez de esperar a oir el sonido del disparo.

PLANTEAMIENTO Las velocidades para las diferentes temperaturas se pueden obtener a partir de la ecuación 15.5 utilizando $\gamma = 7/5$ y $M = 29{,}0 \times 10^{-3}$ kg/mol.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
(*a*) 1. Escribir la ecuación 15.5 ($v = \sqrt{\gamma RT/M}$). Introducir los valores dados en la ecuación y despejar la velocidad. (Asegurarse de que la temperatura se convierte a kelvins.)	$v_a = \sqrt{\frac{\gamma RT_a}{M}} = \boxed{339\ \text{m/s}}$
(*b*) 1. Utilizar el hecho de que v es proporcional a $\sqrt{T}$ (ecuación 15.5) para relacionar las velocidades a 33 °C y 13 °C.	$\frac{v_b}{v_a} = \sqrt{\frac{T_b}{T_a}}$
2. Calcular v a 33 °C.	$v_b = \boxed{351\ \text{m/s}}$

COMPROBACIÓN El resultado del apartado (*b*) es mayor que el del apartado (*a*). Esto es debido a que la velocidad del sonido aumenta con la temperatura.

OBSERVACIÓN En este ejemplo vemos que la velocidad del sonido en el aire es aproximadamente 343 m/s a 20 °C (esta temperatura se conoce como temperatura ambiente).

PROBLEMA PRÁCTICO 15.2 Para el helio, $M = 4 \times 10^{-3}$ kg/mol y $\gamma = 1{,}67$. ¿Cuál es la velocidad de las ondas sonoras en helio a 20 °C?

* El **módulo de compresibilidad isotermo**, que describe cambios en el volumen que ocurren a temperatura constante, difiere del **módulo de compresibilidad adiabático**, que describe variaciones del volumen que se dan cuando no se produce transferencia de calor. En las ondas sonoras a las frecuencias audibles, los cambios de la presión se producen tan rápidamente que no hay tiempo para que se den flujos de calor y, por ello, estas ondas se describen mediante el módulo de compresibilidad adiabático.

† Los valores de γ para los gases monoatómicos y diatómicos se establecen en la sección 9 del capítulo 18.

Deducción de v para ondas en una cuerda La ecuación 15.3 ($v = \sqrt{F_T/\mu}$) se puede obtener aplicando el teorema del impulso-momento al movimiento de una cuerda. Supongamos que la mano sostiene por un extremo una cuerda larga que tiene una tensión F_T, mientras que el otro extremo de la cuerda está unido a una pared. La cuerda, que parte del reposo, se puede considerar uniforme, siendo μ la densidad por unidad de longitud. De repente, se empieza a mover la mano con una velocidad u constante hacia arriba. Tras un corto periodo de tiempo, la cuerda se encuentra cómo se muestra en la figura 15.5, con el punto del segmento inclinado que está más a la derecha moviéndose hacia la derecha a la velocidad de la onda v y el segmento inclinado ascendiendo a velocidad u. Aplicando el teorema del impulso-momento ($\vec{F}_m\,\Delta t = \Delta\vec{p}$) a la cuerda, se obtiene

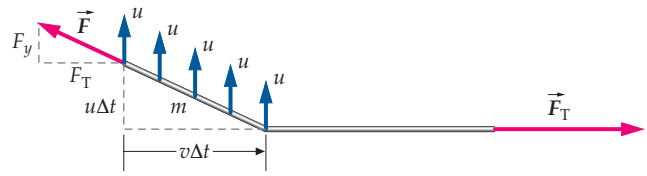


FIGURA 15.5 El punto en el que la cuerda pasa de la posición inclinada a la horizontal se mueve hacia la derecha con velocidad v, conforme el extremo de la cuerda se mueve a velocidad ascendente y constante u.

$$F_y\,\Delta t = mu - 0 \qquad 15.8$$

donde F_y es la componente vertical hacia arriba de la fuerza que ejerce la mano sobre la cuerda, m es la masa del segmento inclinado y Δt es el tiempo durante el cual la mano mueve la cuerda. Como los dos triángulos de la figura son semejantes,

$$\frac{F_y}{F_T} = \frac{u\,\Delta t}{v\,\Delta t} \qquad \text{o} \qquad F_y = \frac{u}{v}F_T$$

Sustituyendo F_y en la ecuación 15.8, da

$$\frac{u}{v}F_T\,\Delta t = (\mu v\,\Delta t)u$$

donde $\mu v\,\Delta t$ se ha reemplazado por m. Despejando v, se llega a

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

que es la expresión para la velocidad de la onda dada en la ecuación 15.3.

En el siguiente apartado, mostraremos que este resultado es válido no sólo para pulsos con la forma del de la figura 15.5 sino que también lo es para pulsos con una gran variedad de formas.

* LA ECUACIÓN DE ONDA

Podemos aplicar las leyes de Newton a un segmento de cuerda para deducir una ecuación diferencial llamada ecuación de onda, que relaciona las derivadas espaciales de la función $y(x, t)$ con sus derivadas temporales. La figura 15.6 muestra un segmento de una cuerda. Consideraremos sólo ángulos pequeños θ_1 y θ_2. En este caso, la longitud del segmento es, aproximadamente, Δx y su masa $m = \mu\,\Delta x$, donde μ es la masa de la cuerda por unidad de longitud. Primero, demostraremos que, para desplazamientos verticales pequeños, la fuerza resultante horizontal sobre un segmento es cero y que la tensión es uniforme y constante. Es decir,

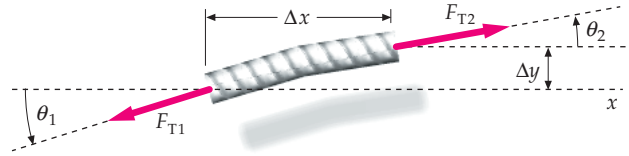


FIGURA 15.6 Segmento de una cuerda tensa utilizado para la deducción de la ecuación de onda. La fuerza vertical neta sobre el segmento es F_{T2} sen $\theta_2 - F_{T1}$ sen θ_1, siendo F_T la tensión en la cuerda. Se obtiene la ecuación de onda aplicando la segunda ley de Newton al segmento.

$$\Sigma F_x = F_{T2}\cos\theta_2 - F_{T1}\cos\theta_1 = 0$$

donde θ_2 y θ_1 son los ángulos indicados y F_T es la tensión en la cuerda. Como se supone que los ángulos son pequeños, podemos considerar que cos θ vale 1. Por lo tanto, la fuerza neta horizontal que actúa sobre el segmento de cuerda puede expresarse en la forma

$$\Sigma F_x = F_{T2} - F_{T1} = 0$$

Con lo cual,

$$F_{T2} = F_{T1} = F_T$$

El segmento de cuerda se mueve verticalmente y la fuerza neta en esta dirección es

$$\Sigma F_y = F_T\,\text{sen}\,\theta_2 - F_T\,\text{sen}\,\theta_1$$

Se supone que los ángulos son pequeños; por lo tanto, se puede sustituir sen θ por tg θ para cada uno de ellos. En estas condiciones, la fuerza vertical neta sobre el segmento de cuerda se escribe como

$$\sum F_y = F_T(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) \approx F_T(\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1)$$

La tangente del ángulo formado por la cuerda con la horizontal es la pendiente de la curva formada por la cuerda. La pendiente S es la primera derivada de $y(x, t)$ respecto a x para t constante. Una derivada de una función de dos variables respecto a una de ellas, manteniendo constante la otra, se conoce como derivada parcial. La derivada parcial de y respecto a x se escribe $\partial y/\partial x$. Así, tenemos

$$S = \operatorname{tg}\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

Por lo tanto,

$$\sum F_y = F_T(S_2 - S_1) = F_T\,\Delta S$$

donde S_1 y S_2 son las pendientes de ambos extremos del segmento de cuerda y ΔS la variación de la pendiente. Haciendo que esta fuerza neta sea igual a la masa $\mu\Delta x$ multiplicada por la aceleración $\partial^2 y/\partial t^2$, se tiene

$$F_T\,\Delta S = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{o} \qquad F_T\frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.9}$$

En el límite $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Así pues, la ecuación 15.9 se reduce a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.10a}$$

La ecuación 15.10a es la **ecuación de onda** para una cuerda tensa.

Ahora demostraremos que la ecuación de onda es satisfecha por cualquier función de $x - vt$. Hagamos $\alpha = x - vt$, y consideremos cualquier función de onda

$$y = y(x - vt) = y(\alpha)$$

La derivada de y respecto a α la denominaremos y'. Entonces, por la regla de derivación en cadena, tenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x} = y'\frac{\partial\alpha}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = y'\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

Dado que

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial(x - vt)}{\partial t} = -v$$

se obtiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = -vy'$$

Tomando segundas derivadas, tenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y'' \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v\frac{\partial y'}{\partial t} = -v\frac{dy'}{d\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = +v^2 y''$$

Así pues,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.10b}$$

ECUACIÓN DE ONDA

El mismo resultado se obtiene para cualquier función de $x + vt$. Comparando las ecuaciones 15.10*a* y 15.10*b*, vemos que la velocidad de propagación de la onda es $v = \sqrt{F_T/\mu}$, que es la ecuación 15.3.

Ejemplo 15.4 Función de onda armónica

En el apartado siguiente, veremos que las ondas armónicas se definen mediante la función de ondas $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - vt)$, donde $v = \omega/k$. Demostrar, resolviendo las segundas derivadas, que la función de onda satisface la ecuación 15.10*b*.

PLANTEAMIENTO Se puede probar esto resolviendo las derivadas parciales correspondientes y sustituyendo en la ecuación 15.10*b*.

SOLUCIÓN

1. Calcular la primera y segunda derivada de y respecto a x:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[A \operatorname{sen}(kx - \omega t)] = A \cos(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}kA \cos(kx - \omega t) = -kA \operatorname{sen}(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial x}$$

$$= -k^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

2. De igual modo, las dos derivadas parciales respecto al tiempo, t, son:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A \operatorname{sen}(kx - \omega t)] = A \cos(kx - \omega t)\frac{\partial(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t)\frac{\partial y(kx - \omega t)}{\partial t} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

3. Sustituyendo estos resultados en la ecuación 15.9*b*, se obtiene:

$$-k^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \frac{1}{v^2}[-\omega^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t)]$$

$$\text{o bien} \quad A \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \frac{\omega^2/k^2}{v^2} A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

4. Sustituyendo k utilizando $k = \omega/v$, se obtiene:

$A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ es una solución de la ecuación de onda (ecuación 15.9*b*), puesto que $(\omega^2/k^2)/v^2 = 1$. Es decir, debido a que $v = \omega/k$.

COMPROBACIÓN Cualquier función de la forma $y(x - vt)$ satisface la ecuación de onda 15.10*b*. Puesto que $v = \omega/k$, la función $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ es de la forma $y(x - vt)$. Para ver que esta función tiene la forma apropiada, basta con sustituir kv por ω

$$y = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) = A \operatorname{sen}(kx - kvt) = A \operatorname{sen}(k[x - vt])$$

que es de la forma $y(x - vt)$.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.3 Demostrar que cualquier función $y(kx + \omega t)$ satisface la ecuación 15.10*b*, puesto que $v = \omega/k$.

Deducción de v para ondas sonoras La velocidad del sonido viene dada por la ecuación 15.4, $v = \sqrt{B/\rho}$, donde B es el módulo de compresibilidad y ρ es la densidad del medio. Esta ecuación puede obtenerse aplicando nuevamente el teorema del impulso-momento al movimiento de aire en un gran cilindro (figura 15.7) con un pistón en un extremo y con el otro extremo abierto a la atmósfera. De repente, se mueve el pistón hacia la derecha a velocidad constante u. Tras un breve periodo de tiempo Δt, el pistón se habrá desplazado una distancia $u\,\Delta t$ y todo el aire encerrado en el cilindro imaginario de longitud $v\Delta t$ desde la posición inicial se moverá con velocidad u hacia la derecha. Aplicando el teorema del impulso-momento ($\vec{F}_m\,\Delta t = \Delta\vec{p}$) al aire dentro del cilindro, se obtiene

$$F\,\Delta t = mu - 0 \qquad 15.11$$

donde m es la masa del aire que se mueve con velocidad u y F es la fuerza neta que actúa sobre el aire del interior del cilindro. El aire estaba inicialmente en reposo. La

fuerza neta F está relacionada con el aumento de presión del aire que se mueve cerca del pistón mediante la relación

$$F = A\,\Delta P$$

donde A es el área de la sección transversal del cilindro.

El módulo de compresibilidad del aire es

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \qquad \text{luego} \qquad \Delta P = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{-Au\,\Delta t}{Av\,\Delta t} = B\frac{u}{v}$$

donde $Au\Delta t$ es el volumen barrido por el pistón y $Av\Delta t$ es el volumen inicial de aire que se mueve ahora con velocidad u. Sustituyendo el valor de F de la ecuación 15.11, da

$$A\Delta P\Delta t = mu \qquad \text{o} \qquad AB\frac{u}{v}\Delta t = (\rho Av\Delta t)u$$

donde $\rho Av\Delta t$ ha sido reemplazado por m. Despejando v, se llega a

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

que es justamente la ecuación 15.4.

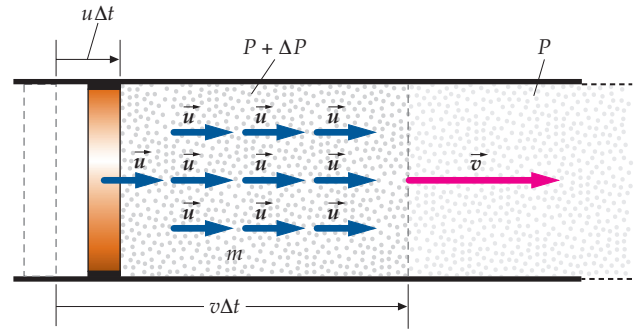


FIGURA 15.7 El aire que está cerca del pistón se mueve hacia la derecha con velocidad constante u que es la misma con la que se mueve el pistón. El extremo derecho de este pulso de presión se desplaza hacia la derecha a velocidad v. La presión en el pulso es mayor en un ΔP que la presión fuera del cilindro.

Utilizando las leyes de Newton puede deducirse también una ecuación de onda para las ondas sonoras. En una dimensión, esta ecuación es

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

donde s es el desplazamiento del medio en la dirección x y v_s es la velocidad del sonido en ese medio.

15.2 ONDAS PERIÓDICAS

Si el extremo de una cuerda tensa se mueve de forma periódica hacia arriba y hacia abajo, se genera una **onda periódica**. Si una onda periódica se mueve a lo largo de una cuerda tensa o en cualquier otro medio, cada punto del medio oscila con el mismo periodo.

ONDAS ARMÓNICAS

Las ondas armónicas constituyen la clase más básica de las ondas periódicas. Todas las ondas, tanto si son periódicas como si no lo son, pueden describirse como la suma de ondas armónicas. Por lo tanto, el conocimiento del movimiento de las ondas armónicas es fundamental para poder generalizar y obtener la descripción de cualquier clase de movimiento ondulatorio. Si una **onda armónica** se mueve por un medio, cada punto del medio oscila siguiendo un movimiento armónico simple.

Si un extremo de una cuerda se sujeta a un diapasón que está vibrando con movimiento armónico simple, se produce un tren de ondas sinusoidales que se propaga a lo largo de la cuerda. Este tren de ondas es una onda armónica. La forma de la cuerda es la de una función sinusoidal, como muestra la figura 15.8. La distancia mínima recorrida en el espacio hasta que la función de onda se repite (la distancia entre crestas, por ejemplo) se llama **longitud de onda** λ.

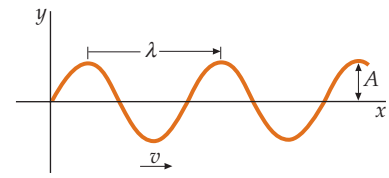


FIGURA 15.8 Onda armónica en un cierto instante de tiempo. A es la amplitud y λ es la longitud de onda. En el caso de ondas en una cuerda, se puede obtener esta figura tomando una fotografía de alta velocidad de la misma.

Cuando la onda se propaga por la cuerda, cada punto de la cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo (perpendicularmente a la dirección de propagación) experimentando un movimiento armónico simple cuya frecuencia f es la del diapasón. Durante un periodo T, la onda se mueve una distancia de una longitud de onda, de modo que la velocidad viene dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda \qquad 15.12$$

donde hemos utilizado la relación $T = 1/f$.

Como esta relación surge de las definiciones de longitud de onda y frecuencia, es válida para todas las ondas armónicas.

La función sinusoidal que describe los desplazamientos en la figura 15.8 es

$$y(x) = A\,\text{sen}\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

donde A es la amplitud, λ la longitud de onda y δ una constante de fase que depende de la elección del origen $x = 0$. Esta ecuación se expresa de forma más sencilla como

$$y(x) = A\,\text{sen}(kx + \delta) \qquad 15.13$$

donde k, el **número de onda**, viene dado por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad 15.14$$

Obsérvese que las dimensiones de k son m^{-1}. (Como el ángulo debe expresarse en radianes, a veces se escriben las unidades de k en la forma rad/m.) Cuando se trata con una única onda armónica se suele elegir el origen de modo que $\delta = 0$.

Para describir una onda que se mueve en el sentido creciente de x con velocidad v, sustituyamos x en la ecuación 15.13 por $x - vt$ (como hicimos con los "pulsos de onda" de la sección 15.1). Eligiendo δ igual a cero, se obtiene

$$y(x,t) = A\,\text{sen}\,k(x - vt) = A\,\text{sen}(kx - kvt)$$

o

$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad 15.15$$

FUNCIÓN DE ONDA ARMÓNICA

donde

$$\omega = kv \qquad 15.16$$

es la frecuencia angular y el argumento de la función seno, $(kx - \omega t)$, se denomina **fase**. La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia f y el periodo T mediante

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad 15.17$$

Sustituyendo $\omega = 2\pi f$ en la ecuación 15.16 y utilizando $k = 2\pi/\lambda$, se obtiene

$$2\pi f = kv = \frac{2\pi}{\lambda}v$$

o $v = f\lambda$, que es la ecuación 15.12.

Si una onda armónica que se mueve por una cuerda está descrita por $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$, en un punto fijo x la velocidad viene dada por

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[A\,\text{sen}(kx - \omega t)] = -\omega A\cos(kx - \omega t) \qquad 15.18$$

VELOCIDAD TRANSVERSAL

La aceleración en este punto viene dada por $\partial^2 y/\partial t^2$.

Ejemplo 15.5 Una onda armónica en una cuerda

La función de onda de una onda armónica que se mueve en una cuerda es $y(x,t) = (0{,}03\text{ m}) \times \text{sen}\,[(2{,}2\text{ m}^{-1})x - (3{,}5\text{ s}^{-1})t]$. (*a*) ¿En qué sentido se propaga esta onda y cuál es su velocidad? (*b*) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda. (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda? (*d*) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de la cuerda?

PLANTEAMIENTO (*a*) Para determinar el sentido de la onda, expresar $y(x, t)$ como una función de $(x - vt)$ o como una función $(x + vt)$ y utilizar las ecuaciones 15.1 y 15.2. Para determinar la velocidad, utilizar $\omega = kv$ (ecuación 15.16). (*b*) La longitud de onda, frecuencia y periodo pueden determinarse a partir del número de onda k y de la frecuencia angular ω. (*c*) El desplazamiento máximo de un segmento de cuerda es la amplitud A. (*d*) La velocidad de cualquier segmento corto de cuerda es $\partial y/\partial t$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La función de onda es de la forma $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$. Teniendo en cuenta que $\omega = kv$ (ecuación 15.16), escribir la función de onda en función de $x - vt$. Usar las ecuaciones 15.1 y 15.2 para determinar el sentido del movimiento:

$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \text{ y } \omega = kv$$

$$\text{es decir,}\quad y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - kvt) = A\,\text{sen}[k(x - vt)]$$

La onda viaja en el $\boxed{\text{sentido } +x.}$

2. Como la forma de la función de onda es $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$, sabemos cuánto vale A, ω y k. Usarlos para calcular la velocidad:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{3{,}5\text{ s}^{-1}}{2{,}2\text{ m}^{-1}} = 1{,}59\text{ m/s}$$

$$= \boxed{1{,}6\text{ m/s}}$$

(*b*) La longitud de onda λ está relacionada con el número de onda k; y la frecuencia y el periodo están relacionados con ω:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2{,}2\text{ m}^{-1}} = 2{,}86\text{ m} = \boxed{2{,}9\text{ m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3{,}5\text{ s}^{-1}} = 1{,}80\text{ s} = \boxed{1{,}8\text{ s}}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1{,}80\text{ s}} = 0{,}557\text{ Hz} = \boxed{0{,}56\text{ Hz}}$$

(*c*) El desplazamiento máximo del segmento de cuerda es la amplitud A:

$$A = \boxed{0{,}030\text{ m}}$$

(*d*) 1. Calcular $\partial y/\partial t$ para determinar la velocidad de un punto de la cuerda:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = (0{,}030\text{ m})\frac{\partial[\text{sen}(2{,}2\text{ m}^{-1}x - 3{,}5\text{ s}^{-1}t)]}{\partial t}$$

$$= (0{,}030\text{ m})(-3{,}5\text{ s}^{-1})\cos(2{,}2\text{ m}^{-1}x - 3{,}5\text{ s}^{-1}t)$$

$$= -(0{,}105\text{ m/s})\cos(2{,}2\text{ m}^{-1}x - 3{,}5\text{ s}^{-1}t)$$

2. La velocidad transversal máxima tiene lugar cuando la función coseno tiene el valor de ± 1:

$$v_{y,\text{máx}} = 0{,}105\text{ m/s} = \boxed{0{,}11\text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Hemos incluido las unidades para destacar cómo se utilizan. Con frecuencia se prescinde de ellas para simplificar.

Transferencia de energía a una cuerda mediante ondas Consideremos una cuerda sujeta a un diapasón. Cuando éste vibra, transfiere energía al segmento de cuerda unido a él. Por ejemplo, cuando el diapasón se desplaza de su posición de equilibrio, estira ligeramente el segmento adyacente aumentando su energía potencial. Además, el diapasón se mueve más lentamente conforme se mueve hacia arriba desde su posición de equilibrio, de forma que esto ralentiza también el movimiento del segmento de la cuerda más cercano. Esto hace disminuir la energía cinética del segmento. Conforme la onda se mueve a lo largo de la cuerda, la energía se transfiere de un segmento al próximo de forma análoga.

La potencia es la tasa de transferencia de energía. La potencia se calcula determinando la tasa con que realiza trabajo la fuerza que un segmento de cuerda ejerce sobre un segmento vecino. La figura 15.9 muestra una onda armónica moviéndose hacia la derecha a través de un segmento de cuerda. Es decir, consideramos una función de onda de la forma

$$y(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad 15.19$$

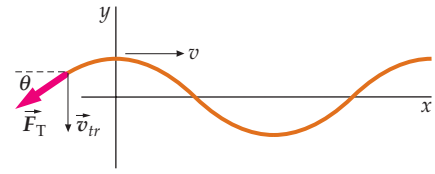


FIGURA 15.9 La tensión $\vec{F}_T$ tiene un componente en la dirección de la velocidad transversal $\vec{v}_{tr}$, de forma que en ese instante la fuerza está haciendo trabajo positivo sobre un extremo de la cuerda.

La tensión $\vec{F}_T$ que actúa sobre el extremo izquierdo del segmento es tangente a la cuerda. Para calcular la potencia transferida por esta fuerza, usamos la fórmula $P = \vec{F}_T \cdot \vec{v}_{tr}$ (ecuación 6.16), donde F_T es la tensión y $\vec{v}_{tr}$, la velocidad transversal, es la velocidad del extremo del segmento. Para obtener una expresión para la potencia, primero expresamos los vectores en función de sus componentes, es decir, $\vec{F}_T = F_{Tx}\hat{i} + F_{Ty}\hat{j}$ y $\vec{v}_{tr} = v_y\hat{j}$, con lo cual, tomando el producto escalar, tenemos que $P = F_{Ty}v_y$. A partir de la ecuación 15.18, obtenemos v_y y a partir de la figura vemos que $F_{Ty} = -F_T \operatorname{sen}\theta \approx -F_T \operatorname{tg}\theta$, en donde se ha usado la aproximación según la cual, para ángulos pequeños sen ≈ tgθ. Como tgθ es la pendiente de la cuerda, tenemos tg$\theta = \partial y/\partial x$ y, por lo tanto,

$$P = F_{Ty}v_y \approx -F_T v_y \operatorname{tg}\theta = -F_T \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x} \qquad 15.20$$

Aplicando la ecuación 15.20 a una onda armónica (calculando las derivadas de 15.19), se tiene

$$P = -F_T[-\omega A \cos(kx - \omega t)][kA \cos(kx - \omega t)] = F_T \omega k A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Utilizando $v = \sqrt{F_T/\mu}$ (ecuación 15.3) y $v = \omega/k$ (ecuación 15.16), sustituimos F_T y k, obteniendo

$$P = \mu v \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \qquad 15.21$$

donde v es la velocidad de la onda. La potencia media es

$$P_m = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \qquad 15.22$$

ya que el valor medio de $\cos^2(kx - \omega t)$, si se calcula el promedio sobre un periodo entero del movimiento manteniendo x constante, es $\frac{1}{2}$.

La energía recorre la cuerda a la velocidad de la onda v, por lo que la energía media $(\Delta E)_m$ que fluye por un punto P_1 durante el tiempo Δt (figuras 15.10*a* y 15.10*b*) es

$$(\Delta E)_m = P_m \Delta t = \tfrac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \Delta t$$

Esta energía se distribuye a lo largo de una distancia $\Delta x = v\Delta t$, de modo que la energía media en Δx es

$$(\Delta E)_m = \tfrac{1}{2}\mu \omega^2 A^2 \Delta x \qquad 15.23$$

Obsérvese que tanto la potencia media como la energía media transmitidas son proporcionales al cuadrado de la amplitud de la onda.

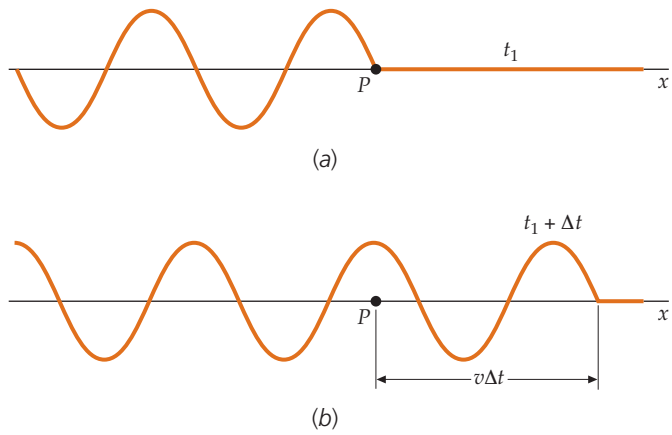


FIGURA 15.10 La onda ha alcanzado el punto P en el instante t_1. Durante el periodo de tiempo Δt, la onda ha avanzado una distancia $v\,\Delta t$ tras pasar por P.

Ejemplo 15.6 Energía total media de una onda en una cuerda

Una onda armónica de longitud de onda 25 cm y amplitud 1,2 cm se mueve a lo largo de un segmento de 15 m de una cuerda de 60 m de longitud y 320 g de masa que está sometida a una tensión de 12 N. (*a*) Determinar la velocidad y la frecuencia angular de la onda. (*b*) ¿Cuál es la energía total media de la onda?

PLANTEAMIENTO La velocidad de la onda es $v = \sqrt{F_T/\mu}$, donde F_T es conocida y $\mu = m/L$. Determinamos ω a partir de $\omega = 2\pi f$, donde $f = v/\lambda$. La energía se obtiene de la ecuación 15.23, $(\Delta E)_m = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \Delta x$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La velocidad está relacionada con la tensión y la densidad de masa lineal:

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{m}{L}$$

2. Calcular la velocidad de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{F_T L}{m}} = \sqrt{\frac{(12\text{ N})(60\text{ m})}{(0{,}32\text{ kg})}} = 47{,}4\text{ m/s} = \boxed{47\text{ m/s}}$$

3. La frecuencia angular se determina a partir de la frecuencia, y ésta, a partir de la velocidad y de la longitud de onda:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{y} \quad v = f\lambda,$$

$$\text{luego, } \omega = 2\pi\frac{v}{\lambda} = 2\pi\frac{47{,}4\ \text{m/s}}{0{,}25\ \text{m}} = 1190\ \text{rad/s}$$

$$= \boxed{1200\ \text{rad/s}}$$

(*b*) La energía total media de las ondas en la cuerda viene dada por la ecuación 15.23, $(\Delta E)_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \Delta x$:

$$(\Delta E)_m = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\,\Delta x = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\omega^2 A^2\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}\frac{0{,}32\ \text{kg}}{60\ \text{m}}(1190\ \text{s}^{-1})^2(0{,}012\ \text{m})^2(15\ \text{m})$$

$$= 8{,}19\ \text{J} = \boxed{8{,}2\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades de la energía media del apartado (*b*) vienen dadas en

$$1\frac{\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}\,\text{m}^3}{\text{m}} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{s^2} = 1\ \text{N}\cdot\text{m} = 1\ \text{J}$$

donde hemos utilizado que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$. Las unidades son las correctas.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.4 Calcular la energía total media transmitida por unidad de tiempo a lo largo de la cuerda.

ONDAS SONORAS ARMÓNICAS

Las ondas sonoras armónicas pueden generarse mediante un diapasón o un altavoz que vibre con movimiento armónico simple. La fuente vibrante hace que las moléculas de aire próximas oscilen con movimiento armónico simple alrededor de sus posiciones de equilibrio. Estas moléculas chocan con otras moléculas próximas haciéndoles oscilar y, por lo tanto, propagan la onda sonora. La ecuación 15.15 describe una onda sonora armónica si la función de onda $y(x,t)$ se reemplaza por $s(x,t)$, el desplazamiento de las moléculas respecto a su posición de equilibrio. Entonces,

$$s(x,t) = s_0\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad 15.24$$

Estos desplazamientos se verifican a lo largo de la dirección del movimiento de la onda y dan lugar a variaciones de densidad y presión del aire. La figura 15.11 muestra el desplazamiento de las moléculas de aire y los cambios de densidad originados por una onda sonora en un momento determinado. Como la presión del gas es proporcional a su densidad, el cambio de presión es máximo cuando la variación de densidad es máxima. Los gráficos de la figura nos muestran que la onda

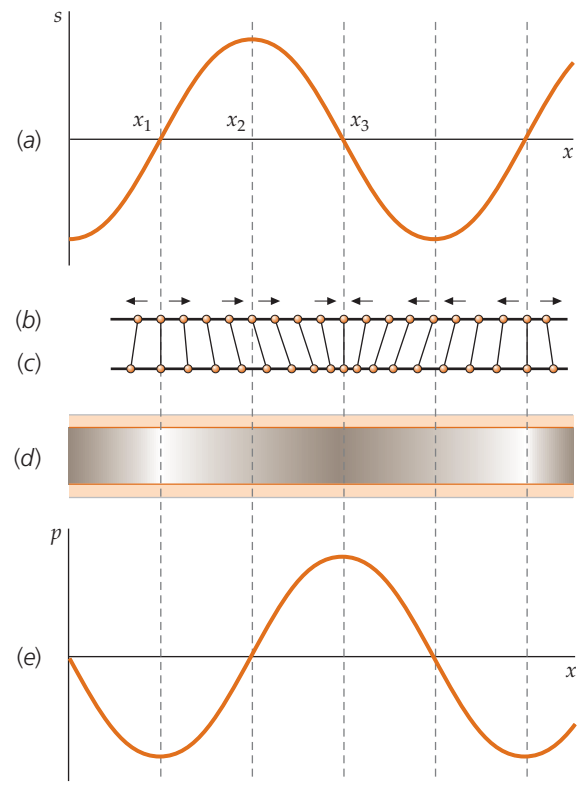


FIGURA 15.11 (*a*) Desplazamiento respecto al equilibrio de las moléculas de aire en una onda sonora armónica en función de la posición en un cierto instante. Los puntos x_1 y x_3 son puntos de desplazamiento nulo. (*b*) Algunas moléculas representativas igualmente espaciadas en sus posiciones de equilibrio 1/4 de ciclo antes. Las flechas indican el sentido de sus velocidades en ese momento. (*c*) Moléculas próximas a los puntos x_1, x_2 y x_3 después de la llegada de la onda. Justo a la izquierda de x_1, el desplazamiento es negativo, indicando que las moléculas del gas se desplazan hacia la izquierda, alejándose del punto x_1 en este momento. Justo a la derecha de x_1, el desplazamiento es positivo, indicando que las moléculas se desplazan hacia la derecha, o sea, de nuevo alejándose del punto x_1. Así, en el punto x_1 la densidad es un mínimo, ya que las moléculas de gas en ambos lados se desplazan alejándose de dicho punto. En el punto x_3, la densidad es un máximo porque las moléculas a ambos lados de este punto se desplazan hacia x_3. En el punto x_2, la densidad no se modifica, pues las moléculas a ambos lados de este punto tienen desplazamientos iguales en la misma dirección. (*d*) Densidad del aire en ese momento. La densidad es máxima en x_3 y mínima en x_1, puntos ambos en los que el desplazamiento es nulo. La densidad es igual al valor en equilibrio en el punto x_2, que es un máximo en el desplazamiento. (*e*) Cambio de presión, que es proporcional al cambio de densidad, en función de la posición. Los cambios de presión y desplazamiento (cambios de posición) están desfasados en 90°.

de presión (o de densidad) está desfasada 90° respecto al desplazamiento de la onda. (En los argumentos de las funciones seno o coseno siempre expresamos los ángulos de fase en radianes. Sin embargo, cuando se describe el fenómeno, decimos normalmente que "dos ondas están desfasadas 90°", en lugar de "dos ondas están desfasadas $\pi/2$ radianes".) Cuando el desplazamiento es cero, los cambios de presión y densidad son máximos o mínimos. Cuando el desplazamiento es máximo o mínimo, los cambios de presión y densidad son nulos. Una onda de desplazamiento dada por la ecuación 15.24 implica una onda de presión dada por

$$p = p_0 \operatorname{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -p_0 \cos(kx - \omega t) \qquad 15.25$$

donde p representa el cambio de presión respecto a la presión de equilibrio y p_0 es el valor máximo de este cambio. Se puede demostrar que la máxima amplitud de presión p_0 está relacionada con la máxima amplitud de desplazamiento s_0 por

$$p_0 = \rho \omega v s_0 \qquad 15.26$$

donde v es la velocidad de propagación y ρ la densidad de equilibrio del gas. Así, cuando una onda armónica sonora se propaga con el tiempo, el desplazamiento de las moléculas del aire, la presión y la densidad varían todas ellas sinusoidalmente con la frecuencia de la fuente vibrante.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.5

El hombre puede percibir sonidos de frecuencias comprendidas entre 20 Hz y 20000 Hz (aunque mucha gente tiene limitada la audición por encima de 15000 Hz). Si la velocidad del sonido en el aire es de 343 m/s, ¿cuáles son las longitudes de onda que corresponden a estas frecuencias extremas?

Energía de las ondas sonoras La energía media de una onda sonora armónica en un elemento de volumen ΔV viene dado por la ecuación 15.23, donde A se reemplaza por s_0 y el elemento de masa $\Delta m = \mu\, \Delta x$ se sustituye por $\rho\, \Delta V$, siendo ρ la densidad media del medio en que se propaga el sonido.

$$(\Delta E)_{\text{m}} = \tfrac{1}{2}\rho \omega^2 s_0^2\, \Delta V \qquad 15.27$$

La energía por unidad de volumen es la densidad de energía media η_{m}:

$$\eta_{\text{m}} = \frac{\Delta E_{\text{m}}}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho \omega^2 s_0^2 \qquad 15.28$$

donde η es la letra griega eta minúscula.

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Las ondas electromagnéticas incluyen la luz, ondas de radio, rayos X, rayos gamma, microondas, etc. Los diversos tipos de ondas electromagnéticas difieren sólo en su longitud de onda y frecuencia. A diferencia de las ondas mecánicas, las ondas electromagnéticas no requieren un medio para su propagación. Viajan a través del vacío con velocidad c que es una constante universal, $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. La función de onda de las ondas electromagnéticas es un campo eléctrico asociado con la onda, $\vec{E}(x,t)$ (Los campos eléctricos se tratan en el capítulo 21. Se deducirá una ecuación de onda, similar a la de las ondas en una cuerda o a la de las ondas sonoras, a partir de las leyes de la electricidad y el magnetismo en el capítulo 30.) El campo eléctrico es perpendicular a la dirección de propagación, de modo que las ondas electromagnéticas son ondas transversales.

Las ondas electromagnéticas se producen cuando las cargas eléctricas libres aceleran o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas realizan transiciones a estados energéticos inferiores. Las ondas de radio, con frecuencias de aproximadamente 1 MHz para AM y 100 MHz para FM, se producen por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en antenas de radio. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas. Las ondas lu-

minosas, con frecuencias del orden de 10^{14} Hz, se producen generalmente por transiciones de electrones ligados. El espectro de ondas electromagnéticas se trata en el capítulo 31.

15.3 ONDAS EN TRES DIMENSIONES

En la figura 15.12, se ven ondas circulares bidimensionales sobre la superficie del agua de una cubeta de ondas. Estas ondas se generan mediante gotas de agua que chocan con la superficie. Las crestas de las ondas forman círculos concéntricos llamados **frentes de onda**. En el caso de un foco o fuente puntual de sonido, las ondas se emiten en tres dimensiones. Se mueven alejándose del foco en todas direcciones y los frentes de onda son ahora superficies esféricas concéntricas.

FIGURA 15.12 Frentes de onda circulares que divergen a partir de un foco puntual en una cubeta de ondas. *(PhotoDisc/Getty Images.)*

El movimiento de un conjunto cualquiera de frentes de onda puede indicarse mediante rayos, que son líneas dirigidas perpendicularmente a los frentes de onda (figura 15.13). En el caso de ondas circulares o esféricas, los rayos son líneas radiales.

En un medio homogéneo, como el aire a densidad constante, el frente de onda se mueve en línea recta en la dirección de los rayos, como si se tratara de un haz de partículas. A una distancia grande de un foco puntual, una sección pequeña del frente de onda se puede considerar como una superficie plana, y los rayos son, aproximadamente, líneas paralelas; este tipo de onda se llama **onda plana** (figura 15.14). El análogo bidimensional de una onda plana es una onda lineal, que puede considerarse como una pequeña parte de un frente de onda circular a una gran distancia de su foco. Estas ondas pueden producirse también en una cubeta de ondas mediante una fuente lineal, como la indicada en la figura 15.15.

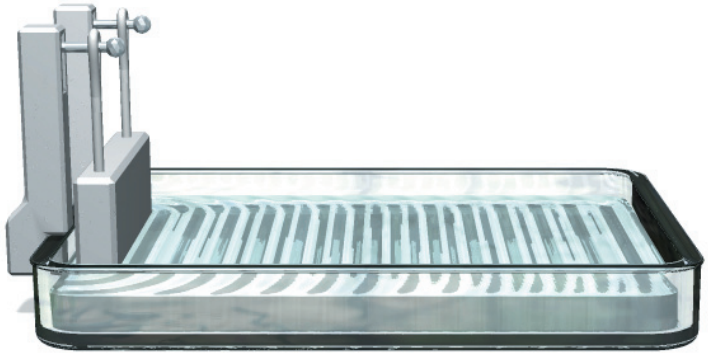


FIGURA 15.15 Analogía bidimensional de una onda plana que puede generarse en una cubeta de ondas mediante un listón plano que oscila arriba y abajo dentro del agua para producir frentes de onda que son líneas rectas.

(David Sacks/ The Image Bank/ Getty.)

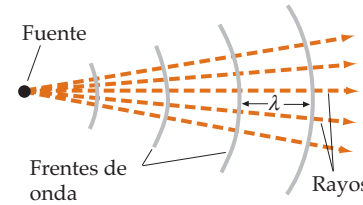


FIGURA 15.13 El movimiento de los frentes de onda puede representarse mediante rayos que se dibujan perpendiculares a los frentes de onda. En el caso de una fuente puntual, los rayos son rectas radiales que divergen de la dicha fuente.

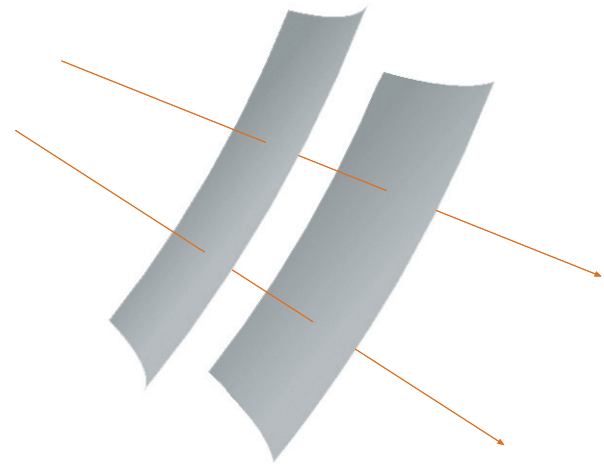


FIGURA 15.14 Ondas planas. A distancias grandes de un foco puntual, los frentes de onda son, aproximadamente, planos paralelos y los rayos son, aproximadamente, rectas paralelas perpendiculares a los frentes de onda.

INTENSIDAD DE ONDA

Si un foco puntual emite ondas uniformemente en todas direcciones, la energía a una distancia r del mismo estará distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de radio r y superficie $4\pi r^2$. Si la potencia media emitida por el foco es P_m, la potencia por unidad de área a una distancia r del foco será $P_m/(4\pi r^2)$. La potencia media por unidad de área que está incidiendo perpendicularmente a la dirección de propagación se denomina **intensidad**:

$$I = \frac{P_m}{A} \qquad 15.29$$

DEFINICIÓN DE INTENSIDAD

Las unidades de la intensidad son watts por metro cuadrado. A una distancia r de un foco puntual, la intensidad vale

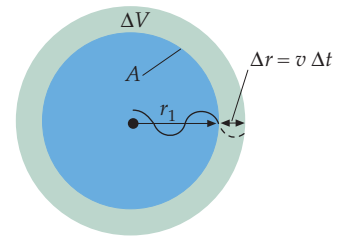
$$I = \frac{P_m}{4\pi r^2} \qquad 15.30$$

INTENSIDAD DEBIDA A UN FOCO PUNTUAL

La intensidad de una onda tridimensional varía inversamente con el cuadrado de la distancia al foco puntual.

Existe una relación sencilla entre la intensidad de una onda y la energía por unidad de volumen del medio por el que se propaga la onda. Consideremos la onda esférica que acaba de alcanzar el radio r_1 de la figura 15.16. El volumen interior al radio r_1 contiene energía debido a que las partículas en esta región están oscilando con movimiento armónico simple. La región exterior a r_1 no contiene energía porque las ondas todavía no han alcanzado dicha región. Después de un intervalo corto de tiempo Δt, la onda, en su movimiento, sobrepasa r_1 en una distancia corta $\Delta r = v\,\Delta t$. La energía total en el medio se ve incrementada en la energía contenida en la corteza esférica de superficie A, espesor $v\,\Delta t$ y volumen $\Delta V = A\,\Delta r = Av\,\Delta t$. La energía media de la corteza esférica es

$$(\Delta E)_m = \eta_m\,\Delta V = \eta_m Av\,\Delta t$$



Volumen de la corteza = $\Delta V = A\,\Delta r = Av\,\Delta t$

FIGURA 15.16

El incremento de energía por unidad de tiempo es la potencia que entra en la corteza. Así pues, la potencia media incidente es

$$P_m = \frac{(\Delta E)_m}{\Delta t} = \eta_m Av$$

y la intensidad de la onda es

$$I = \frac{P_m}{A} = \eta_m v \qquad 15.31$$

Por lo tanto, la intensidad es igual al producto de la velocidad de la onda v por la densidad de energía media η_m. Sustituyendo $\eta_m = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$ de la ecuación 15.28 (densidad de energía media de una onda sonora) en la expresión anterior, resulta

$$I = \eta_m v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v} \qquad 15.32$$

donde se ha tenido en cuenta que $s_0 = p_0/(\rho w v)$ según la ecuación 15.26. Es decir, la intensidad de una onda sonora es proporcional al cuadrado de la amplitud, lo que constituye una propiedad general de las ondas armónicas.

El oído humano puede acomodarse a un amplio intervalo de intensidad de ondas sonoras, desde 10^{-12} W/m^2, aproximadamente (que normalmente se toma como el umbral de audición), hasta 1 W/m^2, aproximadamente (que produce una sensación dolorosa en la mayoría de las personas). Las variaciones de presión que corresponden a estas intensidades extremas varían, aproximadamente, desde 3×10^{-5} Pa para

Ondas sonoras procedentes de un receptor telefónico propagándose en el aire. Las ondas se han hecho visibles barriendo el espacio delante del receptor con una lámpara que tiene un brillo controlado mediante un micrófono. *(From Winston E. Kock, Lasers and Holography, 1978, Dover Publications, New York.)*

el umbral de audición hasta 30 Pa para el umbral del dolor. (Recuérdese que el pascal es un newton por metro cuadrado.) Estas pequeñas variaciones de presión se superponen (sumando o restando) a la presión atmosférica normal cuyo valor es, aproximadamente, 101 kPa.

Ejemplo 15.7 Un altavoz

El diafragma de un altavoz de 30 cm de diámetro vibra con una frecuencia de 1 kHz y una amplitud de 0,020 mm. Suponiendo que las moléculas de aire próximas al diafragma tienen esta misma amplitud de vibración, determinar (*a*) la amplitud de la presión justo delante del diafragma, (*b*) la intensidad sonora en esta posición y (c) la potencia acústica irradiada. (*d*) Si el sonido se irradia uniformemente en la semiesfera anterior, determinar la intensidad a 5 m del altavoz.

PLANTEAMIENTO (*a*) y (*b*) La amplitud de la presión se calcula directamente de $p_0 = \rho\omega v s_0$ (ecuación 15.26) y la intensidad sonora de $I = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v$ (ecuación 15.32). (*c*) La potencia irradiada es igual al producto de la intensidad por el área del diafragma. (d) El área de una semiesfera de radio r es $2\pi r^2$. Podemos utilizar la ecuación 15.29 haciendo $A = 2\pi r^2$.

SOLUCIÓN

(*a*) La ecuación 15.26 relaciona la amplitud de la presión con la amplitud del desplazamiento, la frecuencia, la velocidad de la onda y la densidad del aire:

$$p_0 = \rho\omega v s_0 = (1{,}29\ \text{kg/m}^3)2\pi(10^3\ \text{Hz})(343\ \text{m/s})(2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m})$$
$$= 55{,}6\ \text{N/m}^2 = \boxed{56\ \text{Pa}}$$

(*b*) La ecuación 15.32 relaciona la intensidad con estas mismas magnitudes conocidas:

$$I = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \tfrac{1}{2}(1{,}29\ \text{kg/m}^3)[2\pi(1{,}0\ \text{kHz})]^2(2{,}0 \times 10^{-5}\ \text{m})^2(343\ \text{m/s})$$
$$= 3{,}494\ \text{W/m}^2 = \boxed{3{,}5\ \text{W/m}^2}$$

(c) La potencia es el producto de la intensidad por el área del diafragma:

$$P_\text{m} = IA = (3{,}494\ \text{W/m}^2)\pi(0{,}15\ \text{m})^2 = 0{,}247\ \text{W} = \boxed{0{,}25\ \text{W}}$$

(*d*) Calcular la intensidad a la distancia $r = 5$ m suponiendo una radiación uniforme en la semiesfera anterior:

$$I = \frac{P_\text{m}}{A} = \frac{0{,}247\ \text{W}}{2\pi(5{,}0\ \text{m})^2} = 1{,}57 \times 10^{-3}\ \text{W/m}^2 = \boxed{1{,}6\ \text{mW/m}^2}$$

COMPROBACIÓN El resultado del apartado (*d*) es menor que el del apartado (*b*), como era de esperar. Lo lógico es que la intensidad sea mayor cuanto más cerca se está del diafragma del altavoz.

OBSERVACIÓN La hipótesis de radiación uniforme en la semiesfera anterior no es muy buena porque la longitud de onda en este caso [$\lambda = v/f = (343\ \text{m/s})/(1000\ \text{s}^{-1}) = 34{,}3$ cm] no es grande comparada con el diámetro del altavoz. Existe también cierta radiación en la dirección posterior, como puede observarse situándose detrás de un altavoz.

Los altavoces de un concierto de "rock" pueden emitir con una potencia 100 veces mayor que el altavoz del ejemplo.

* ***Nivel de intensidad y sensación sonora*** Aunque nuestra percepción de la sonoridad no es proporcional a la intensidad, sí resulta una buena aproximación considerar que esta percepción varía logarítmicamente con la intensidad. Usaremos, por lo tanto, una escala logarítmica para describir el *nivel de intensidad* β de una onda sonora, el cual se mide en **decibelios** (dB) y se define por

$$\beta = (10\ \text{dB}) \log \frac{I}{I_0} \qquad 15.33$$

DEFINICIÓN: NIVEL DE INTENSIDAD EN dB

donde *log* se refiere al logaritmo base 10. El decibelio es una magnitud adimensional, como el radian. Normalmente, escribimos la ecuación 15.33 sin escribir en forma explícita las unidades. Es decir, lo escribimos como $\beta = 10 \log(I/I_0)$. Aquí

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Potencias y logaritmos**

I es la intensidad física del sonido e I_0 es un nivel de referencia, que tomaremos como umbral de audición:

$$I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2 \qquad 15.34$$

UMBRAL DE AUDICIÓN

En esta escala, el umbral de audición ($I = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$) se corresponde con un nivel de intensidad $\beta = 10 \log (I_0/I_0) = 0$ dB y el umbral del dolor ($I = 1\ \text{W/m}^2$) se corresponde con $\beta = 10 \log (1/10^{-12}) = 10 \log 10^{12} = 120$ dB. Así pues, el intervalo de intensidades físicas de $10^{-12}\ \text{W/m}^2$ a $1\ \text{W/m}^2$ se corresponde con un intervalo de niveles de sensación sonora de 0 dB a 120 dB. La tabla 15.1 relaciona los niveles de intensidad de algunos sonidos comunes.

Tabla 15.1 Intensidad física y nivel de intensidad sonora de algunos sonidos comunes ($I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$)

Fuente	I/I_0	dB	Descripción
	10^0	0	Umbral de audición
Respiración normal	10^1	10	Escasamente audible
Rumor de hojas	10^2	20	
Conversación en voz muy baja (a 5 m)	10^3	30	Apenas ruidoso
Biblioteca	10^4	40	
Oficina tranquila	10^5	50	Poco ruidoso
Conversación normal (a 1 m)	10^6	60	
Tráfico denso	10^7	70	
Oficina ruidosa con máquinas; fábrica de tipo medio	10^8	80	
Camión pesado (a 15 m); cataratas del Niágara	10^9	90	La exposición constante daña al oído
Tren de metro antiguo	10^{10}	100	
Ruido de construcción (a 3 m)	10^{11}	110	
Concierto de rock con amplificadores (a 2 m); despegue de un reactor (a 60 m)	10^{12}	120	Umbral del dolor
Remachadora neumática; ametralladora	10^{13}	130	
Despegue de un reactor (cercano)	10^{15}	150	
Motor de cohete grande (cercano)	10^{18}	180	

Ejemplo 15.8 Pruebas de sonido

Un material absorbente del sonido atenúa el nivel de sonoridad en 30 dB. ¿En qué factor disminuye la intensidad?

PLANTEAMIENTO Analice la tabla 15.1 para comprobar el cambio de intensidad por cada 10 dB de cambio en el nivel de intensidad sonora. ¿Se puede inferir alguna regla?

SOLUCIÓN

1. En la tabla 15.1, vemos que por cada 10 dB de disminución del nivel de sensación sonora, la intensidad física disminuye en un factor de 10.

Así, si la sonoridad disminuye en 30 dB, la intensidad física disminuye en un factor $10^{-1} \times 10^{-1} \times 10^{-1} = \boxed{10^{-3}}$

COMPROBACIÓN Podemos comparar este resultado con el que se obtendría utilizando directamente la ecuación 15.33. Es decir, $\beta_2 - \beta_1 = 10 \log(I_2/I_0) - 10 \log(I_1/I_0) = 10 \log(I_2/I_1)$. Despejando I_2 da $I_2 = 10^{(\beta_2 - \beta_1)/10} I_1$. Sustituyendo -30 en lugar de $\beta_2 - \beta_1$ da $I_2 = 10^{-3} I_1$, lo que verifica nuestro resultado.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 15.1

David se compra una radio que produce el doble de potencia acústica que la que se le ha roto. David espera que la nueva radio suene el doble de fuerte. ¿Quedará satisfecho con la compra? Explique la respuesta.

En realidad, la sonoridad depende de la frecuencia, así como del nivel de intensidad en decibelios. La figura 15.17 representa este nivel de intensidad en dB en función de la frecuencia para sonidos de igual sonoridad en el oído humano. (En esta figura, la frecuencia se representa en escala logarítmica para abarcar el amplio intervalo de frecuencias de 20 Hz a 10 kHz.) Obsérvese en esta figura que el oído es más sensible a ~ 4 kHz para todos los niveles de intensidad sonora en dB.

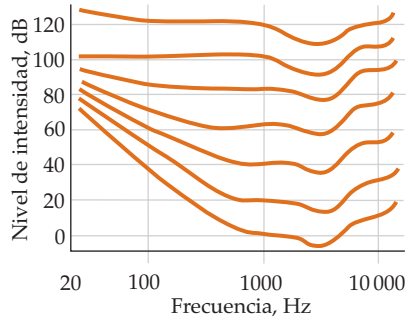


FIGURA 15.17 Nivel de intensidad en función de la frecuencia para sonidos de igual sensación sonora. La curva inferior está por debajo del umbral de audición para, aproximadamente, el 99 por ciento de la población. La segunda curva inferior constituye, aproximadamente, el umbral de audición para un 50 por ciento de la población.

Ejemplo 15.9 Ladridos de perros

El ladrido de un perro supone alrededor de 1 mW de potencia acústica. (*a*) Si esta potencia se distribuye uniformemente en todas direcciones, ¿cuál es el nivel de intensidad sonora a una distancia de 5 m? (*b*) ¿Cuál sería el nivel de intensidad de dos perros ladrando al mismo tiempo si cada uno de ellos desarrolla una potencia de 1 mW?

PLANTEAMIENTO El nivel de intensidad sonora se deduce de la intensidad física y ésta de la expresión $I = P_m/(4\pi r^2)$. Para dos perros, las intensidades físicas se suman.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. El nivel de intensidad sonora está relacionado con la intensidad física. Entonces tenemos que calcular primero la intensidad I:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

2. Calcular la intensidad a $r = 5$ m:

$$I_1 = \frac{P_{1\,m}}{4\pi r^2} = \frac{1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{W}}{4\pi(5{,}0\ \text{m})^2} = 3{,}18 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$$

3. Utilizar el resultado anterior para determinar el nivel de intensidad sonora a 5 m:

$$\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \log \frac{3{,}18 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-12}} = \boxed{65{,}0\ \text{dB}}$$

(*b*) Si I_1 es la intensidad de un perro, la intensidad de dos perros es $I_2 = 2\,I_1$:

$$\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 10 \log \frac{2I_1}{I_0} = 10\left(\log 2 + \log \frac{I_1}{I_0}\right)$$

$$= 10 \log 2 + \beta_1 = 3{,}01 + 65{,}0 = \boxed{68{,}0\ \text{dB}}$$

COMPROBACIÓN Si el resultado del apartado (*b*) es correcto, cuando la intensidad se duplica, el nivel de intensidad sonora aumenta en unos 3 dB. Para ver si es correcto, dividimos 65 dB entre 3 dB lo que da 21,7. Entonces, multiplicando la intensidad umbral por 21,7 da una intensidad de $I_1 = 3 \times 10^{-6}$ W/m². Por tanto, $2^{21{,}7}\,I_0$ debería ser igual a 3×10^{-6} W/m². Es fácil comprobar que así es.

15.4 ONDAS Y BARRERAS

REFLEXIÓN, TRANSMISIÓN Y REFRACCIÓN

Cuando una onda incide sobre una superficie límite o de separación de dos regiones en las que la velocidad de la onda es diferente, parte de la onda se refleja y parte se transmite. La figura 15.18*a* muestra un pulso sobre una cuerda ligera unida a una cuerda más pesada. En este caso, el pulso reflejado en la superficie límite se invierte. Si la segunda cuerda es más ligera que la primera (figura 15.18*b*), el pulso reflejado no se invierte. El pulso transmitido a la segunda cuerda va siempre derecho (derecho

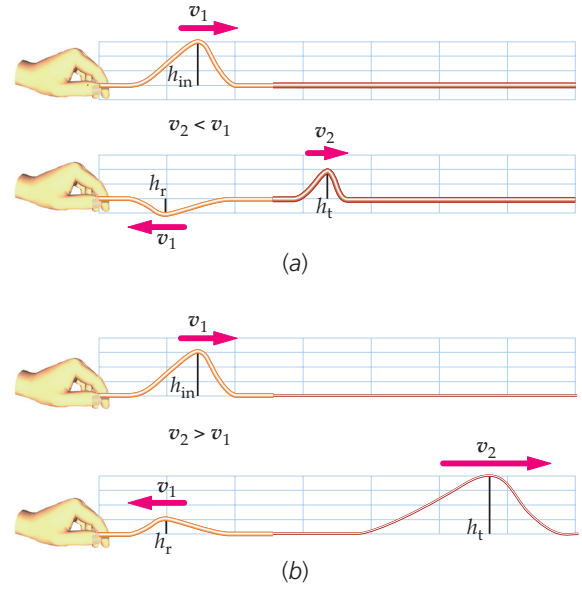


FIGURA 15.18 La parte frontal del pulso es más estrecha que la trasera porque el extremo de la cuerda fue levantado más rápido de lo que se bajó. (*a*) Un pulso de onda se propaga sobre una cuerda ligera unida a otra más pesada en la cual es menor la velocidad de la onda. El pulso reflejado se invierte, mientras que el transmitido no. (*b*) Un pulso de onda se propaga sobre una cuerda pesada unida a otra más ligera, en la cual la velocidad es mayor. En este caso, el pulso reflejado no se invierte.

quiere decir que tiene la misma orientación que el pulso incidente). Un extremo de una cuerda unido a un punto fijo es equivalente a unirlo a una segunda cuerda con una masa por unidad de longitud extremadamente grande, de forma que el pulso incidente se invierte al llegar al punto fijo y reflejarse. Por el contrario, si el extremo de la cuerda se une a otra cuerda de menor masa por unidad de longitud, el pulso reflejado va derecho. Las alturas de los pulsos incidentes, reflejados y transmitidos se muestran en la figura 15.18 y son h_{in}, h_r y h_t, respectivamente. El **coeficiente de reflexión** r, es el cociente entre la altura del pulso reflejado y la altura del pulso incidente y el **coeficiente de transmisión** τ es el cociente entre la altura del pulso transmitido y la altura del pulso incidente. Las expresiones para r y τ son

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \qquad 15.35$$

COEFICIENTES DE REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN

Estas dos expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión se denominan *relaciones de Fresnel* y se pueden deducir haciendo que la tensión, la altura de la cuerda y la pendiente de la cuerda permanezcan continuas en el punto donde la masa por unidad de longitud es discontinua. (La tercera ley de Newton requiere que la pendiente sea continua.) Obsérvese que τ siempre es positivo, lo que significa que el pulso transmitido va siempre derecho. Sin embargo, si r es negativo ($v_2 < v_1$), el pulso reflejado se invierte, mientras que si r es positivo ($v_2 > v_1$), el pulso reflejado va derecho. Las relaciones de Fresnel son válidas tanto para ondas de luz como sonoras.

Ejemplo 15.10 Dos cables soldados

Dos cables de densidades de masa lineal distintas se sueldan uno a continuación del otro y después se estiran mediante una tensión F_T (la tensión es la misma en los dos alambres). La velocidad de una onda en el primer alambre es el doble que en el segundo. Cuando una onda armónica que se transmite por el primer alambre llega a la unión de los alambres, la onda reflejada tiene la mitad de amplitud que la onda transmitida. (*a*) Si la amplitud de la onda incidente es A, ¿cuáles son las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida? (*b*) ¿Cuál es el cociente entre las densidades μ_2/μ_1 de masa de los cables? (*c*) ¿Qué fracción de la potencia incidente se refleja en la unión y qué fracción se transmite?

PLANTEAMIENTO Para calcular las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas, utilizamos $A_r = rA$ y $A_t = \tau A$, donde A_r y A_t son las amplitudes de las ondas transmitidas y reflejadas, respectivamente, y r y τ los coeficientes de reflexión y transmisión. Cada una de las potencias se expresa con la ecuación 15.22, $P_m = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$. Las frecuencias angulares de todas las ondas son iguales. Como las ondas reflejada e incidente están en el mismo medio, ambas poseen la misma velocidad v_1. Sabemos que la velocidad en el segundo alambre es $v_2 = \frac{1}{2}v_1$ (figura 15.19).

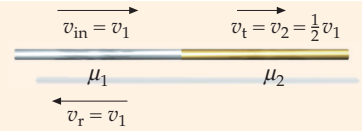


FIGURA 15.19

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Expresar las amplitudes reflejada y transmitida en términos de la amplitud incidente y de los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$A_r = rA \quad \text{y} \quad A_t = \tau A$$

2. Utilizar $v_1 = 2\,v_2$ para calcular los coeficientes de reflexión y transmisión:

$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{v_2 - 2v_2}{v_2 + 2v_2} = -\frac{1}{3}$$

$$\tau = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} = \frac{2v_2}{v_2 + 2v_2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{luego,} \quad A_r = \boxed{-\frac{1}{3}A} \quad \text{y} \quad A_t = \boxed{\frac{2}{3}A}$$

(*b*) 1. Utilizar la ecuación 15.3, $v = \sqrt{F_T/\mu}$. F_T es la misma en cada lado de la unión. Despejar μ_1 y μ_2:

$$v_1^2 = \frac{F_T}{\mu_1} \quad \text{y} \quad v_2^2 = \frac{F_T}{\mu_2}$$

$$\text{por tanto,} \quad \mu_1 = \frac{F_T}{v_1^2} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \frac{F_T}{v_2^2}$$

2. Dividir μ_2 entre μ_1 utilizando $v_1 = 2\,v_2$:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{(2v_2)^2}{v_2^2} = \boxed{4}$$

(*c*) 1. Escribir las expresiones para las potencias medias incidente, reflejada y transmitida a partir de la ecuación 15.22, $P_m = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$:

$$P_{in\,m} = \tfrac{1}{2}\mu_1\omega^2 A^2 v_1$$
$$P_{r\,m} = \tfrac{1}{2}\mu_1\omega^2 A_r^2 v_1$$
$$P_{t\,m} = \tfrac{1}{2}\mu_2\omega^2 A_t^2 v_2$$

2. Sustituir el resultado del apartado (*a*) en las expresiones de las potencias:

$$P_{r\,m} = \tfrac{1}{2}\mu_1\omega^2\left(-\frac{1}{3}A\right)^2 v_1 = \frac{1}{18}\mu_1\omega^2 A^2 v_1$$
$$P_{t\,m} = \tfrac{1}{2}\mu_2\omega^2\left(\frac{2}{3}A\right)^2 v_2 = \frac{2}{9}\mu_2\omega^2 A^2 v_2$$

3. Calcular los cocientes P_r/P_{in} y P_t/P_{in}:

$$\frac{P_{r\,m}}{P_{in\,m}} = \frac{\frac{1}{18}\mu_1\omega^2 A^2 v_1}{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A^2 v_1} = \boxed{\frac{1}{9}}$$
$$\frac{P_{t\,m}}{P_{in\,m}} = \frac{\frac{2}{9}\mu_2\omega^2 A^2 v_2}{\frac{1}{2}\mu_1\omega^2 A^2 v_1} = \frac{4}{9}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{v_2}{v_1}$$

4. Simplificar utilizando los resultados del apartado (*b*) y la relación $v_1 = 2\,v_2$:

$$\frac{P_{t\,m}}{P_{in\,m}} = \frac{4}{9}4\frac{v_2}{2v_2} = \boxed{\frac{8}{9}}$$

COMPROBACIÓN La suma de las fracciones de potencia reflejada y transmitida da 1.

OBSERVACIÓN La onda reflejada se invierte respecto a la onda incidente; por tanto, tienen un desfase de 180°. Una amplitud negativa corresponde a un desfase de 180°.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.6 Repetir el ejemplo 15.10 pero con $v_2 = 2v_1$.

La conservación de la energía proporciona una nueva relación entre los coeficientes de reflexión y transmisión. Esta relación, establecida en el problema 15.70, viene dada por

$$1 = r^2 + \frac{v_1}{v_2}\tau^2 \qquad 15.36$$

donde r^2 representa la fracción de potencia reflejada y $(v_1/v_2)\tau^2$ representa la fracción transmitida.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.7
Demostrar que los valores de r y τ para los cables del ejemplo 15.10 satisfacen la ecuación 15.36.

En tres dimensiones, la frontera entre dos regiones de diferente velocidad de onda es una superficie. La figura 15.20 muestra un rayo incidente sobre una de estas superficies límite. Este ejemplo podría ser una onda sonora en el aire que choca sobre una superficie sólida o líquida. El rayo reflejado forma un ángulo con la normal a la superficie igual al que forma el rayo incidente.

El rayo transmitido se desvía acercándose o alejándose de la normal; lo cual depende de si la velocidad de la onda en el segundo medio es menor o mayor que la que posee en el medio inicial. Se denomina **refracción** al cambio de dirección del rayo transmitido. Cuando la velocidad de la onda en el segundo medio es mayor que en el medio incidente (como ocurre cuando una onda luminosa que se propaga en vidrio o agua se refracta en el aire), el rayo que describe la dirección de propa-

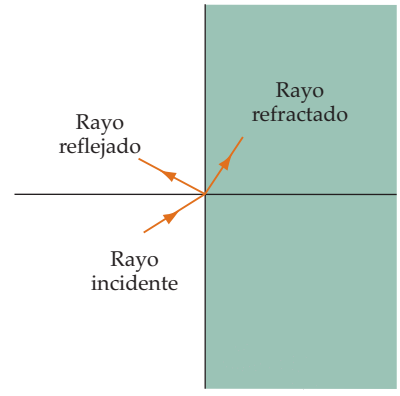


FIGURA 15.20 Onda incidiendo sobre una superficie límite entre dos medios en los cuales la velocidad de onda difiere. Parte de la onda se refleja y parte se transmite. Se denomina refracción al cambio de dirección del rayo transmitido.

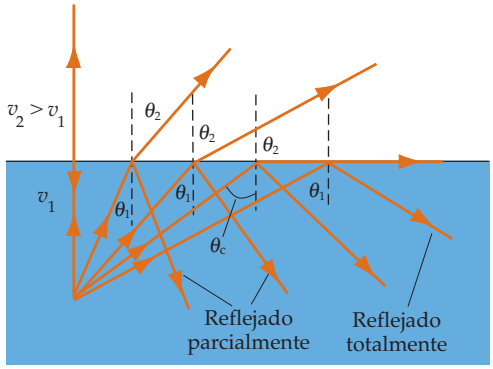


FIGURA 15.21 La luz procedente de una fuente en el agua se refracta alejándose de la normal cuando entra en el aire. Para ángulos de incidencia por encima de un valor crítico, no hay rayo transmitido, condición conocida como reflexión interna total.

gación se desvía alejándose de la normal, como indica la figura 15.21. Al incrementarse el ángulo de incidencia, crece también el ángulo de refracción, hasta que se alcanza un ángulo crítico de incidencia, para el cual el ángulo de refracción es de 90°. Para ángulos de incidencia superiores al valor crítico, desaparece el rayo refractado, fenómeno que se llama **reflexión interna total**.

La cantidad de energía reflejada por una superficie depende de la clase de superficie. Las paredes rígidas, suelos y techos planos son buenos reflectores de las ondas sonoras; mientras que otros materiales porosos y menos rígidos, como la ropa de los paños y tapizados, absorben gran cantidad de la energía incidente. La reflexión de las ondas sonoras juega un papel importante en el proyecto de una sala de conferencias, de una biblioteca o un auditorio de música. En una sala de conferencias con muchas superficies planas reflectoras, es difícil de entender lo que se dice debido a la multitud de ecos que llegan en instantes diferentes a los oídos del oyente. Para reducir estas reflexiones es corriente colocar sobre las paredes y el techo materiales absorbentes. En una sala de conciertos, se sitúa una placa reflectora detrás de la orquesta y también se cuelgan paneles reflectores del techo para reflejar y dirigir el sonido hacia los oyentes.

(Gentileza de Davies Symphony Hall.)

Ejemplo 15.11 El globo que oye

Conceptual

Una práctica de física muy popular consiste en colocar un globo lleno de dióxido de carbono entre un altavoz y una persona que escucha. La persona escucha un sonido más fuerte cuando se coloca el globo que cuando se quita. ¿Por qué?

PLANTEAMIENTO La masa molar del dióxido de carbono es mayor que la masa molar del aire. Así, el sonido viaja más rápido a través del aire que a través del globo. Dibujar un diagrama de los rayos de sonido que atraviesan el globo. Los rayos se refractan (se inclinan) cuando el sonido se transmite a través de la superficie que separa los dos medios.

SOLUCIÓN

1. Trazar el rayo que sale del altavoz y pasa por la parte superior del globo (figura 15.22*a*). El rayo se refractará hacia la normal cuando entra en el globo y más allá de la normal cuando sale:
2. Repetir el paso 1 para cuatro o cinco rayos más incluyendo alguno que pase por la mitad inferior del globo (figura 15.22*b*):
3. Utilizar el diagrama para explicar por qué el sonido es más fuerte cuando hay un globo entre el altavoz y la persona: El sonido es más intenso en la región donde los rayos se cortan.

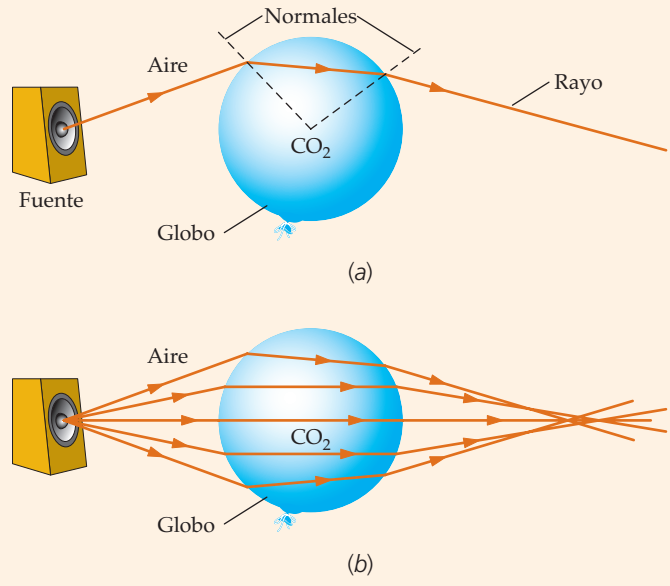


FIGURA 15.22

COMPROBACIÓN El globo es al sonido como una lupa es a la luz. La luz viaja a través del vidrio más lentamente que a través del aire, análogamente a lo que sucede con el sonido, que viaja más lentamente a través del dióxido de carbono que a través del aire.

DIFRACCIÓN

Cuando una onda encuentra un obstáculo tiende a rodearlo. Este comportamiento del frente de onda se denomina **difracción**. Casi toda la difracción de una onda se produce en aquella parte del frente de onda que está a una distancia de pocas longitudes de onda de los límites del obstáculo. En aquellas zonas de la onda que están más alejadas, el efecto del obstáculo, es decir la difracción, es imperceptible y la onda se propaga en línea recta en la dirección de los rayos incidentes. Cuando una onda se encuentra con una barrera con una pequeña abertura (un agujero) de unas pocas longitudes de onda de diámetro, la parte de la onda que la atraviesa pasa toda ella a una distancia de pocas longitudes de onda de los bordes. Así, los frentes de onda planos se curvan y se propagan adoptando la forma circular o esférica (figura 15.23). Por el contrario, si un haz de partículas incide sobre un obstáculo con una abertura, las partículas que lo atraviesan no cambian su dirección (figura 15.24). La difracción es una de las características fundamentales que distingue las ondas de las partículas. Demostraremos cómo surge la difracción al estudiar la interferencia y difracción de la luz en el capítulo 35.

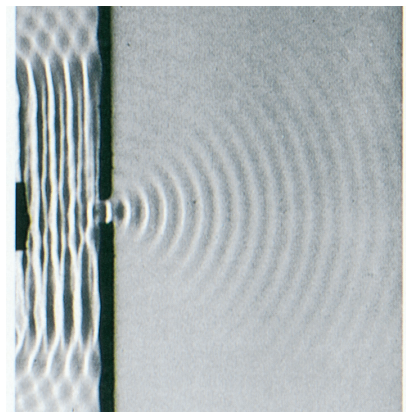


FIGURA 15.23 Ondas planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una pequeña abertura de unas pocas longitudes de onda de ancho. Más allá de la barrera hay ondas circulares concéntricas respecto a la abertura, como si hubiese un foco puntual en la misma. *(Fundamental Photographers.)*

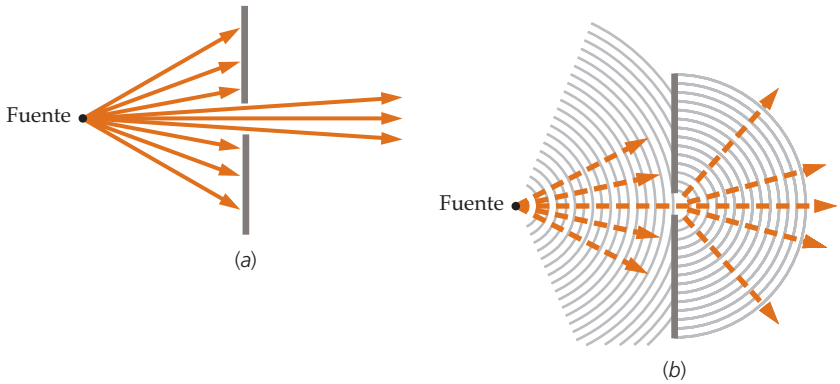


FIGURA 15.24 Comparación entre la forma en que pasan partículas y ondas a través de una abertura estrecha en una barrera. En (*a*) las partículas transmitidas se encuentran confinadas en un ángulo estrecho. En (*b*) la abertura actúa como un foco puntual de ondas que se propagan en un ángulo mucho más amplio que el correspondiente a las partículas en (*a*).

Aunque las ondas que encuentran un obstáculo o abertura siempre se curvan, o difractan, la magnitud de este fenómeno depende de la relación que existe entre su longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. Si la longitud de onda es más grande o igual que la abertura, como en la figura 15.23, la difracción es importante y las ondas se dispersan al atravesar la abertura como si procediesen de una fuente puntual localizada en la misma abertura. En cambio, si la longitud de onda es pequeña en relación con la abertura, el efecto de difracción es pequeño como indica la figura 15.25. Cerca de los bordes de la abertura los frentes de onda se distorsionan y las ondas se curvan ligeramente. Sin embargo, los frentes de onda no se ven afectados en su mayor parte y las ondas se propagan en líneas rectas, como si se tratara de un haz de partículas. Esta aproximación de propagación de las ondas en líneas rectas en la dirección de los rayos y sin difracción se conoce con el nombre de **aproximación de rayos**. Los frentes de onda se distorsionan cerca (entendemos por cerca, una distancia de pocas longitudes de onda del borde del obstáculo) de los bordes del obstáculo que bloquea parte del frente de onda.

Como las longitudes de onda del sonido audible están dentro de un margen que va desde algunos centímetros hasta varios metros y son, con frecuencia, grandes en comparación con las aberturas o los obstáculos (puertas o ventanas, por ejemplo), la difracción de las ondas sonoras resulta ser un fenómeno común. Por otra parte, las longitudes de onda de la luz visible están dentro del intervalo de 4×10^{-7} a 7×10^{-7} m, aproximadamente. Como estas longitudes de onda son pequeñas en comparación con el tamaño de los objetos y aberturas ordinarios, la difracción de la luz no es observable fácilmente, de forma que la luz parece viajar en línea recta. Sin embargo, la difracción de la luz es un fenómeno importante que estudiaremos con detalle en el capítulo 35.

Los efectos de la difracción imponen una limitación a la capacidad para situar o localizar objetos pequeños o para identificar sus detalles más finos mediante la reflexión de ondas sobre ellos. No se produce ninguna reflexión apreciable de las ondas a no ser que el objeto sea de un tamaño por lo menos del orden de la longitud de onda. Así pues, no puede observarse ningún detalle a una escala menor que

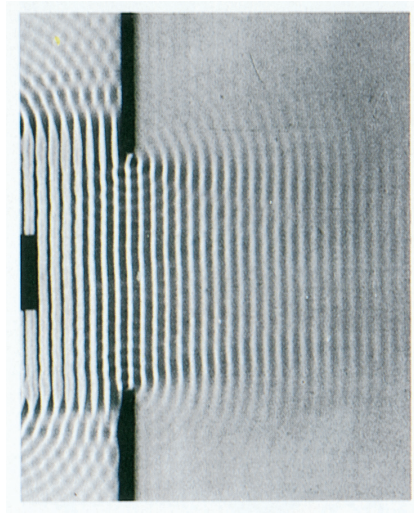


FIGURA 15.25 Ondas planas en una cubeta de ondas que se encuentran con una barrera que posee una abertura mucho mayor que λ. La onda continúa propagándose hacia adelante; sólo se observa una pequeña desviación en las regiones a ambos lados de la abertura. *(Fundamental Photographers.)*

la longitud de onda utilizada. Si se utilizan ondas de longitud de onda λ para localizar un objeto, su posición podrá conocerse sólo con un margen de $\pm \lambda$.

Las ondas sonoras de frecuencias mayores a 20 000 Hz se conocen como **ondas ultrasónicas**. Debido a sus longitudes de onda muy cortas pueden emitirse y reflejarse en objetos pequeños. Los murciélagos emiten y detectan frecuencias de hasta 120 000 Hz, correspondientes a una longitud de onda de 2,8 mm, que utilizan para localizar pequeñas presas como mariposas nocturnas. El sistema de ecolocación, conocido como sónar (acrónimo de *sound navigation and ranging*, navegación y localización por el sonido), se utiliza para detectar perfiles de objetos sumergidos con ondas sonoras. Las frecuencias utilizadas por los detectores de peces disponibles en el mercado están en un rango de 25 a 200 kHz. Las marsopas hacen chasquidos de localización de este mismo rango de frecuencias. Se hacen pasar ultrasonidos a través del cuerpo humano y la información sobre la frecuencia e intensidad de las ondas transmitidas y reflejadas se procesa para construir una imagen tridimensional llamado sonograma o ecografía.

(GE Medical Systems/Photo Researchers, Inc.)

15.5 EFECTO DOPPLER

Cuando un foco productor de ondas y un receptor se están moviendo uno respecto al otro, la frecuencia recibida por el receptor no es la misma que la emitida por el foco. Cuando se están acercando entre sí, la frecuencia observada es mayor que la del foco, mientras que resulta menor si se están alejando. Este fenómeno se denomina **efecto Doppler**. Un ejemplo cotidiano es el cambio de tono de la bocina de un coche cuando éste se acerca o se aleja de nosotros.

En el análisis que sigue, todos los movimientos se consideran relativos al medio. Consideremos que el foco se mueve con una velocidad u_f, tal como se muestra en las figuras 15.26*a* y *b*, y un receptor estacionario. El foco tiene una frecuencia f_f (y un periodo $T_f = 1/f_f$). La frecuencia del receptor f_r, el número de ondas que pasan por el receptor por unidad de tiempo, es

$$f_r \lambda = v \quad \text{(receptor parado)} \qquad 15.37$$

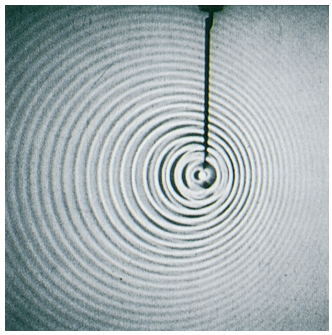
Sea t_1 el instante en que una cresta de onda sale del foco (figura 15.26*c*) y t_2 el instante en el que la siguiente cresta sale del foco. El tiempo entre estos dos eventos es $T_f = t_2 - t_1$ y durante este tiempo el foco y la cresta que sale en el instante t_1 recorren una distancia $u_f T_f$ y vT_f, respectivamente. En consecuencia, en el instante t_2 la distancia entre el foco y la cresta que sale en el instante t_1 es λ, la longitud de onda. Por detrás del foco $\lambda = \lambda_d = (v + u_f)T_f$, mientras que por delante del foco $\lambda = \lambda_d = (v - u_f)T_f$, suponiendo $u_f < v$. (Si $u_f \geq v$, no hay ningún frente de onda por delante del foco.) Estas dos relaciones pueden expresarse como

$$\lambda = (v \pm u_f)T_f = \frac{v \pm u_f}{f_f} \qquad 15.38$$

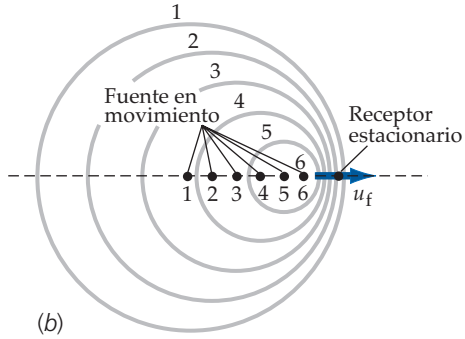
donde se ha sustituido $1/f_f$ por T_f. Delante del foco, la longitud de onda es más pequeña, por lo que se aplica en 15.38 el signo menos. Detrás del foco se aplica el signo más. Sustituyendo λ en la ecuación 15.37, obtenemos

$$f_r = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v \pm u_f} f_f \quad \text{(receptor parado)} \qquad 15.39$$

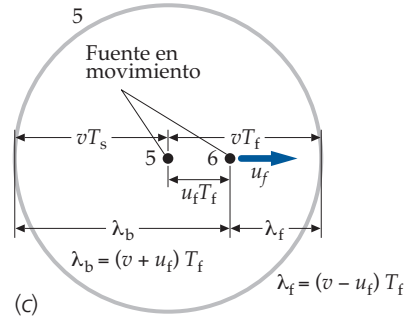
FIGURA 15.26 (*a*) Ondas en una cubeta producidas por un foco puntual que se mueve hacia la derecha. Los frentes de onda se encuentran más próximos delante del foco y más separados detrás de él. (*b*) Frentes de onda sucesivos emitidos por un foco puntual que se mueve hacia la derecha con velocidad u_f. Cada uno de los frentes numerados fue emitido cuando el foco estaba en la posición a la que corresponde el mismo número. (*c*) Durante el tiempo T_f la fuente se mueve una distancia $u_f T_f$ y el 5.º frente se mueve una distancia vT_f. Delante de la fuente, la longitud de onda es $\lambda_f = (v - u_f)T_f$, y detrás de ésta, $\lambda_b = (v + u_f)T_f$. *(Educational Development Center.)*



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Cuando el receptor se mueve relativo al medio, la frecuencia que detecta difiere de la frecuencia emitida porque el movimiento del receptor afecta al número de ondas que detecta en un determinado intervalo de tiempo. Sea un receptor que se mueve con velocidad u_r y sea T_r el tiempo que transcurre entre que llegan dos crestas consecutivas. Durante el tiempo entre la llegada de las dos crestas, el receptor se mueve $u_r T_r$, mientras que las crestas se habrán desplazado vT_r. Si el receptor se mueve en la dirección opuesta a la de la onda (figura 15.27), durante el tiempo T_r la longitud de onda λ es la distancia que se mueve cada cresta más la que se mueve el receptor, es decir, $\lambda = vT_r + u_r T_r$, o bien, $T_r = \lambda/((v + u_r)$. [Si el receptor se mueve en la misma dirección que la onda, $vT_r - \lambda = u_r T_r$, o bien $T_r = \lambda/((v - u_r)$]. Dado que $f_r = \lambda/T_r$, tenemos

$$f_r = \frac{1}{T_r} = \frac{v \pm u_r}{\lambda} \qquad 15.40$$

donde si el receptor se mueve en el mismo sentido que la onda, la frecuencia recibida es menor y aplicamos el signo negativo. Si, en cambio, el receptor se mueve en sentido opuesto al de la onda, la frecuencia es mayor y elegimos el signo positivo. Sustituyendo λ de la ecuación 15.38, se obtiene

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \qquad 15.41a$$

La elección correcta del signo se determina recordando que la frecuencia tiende a aumentar cuando el foco se mueve hacia el receptor o cuando éste se mueve hacia el foco. Por ejemplo, si el receptor se mueve hacia el foco, en el numerador se selecciona el signo positivo, lo cual tiende a incrementar la frecuencia recibida, y si el foco se aleja del receptor, se aplica al denominador el signo positivo, lo cual induce que la frecuencia recibida sea menor. La ecuación 15.41*a* adquiere un aspecto más simétrico si se expresa de la forma

$$\frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f} \qquad 15.41b$$

Se puede demostrar (véase el problema 83) que si tanto u_f como u_r son mucho menores que la velocidad de propagación de la onda v, el desplazamiento de la frecuencia $\Delta f = f_r - f_f$ viene dado, aproximadamente, por

$$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm \frac{u}{v} \qquad (u \ll v) \qquad 15.42$$

donde $u = u_f \pm u_r$ es la velocidad del foco con respecto al receptor.

En un sistema de referencia donde el medio se mueve (por ejemplo, un sistema de referencia fijo en la superficie terrestre donde el medio sea el aire y éste se mueva, es decir, sople el viento), la velocidad de propagación de la onda v se sustituye por $v' = v \pm u_v$, donde u_v es la velocidad del viento relativo a la superficie terrestre.

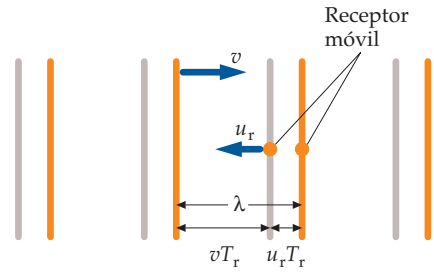


FIGURA 15.27 El tiempo transcurrido entre las llegadas de las crestas al receptor es T_r. Las líneas naranjas representan la primera cresta que sale de la fuente y las grises representan la siguiente cresta. Durante el tiempo T_r el receptor viaja una distancia $u_r T_r$, mientras que la cresta recorre una distancia vT_r.

¡ Las ecuaciones que van de la 15.37 a la 15.42 sólo son válidas en el sistema de referencia del medio.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Resolución de problemas de efecto Doppler

PLANTEAMIENTO La resolución de problemas de efecto Doppler requiere la aplicación de la ecuación 15.41*a*,

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f$$

SOLUCIÓN

1. Determinar la velocidad del emisor u_f y del receptor u_r en el sistema de referencia del medio en que se propaga.
2. Determinar las direcciones del movimiento del emisor y del receptor en el mismo sistema de referencia.
3. Sustituir los valores en la ecuación 15.41*a*. Tanto si el emisor se mueve hacia el receptor como si es el receptor el que se mueve hacia el emisor, aumenta la frecuencia recibida. Si el emisor se mueve hacia el receptor,

tomaremos el signo menos en el denominador, mientras que si el receptor se mueve hacia el emisor, tomaremos el signo más en el numerador.

4. Si la onda rebota sobre un reflector antes de que llegue al receptor, tratar el reflector primero como un receptor y aplicar la ecuación 15.41*a* con el signo correspondiente; luego, tratarlo como un emisor y aplicar la ecuación 15.41*a* con el signo correspondiente.

COMPROBACIÓN Si la distancia entre el emisor y el receptor decrece, la frecuencia recibida es mayor que la emitida. Si la distancia entre ambos aumenta, la frecuencia recibida en menor que la emitida.

Ejemplo 15.12 Tocando la bocina

La frecuencia de la bocina de un coche parado es 400 Hz. Determinar (*a*) la longitud de onda del sonido y (*b*) la frecuencia observada si el coche se mueve con una velocidad $u_f = 34$ m/s (aproximadamente 122 km/h) a través del aire en reposo hacia un receptor estacionario. Tomar como velocidad del sonido en el aire el valor 343 m/s. (*c*) Determinar la frecuencia observada si el coche está parado y un receptor se mueve con velocidad $u_r = 34$ m/s hacia el coche.

PLANTEAMIENTO (*a*) Las ondas de delante de la fuente se comprimen y, por lo tanto, se utiliza el signo menos en la ecuación 15.38. (*b*) Calcular la frecuencia a partir de la ecuación 15.41*a*. (*c*) Para un receptor móvil, se usan las mismas ecuaciones que en los apartados (*a*) y (*b*).

SOLUCIÓN

(*a*) Usando la ecuación 15.38, calcular la longitud de onda delante del coche. Delante del foco, la longitud de onda es más pequeña; por lo tanto, elegimos el signo correspondiente:

$$\lambda = \frac{v - u_f}{f_f} = \frac{343\ \text{m/s} - 34\ \text{m/s}}{400\ \text{Hz}} = 0{,}773\ \text{m} = \boxed{0{,}77\ \text{m}}$$

(*b*) Utilizando la ecuación 15.41*a*, despejar la frecuencia recibida:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v}{v - u_f} f_f = \left(\frac{343}{343 - 34}\right)(400\ \text{Hz}) = 444\ \text{Hz} = \boxed{440\ \text{Hz}}$$

(*c*) 1. Usando la ecuación 15.38, calcular la longitud de onda en la proximidad del receptor:

$$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f} = \frac{343\ \text{m/s}}{400\ \text{Hz}} = 0{,}858\ \text{m} = \boxed{0{,}86\ \text{m}}$$

2. La frecuencia recibida viene dada por la ecuación 15.41*a*. El foco se aproxima al receptor; por lo tanto, la frecuencia es mayor. Elegir el signo adecuado:

$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v + u_r}{v} f_f = \left(1 + \frac{u_r}{v}\right) f_f = \left(1 + \frac{34}{343}\right)(400\ \text{Hz}) = \boxed{440\ \text{Hz}}$$

COMPROBACIÓN El receptor se mueve a una velocidad de un 10% de la velocidad del sonido y la frecuencia recibida es un 10% mayor que la de la fuente, lo cual es lógico cuando la fuente está en reposo.

OBSERVACIÓN La frecuencia f_r también puede obtenerse a partir de la ecuación 15.40.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.8 Cuando un tren que se mueve a 90 km/h se aproxima a un observador estacionario, hace sonar su bocina con una frecuencia de 630 Hz. No hay viento. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda del sonido delante del tren? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia percibida por el observador? (Usar 343 m/s para la velocidad del sonido.)

Ejemplo 15.13 Velocidad de una onda *Póngalo en su contexto*

Usted trabaja para una compañía de seguros. Un asteroide que cae sobre el océano genera un tsunami que produce olas de 10 m de altura que llegan a tierra produciendo grandes destrozos. Su jefe desea saber a qué velocidad se desplazaban las olas y le encarga el trabajo a usted. La única información de la que dispone es la grabación de audio de un radiocasete que se encontró en lo alto de un árbol tras el tsunami. En la grabación se aprecia el sonido de fondo de una sirena; también se aprecia entre las ráfagas de la alarma local un eco débil de la sirena.

Usted mide las frecuencias del sonido producido por la sirena y su eco, obteniendo 4000 Hz y 4080 Hz, respectivamente. ¿A qué velocidad se acercaban las olas?

PLANTEAMIENTO El servicio meteorológico le confirma que no había viento cuando se produjo el tsunami. Además, la temperatura era de 20 °C, por lo que la velocidad del sonido era de 343 m/s. Primero, utilizamos la ecuación 15.41*a* del efecto Doppler para calcular la frecuencia del sonido recibida por una ola en función de la velocidad u con la que avanza la ola. Luego se aplica de nuevo la ecuación, considerando esta vez la ola como emisora del eco de la sirena y el radiocasete como receptor. Suponer que el radiocasete no se movía.

SOLUCIÓN

1. Aplicar la ecuación del efecto Doppler con $u_f = 0$ a fin de relacionar la frecuencia f_r recibida por la ola con su velocidad:
$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f = \frac{v + u}{v} f_f \qquad f_r = \frac{v + u}{v} f_f$$
2. Aplicar la ecuación del efecto Doppler con $u_r = 0$ a fin de relacionar la frecuencia f_r recibida por el radiocasete y la velocidad de la ola. Utilizar el resultado del paso 1 para despejar f_r:
$$f_r' = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f' = \frac{v}{v - u} f_r \qquad f_r' = \frac{v}{v - u} f_r$$
3. Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Sustituimos el resultado del paso 1 en el del paso 2:
$$f_r' = \frac{v}{v - u} f_r = \frac{v}{v - u} \frac{v + u}{v} f_f \qquad f_r' = \frac{v + u}{v - u} f_f$$
4. Despejamos u:
$$u = \frac{f_r' - f_f}{f_r' - f_f} v = \frac{4400 \text{ Hz} - 4000 \text{ Hz}}{4400 \text{ Hz} + 4000 \text{ Hz}} 343 \text{ m/s} = \boxed{16{,}3 \text{ m/s}}$$

COMPROBACIÓN Dieciséis metros por segundo es casi el doble de la velocidad a la que una persona puede esprintar en condiciones ideales. El resultado parece lógico después de ver las imágenes de los tsunamis cuando llegan a la orilla.

Otro ejemplo cotidiano de efecto Doppler es el radar usado por la policía para medir la velocidad de un vehículo. Las ondas electromagnéticas emitidas por el transmisor del radar chocan con el vehículo en movimiento. Cuando las ondas se reflejan en el coche, este actúa a la vez como receptor y como foco emisor en movimiento. La ecuación 15.41*a* no es válida para ondas electromagnéticas, pues requieren del uso de la fórmula de efecto Doppler relativista que veremos en el ejemplo 15.14. Si $u << c$, la ecuación 15.42 es válida para ondas electromagnéticas.

Ejemplo 15.14 El radar de la policía — *Inténtelo usted mismo*

La unidad de radar de un coche de policía estacionado emite ondas electromagnéticas de frecuencia f_f que se propagan a la velocidad de la luz, c. Las ondas se reflejan en un coche que se mueve a la velocidad u alejándose del coche de policía. Determinar u en función de f_f y Δf, donde Δf es la diferencia de frecuencias entre f_f y f_r', la frecuencia recibida en el coche de policía.

PLANTEAMIENTO La onda del radar choca contra el coche con frecuencia f_r. Esta frecuencia es menor que f_f porque el coche se mueve alejándose del foco. El desplazamiento de la frecuencia viene dado por la ecuación 15.42. El coche actúa entonces como un foco móvil que emite ondas de frecuencia f_r. El coche policía detecta ondas de frecuencia $f_r' < f_r$ porque el foco (el coche circulando) se aleja del coche de policía. La diferencia de frecuencia es $f_r - f_f$.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
1. La unidad de radar ha de determinar la velocidad únicamente a partir de lo que emite y de lo que recibe.	La unidad de radar debe determinar u en función de f_f y f_r'. Tal como está escrita la ecuación 15.42, despejamos u en función de f_f y de $\Delta f = f_r' - f_f$.
2. El desplazamiento de la frecuencia Δf es igual a la suma del desplazamiento de la frecuencia cuando la onda va hacia el vehículo $\Delta f_1 = f_r - f_f$ más el desplazamiento de la frecuencia cuando la onda vuelve $\Delta f_2 = f'_r - f_r$.	$\Delta f = \Delta f_1 + \Delta f_2$
3. Usando la ecuación 15.42, sustituir la diferencia de frecuencias del paso 2.	$\Delta f = -\frac{u}{c} f_f - \frac{u}{c} f_r = -\frac{u}{c}(f_f + f_r)$
4. De nuevo, utilizando 15.42, despejar f_r en función de f_f.	$\frac{\Delta f_1}{f_f} = -\frac{u}{c}$ por lo tanto, $f_r = \left(1 - \frac{u}{c}\right) f_f$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el del paso 3 y simplificar. $\Delta f = -\frac{u}{c}\left(2 - \frac{u}{c}\right) f_f$

6. u/c es despreciable frente a 2. Simplificar el resultado del paso 5 utilizando este hecho y despejar u, obteniendo una expresión en función de f_f y de Δf. $\Delta f \approx -2\frac{u}{c} f_f$ por lo tanto, $u = -\frac{\Delta f}{2f_f} c = \boxed{\frac{|\Delta f|}{2f_f} c}$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 6 es el cociente entre dos cantidades con unidades de frecuencia y multiplicado por la velocidad de la luz. Lógicamente, el resultado es una velocidad.

OBSERVACIÓN La diferencia de frecuencias entre dos ondas de frecuencia tan parecida es fácil de medir porque las dos ondas interfieren produciendo otra onda cuya amplitud oscila con la frecuencia $|\Delta f|$, que se denomina frecuencia de pulsación. La interferencia y la pulsación se analizan en el capítulo 16.

PROBLEMA PRÁCTICO 15.9 Calcular Δf si $f_f = 1{,}50 \times 10^9$ Hz, $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s, y $u = 50{,}0$ m/s.

El desplazamiento Doppler y la relatividad En el ejemplo 15.12 (y en las ecuaciones 15.39, 15.40 y 15.41) hemos visto que la magnitud del desplazamiento Doppler de la frecuencia depende de si es la fuente o el receptor lo que se mueve respecto al medio. En el caso del sonido, estas situaciones son físicamente diferentes. Por ejemplo, si una persona se mueve respecto al aire en reposo, parece notar que el aire se desplaza en sentido contrario. En su propio sistema de referencia existe un viento. En el caso de las ondas sonoras en el aire, podemos decir si la fuente o el receptor se mueven especificando si existe viento en el sistema de referencia de uno o del otro. Sin embargo, la luz y otras ondas electromagnéticas se propagan a través del espacio vacío, en el cual no hay medio alguno. Es decir, no existe "un viento" que nos diga si es la fuente o el receptor el que se mueve. De acuerdo con la teoría de la relatividad de Einstein, el movimiento absoluto no puede detectarse y todos los observadores miden la misma velocidad c para la luz, independientemente de su movimiento respecto al foco. Así, la ecuación 15.41 no es válida para el desplazamiento Doppler aplicado a la luz. Al calcular el efecto Doppler relativista debemos introducir dos modificaciones. En primer lugar, la velocidad de las ondas que se cruzan con un receptor es siempre c, independientemente del estado de movimiento del receptor. En segundo lugar, el intervalo de tiempo entre la emisión de dos ondas sucesivas, que es $T_f = 1/f_f$ en el sistema de referencia de la fuente, es distinto en el sistema de referencia del receptor cuando éstos se encuentran en movimiento relativo, debido a la dilatación relativista del tiempo y la contracción relativista de la longitud (ecuaciones R.9 y R.3). (En el capítulo 39, abordaremos el efecto Doppler relativista.) El resultado es que la frecuencia percibida depende sólo de la velocidad relativa de aproximación o alejamiento u, y está relacionada con la frecuencia emitida por

$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \pm u}} f_f \qquad 15.43$$

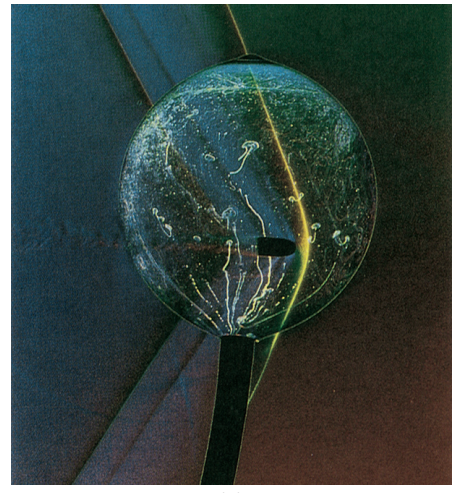
Los signos se eligen de modo que dan un desplazamiento hacia una frecuencia mayor cuando el foco y el receptor se aproximan, y viceversa. Análogamente, cuando $u \ll c$, $\Delta f/f_f \approx \pm u/c$, tal como se da en la ecuación 15.42.

ONDAS DE CHOQUE

En nuestra deducción de las expresiones para el desplazamiento Doppler, hemos supuesto que la velocidad u del foco o del receptor es menor que la velocidad de la onda v. Si un foco se mueve con una velocidad mayor que la velocidad de propagación de la onda, no habrá ondas delante del foco. En realidad, entonces, las ondas se concentran detrás del foco y forman lo que se denomina una onda de choque. En el caso de las ondas sonoras, por ejemplo, cuando la onda de choque llega al receptor se percibe como un estampido.

La figura 15.28 muestra un foco situado originalmente en el punto P_1, que se mueve hacia la derecha con velocidad u. Después de un tiempo t, la onda emitida desde el punto P_1 habrá recorrido una distancia vt. El foco habrá recorrido a su vez

(*a*)



(*b*)

(*a*) Ondas de choque producidas por un avión supersónico. *(Sandia National Laboratory.)* (*b*) Ondas de choque producidas por una bala que atraviesa un globo de helio. *(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)*

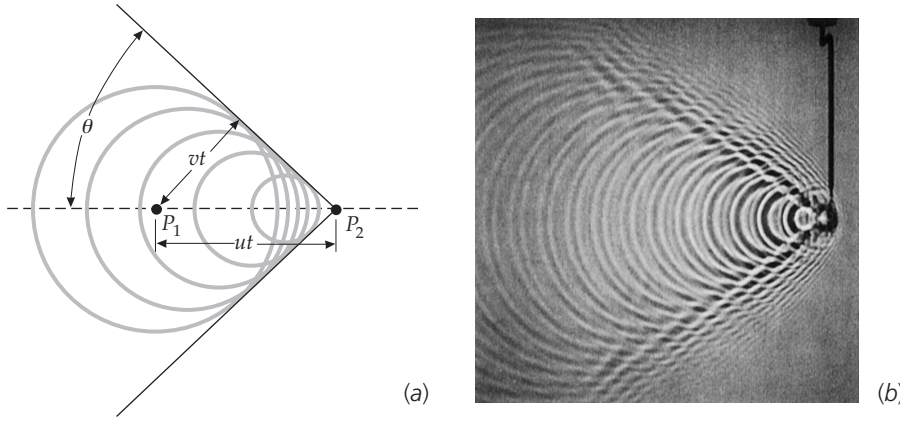


FIGURA 15.28 (*a*) Fuente que se mueve con una velocidad u que es mayor que la velocidad de onda v. La envolvente de los frentes de onda forma un cono con el foco en su vértice. (*b*) Ondas en una cubeta experimental producidas por un foco que se mueve con una velocidad $u > v$. *(Educational Development Center.)*

una distancia ut y estará en el punto P_2. La recta tangente desde esta nueva posición del foco al frente de onda emitido cuando estaba en P_1 forma un ángulo θ, llamado **ángulo de Mach**, con el trayecto del foco, dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{vt}{ut} = \frac{v}{u} \qquad 15.44$$

Así, la onda de choque está confinada en un cono que se estrecha cuando u crece. El cociente entre la velocidad del foco u y la velocidad de la onda v se denomina **número de Mach**:

$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v} \qquad 15.45$$

La ecuación 15.44 se puede aplicar también a la radiación electromagnética llamada *radiación Cerenkov*, emitida cuando una partícula cargada se mueve en un medio con una velocidad u que es mayor que la velocidad v de la luz en dicho medio. (De acuerdo con la teoría especial de la relatividad es imposible que una partícula se mueva con mayor rapidez que c, la velocidad de la luz en el vacío. Sin embargo, en un medio como el vidrio, los electrones y otras partículas pueden moverse con una velocidad mayor que la de la luz en dicho medio.) El resplandor azul que rodea los elementos combustibles utilizados en los reactores nucleares es un ejemplo de radiación Cerenkov.

Ejemplo 15.15 El estampido sónico — *Inténtelo usted mismo*

Un avión supersónico se encuentra sobre un punto P volando hacia el este a una altura de 15 km. El estampido sónico se oye en el punto P cuando el avión está a 22 km al este de dicho punto. ¿Cuál es la velocidad del avión supersónico?

PLANTEAMIENTO La velocidad del avión está relacionada con el seno del ángulo de Mach (ecuación 15.2). Dibujar un esquema que ayude a determinar el seno del ángulo de Mach.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	**Respuestas**
1. Hacer un esquema de la posición del avión (figura 15.29) tanto en la posición donde se generó el sonido como en la posición que ocupa cuando el estampido se oye en el punto P. Señalar, en el esquema, la distancia que se desplaza la onda sonora $v\,\Delta t$ y la distancia que se mueve el avión $u\,\Delta t$.	
2. A partir del esquema anterior y de la ecuación 15.44, calcular u.	$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{15\text{ km}}{22\text{ km}}$ es decir, $\theta = 34{,}3°$ $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{v\,\Delta t}{u\,\Delta t} = \dfrac{v}{u}$ y despejando, $u = \dfrac{v}{\operatorname{sen}\theta} = 609\text{ m/s} = \boxed{610\text{ m/s}}$

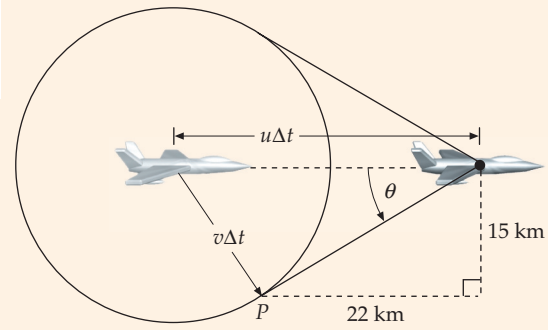


FIGURA 15.29 El sonido se desplaza una distancia $v\,\Delta t$ durante el tiempo Δt en que el avión se desplaza una distancia $u\,\Delta t$.

COMPROBACIÓN La velocidad del sonido es de 343 m/s; por tanto, 610 m/s resulta razonable para una velocidad supersónica.

Temas de actualidad en Física

Ciudades con pies de barro

El 18 de abril de 1906 la ciudad de San Francisco sufrió el efecto devastador de un potente terremoto. Todos los edificios de la parte más baja de la ciudad se desmoronaron. Esos edificios se habían construido sobre una base de *sedimentos no consolidados* (gravilla, arena y arcilla). En algunos casos, varias plantas se hundieron bajo tierra conforme se agitaban esos sedimentos anegados debido al terremoto. Los edificios construidos sobre terrenos rocosos como Nob Hill y Russian Hill se salvaron de la catástrofe.

Las ciudades localizadas sobre sedimentos no consolidados y cerca de grandes fallas son más vulnerables a los daños que ocasionan los terremotos. Si además están parcialmente rodeadas de montañas o colinas rocosas, el peligro aumenta. Ejemplos de ciudades vulnerables son Seattle,[1,2] Estambul,[3] Roma,[4] Los Ángeles,[5] San Francisco[6] y Taipei.[7]

Los daños sufridos por los edificios construidos sobre sedimentos arenosos o anegados de agua son mucho mayores que los sufridos por los edificios construidos sobre rocas. *(Roger Ressmeyer/CORBIS.)*

Los sedimentos no consolidados suponen un riesgo mayor que los rocosos, a causa de la vibración que producen los terremotos. Cuando se produce un terremoto, parte de la energía del terremoto se emite en forma de ondas sísmicas. Esas ondas hacen vibrar el terreno a lo largo de un amplio rango de frecuencias. En rocas sólidas, sin embargo, las ondas vibran pero tienen una amplitud mucho menor.[8] Cuanto más suelto es el sedimento menor será la velocidad de la onda sísmica, pero mayor será su amplitud. Las ondas vibran más lentamente en la gravilla, pero tienen mayor amplitud. En sedimentos con gran contenido de agua, las ondas todavía se mueven más lentamente, pero sus amplitudes son mucho mayores. Si se le da un golpe agudo a una taza de gelatina, se puede oír el sonido del golpe. Si la taza es de metal o vidrio, el sonido tendrá una frecuencia de cientos de hertzs. Sin embargo, la gelatina atenúa y dispersa las altas frecuencias, y su frecuencia de resonancia es baja. El mismo principio se aplica a la vulnerabilidad de las ciudades a los terremotos.[9]

Desafortunadamente, las frecuencias de resonancia de la mayoría de los edificios son muy parecidas a las frecuencias de resonancia de las ondas sísmicas en sedimentos arenosos.[10] Por tanto, las ondas sísmicas no sólo vibran con mayor amplitud en sedimentos arenosos sino que además la amplitud de las vibraciones aumentará también debido a la resonancia con las frecuencias de los edificios. Este problema fue abordado en profundidad en el informe del estudio que se hizo del terremoto de San Francisco de 1906.[11] Los edificios que estaban construidos sobre sedimentos arenosos sufrieron muchos más daños que los que lo estaban sobre sedimentos más firmes.

Esta situación es incluso peor si los sedimentos sobre los que descansan las ciudades están rodeados de zonas de rocas duras. Allí, los terremotos entran en resonancia con las cuencas de los sedimentos aumentando enormemente su amplitud. Eso es lo que ocurrió en 1906 con la ciudad de Santa Rosa que estaba bastante más alejada del epicentro y sufrió más daños que otras ciudades que estaban más cerca del epicentro. Santa Rosa está construida sobre una cuenca de sedimentos rodeada de rocas.[12] Los sedimentos de esta cuenca vibran con grandes amplitudes debido a la resonancia de la cuenca y causan grandes daños. Normalmente, estos daños se producen a causa de la aceleración horizontal generada por las ondas sísmicas. Antes de la normativa de seguridad sobre terremotos de 1970, los edificios no se construían para que soportasen fuerzas horizontales. En la mayoría de las ciudades, más de la mitad de los edificios no cumplen la normativa de seguridad de terremotos.

Los geofísicos utilizan modelos de estas cuencas y de sus sedimentos para predecir áreas susceptibles de sufrir daños importantes producidos por terremotos.[13] Esas predicciones se utilizan para mejorar las normativas de seguridad de construcción de puentes,[14] rompeolas[15] y edificios.[16] La próxima vez que agite una taza de gelatina, acuérdese de las cuencas de sedimentos y de los daños producidos por los terremotos.

---

1 Chang, S., et al., "Expected Ground Failure." Paper presented at the Seattle Fault Earthquake Scenario Conference, 2005. Seattle: Earthquake Engineering Research Institute. http://seattlescenario.eeri.org/presentations/Ch%202%20Ground%20Failure%20-%20Chang.pdf

2 Pierepiekarz, M. et al., "Buildings." Paper presented at the Seattle Fault Earthquake Scenario Conference, 2005. Seattle: Earthquake Engineering Research Institute. http://seattlescenario.eeri.org/presentations/Ch%205%20Buildings%20-%20Pierepiekarz.pdf

3 Erdik, M. *Earthquake Vulnerability of Buildings and a Mitigation Strategy: Case of Istanbul*. World Bank. http://info.worldbank.org/etools/docs/library/114715/istanbul03/docs/istanbul03/06erdik3-n%5B1%5D.pdf as of June 2006.

4 Perkins, S. "Rome at Risk: Seismic Shaking Could Be Long and Destructive." *Science News*, Feb. 25, 2006, 115.

5 Perkins, S., "Portrait of Destruction." *Science News*, May 21, 2005, 325.

6 Zoback, M. L., "The 1906 Earthquake—Lessons Learned, Lessons Forgotten, and Future Directions." Paper presented at the American Geophysical Union Meeting, San Francisco, Dec. 5–9, 2005. http://www.ucmp.berkeley.edu/museum/events/shortcourse2006/zoback/

7 Altenburger, E., "Earthquake Hazards in Taiwan—The September 1999 Chichi Earthquake." *FOCUS on Geography*, Winter 2004, 1–8.

8 O'Connell, D. R.H., "Replications of Apparent Nonlinear Seismic Response with Linear Wave Propagation Models." *Science*, Mar. 26, 1999, Vol. 283, No. 5410, p. 2045-2050.

9 Page, R. A., Blume, J. A., and Joyner, W. B., "Earthquake Shaking and Damage to Buildings." *Science*, Aug. 22, 1975, Vol. 189., No. 4203, p. 601-608.

10 Seed, H. B., et al., "Soil Conditions and Building Damage in 1967 Caracas Earthquake." *Journal of Soil Mechanics Division of American Society of Civil Engineers*, 1972, Vol. 98, No. 8, 787–806.

11 Lawson, A., et al., *Report of the State Earthquake Investigation Commission*. 1908. Washington, DC: Carnegie Institution.

12 Sloan, D., "Portrait of a Tectonic Landscape." *Bay Nature*, Spring 2006, Vol. 6, No. 2, 24–27.

13 United States Geological Survey, "1906 Ground Motion Simulations." Earthquake Hazards Program. http://earthquake.usgs.gov/regional/nca/1906/simulations/, as of June 2006.

14 Treyger, S., Jones, M., and Orsolini, G., "Suspending the Big One." *Roads and Bridges*, May 2004, 22–25.

15 Banijamali, B., "Rubble Mounds Feel the Rumble." *Dredging and Port Construction*, June 2005, 35–41.

16 Gonchar, J., "One Project, but Many Seismic Solutions." *Architectural Record*, May 2006, 167–174.

Resumen

1. En el movimiento ondulatorio, la energía y el momento lineal se desplazan de un punto a otro del espacio sin transportar materia.

2. La relación $v = f\lambda$ es válida para todas las ondas armónicas.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Ondas transversales y longitudinales	En las ondas transversales, como las ondas en una cuerda, la perturbación es perpendicular a la dirección de propagación. En las ondas longitudinales, como las sonoras, la perturbación tiene la dirección de la propagación.	
2. Velocidad de las ondas	La velocidad de una onda v depende de la densidad y de las propiedades elásticas del medio. Es independiente del movimiento de la fuente de las ondas.	
Ondas sobre una cuerda	$v = \sqrt{F_T/\mu}$	15.3
Ondas sonoras	$v = \sqrt{B/\rho}$	15.4
Ondas sonoras en un gas	$v = \sqrt{\gamma RT/M}$	15.5
	donde T es la temperatura absoluta, $T = t_C + 273.15$	15.6
	R es la constante universal de los gases, $R = 8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}$	15.7
	M es la masa molar del gas, que para el aire es 29×10^{-3} kg/mol, y γ es una constante que depende del tipo de gas. Para un gas diatómico como el aire, $\gamma = 1{,}4$. Para un gas monoatómico como el helio, $\gamma = 1{,}67$.	
Ondas electromagnéticas	La velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío es una constante universal. $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s	
* **3. Ecuación de ondas**	$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	15.10*b*
4. Ondas armónicas		
Función de onda	$y(x,t) = A\ \text{sen}(kx \pm \omega t)$	15.15
	donde A es la amplitud, k el número de onda y ω la frecuencia angular. Se usa el signo $-$ cuando la onda se mueve en la dirección positiva de x, y el signo $+$ cuando la onda se mueve en la dirección negativa de x.	
Número de onda	$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	15.14
Frecuencia angular	$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$	15.17
Velocidad	$v = f\lambda = \omega/k$	15.12, 15.16
Energía	La energía de una onda armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud.	
Potencia de las ondas sobre una cuerda	$P_m = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2$	15.22
5. Ondas armónicas sonoras	Las ondas sonoras pueden considerarse, o bien ondas de desplazamiento, o bien ondas de presión. En una onda sonora armónica, la amplitud de presión y el desplazamiento están desfasados 90°. El oído humano es sensible a ondas sonoras de frecuencia comprendida en el intervalo de 20 Hz a 20 kHz, aproximadamente.	
Amplitudes	La amplitud de presión está relacionada con la amplitud de desplazamiento por $p_0 = \rho\omega v s_0$	15.26
	donde ρ es la densidad del medio.	
Densidad de energía	$\eta_m = \dfrac{(\Delta E)_m}{\Delta V} = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2$	15.28

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
6. Intensidad	La intensidad de una onda es la potencia media por unidad de área.	
	$$I = \frac{P_m}{A}$$	15.29
Intensidad de energía media I de una onda sonora	$$I = \eta_m v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 s_0^2 v = \frac{1}{2}\frac{p_0^2}{\rho v}$$	15.32
*Nivel de intensidad (sonoridad), β en dB	Los niveles de intensidad de los sonidos se miden en una escala logarítmica.	
	$$\beta = (10\ \text{dB}) \log \frac{I}{I_0}$$	15.33
	donde $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ es, aproximadamente, el umbral de audición.	
7. Reflexión y refracción	Cuando una onda incide sobre una superficie límite que separa dos regiones de diferente velocidad de onda, una parte de la onda se refleja y otra parte se transmite.	
	Los coeficientes de reflexión y transmisión son	
	$$r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \quad \text{y} \quad \tau = \frac{2v_2}{v_2 + v_1}$$	15.35
8. Difracción	Si un frente de onda se ve parcialmente obstruido por un obstáculo, en la región posterior del obstáculo la parte no obstruida del frente se difracta (se curva).	
Aproximación de rayos	Si un frente de onda se ve parcialmente obstruido por un obstáculo, casi toda la difracción se da en aquella zona del frente de onda que pasa a una distancia de pocas longitudes de onda del borde. En aquellas zonas del frente que pasan más lejos del borde, la difracción es despreciable y la onda se propaga en líneas rectas en la dirección de los rayos incidentes.	
9. Efecto Doppler	Cuando un foco y un receptor del sonido están en movimiento relativo, la frecuencia recibida f_r es mayor que la frecuencia del foco f_f si su separación disminuye y menor si su separación aumenta.	
Foco móvil	$$\lambda = \frac{v \pm u_f}{f_f}$$	15.38[4]
Receptor móvil	$$f_r = \frac{v \pm u_r}{\lambda}$$	15.40[3]
Foco y/o receptor móvil	$$f_r = \frac{v \pm u_r}{v \pm u_f} f_f \quad \text{o} \quad \frac{f_r}{v \pm u_r} = \frac{f_f}{v \pm u_f}$$	15.41[3]
	Elegir los signos que conducen a un aumento del desplazamiento de la frecuencia si se aproxima el foco o el receptor, y viceversa.	
Pequeñas velocidades de foco o receptor	$$\frac{\Delta f}{f_f} \approx \pm\frac{u}{v} \quad (u \ll v), \quad \text{donde} \quad u_f = u_f \pm u_r$$	15.42[3]
Desplazamiento Doppler relativista	$$f_r = \sqrt{\frac{c \pm u}{c \pm u}} f_f$$	15.43
	Elegir los signos que conducen a un aumento del desplazamiento de la frecuencia si se aproxima el foco o el receptor, y viceversa.	
10. Ondas de choque	Cuando la velocidad del foco es mayor que la velocidad de la onda, las ondas de detrás del foco están confinadas en un cono de ángulo θ dado por	
Ángulo de Mach	$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v}{u}$$	15.44
Número de Mach	$$\text{Número de Mach} = \frac{u}{v}$$	15.45

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

15.1 David se sentirá frustrado. El doble de potencia acústica producirá el doble de intensidad a una determinada distancia de la radio, pero no el doble de *nivel de intensidad*.

Respuestas a los problemas prácticos

15.1 $\sqrt{\frac{\text{N}}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{kg}}} = \sqrt{\text{m}^2/\text{s}^2} = \text{m/s}$

15.2 1,01 km/s

15.3 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = k^2\frac{d^2y}{d^2\beta}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega^2\frac{d^2y}{d^2\beta}$, donde $\beta = kx + \omega t$.

Entonces, $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow \omega = kv$

15.4 26 W

15.5 $\lambda = 17$ m cuando 20 Hz, 17 mm cuando 20 000 Hz

15.6 (*a*) $A_r = +\frac{1}{3}A$ y $A_r = \frac{4}{3}A$, (*b*) $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{4}$, (*c*) $P_r/P_{in} = 1/9$ y $P_r/P_{in} = 8/9$

15.7 $1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + 2\frac{4}{9} = 1$

15.8 (*a*) $\lambda = 0{,}5$ m, (*b*) $f_r = 680$ Hz

15.9 $\Delta f = 500$ Hz

Problemas

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Suponer que la velocidad del sonido es en aire es de 343 m/s cuando no se indique lo contrario.

El nivel de intensidad sonora para el umbral de audición se toma como 10^{-12} W/m² por convenio.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Una cuerda cuelga verticalmente del techo. Cuando las ondas se mueven de abajo hacia arriba por la cuerda, ¿lo hacen más rápidamente, más lentamente o a la misma velocidad que las ondas que se mueven de arriba hacia abajo? Razonar la respuesta. SSM

2 • A lo largo de una cuerda tensa viaja un pulso hacia la derecha. Si la densidad de masa por unidad de longitud de la cuerda disminuye hacia la derecha, ¿qué le sucede a la velocidad del pulso conforme viaja hacia la derecha? (*a*) Va disminuyendo. (*b*) Aumenta. (*c*) Su velocidad se mantiene constante. (*d*) No se puede saber con tan pocos datos.

3 • Un tren de ondas atraviesa un punto de observación. En este punto, el tiempo entre crestas sucesivas es 0,2 s. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? (*a*) La longitud de onda es 5 m. (*b*) La frecuencia es 5 Hz. (*c*) La velocidad de propagación es 5 m/s. (*d*) La longitud de onda es 0,2 m. (*e*) No hay suficiente información para justificar las afirmaciones anteriores.

4 • Dos ondas armónicas sobre idénticas cuerdas difieren sólo en amplitud. La amplitud de la onda A es el doble que la amplitud de la onda B. ¿Cómo están relacionadas sus energías? (*a*) $E_A = E_B$. (*b*) $E_A = 2E_B$. (*c*) $E_A = 4E_B$. (*d*) No se puede saber con tan pocos datos.

5 • Verdadero o falso: el ritmo al que se transporta la energía de una onda armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

6 • Los instrumentos musicales producen sonidos de muy variadas frecuencias. ¿Qué ondas sonoras tienen las longitudes de onda más grandes? (*a*) Las que tienen frecuencias más bajas. (*b*) Las que tienen frecuencias más altas. (*c*) Todas la frecuencias tienen la misma longitud de onda. (*d*) No se puede saber con tan pocos datos.

7 • En problema 6, ¿qué ondas sonoras se propagan a mayor velocidad? (*a*) Las que tienen frecuencias más bajas. (*b*) Las que tienen frecuencias más altas. (*c*) Todas la frecuencias tienen la misma longitud de onda. (*d*) No se puede saber con tan pocos datos.

8 • El sonido se propaga a 343 m/s en el aire y a 1500 m/s en el agua. Un sonido de frecuencia 256 Hz se produce bajo el agua, pero el sonido se escucha mientras se camina alrededor de la piscina. En el aire, la frecuencia será (*a*) la misma, pero la longitud de onda será más corta, (*b*) más elevada, pero la longitud de onda del sonido será la misma, (*c*) más baja, pero la longitud de onda del sonido será más larga, (*d*) más baja, y la longitud de onda del sonido será más corta, (*e*) la misma, y la longitud de onda del sonido también será la misma.

9 • Durante una patrulla, el acorazado *Rodger Young* choca con una mina, empieza a arder y acaba explotando. El marinero Abel salta al agua por la borda y comienza a nadar intentando escapar del barco mientras que el marinero Baker consigue subir a una balsa salvavidas. Cuando, pasado el episodio, Abel y Baker comparan sus experiencias, Abel dice "Yo nadaba bajo el agua y oí una gran explosión procedente del navío. Cuando salí a la superficie oí una segunda explosión. ¿Qué crees que pudo ser?". Baker responde, "Yo creo que fue tu imaginación, ya que yo oí únicamente una explosión". Explicar por qué Baker oyó sólo una explosión mientras que Abel oyó dos.

10 • Verdadero o falso: un sonido de 60 dB tiene una intensidad doble a la de un sonido de 30 dB.

11 • En un punto dado, dos ondas sonoras armónicas tienen la misma amplitud, pero la frecuencia de la onda A es el doble de la frecuencia de la onda B. ¿Cómo están relacionadas sus densidades de energías medias? (*a*) La densidad de energía media de la onda A es el doble de la densidad de energía media de la onda B. (*b*) La den-

sidad de energía media de la onda A es 4 veces la densidad de energía media de la onda B. (*c*) La densidad de energía media de la onda A es 16 veces la densidad de energía media de la onda B. (*d*) No se puede saber con tan pocos datos. SSM

12 • En un punto dado, dos ondas sonoras armónicas tienen la misma frecuencia, pero la amplitud de la onda A es el doble de la amplitud de la onda B. ¿Cómo están relacionadas sus densidades de energías medias? (*a*) La densidad de energía media de la onda A es el doble de la densidad de energía media de la onda B. (*b*) La densidad de energía media de la onda A es 4 veces la densidad de energía media de la onda B. (*c*) La densidad de energía media de la onda A es 16 veces la densidad de energía media de la onda B. (*d*) No se puede saber con tan pocos datos.

13 • ¿Cuál es el cociente entre la intensidad de una conversación normal y la intensidad de un susurro suave (a una distancia de 5 m)? (*a*) 10^3. (*b*) 2. (*c*) 10^{-3}. (*d*) 1/2. (*Ayuda: ver tabla 15.1.*)

14 • ¿Cuál es el cociente entre los niveles de intensidad de una conversación normal y de un susurro suave (a una distancia de 5 m)? (*a*) 10^3. (*b*) 2. (*c*) 10^{-3}. (*d*) 1/2. (*Ayuda: ver tabla 15.1.*)

15 • Para aumentar el nivel de intensidad del sonido en 20 dB se requiere que la intensidad aumente en un factor (*a*) 10, (*b*) 100, (*c*) 1000, (*d*) 2.

16 • La distancia que debe haber entre dos posiciones, para que disminuya el nivel de intensidad emitida por una fuente sonora en 20 dB, es tal que ha de aumentar en un factor (*a*) 10, (*b*) 100, (*c*) 1000, (*d*) no se puede saber con tan pocos datos.

17 • El extremo de un hilo delgado pero resistente se une al extremo de una cuerda más gruesa. El otro extremo del hilo está sujeto a un poste macizo y una persona tira del otro extremo de la cuerda a fin de tensarla. Se envía un pulso desde el extremo de la cuerda densa. Verdadero o falso:

(*a*) El pulso que se refleja en la unión entre el hilo y la cuerda queda invertido.

(*b*) El pulso que se transmite a través de la unión entre el hilo y la cuerda permanece en el mismo sentido.

(*c*) El pulso que se transmite a través de la unión entre el hilo y la cuerda y tiene una amplitud menor que la del pulso reflejado.

18 • La luz que viaja por el aire impacta sobre la superficie de un vidrio inclinada 45º con respecto a la dirección incidente. Verdadero o falso:

(*a*) El ángulo que forman los rayos incidente y reflejado es de 90º.

(*b*) El ángulo que forman los rayos incidente y refractado es inferior a 90º.

19 • Las ondas sonoras que se propagan a través del aire inciden sobre la puerta de un aula de 1 m de anchura. Debido a los efectos de la difracción, ¿de qué frecuencia deberá ser el sonido para que sea difícilmente audible por todos los estudiantes que llenan el aula? (*a*) 600 Hz. (*b*) 300 Hz. (*c*) 100 Hz. (*d*) Todos los sonidos son igualmente audibles dentro del aula. (*e*) La difracción depende de la longitud de onda, no de la frecuencia, de forma que no se puede saber con lo datos aportados. SSM

20 • La radiación de microondas de un horno microondas moderno tiene una longitud de onda del orden de centímetros. ¿Se esperaría una difracción significativa si esta radiación saliera por una puerta de 1 m de ancho?

21 •• Frecuentemente, las estrellas se observan en pares que giran alrededor de su centro de masas común. Si una de las estrellas es un agujero negro, es invisible. Explicar cómo la existencia de este agujero negro puede deducirse de la luz observada de la otra estrella visible. SSM

22 •• El pulso de onda en la cuerda, para un tiempo $t = 0$, indicado en la figura 15.30, se mueve hacia la derecha. (*a*) En este instante particular, ¿qué segmentos de la cuerda se están moviendo hacia arriba? (*b*) ¿Cuáles se están moviendo hacia abajo? (*c*) ¿Existe algún segmento de la cuerda que está en el pulso que esté instantáneamente en reposo? Responder a estas cuestiones haciendo un esquema del pulso en un instante ligeramente posterior y ligeramente anterior para ver cómo se mueven los segmentos de la cuerda.

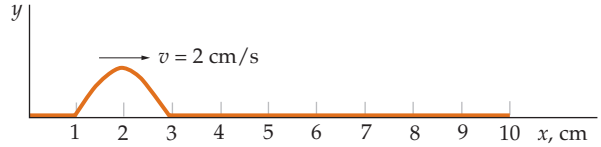


FIGURA 15.30 Problemas 22 y 23

23 •• Hacer un esquema de la velocidad de cada segmento de cuerda en función de la posición en el caso del pulso indicado en la figura 15.30.

24 •• Un objeto de masa m cuelga de una cuerda fina unida al techo. Se hace vibrar la cuerda de forma que se genera un pulso de onda que viaja hacia el techo y vuelve. Comparar el tiempo que tardaría el pulso en ir y volver con el tiempo que tardaría el pulso si la masa que cuelga es $9m$. Suponer que el resto de condiciones se mantienen igual en los dos casos y que la cuerda no se alarga.

25 •• La velocidad del sonido en el agua es mayor que en el aire. Un helicóptero que vuela tal como se muestra en la figura 15.31 registra la explosión de una carga de profundidad bajo la superficie del agua. ¿Por cuál de los tres caminos del esquema, A, B, o C, el sonido llegará en menos tiempo?

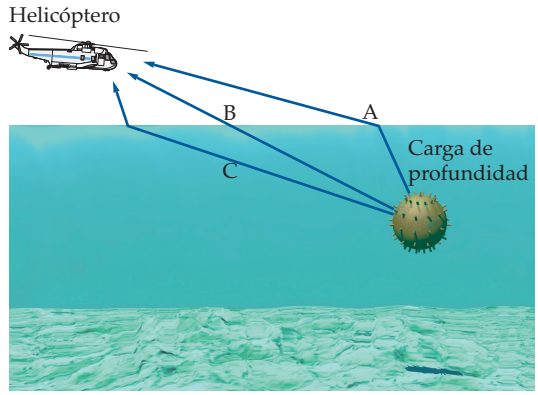


FIGURA 15.31 Problema 25

26 •• La velocidad de un Mach 2 a una altitud de 18 000 m ¿es la misma que un Mach 2 a nivel del mar? Explicarlo con detalle.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

27 •• Hace muchos años, las carreras de 100 m empezaban con el sonido del pistoletazo de salida, con la persona que da la salida situada a varios metros respecto a los corredores justo en el borde interno de la pista. Estimar la ventaja de tiempo que consigue el corredor que está situado en el carril más interno respecto del octavo corredor que está en el carril más externo suponiendo que todos los corredores salen justo en el momento que oyen el disparo.

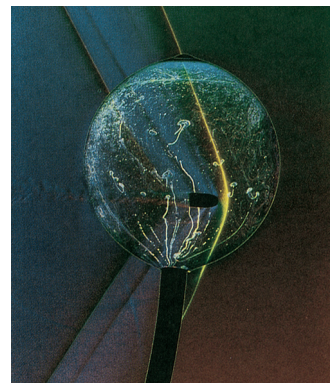


FIGURA 15.32 Problema 28 *(Estate of Harold E. Edgerton/Palm Press Inc.)*

28 •• Estimar la velocidad de la bala cuando pasa por el globo de helio de la figura 15.32.

29 •• Los edificios de una residencia de estudiantes están distribuidos en forma semicircular. Para calcular la velocidad del sonido, un avezado estudiante de física se sitúa en el centro del semicírculo, a 30 pasos dobles de los edificios y aplaude rítmicamente de modo que la frecuencia, de 2,5 aplausos por segundo, es tal que el eco de un aplauso llega a la vez que el estudiante produce el siguiente. Suponiendo que la distancia de un paso doble es la misma que su altura (180 cm), estimar la velocidad del sonido en el aire. ¿Cuánto difiere el resultado obtenido del valor conocido?

VELOCIDAD DE ONDAS

30 • (*a*) El módulo de compresibilidad del agua es $2{,}0 \times 10^9$ N/m^2. Utilizar este valor para hallar la velocidad del sonido en el agua. (*b*) La velocidad del sonido en mercurio es 1410 m/s. ¿Cuál es el módulo de compresibilidad del mercurio ($\rho = 13{,}6 \times 10^3$ kg/m^3)?

31 • Calcular la velocidad de las ondas sonoras en el gas hidrógeno a $T = 300$ K. (Tomar $M = 2$ g/mol y $\gamma = 1{,}4$.)

32 • Un hilo de acero de 7 m de largo tiene una masa de 100 g. Si está sometido a una tensión de 900 N, ¿cuál es la velocidad de un pulso de onda transversal en este hilo?

33 •• (*a*) Calcular la derivada de la velocidad de una onda en una cuerda con respecto a la tensión dv/dF_T y demostrar que las diferenciales dv y dF_T obedecen a la expresión $dv/v = \frac{1}{2}\, dF_T/F_T$. (*b*) Una onda se mueve con una velocidad de 300 m/s en un alambre que está sometido a una tensión de 500 N. Utilizando dF_T para aproximar la variación de tensión, hallar en qué cantidad debe variarse la tensión para aumentar la velocidad a 312 m/s. (*c*) Calcular ΔF_T de forma exacta y compararla con la aproximación del resultado del apartado (*b*). Suponer que la cuerda no se alarga cuando se aplica la tensión. SSM

34 •• (*a*) Calcular la derivada de la velocidad del sonido respecto a la temperatura absoluta y demostrar que las diferenciales dv y dT obedecen a la expresión $dv/v = \frac{1}{2}\, dT/T$. (*b*) Utilizar esta expresión para calcular la variación porcentual de la velocidad del sonido cuando la temperatura se modifica de 0 a 27 °C. (*c*) Si la velocidad del sonido es 331 m/s a 0 °C, ¿cuál es (aproximadamente) a 27 °C? ¿Cómo es el resultado obtenido mediante esta aproximación comparado con el que se obtiene mediante un cálculo exacto? (*d*) Comparar este resultado con el resultado del cálculo exacto.

35 ••• En este problema se ha de obtener una fórmula práctica para determinar la velocidad del sonido en el aire a una temperatura t en grados Celsius. Comenzamos escribiendo la temperatura como $T = T_0 + \Delta T$, donde $T_0 = 273$ K corresponde a 0 °C y $\Delta T = t$, a la temperatura Celsius. La velocidad del sonido es una función de T, $v(T)$. Con una aproximación de primer orden, podemos escribir $v(T) \approx v(T_0) + (dv/dT)_{T_0}\, \Delta T$, donde $(dv/dT)_{T_0}$ es la derivada calculada para $T = T_0$. Calcular esta derivada y demostrar que su resultado lleva a $v = (331 \text{ m/s})(1 + (t/2T_0)) = (331 + 0{,}606t)$ m/s.

LA ECUACIÓN DE ONDA

36 • Demostrar explícitamente que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda: (*a*) $y(x, t) = k(x + vt)^3$, (*b*) $y(x, t) = Ae^{ik(x-vt)}$, donde A y k son constantes e $i = \sqrt{-1}$, y (*c*) $y(x, t) = \ln[k(x - vt)]$.

37 • Demostrar que la función $y = A \text{ sen } (kx) \cos (\omega t)$ satisface la ecuación de onda.

ONDAS ARMÓNICAS EN UNA CUERDA

38 • Uno de los extremos de una cuerda de 6 m de largo se mueve hacia arriba y abajo con un movimiento armónico simple de frecuencia 60 Hz. Las ondas alcanzan el otro extremo de la cuerda en 0,5 s. Hallar la longitud de onda de las ondas en la cuerda.

39 • Una onda armónica en una cuerda con una densidad de masa de 0,05 kg/m y una tensión de 80 N tiene una amplitud de 5 cm. Cada sección de la cuerda se mueve con movimiento armónico simple a una frecuencia de 10 Hz. Hallar la potencia propagada a lo largo de la cuerda. SSM

40 • Una cuerda de 2 m de largo tiene una masa de 0,1 kg. La tensión es 60 N. Una fuente de potencia en uno de sus extremos envía por la cuerda una onda armónica con una amplitud de 1 cm. La onda sale por el otro extremo sin ninguna reflexión. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente de potencia si la potencia transmitida es 100 W?

41 •• La función de onda para una onda armónica en una cuerda es $y(x, t) = (0{,}001 \text{ m}) \text{ sen } (62{,}8 \text{ m}^{-1}x + 314 \text{ s}^{-1}\, t)$. (*a*) ¿En qué sentido se desplaza esta onda y cuál es su velocidad? (*b*) Hallar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de la misma. (*c*) ¿Cuál es la velocidad máxima de un segmento cualquiera de la cuerda?

42 •• Una onda armónica con una frecuencia de 80 Hz y una amplitud de 0,025 m se propaga hacia la derecha a lo largo de una cuerda con una velocidad de 12 m/s. (*a*) Escribir una expresión que sea adecuada para su función de onda. (*b*) Determinar la velocidad máxima de un punto de la cuerda. (*c*) Determinar la aceleración máxima de un punto de la cuerda.

43 •• A lo largo de una cuerda que tiene 20 m de largo, una masa de 0,12 kg y una tensión de 50 N se mueven ondas de frecuencia 200 Hz y amplitud 1,2 cm. (*a*) ¿Cuál es la energía total media de las ondas en la cuerda? (*b*) Hallar la potencia transmitida que pasa por un punto determinado de la cuerda.

44 •• En una cuerda real, una onda pierde cierta energía cuando se propaga a lo largo de ella. Tal situación puede describirse por una función de onda cuya amplitud $A(x)$ depende de x: $y = A(x) \text{ sen}(kx - \omega t)$, donde $A(x) = A_0 e^{-bx}$. ¿Cuál es la potencia transportada por la onda en el punto x, donde $x > 0$?

45 •• Se ha transmitido una determinada potencia a lo largo de un alambre tenso mediante ondas armónicas transversales. La velocidad de la onda es de 10 m/s y la densidad lineal de masa del alambre es 0,01 kg/m. La fuente de potencia oscila con una amplitud de 0,50 mm. (*a*) ¿Qué potencia media se transmite a lo largo del alambre si la frecuencia es de 400 Hz? (*b*) La potencia transmitida puede aumentarse incrementando la tensión en el alambre, la frecuencia de la fuente o la amplitud de las ondas. Si sólo se varía una de estas magnitudes, ¿cómo habría de modificarse cada una de ellas con objeto de producir un aumento de potencia en un factor de 100? SSM

46 ••• Dos cuerdas largas están unidas en el punto $x = 0$. En la región $x < 0$, la velocidad de propagación de la onda es v_1, mientras que en la región $x > 0$, la velocidad es v_2. Desde la izquierda ($x < 0$) incide una onda sinusoidal, de tal forma que parte de la onda se refleja y parte se transmite. Si $x < 0$, el desplazamiento de la onda se describe mediante $y(x, t) = A \text{ sen}(k_1x - \omega t) + B \text{ sen}(k_1x + \omega t)$, y si $x > 0$, $y(x, t) = C \text{ sen}(k_2x - \omega t)$, donde $\omega/k_1 = v_1$ y $\omega/k_2 = v_2$. (*a*) Si suponemos que tanto la función de onda y como su primera derivada espacial $\partial y/\partial x$ han de ser continuas en $x = 0$, demostrar que $C/A = 2/(1 + v_1/v_2)$, y que $B/A = (1 - v_1/v_2)/(1 + v_1/v_2)$. (*b*) Probar que $B^2 + (v_1/v_2)C^2 = A^2$.

ONDAS SONORAS ARMÓNICAS

47 • Una onda sonora en aire produce una variación de presión dada por $p(x, t) = 0{,}75 \cos\left[\frac{\pi}{2}(x - 343t)\right]$, donde p se expresa en pascales, x en metros y t en segundos. ¿Cuál es (*a*) la amplitud de la presión, (*b*) la longitud de onda, (*c*) la frecuencia y (*d*) la velocidad de la onda?

48 • (*a*) La nota Do central de la escala musical tiene una frecuencia de 262 Hz. ¿Cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire? (*b*) La frecuencia de la nota Do sostenido, una octava por encima del Do central, es el doble que la de esta última. ¿Cuál es la longitud de onda de esta nota en el aire?

49 • La densidad del aire es de 1,29 kg/m³. (*a*) ¿Cuál es la amplitud del desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 100 Hz y amplitud de presión 10^{-4} atm? (*b*) La amplitud del desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 300 Hz es 10^{-7} m. ¿Cuál es la amplitud de presión de esta onda? SSM

50 • La densidad del aire es de 1,29 kg/m³ (*a*) Determinar la amplitud de desplazamiento correspondiente a una onda sonora de frecuencia 500 Hz cuando la amplitud de presión corresponde al umbral del dolor de 29 Pa. (*b*) Hallar la amplitud de desplazamiento para una onda sonora con la misma amplitud de presión pero con una frecuencia de 1 kHz.

51 • Una onda de un sonido intenso típico con una frecuencia de 1 kHz tiene una amplitud de presión de 10^{-4} atm, aproximadamente. (*a*) Cuando $t = 0$, la presión es máxima en un cierto punto x_1. ¿Cuál es el desplazamiento en dicho punto en $t = 0$? (*b*) ¿Cuál es el valor máximo del desplazamiento en un instante y posición cualquiera?

52 • Una octava representa un cambio en la frecuencia en un factor dos. ¿Cuántas octavas puede oír una persona normal?

53 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** La ballenas se comunican mediante la emisión de sonidos que transmiten a través del agua. Una ballena emite un sonido de 50 Hz. La velocidad del sonido en el agua es de 1500 m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda el sonido en recorrer 1,2 km? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda de este sonido en el agua? (*c*) Si la ballena está cerca de la superficie, parte de la energía sonora se refracta al aire. ¿Cuál sería la frecuencia y la longitud de onda del sonido en el aire?

ONDAS EN TRES DIMENSIONES: INTENSIDAD

54 • Un foco esférico radia el sonido uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 10 m, el nivel de intensidad del sonido es de 10^{-4} W/m². (*a*) ¿A qué distancia del foco el nivel de intensidad es de 10^{-6} W/m²? (*b*) ¿Qué potencia está radiando dicho foco?

55 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un altavoz de un concierto de rock genera 10^{-2} W/m² a 20 m a una frecuencia de 1 kHz. Suponiendo que el altavoz extiende su energía uniformemente en tres dimensiones, (*a*) ¿cuál es la potencia total acústica emitida por el altavoz? (*b*) ¿A qué distancia la intensidad del sonido se encontrará en el umbral del dolor de 1 W/m²? (*c*) ¿Cuál es la intensidad a 30 m? SSM

56 •• Cuando se lanza un alfiler de 0,1 g de masa desde una altura de 1 m, el 0,05 por ciento de su energía se convierte en un pulso sonoro de duración 0,1 s. (*a*) Estimar el intervalo en el que puede oirse la caída del alfiler si la intensidad mínima que puede llegar a oirse es de 10^{-11} W/m². (*b*) En la práctica, el resultado obtenido en (*a*) es mucho mayor debido al ruido de fondo. Si en lugar de la suposición anterior se considera que para llegar a oirse el ruido el nivel de intensidad debe ser de al menos 10^{-8} W/m², estimar el intervalo en el que puede llegar a oirse la caída del alfiler. (Suponer en ambos casos que la intensidad es $P/4\pi r^2$.)

*NIVEL DE INTENSIDAD

57 • ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibelios correspondiente a una onda sonora de intensidad (*a*) 10^{-10} W/m² y (*b*) 10^{-2} W/m²? SSM

58 • Hallar la intensidad de una onda sonora si (*a*) $\beta = 10$ dB y (*b*) $\beta = 3$ dB.

59 • El nivel acústico del ladrido de un perro es 50 dB. La intensidad de un concierto de rock es 10 000 veces superior a la del ladrido de un perro. ¿Cuál es el nivel acústico del concierto de rock?

60 • ¿Qué fracción de la potencia acústica de un ruido deberá eliminarse para disminuir su nivel de intensidad sonora de 90 a 70 dB?

61 •• Una fuente esférica irradia sonido uniformemente en todas las direcciones. A una distancia de 10 m, el nivel acústico es de 80 dB. (*a*) ¿A qué distancia de la fuente el nivel acústico es de 60 dB? (*b*) ¿Cuál es la potencia irradiada por la fuente?

62 •• Marta y Hugo están sentados en lados opuestos de la grada de un circo cuando un elefante emite un sonido fuerte. Si Marta detecta un nivel de intensidad de 65 dB y Hugo sólo 55 dB, deducir el cociente de las distancias entre Hugo y el elefante y Marta y el elefante.

63 •• Tres fuentes sonoras producen unos niveles de intensidad de 70, 73 y 80 dB cuando actúan separadamente. Cuando actúan juntas, las intensidades de las fuentes se suman. La intensidad resultante es la suma de las intensidades individuales. (*a*) Hallar el nivel de intensidad sonora en decibelios cuando las tres fuentes actúan simultáneamente. (*b*) Estudiar la utilidad de eliminar las dos fuentes menos intensas con objeto de reducir el nivel de intensidad del ruido.

64 •• Demostrar que si dos personas están a diferente distancia de una fuente sonora, la diferencia entre los niveles de intensidad que llegan a las personas es siempre la misma, independientemente de la potencia de la fuente emisora.

65 ••• Todas las personas que han acudido a un cocktail se encuentran hablando igual de ruidosamente. Si sólo estuviese hablando una persona, el nivel de sonido sería de 72 dB. Calcular el nivel de sonido cuando las 38 personas hablan a la vez.

66 ••• Cuando un violinista mueve su arco sobre una cuerda, la fuerza que ejerce es pequeña, del orden de 0,6 N. Supongamos que el arco se mueve a través de la cuerda "la", que vibra con una frecuencia de 440 Hz a 0,5 m/s. Un oyente a 35 m del músico oye un sonido de intensidad 60 dB. ¿Cuál es el rendimiento de la transformación de la energía mecánica de la pulsación en energía sonora? (Suponer que el sonido se irradia uniformemente en todas las direcciones.)

67 ••• El nivel de ruido en un aula vacía donde se va a realizar un examen es de 40 dB. Cuando 100 alumnos se encuentran escribiendo su examen, los sonidos de las respiraciones y de las plumas escribiendo sobre el papel elevan el nivel de ruido a 60 dB. (No tener en cuenta los carraspeos ocasionales.) Suponiendo que la contribución de cada alumno a la potencia de ruido es la misma, calcular el nivel de ruido cuando sólo quedan 50 alumnos en el aula. SSM

ONDAS EN CUERDAS CON CAMBIOS DE VELOCIDAD

68 • Un trozo de cuerda de 25 g de masa y 3 m de longitud se ata a un cordel de 4 m y 75 g. La combinación se somete a una tensión de 100 N. Si un pulso transversal parte de la cuerda menos densa, determinar los coeficientes de reflexión y transmisión en el punto de unión.

69 • Considerar una cuerda tensa cuya masa por unidad de longitud es μ_1 y que transporta pulsos que inciden sobre el punto de unión con una segunda cuerda de densidad lineal de masa μ_2. (*a*) Demostrar que si $\mu_2 = \mu_1$, el coeficiente de reflexión es 0 y el de transmisión es 1. (*b*) Demostrar que si $\mu_2 \gg \mu_1$, entonces ρ tiende a -1 y τ tiende a 0. (*c*) Demostrar que si $\mu_2 \ll \mu_1$, r tiende a 1 y τ tiende a 2. SSM

70 •• Verificar la validez de la ecuación 15.36, $1 = r^2 + (v_1/v_2)\tau^2$, sustituyendo las expresiones de los coeficientes.

71 ••• Considerar una cuerda tensa cuya masa por unidad de longitud es m y que transporta pulsos de la forma $y = f(x - v_1 t)$ que inciden sobre el punto P donde la cuerda se conecta a una segunda cuerda de densidad lineal de masa μ_2. Deducir la ecuación 15.36 igualando la potencia incidente en el punto P con la suma de potencia reflejada más la transmitida en el punto P.

EFECTO DOPPLER

En los problemas 72 al 75 considerar que la fuente emite un sonido de 200 Hz que se mueve por el aire en reposo con una velocidad de 343 m/s

72 • La fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia un observador estacionario. (*a*) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador. (*b*) Hallar la frecuencia oída por este último.

73 • Considerar el caso del problema 72 a partir del sistema de referencia en que la fuente está en reposo. En este sistema, el observador y el aire se mueven hacia la fuente (en reposo) con una velocidad de 80 m/s. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del sonido desde la fuente al observador en este sistema? (*b*) Hallar la longitud de onda del sonido en la zona entre la fuente y el observador. (*c*) Hallar la frecuencia percibida por el observador.

74 • La fuente se mueve con una velocidad de 80 m/s alejándose del observador estacionario. (*a*) Hallar la longitud de onda de las ondas sonoras en la zona entre la fuente y el observador. (*b*) Hallar la frecuencia oída por este último.

75 • El observador se aleja a una velocidad de 80 m/s respecto al aire en reposo hacia la fuente estacionaria. ¿Cuál es la frecuencia oída por el observador?

76 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted ha ido a ver el aterrizaje de una lanzadera espacial. Poco antes del aterrizaje, la lanzadera se mueve a un Mach 2,5 a una altitud de 5000 m. (*a*) ¿Cuál es el ángulo que la onda de choque forma con la trayectoria de la lanzadera? (*b*) ¿A qué distancia se encuentra usted de la lanzadera en el instante en que oye la onda de choque suponiendo que la dirección del movimiento pasa sobre su cabeza manteniendo constante su altitud a 5000 m?

77 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El detector de neutrinos japonés SuperKamiokande es un tanque de agua del tamaño de un edificio de 14 pisos. Cuando los neutrinos colisionan con los electrones en el agua, la mayor parte de la energía de los neutrinos se transfiere a los electrones. Como consecuencia, los electrones se mueven por el tanque a velocidades próximas a c. El neutrino es detectado debido a la onda de choque que se produce, llamada radiación Cerenkov, cuando los electrones se mueven a velocidades superiores a la de la luz en el agua. Si el ángulo máximo del cono de la onda de choque de Cerenkov es de 48,75°, ¿cuánto vale la velocidad de la luz en el agua?

78 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un dispositivo de radar emite microondas con una frecuencia de 2,00 GHz. Cuando las ondas se reflejan en un coche que se aleja frontalmente del emisor, se detecta una diferencia de frecuencia de 293 Hz. Determinar la velocidad del coche.

79 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** De forma rutinaria se utiliza el efecto Doppler para medir la velocidad del viento en una tormenta. Una estación meteorológica utiliza un radar de 625 MHz de frecuencia. Las ondas producidas por el instrumento se reflejan en las gotas de lluvia de una tormenta situada a 50 km de la estación y cuando llegan de nuevo a la estación meteorológica su frecuencia es 325 Hz mayor. Suponiendo que el viento se dirige hacia la antena del radar y que el instrumento únicamente mide el componente radial de la velocidad, ¿a qué velocidad sopla el viento? *Ayuda: el radar sólo puede medir la componente de la velocidad del viento que va en la dirección radial.* SSM

80 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un destructor que se encuentra en reposo está equipado con un sonar que envía pulsos sonoros de 40 MHz. El buque recibe pulsos reflejados por un submarino que se encuentra directamente debajo con un retraso de tiempo de 80 ms y una frecuencia de 39,958 MHz. Si la velocidad del sonido en el agua del mar es de 1,54 km/s, (*a*) ¿a qué profundidad se encuentra el submarino? (*b*) ¿Cuál es su velocidad vertical?

81 •• Una unidad de radar de la policía transmite microondas de frecuencia 3×10^{10} Hz. La velocidad de estas ondas en el aire es 3×10^8 m/s. Supóngase que un coche se aleja de esta unidad de radar a una velocidad de 140 km/h. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de frecuencia entre la señal transmitida y la señal recibida del coche? (*b*) Suponer que el coche de la policía se mueve a 60 km/h en la misma dirección que el otro coche. ¿Cuál es la diferencia de frecuencias entre las señales emitidas y detectadas?

82 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En la medicina moderna, el efecto Doppler se emplea rutinariamente para medir la velocidad y dirección del flujo sanguíneo en las arterias y venas. Supongamos que se emplea un sonido de 50 Hz para determinar la dirección del flujo sanguíneo de una zona donde puede haber un obstáculo que invierta el sentido de la circulación sanguínea. Si el aparato emite ultrasonidos en la dirección teóricamente correcta del movimiento de la sangre y detecta un sonido de frecuencia inferior a 50 Hz, (*a*) ¿la sangre retrocede o sigue en la dirección correcta? (*b*) Estimar la precisión en la medida de la diferencia de frecuencias (emitida menos detectada) que permita medir velocidades inferiores a 1 mm/s. Suponer que la velocidad de propagación del sonido en la sangre es la misma que en el agua.

83 •• Un foco sonoro de frecuencia f_0 se mueve con velocidad u_f respecto al aire en reposo hacia un receptor que se mueve con velocidad u_r respecto al aire en reposo alejándose del foco. (*a*) Escribir una expresión para la frecuencia recibida f'. (*b*) Utilizar la expresión aproximada $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x$ para demostrar que si tanto u_f como u_r son pequeñas en comparación con v, la frecuencia recibida es, aproximadamente,

$$f'_r = \left(1 + \frac{u_{rel}}{v}\right) f_f$$

donde $u_{rel} = u_f - u_r$ es la velocidad relativa entre la fuente y el receptor. SSM

84 •• Para estudiar el efecto Doppler, usted toma un dispositivo generador de sonido de 262 Hz sujetándolo con el brazo extendido (1 m de longitud) y sus oídos detectan un sonido de 80 dB. Después, decide dejar caer el dispositivo dentro de un pozo muy profundo. Mientras va cayendo oye el sonido que va emitiendo. Tras 5,5 s de caída, ¿qué frecuencia oirá?

85 •• Un globo arrastrado por un viento de 36 km/h emite un sonido de 800 Hz cuando se aproxima a un gran edificio. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido percibido por un observador asomado en una ventana de este edificio? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia del sonido reflejado que escucha un viajero del globo?

86 •• Un coche se aproxima a una pared reflectora. Un observador inmóvil situado detrás del coche escucha un sonido de frecuencia 745 Hz procedente de la bocina del coche y un sonido de frecuencia 863 Hz procedente de la pared. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del coche? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de la bocina? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia escuchada por el conductor del coche, procedente de la reflexión del sonido en la pared?

87 •• La conductora de un coche que viaja a 100 km/h hacia un acantilado vertical hace sonar brevemente la bocina. Exactamente un segundo después, ella escucha el eco y observa que su frecuencia es de 840 Hz. ¿A qué distancia del acantilado se encontraba el coche cuando la conductora hizo sonar la bocina y cuál es la frecuencia del sonido emitido?

88 •• Una persona en un vuelo transatlántico viaja hacia el oeste a 800 km/h. Un Concorde que vuela con velocidad Mach 1,6 se encuentra a 3 km al norte del primer avión y su rumbo es también este-oeste. ¿Cuál es la distancia entre los dos aviones cuando desde el vuelo transatlántico se oye el estampido sónico producido por el Concorde?

89 ••• Se ha usado el telescopio espacial *Hubble* para determinar la existencia de planetas de estrellas lejanas. Cuando un planeta está en órbita alrededor de una estrella, ésta experimenta un movimiento con el mismo periodo que la órbita del planeta. Por esta causa, la luz procedente de la estrella presenta un desplazamiento Doppler también periódico. Estimar la longitud de onda máxima y mínima que tiene la luz de 500 nm de frecuencia nominal emitida por el Sol como consecuencia del desplazamiento Doppler producido por el movimiento del Sol debido a Júpiter.

PROBLEMAS GENERALES

90 • En el instante $t = 0$, la forma de un pulso de onda en una cuerda viene dada por la función $y(x, 0) = 0{,}120\ \text{m}^3/((2{,}00\ \text{m})^2 + x^2)$, en donde x está en metros. (*a*) Dibujar $y(x, 0)$ en función de x. (*b*) Expresar la función de onda $y(x, t)$ en un instante t cualquiera si el pulso se está moviendo en el sentido positivo de las x con una velocidad de 10 m/s y (*c*) si se está moviendo en el sentido negativo de las x con una velocidad del mismo valor.

91 • Un silbato de 500 Hz de frecuencia se mueve en una circunferencia de 1 m de radio a 3 rev/s. ¿Cuáles son las frecuencias máxima y mínima oídas por un observador estacionario situado en el plano del círculo y alejado 5 m de su centro? SSM

92 • Las olas del mar se mueven hacia la playa con una velocidad de 8,9 m/s y con una separación entre crestas de 15,0 m. Nos encontramos en un pequeño bote anclado junto a la costa. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de las olas del mar? (*b*) Se eleva el ancla y nos movemos hacia el mar con una velocidad de 15 m/s. ¿Qué frecuencia de olas se observará entonces?

93 •• Un alambre de 12,0 m y masa 85 g se estira bajo una tensión de 180 N. En el extremo izquierdo del alambre se genera un pulso y 25 milisegundos más tarde se genera un segundo pulso en el extremo derecho del alambre. ¿Dónde se encontrarán los dos pulsos?

94 •• Determinar la velocidad de un coche cuya bocina, al pasar al lado de un receptor parado, disminuye su frecuencia un 10 por ciento. Es decir, si la caída de frecuencia entre el acercamiento y el alejamiento es del 10%

95 •• Un altavoz con un diafragma de 20 cm de diámetro vibra con una frecuencia de 800 Hz y una amplitud de 0,025 mm. Suponiendo que las moléculas de aire de las proximidades poseen la misma amplitud de vibración, calcular (*a*) la amplitud de la presión justo delante del diafragma del altavoz, (*b*) la intensidad del sonido y (*c*) la potencia acústica que se está radiando por la superficie frontal del diafragma. SSM

96 •• Una onda acústica, plana y armónica que oscila en el aire con una amplitud de 1 μm tiene una intensidad de 10 mW/m^2. ¿Cuál es la frecuencia de la onda?

97 •• Por un tubo de radio 5 cm fluye agua a la velocidad de 7 m/s. Una placa de área igual a la sección transversal del tubo se inserta súbitamente en éste para detener el flujo. Determinar la fuerza ejercida sobre la placa. Tomar el valor de 1,4 km/s para la velocidad del sonido en el agua. (*Ayuda: cuando se inserta la placa, una onda de presión se propaga a través del agua a la velocidad del sonido, v_s. La masa de agua detenida en el tiempo Δt es la contenida en una longitud del tubo igual a $v_s\,\Delta t$.*)

98 •• En la figura 15.33, se representa el esquema de la realización de una fotografía de alta velocidad que mediante un flash y una máquina captura la imagen de una bala rompiendo una burbuja de jabón. La onda de choque producida por la bala se detecta mediante un micrófono, colocado en una guía paralela a la trayectoria de la bala. El micrófono dispara el flash y la máquina. Si la bala se mueve a 1,25 veces la velocidad del sonido y la distancia vertical entre la guía y la bala es de 0,35 m, ¿a qué distancia por detrás de la pompa de jabón hay que colocar el micrófono para que accione el disparador de la máquina? (Supóngase que el flash y la máquina se accionan inmediatamente después de que el micrófono detecte la onda de choque.)

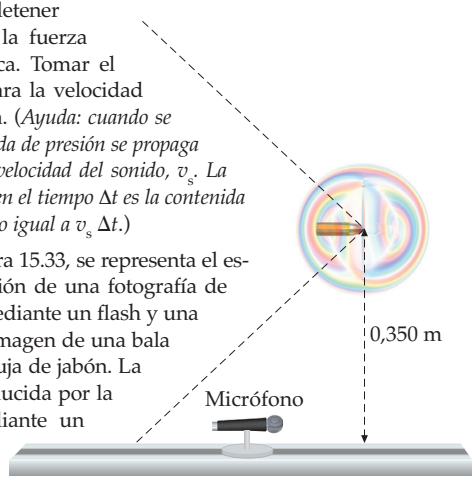


FIGURA 15.33 Problema 98

99 •• Una tropa bien entrenada mantiene el paso escuchando la banda de música que está situada a la cabeza de la columna. La música se lleva a un ritmo que corresponde a 100 pasos por minuto. Una cámara de televisión muestra que sólo la tropa que está en la cabeza de la columna y la que está en su parte posterior lleva realmente el paso. Los soldados de la sección intermedia se encuentran adelantando el pie izquierdo cuando los que componen los otros dos grupos mencionados están adelantando el pie derecho. La tropa está tan bien entrenada que, a pesar de esto, están seguros de que llevan el paso de acuerdo con la música. Explicar el origen del problema y calcular la longitud de la columna.

100 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Un murciélago que vuela hacia un obstáculo a 12 m/s emite pulsos sonoros breves y de alta frecuencia con una frecuencia de repetición de 80 Hz. ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre los pulsos de eco oídos por el murciélago?

101 •• De forma rutinaria, se envían rayos de luz láser hacia la Luna para determinar la distancia Tierra-Luna. Sin embargo, para determinar la distancia con la máxima exactitud, debe tenerse en cuenta que la velocidad de la luz en la atmósfera terrestre es el 99,997 por ciento de la velocidad de la luz en el vacío. Suponiendo que la atmósfera de la Tierra tiene un espesor de 8 km, estimar qué cambio en la distancia supone la corrección.

102 •• Un diapasón unido a un alambre tenso genera ondas transversales. La vibración del diapasón es perpendicular al alambre. Su frecuencia es de 400 Hz y su amplitud de oscilación es de 0,50 mm. El alambre tiene una densidad de masa lineal de 0,01 kg/m y está sometido a una tensión de 1 kN. Se supone que no hay ondas reflejadas en el extremo de la cuerda. (*a*) Hallar el periodo y frecuencia de las ondas en el alambre. (*b*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas? (*c*) ¿Cuál es la longitud de onda y el número de ondas? (*d*) Escribir una función de onda adecuada para las ondas sobre el alambre. (*e*) Calcular la velocidad y aceleración máximas de un punto del alambre. (*f*) ¿A qué potencia media debe suministrarse energía al diapasón para mantenerlo oscilando con amplitud constante?

103 ••• Una cuerda larga con una masa por unidad de longitud de 0,1 kg/m está bajo una tensión constante de 10 N. Un motor en el punto $x = 0$ impone a este extremo de la cuerda un movimiento armónico a 5 oscilaciones por segundo y una amplitud de 4 cm. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la onda? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda? (*c*) ¿Cuál es el momento lineal transversal máximo de un segmento de 1 mm de la cuerda? (*d*) ¿Cuál es la fuerza máxima neta ejercida sobre un segmento de 1 mm de la cuerda?

104 ••• En este problema hay que deducir una expresión para la energía potencial de un segmento de una cuerda por el que se propaga un tren de ondas (figura 15.34). La energía potencial de un segmento es igual al trabajo realizado por la tensión al estirar la cuerda, de valor $\Delta U = F_T(\Delta\ell - \Delta x)$, donde F_T es la tensión, $\Delta\ell$ la longitud del segmento estirado e Δx su longitud original. Utilizar el desarrollo del binomio para demostrar que $\Delta\ell - \Delta x \approx \frac{1}{2}(\Delta y/\Delta x)^2\,\Delta x$, y por lo tanto $\Delta U \approx \frac{1}{2}F_T(\Delta y/\Delta x)^2\,\Delta x$. (*b*) Calcular $\partial y/\partial x$ a partir de la función $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$ (ecuación 15.15) y demostrar que $\Delta U \approx \frac{1}{2}F_T k^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t)\,\Delta x$.

$$\Delta\ell = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x[1 + (\Delta y/\Delta x)^2]^{1/2}$$

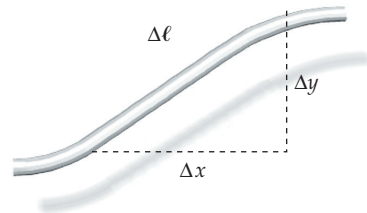


FIGURA 15.34 Problema 104

CAPÍTULO 16

ESTE ÓRGANO ESTÁ COMPUESTO POR 6134 TUBOS DE TAMAÑOS MUY VARIADOS Y ES CAPAZ DE DAR NOTAS QUE VAN DESDE UN DO QUE ESTÁ POR DEBAJO DEL DO MÁS BAJO DE UN PIANO CON UNA FRECUENCIA DE SÓLO 16 HZ HASTA UNA NOTA QUE ES UNA OCTAVA Y UN TERCIO DE OCTAVA MAYOR QUE LA NOTA MÁS ALTA DE UN PIANO Y QUE TIENE UNA FRECUENCIA DE 10 548 HZ. *(Ted Soqui/Corbis.)*

Superposición y ondas estacionarias

16.1 Superposición de ondas

16.2 Ondas estacionarias

*16.3 Temas adicionales

? ¿Cuál es la longitud del tubo de un órgano que produce una nota de 16 Hz? (Véase el ejemplo 16.9.)

En el capítulo 15, estudiamos el movimiento de una secuencia de perturbaciones que se propagan a través de un medio a fin de tener una idea clara del movimiento ondulatorio. Sin embargo, si uno ha estado en el océano, habrá observado qué sucede cuando esas perturbaciones colisionan o se cruzan unas con otras. Cuando dos o más ondas coinciden en el espacio, las perturbaciones individuales se superponen, sumándose algebraicamente, para dar lugar a una nueva onda resultante. Para el caso de ondas armónicas, cuando se encuentran ondas de la misma frecuencia se producen ondas estacionarias en el espacio.

La sala de conciertos de Walt Disney, en Los Ángeles, cuyo órgano, mostrado en la imagen, fue diseñado por Fran Gehry, constituye una maravillosa obra de ingeniería acústica. Ingenieros civiles y de estructuras trabajaron conjuntamente para mantener su integridad a fin de protegerlo de posibles terremotos. Los ingenieros acústicos diseñaron modelos para comprobar la acústica de la sala. Uno de los modelos, realizado a escala 1:10, incluía incluso figuras que representaban la audiencia. En las pruebas se utilizaron sonidos de hasta 10 veces la frecuencia normal.

Nuestro estudio sobre las ondas, sin embargo, no finaliza en este capítulo. Continuaremos en el capítulo 34, donde veremos que la naturaleza ondulatoria de los electrones y de otros cuerpos resulta clave para la comprensión de la física cuántica.

En este capítulo, comenzaremos por estudiar la superposición de pulsos de onda en una cuerda y, después, consideraremos la superposición e interferencia de ondas armónicas. Analizaremos el fenómeno de las pulsaciones, que resultan de la interferencia de dos ondas de frecuencias ligeramente distintas y estudiaremos las ondas estacionarias, que resultan cuando las ondas armónicas están confinadas en el espacio. Finalmente, abordaremos el análisis de tonos musicales complejos.

16.1 SUPERPOSICIÓN DE ONDAS

La figura 16.1*a* muestra pulsos de onda de amplitud pequeña y diferentes duraciones que se mueven en direcciones opuestas en una cuerda. La forma de la cuerda resultante del encuentro de estos pulsos puede determinarse sumando los desplazamientos que produciría cada pulso separadamente. El **principio de superposición** es una propiedad del movimiento ondulatorio que expresa lo siguiente:

> Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.
>
> PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Es decir, cuando hay dos pulsos que viajan sobre la misma cuerda, la función de onda total es la suma algebraica de las funciones de onda individuales. Aunque el principio de superposición es válido para muchos tipos de ondas, no lo es para todas. Por ejemplo, el principio de superposición no es válido si la suma de dos desplazamientos supera el límite proporcional del medio*. En los análisis que vamos a realizar, supondremos que el principio de superposición es válido.

En el caso especial de dos pulsos que son idénticos, excepto que uno está invertido respecto al otro, como en la figura 16.1*b*, hay un instante en que los pulsos se solapan exactamente y su suma es igual a cero. En ese instante, la cuerda es horizontal. Tras un breve periodo de tiempo, emergen los pulsos individuales y cada uno continúa con sus direcciones originales. Es decir, salen de la región de solapamiento con la misma forma con la que entraron.

> **!** Tras la "colisión" de dos pulsos de onda que viajan en direcciones opuestas, cada uno continúa moviéndose a la misma velocidad, con el mismo tamaño y forma que tenían antes de la "colisión".

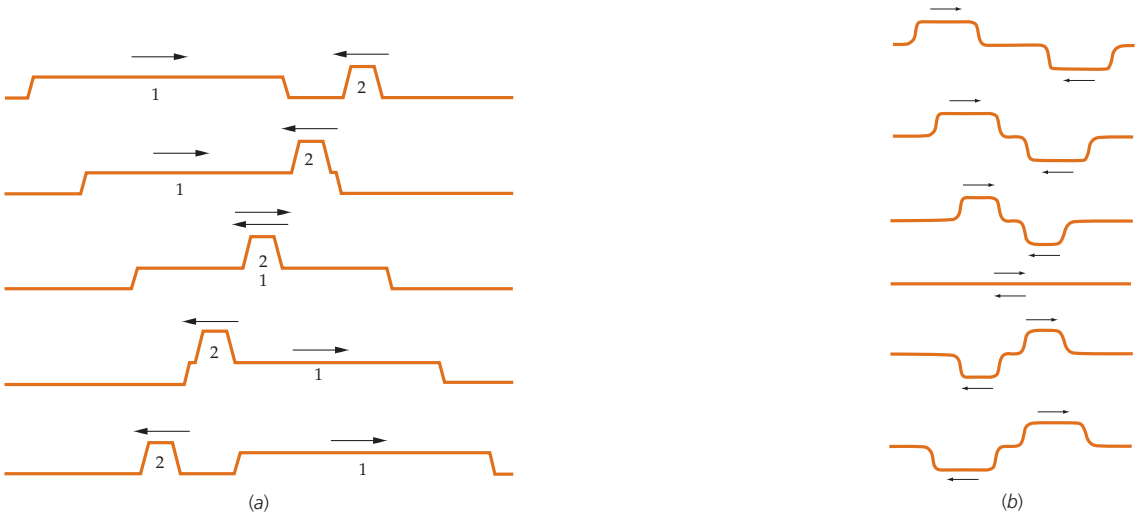


FIGURA 16.1 Pulsos de onda que se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda. La forma de la cuerda cuando se encuentran los pulsos se obtiene sumando los desplazamientos de cada pulso por separado. (*a*) Superposición de pulsos con desplazamientos en el mismo sentido (hacia arriba). La figura muestra la forma de la cuerda en diferentes intervalos de tiempo de la misma duración Δt. (*b*) Superposición de pulsos con desplazamientos iguales pero con signos opuestos. En este caso, la suma algebraica de los desplazamientos equivale a la sustracción de las magnitudes.

* El límite proporcional de un medio elástico (medio capaz de transmitir ondas) es la máxima tensión para la cual es válida la dependencia lineal entre la tensión y la deformación. Tensión y deformación son dos conceptos estudiados en la sección 8 del capítulo 12.

Ejemplo 16.1 Colisión entre pulsos *Conceptual*

Un pulso derecho viaja hacia la derecha a lo largo de una cuerda tensa mientras que un pulso invertido del mismo tamaño y forma viaja hacia la izquierda. Cuando ambos pulsos coinciden, hay un instante en que la cuerda está completamente plana y no se observan pulsos. Este hecho está en completo acuerdo con el principio de superposición. La cuestión es la siguiente, ¿por qué los pulsos reaparecen y continúan moviéndose tras la colisión?

PLANTEAMIENTO El desplazamiento de cada punto de la cuerda es cero en el instante en que la cuerda está plana, pero ¿la velocidad de cada punto es cero en ese instante? En un pulso derecho, la cuerda en la parte frontal del pulso se desplaza hacia arriba mientras que la cuerda en la parte trasera del pulso se mueve hacia abajo. En un pulso invertido, ocurre lo contrario.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la posición y la velocidad de la cuerda en función de la posición a lo largo de la cuerda antes de que los pulsos coincidan (figura 16.2). En un pulso derecho, la cuerda en la parte frontal del pulso se desplaza hacia arriba mientras que la cuerda en la parte trasera del pulso se mueve hacia abajo:

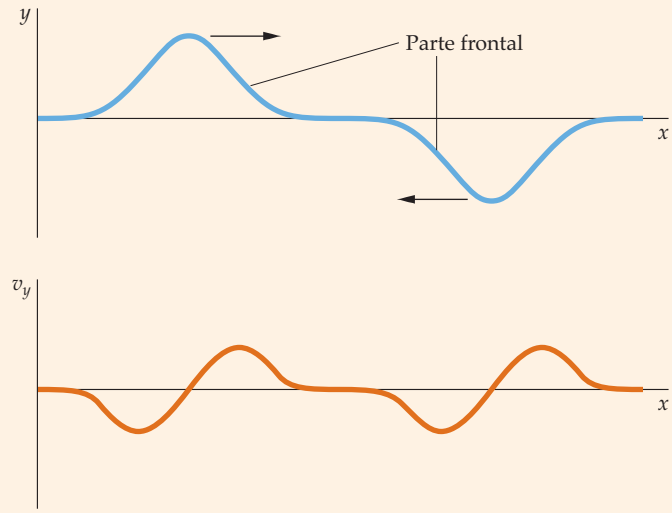


FIGURA 16.2

2. Ahora dibujar la posición y la velocidad de la cuerda en función de la posición a lo largo de la cuerda en el instante en que la cuerda es plana (figura 16.3):

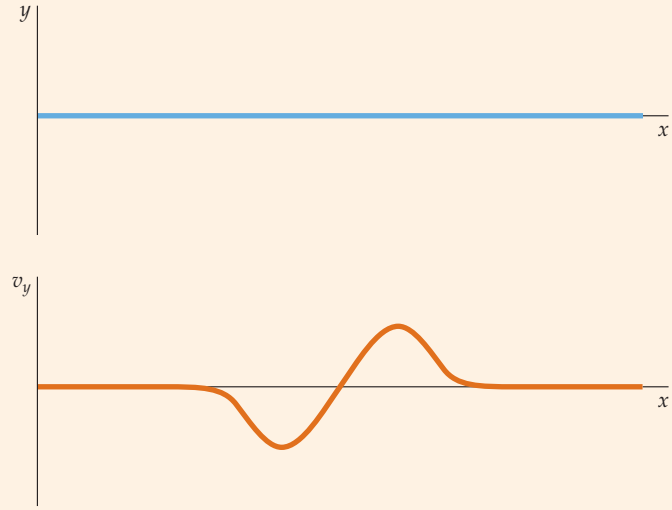


FIGURA 16.3

3. ¿La velocidad es cero en todos los puntos de la cuerda en el instante en que es plana?

En el paso 1, los perfiles de la velocidad son idénticos para ambos pulsos, así que cuando los dos pulsos se superponen los desplazamientos suman cero, pero las velocidades no. Los pulsos se vuelven a formar tras la superposición, pues la cuerda se mueve y posee inercia.

*LA SUPERPOSICIÓN Y LA ECUACIÓN DE ONDA

El principio de superposición resulta de la linealidad de la ecuación de onda (ecuación 15.10*b*) para pequeños desplazamientos transversales. Es decir, la función $y(x, t)$ y sus derivadas se presentan sólo en primera potencia. La propiedad que define las ecuaciones lineales es que si y_1 e y_2 son dos soluciones de la ecuación de onda, entonces, la combinación lineal

$$y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad 16.1$$

donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera, es también una solución. Esto se demuestra fácilmente sustituyendo directamente y_3 en la ecuación de onda. El resultado es la expresión matemática del principio de superposición. Si dos ondas cualesquiera satisfacen la ecuación de onda, su suma también satisface la misma ecuación de onda.

Ejemplo 16.2 La superposición y la ecuación de onda

Demostrar que si las funciones y_1 e y_2 satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{(ecuación 15.10}b\text{)}$$

la función y_3 de la ecuación 16.1 también la satisface.

PLANTEAMIENTO Se sustituye y_3 en la ecuación de onda, teniendo en cuenta que y_1 e y_2 también son funciones de onda, es decir, que satisfacen la ecuación de onda. Finalmente, se demuestra que la combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2$ es una función de onda.

SOLUCIÓN

1. Sustituir la expresión de y_3 de la ecuación 16.1 en el miembro de la izquierda de la ecuación de onda y separar los términos en función de y_1 e y_2:
$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

2. Escribir la ecuación de onda para y_1 e y_2:
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$

3. Sustituir el resultado del paso 2 en el paso 1 y sacar factor común:
$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = C_1\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\left(C_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right)$$

4. Introducir las constantes dentro de las derivadas y expresar la suma de las derivadas como la derivada de la suma:
$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 C_1y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C_2y_2}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(C_1y_1 + C_2y_2)$$

5. El argumento de la derivada del paso 4 es y_3:
$$\therefore \boxed{\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 5 es dimensionalmente correcto. El término de la izquierda tiene dimensiones de inversa de longitud y el término de la derecha también.

INTERFERENCIA DE ONDAS ARMÓNICAS

El resultado de la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia depende de la diferencia de fase δ entre las ondas. Sea $y_1(x, t)$ la función de onda de una onda armónica que se propaga hacia la derecha con amplitud A, frecuencia angular ω y número de onda k:

$$y_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \qquad 16.2$$

Para esta función de onda, hemos escogido la fase igual a cero.* Si tenemos también en movimiento una segunda onda armónica hacia la derecha con la misma amplitud, frecuencia y número de ondas, la ecuación general para esta función de onda puede escribirse

$$y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \delta) \qquad 16.3$$

donde δ es la constante de fase. Las dos ondas descritas por las ecuaciones 16.2 y 16.4 difieren en fase en δ. La figura 16.4 muestra una representación de las dos funciones de onda para un tiempo fijo en función de la posición. La onda resultante es la suma

$$y_1 + y_2 = A\,\text{sen}(kx - \omega t) + A\,\text{sen}(kx - \omega t + \delta) \qquad 16.4$$

La ecuación 16.4 puede simplificarse utilizando la identidad trigonométrica

$$\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \qquad 16.5$$

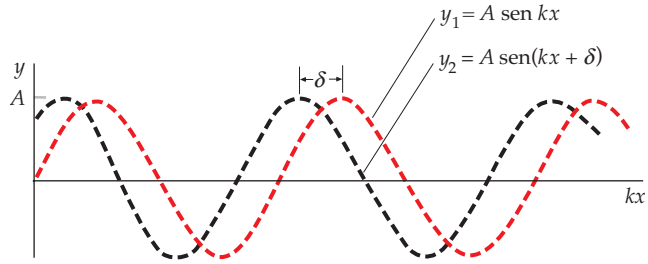


FIGURA 16.4 Desplazamiento en función de la posición (en un instante dado) de dos ondas armónicas que tienen la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que difieren en fase en δ.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Trigonometría**

* Esta selección es conveniente, pero no es obligatoria. Si, por ejemplo, escogemos $t = 0$ cuando el desplazamiento sea máximo en $x = 0$, deberíamos escribir $y_1 = A\cos(kx - \omega t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \frac{1}{2}\pi)$.

En este caso, $\theta_1 = kx - \omega t$ y $\theta_2 = kx - \omega t + \delta$, de modo que

$$\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2) = -\tfrac{1}{2}\delta$$

y

$$\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) = kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta$$

Así, la ecuación 16.4 toma la forma

$$y_1 + y_2 = [2A\cos\tfrac{1}{2}\delta]\,\text{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \qquad 16.6$$

SUPERPOSICIÓN DE DOS ONDAS DE IGUAL AMPLITUD Y FRECUENCIA

donde hemos utilizado $\cos(-\frac{1}{2}\delta) = \cos\frac{1}{2}\delta$. Vemos que el resultado de la superposición de dos ondas armónicas de igual frecuencia y número de ondas es otra onda armónica que tiene la misma frecuencia y el mismo número de onda. La onda resultante tiene una amplitud igual a $2A\cos\frac{1}{2}\delta$ y una fase igual a la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales. La superposición de dos o más ondas de frecuencia igual o muy parecida que da un patrón de intensidad observable se denomina **interferencia**. En este caso, la intensidad, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, es uniforme. Si las dos ondas están en fase, la diferencia de fase es $\delta = 0$, $\cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es $2A$. La interferencia de dos ondas en fase se llama **interferencia constructiva** (figura 16.5). Si, por el contrario, están desfasadas 180°, entonces $\delta = \pi$, $\cos(\frac{1}{2}\delta) = 0$, y la amplitud de la onda resultante es nula. La interferencia de dos ondas desfasadas 180° se llama **interferencia destructiva** (figura 16.6).

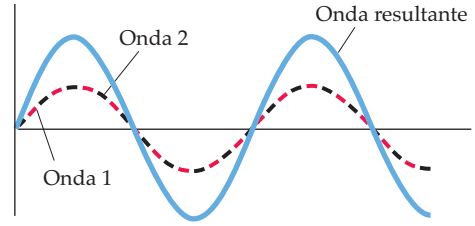


FIGURA 16.5 Interferencia constructiva. Si dos ondas armónicas de la misma frecuencia están en fase, la amplitud de la onda resultante es la suma de las amplitudes de las ondas individuales. Las ondas 1 y 2 son idénticas, de forma que aparecen en la figura como una sola onda armónica. La onda 1 se ha dibujado con un trazo rojo discontinuo mientras que la onda 2 con un trazo negro discontinuo.

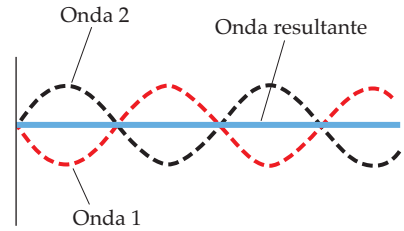


FIGURA 16.6 Interferencia destructiva. Si dos ondas armónicas de la misma frecuencia tienen una diferencia de fase de π, la amplitud de la onda resultante es la diferencia de las amplitudes de las ondas individuales. Si las ondas originales tienen amplitudes iguales, se anulan completamente.

PROBLEMA PRÁCTICO 16.1

Dos ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud se están moviendo en la misma dirección. (*a*) Si difieren en fase en $\pi/2$ y cada una de ellas tiene una amplitud de 4,0 cm, ¿cuál es la amplitud de la onda resultante? (*b*) ¿Para qué diferencia de fase δ la amplitud resultante sería igual a 4 cm?

Pulsaciones (o batidos) La interferencia de dos ondas sonoras de frecuencias ligeramente distintas produce el interesante fenómeno de las **pulsaciones** o **batidos**. Consideremos dos ondas sonoras con frecuencias angulares ω_1 y ω_2 que poseen la misma amplitud de la presión p_0. ¿Qué es lo que oímos? En un punto fijo, la dependencia espacial de la onda queda reducida a una nueva constante de fase, de modo que podremos despreciarla. La presión en el oído debida a una de las ondas, será una función armónica simple de la forma

$$p_1 = p_0\,\text{sen}\,\omega_1 t$$

y

$$p_2 = p_0\,\text{sen}\,\omega_2 t$$

donde hemos escogido funciones seno por conveniencia y hemos supuesto que las dos ondas están en fase en el instante $t = 0$. Usando la siguiente identidad trigonométrica para la suma de dos funciones seno,

$$\text{sen}\,\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2 = 2\cos\tfrac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

se obtiene la onda resultante

$$p = p_0\,\text{sen}\,\omega_1 t + p_0\,\text{sen}\,\omega_2 t = 2p_0\cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$$

Dado que $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$ es la frecuencia angular media y $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ se corresponde a la diferencia de las frecuencias angulares, la función de onda resultante toma la forma

$$p = 2p_0\cos(\tfrac{1}{2}\Delta\omega t)\,\text{sen}\,\omega_m t = 2p_0\cos(2\pi\tfrac{1}{2}\Delta f t)\,\text{sen}\,2\pi f_m t \qquad 16.7$$

donde $\Delta f = \Delta\omega/(2\pi)$ y $f_m = \omega_m/(2\pi)$.

La figura 16.7 muestra una representación gráfica de la variación de presión en función del tiempo. Las ondas están inicialmente en fase y se suman constructivamente en el instante $t = 0$. Como sus frecuencias no son iguales, las ondas van desfasándose gradualmente y en el instante t_1 ya tienen un desfase de 180° e interfieren destructivamente.* Al cabo de un intervalo de tiempo igual (tiempo t_2 en la figura), las dos ondas estarán de nuevo en fase e interferirán constructivamente. Cuanto mayor sea la diferencia entre las frecuencias de ambas ondas, más pronto quedarán desfasadas y volverán a ponerse en fase de nuevo.

Cuando dos diapasones vibran con la misma amplitud y con frecuencias casi iguales, f_1 y f_2, el tono que percibe el oído tiene la frecuencia media $f_m = (f_1 + f_2)/2$ con una amplitud de $2p_0 \cos(2\pi \frac{1}{2} \Delta f\, t)$. (Para algunos valores de t la amplitud es negativa. Dado que $-\cos\theta = \cos(\theta + \pi)$, un cambio de signo de la amplitud equivale a un cambio de fase de 180°.) La amplitud oscila con frecuencia $\frac{1}{2}\Delta f$. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, el sonido será fuerte siempre que la amplitud sea máxima o mínima. Por consiguiente, la frecuencia de esta variación de intensidad, llamada **frecuencia de batido** es igual al doble de $\frac{1}{2}\Delta f$:

$$f_{\text{batido}} = \Delta f \qquad 16.8$$

FRECUENCIA DE BATIDO

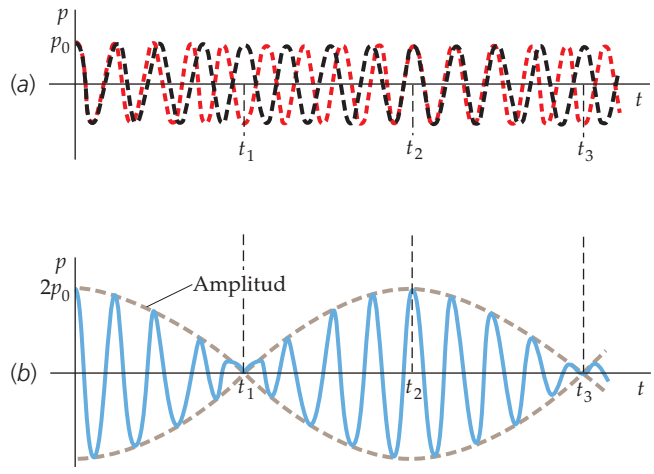


FIGURA 16.7 Batidos o pulsaciones. (*a*) Dos ondas armónicas de frecuencias diferentes, pero próximas, que están en fase en $t_0 = 0$ están desfasadas en 180° un cierto instante después t_1. En otro instante posterior t_2, vuelven a estar en fase. (*b*) Resultante de las ondas indicadas en (*a*). La frecuencia de la onda resultante es casi la misma que la de las dos ondas originales, pero la amplitud se encuentra modulada como indica la curva a trazos. La amplitud es máxima en los instantes t_0 y t_2, y nula en los instantes t_1 y t_3.

La frecuencia de batido es igual a la diferencia de las frecuencias individuales de las dos ondas. Por ejemplo, si golpeamos simultáneamente dos diapasones que tienen frecuencias de 241 Hz y 243 Hz, se oirá un tono pulsante con la frecuencia media de 242 Hz que tendrá una intensidad máxima dos veces por segundo; es decir, la frecuencia de batido será 2 Hz. El oído puede detectar hasta 15 o 20 batidos por segundo. Por encima de estas frecuencias, las fluctuaciones de la intensidad son demasiado rápidas para ser oídas.

El fenómeno descrito se utiliza a menudo para comparar una frecuencia no conocida con otra conocida, como cuando se utiliza un diapasón para afinar la cuerda de un piano. Los pianos se afinan haciendo sonar al mismo tiempo el diapasón y la nota del piano, mientras se actúa sobre la cuerda del instrumento hasta que las pulsaciones desaparecen (o son mínimas), lo que indica que la diferencia en frecuencia de los dos generadores de sonido es muy pequeña.

Ejemplo 16.3 Afinando una guitarra

Cuando se golpea un diapasón de 440 Hz (nota la) al mismo tiempo que se pulsa la cuerda ligeramente desafinada de una guitarra que debe dar la nota la, se escuchan 3 pulsaciones por segundo. Tras tensar un poco más la cuerda de la guitara para aumentar su frecuencia, las pulsaciones aumentan a 6 por segundo. ¿Cuál era la frecuencia de la cuerda de guitarra antes de tensar la cuerda?

PLANTEAMIENTO Inicialmente se oyen 3 pulsaciones por segundo; por lo tanto, la frecuencia original de la cuerda de la guitarra es o bien 443 Hz o bien 437 Hz. Cuanto mayor es la diferencia entre la frecuencia de la cuerda y la frecuencia del diapasón, mayor será la frecuencia de la pulsación. La frecuencia de la cuerda aumenta al aumentar su tensión.

SOLUCIÓN

1. La frecuencia de la pulsación aumenta si aumenta la tensión de la cuerda de 3 a 6 pulsaciones por segundo, lo cual indica que la frecuencia es 443 Hz:

$$f = f_A + f_{\text{batido}} = 440\ \text{Hz} + 3{,}00\ \text{Hz} = \boxed{443\ \text{Hz}}$$

COMPROBACIÓN La respuesta tiene el número correcto de cifras significativas.

Se golpea el diapasón y se puntea la cuerda. El chico tensa o destensa la cuerda mientras escucha las pulsaciones. La tensión de la cuerda ha de ajustarse de tal forma que la frecuencia de la pulsación es nula. En ese momento, las frecuencias de la cuerda y del diapasón serán iguales. (*Ray Malace Photography.*)

* La anulación completa sólo se produce cuando son iguales las amplitudes de presión de ambas ondas.

Diferencia de fase debida a la diferencia de trayectos Una causa corriente de la diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia de longitud de los trayectos que deben recorrer las ondas desde su fuente o foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supóngase que tenemos dos focos que están emitiendo ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda y que están oscilando en fase; es decir, cuando sale de un foco una cresta positiva, sale también al mismo tiempo una cresta positiva del otro foco. Si la diferencia entre los trayectos hasta un punto determinado es una longitud de onda, como en el caso de la figura 16.8*a*, o es un número entero de longitudes de onda, la interferencia es constructiva. Si la diferencia de trayectos es una semilongitud de onda o un número impar de semilongitudes de onda, como en el caso de la figura 16.8*b*, el máximo de una onda coincidirá con el mínimo de la otra y la interferencia es destructiva.

Las funciones de onda para las ondas de dos fuentes que oscilan en fase pueden escribirse en la forma

$$p_1 = p_0 \operatorname{sen}(kx_1 - \omega t)$$

y

$$p_2 = p_0 \operatorname{sen}(kx_2 - \omega t)$$

La diferencia de fase para estas dos funciones de onda es

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\,\Delta x$$

Utilizando $k = 2\pi/\lambda$, se tiene

$$\delta = k\,\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad 16.9$$

DIFERENCIA DE FASE DEBIDA A LA DIFERENCIA DE TRAYECTOS

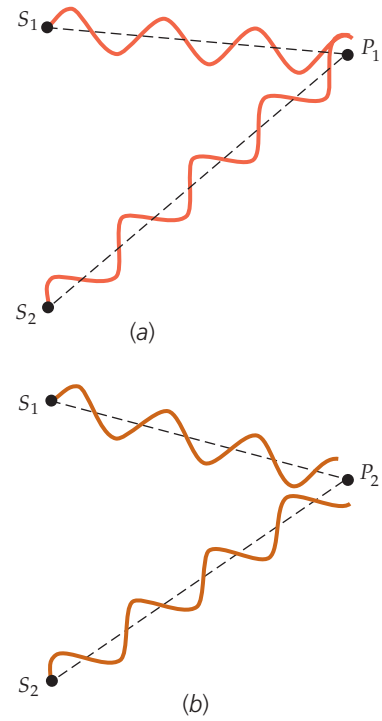


FIGURA 16.8 Dos ondas en fase procedentes de dos focos S_1 y S_2. (*a*) Cuando la diferencia de trayectos es de una longitud de onda λ, las ondas están en fase en P_1 e interfieren constructivamente. (*b*) Cuando la diferencia de trayectos es $\frac{1}{2}\lambda$, las ondas en P_2 están desfasadas 180° y, por lo tanto, interfieren destructivamente. Si las ondas son de la misma amplitud en P_2, ambas se anularán totalmente en este punto.

Ejemplo 16.4 Una onda sonora resultante

Dos focos sonoros oscilan en fase. En un punto a 5,00 m de un foco y a 5,17 m del otro, la amplitud del sonido procedente de cada foco por separado es p_0. Hallar la amplitud de la onda resultante si la frecuencia de las ondas sonoras es (*a*) 1000 Hz, (*b*) 2000 Hz y (*c*) 500 Hz. (Utilizar 340 m/s como velocidad del sonido.)

PLANTEAMIENTO La amplitud de la onda resultante debida a la superposición de dos ondas cuya diferencia de fase es δ viene dada por $A = 2p_0 \cos\frac{1}{2}\delta$ (ecuación 16.6), donde p_0 es la amplitud de una cualquiera de las ondas y $\delta = 2\pi\,\Delta x/\lambda$ es la diferencia de fase. Como ya conocemos la diferencia de trayectos, $\Delta x = 5{,}17\text{ m} - 5\text{ m} = 0{,}17\text{ m}$, sólo necesitamos determinar la longitud de onda λ.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La longitud de onda es igual a la velocidad dividida por la frecuencia. Calcular λ para $f = 1000$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{1000\text{ Hz}} = 0{,}340\text{ m}$$

2. Para $\lambda = 0{,}34$ m, la diferencia de trayectos ($\Delta x = 0{,}17$ m) es $\frac{1}{2}\lambda$, de modo que se producirá interferencia destructiva. Usar este valor de λ para calcular la diferencia de fase δ, y luego utilizar δ para determinar la amplitud A:

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}17\text{ m}}{0{,}340\text{ m}} = \pi$$

$$\text{por lo tanto,}\quad A = 2p_0\cos\frac{1}{2}\delta = 2p_0\cos\frac{\pi}{2} = \boxed{0{,}0\text{ m}}$$

(*b*) 1. Calcular λ para $f = 2000$ Hz:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340\text{ m/s}}{2000\text{ Hz}} = 0{,}170\text{ m}$$

2. Para $\lambda = 0{,}17$ m, la diferencia de trayectos es igual a λ, y la interferencia es constructiva. Calcular la diferencia de fase y la amplitud:

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{0{,}170\text{ m}}{0{,}17\text{ m}} = 2\pi$$

$$\text{por lo tanto,}\quad A = 2p_0\cos\tfrac{1}{2}\delta = 2p_0\cos\pi = \boxed{-2p_0}$$

(*c*) 1. Calcular λ para $f = 500$ Hz: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{340 \text{ m/s}}{500 \text{ Hz}} = 0{,}680 \text{ m}$

2. Calcular la diferencia de fase y la amplitud: $\delta = 2\pi\dfrac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\dfrac{0{,}17 \text{ m}}{0{,}680 \text{ m}} = \dfrac{\pi}{2}$

por tanto, $A = 2p_0 \cos\dfrac{1}{2}\delta = 2p_0 \cos\dfrac{\pi}{4} = \boxed{\sqrt{2}\,p_0}$

COMPROBACIÓN Cada una de las tres respuestas está entre $-2p_0$ y $+2p_0$, como era de esperar.

OBSERVACIÓN En el apartado (*b*), A sale negativa. La ecuación 16.6 se puede escribir como $y_1 + y_2 = A' \operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \dfrac{\delta}{2}\right)$, o también como $y_1 + y_2 = -A' \operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \dfrac{\delta}{2} + \pi\right)$. Un desfase de $\pi = 180°$ es equivalente a multiplicar por -1.

Ejemplo 16.5 Intensidad sonora de dos altavoces

Dos altavoces enfrentados entre sí a una distancia de 180 cm están accionados por un oscilador común de audio a 686 Hz. Localizar los puntos entre los altavoces a lo largo de la línea que los une, para los cuales la intensidad del sonido es (*a*) máxima y (*b*) mínima. (Despreciar la variación de intensidad de cada altavoz con la distancia y usar 340 m/s para la velocidad del sonido.)

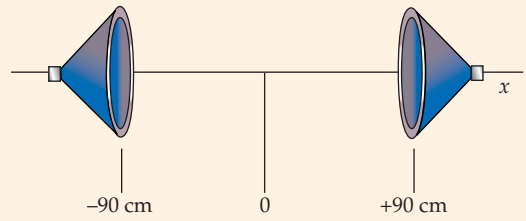


FIGURA 16.9 Los dos altavoces están sobre el eje x con el punto $x = 0$ situado en medio.

PLANTEAMIENTO Elegimos como origen el punto medio entre los altavoces (figura 16.9). Como este punto equidista de los altavoces, será un punto de intensidad máxima. Si nos movemos una distancia x hacia uno de los altavoces, la diferencia de trayectos es $2x$. La intensidad será máxima cuando $2x = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$ y mínima cuando $2x = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \ldots$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La intensidad será máxima cuando $2x$ sea igual a un número entero de longitudes de onda: $2x = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \ldots$

2. Calcular la longitud de onda: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{343 \text{ m/s}}{686 \text{ Hz}} = 0{,}500 \text{ m} = 50{,}0 \text{ cm}$

3. Despejar x utilizando la longitud de onda calculada: $x = 0, \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots = \boxed{0,\ \pm 25{,}0 \text{ cm},\ \pm 50{,}0 \text{ cm},\ \pm 75{,}0 \text{ cm}}$

(*b*) 1. La intensidad será mínima cuando $2x$ sea igual a un número impar de semilongitudes de onda: $2x = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \pm\frac{5}{2}\lambda, \ldots$

2. Despejar x utilizando la longitud de onda calculada: $x = \pm\frac{1}{4}\lambda, \pm\frac{3}{4}\lambda, \pm\frac{5}{4}\lambda, \ldots = \boxed{\pm 12{,}5 \text{ cm},\ \pm 37{,}5 \text{ cm},\ \pm 62{,}5 \text{ cm},\ \pm 87{,}5 \text{ cm}}$

COMPROBACIÓN Las respuestas de los apartados (*a*) y (*b*) se complementan entre sí, de forma que la intensidad mínima se localiza a medio camino entre dos máximos de intensidad.

OBSERVACIÓN Los máximos y mínimos serán máximos y mínimos relativos, ya que la amplitud del altavoz más próximo será ligeramente mayor que la correspondiente al altavoz más alejado. Solo se han utilizado siete valores de x para la intensidad máxima y ocho valores para la intensidad mínima, ya que valores adicionales no estarían entre los dos altavoces.

La figura 16.10*a* muestra el conjunto de las ondas producidas por dos focos puntuales en una cubeta experimental que están oscilando en fase, produciendo cada uno de ellos ondas circulares. Los frentes de onda que se observan tienen todos la misma fase (todos son crestas) y están separados por una longitud de onda. Podemos construir un esquema semejante con un compás dibujando arcos circulares que representen las crestas de las ondas de cada foco en un instante de tiempo determinado (figura 16.10*b*). En los puntos en donde se cortan o solapan las crestas procedentes de cada foco, las ondas interfieren constructivamente. En estos puntos, los trayectos correspondientes a las ondas procedentes de ambos focos son iguales o difieren en un número entero de longitudes de onda. Las líneas de trazos indican los

puntos que son equidistantes de los focos o cuyas diferencias de trayectos son una, dos o tres longitudes de onda. En cada punto de cualquiera de estas líneas la interferencia es constructiva, de modo que éstas son líneas de interferencia máxima. Entre las líneas de interferencia máxima hay líneas de interferencia mínima. En una línea de interferencia mínima, la longitud desde cualquier punto que esté en ella hasta cada uno de los dos focos difiere en un número impar de semilongitudes de onda. En la región donde las dos ondas se superponen, la amplitud de la onda resultante viene dada por $A = 2p_0 \cos\frac{1}{2}\delta$, siendo p_0 la amplitud de cada onda por separado y estando δ relacionada con la diferencia de trayectos Δr mediante $\delta = 2\pi\,\Delta r/\lambda$ (ecuación 16.9).

La figura 16.11 muestra la intensidad de la onda resultante a partir de dos focos, en función de la diferencia de trayectos Δx. En los puntos en que la interferencia es constructiva, la intensidad es $4I_0$, siendo I_0 la intensidad debida a una cualquiera de las fuentes, ya que la amplitud de la resultante es el doble de la amplitud de una de las ondas cualesquiera. En los puntos de interferencia destructiva, la intensidad es cero. La intensidad media, indicada por la línea de trazos de la figura, es el doble de la intensidad correspondiente a la de un solo foco, tal como exige el principio de conservación de la energía. Entonces, como consecuencia de la interferencia de las ondas procedentes de dos focos, la energía se redistribuye en el espacio. La interferencia entre dos ondas sonoras se pone de manifiesto alimentando dos altavoces separados conectados al mismo amplificador (de modo que estén siempre en fase) que recibe una señal de audiofrecuencia. Moviéndose por la habitación es posible detectar por el oído las posiciones de interferencia constructiva y destructiva.* Esta demostración ha de realizarse en una *cámara insonorizada*, donde se minimizan las reflexiones (los ecos) de las paredes del recinto.

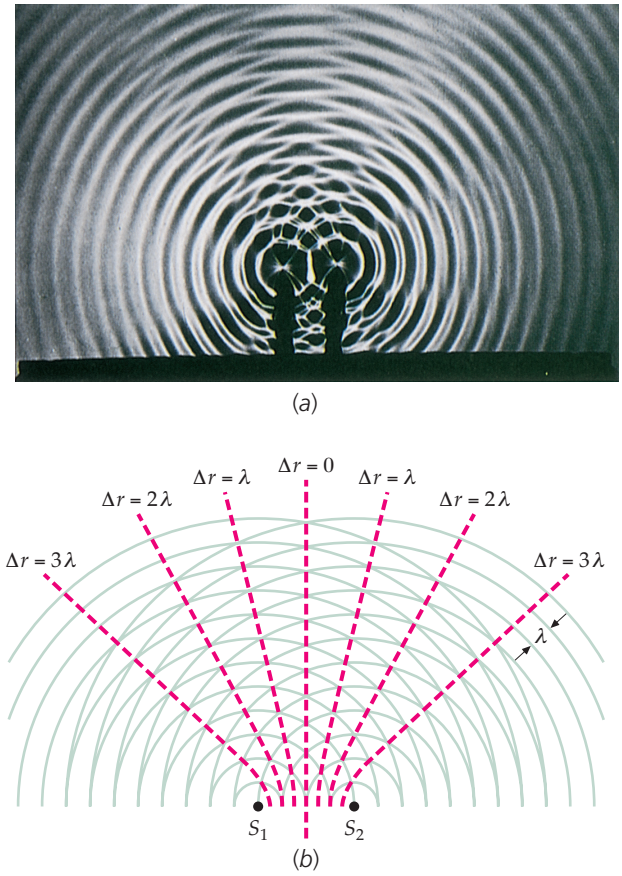


FIGURA 16.10 (*a*) Ondas de agua producidas por dos focos puntuales que oscilan en fase en una cubeta de ondas. (*b*) Construcción geométrica del patrón de interferencia de (*a*). Las líneas de trazos indican los puntos para los cuales las longitudes de los trayectos difieren en un número entero de longitudes de onda. *(Apartado (a) Berenice Abbott, 8J 1328/Photo Researchers.)*

Coherencia No es necesario que dos focos estén en fase para que produzcan un patrón de interferencia. Considérense dos focos que están desfasados en 180°. (Dos focos sonoros que están en fase pueden convertirse en dos focos desfasados en 180°, intercambiando simplemente las conexiones de uno de los altavoces.) El patrón de intensidades es el mismo que el de la figura 16.11 excepto que los máximos y mínimos están intercambiados. En los puntos en que la diferencia de trayectos es un número entero de longitudes de onda, la interferencia será destructiva pues las ondas están desfasadas 180°. En los puntos en que la diferencia de trayectos sea un número impar de semilongitudes de onda, las ondas están en fase porque la diferencia de fase de 180° se ve contrarrestada por la diferencia de fase de 180° originada por la diferencia entre los trayectos.

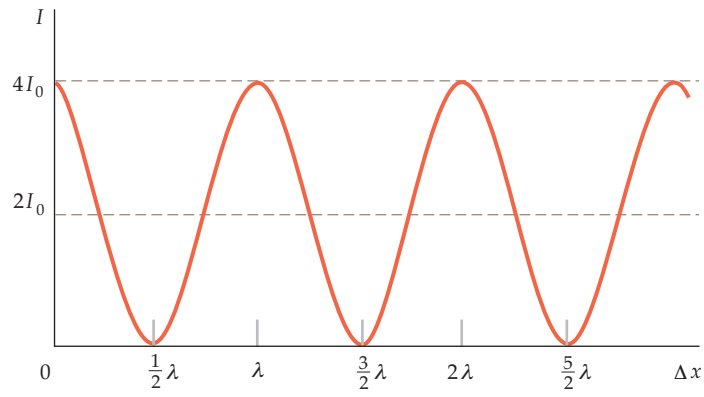


FIGURA 16.11 Intensidad en función de la diferencia de trayectos para dos fuentes que están en fase. I_0 es la intensidad de cada fuente medida individualmente.

Se producirán patrones de interferencia semejantes, mediante dos focos cuya diferencia de fase sea constante a lo largo del tiempo. Dos focos que están en fase o tienen una diferencia de fase constante se dice que son focos o fuentes **coherentes**. Es fácil conseguir fuentes coherentes de ondas en el agua de una cubeta de ondas si se accionan ambas fuentes con el mismo motor. Se obtienen focos sonoros coherentes accionando dos altavoces con la misma fuente de señal y el mismo amplificador.

Las fuentes de ondas cuya diferencia de fase no es constante a lo largo del tiempo, sino que varía aleatoriamente, se denominan **fuentes incoherentes**. Existen muchos ejemplos de fuentes incoherentes, como dos altavoces alimentados por

* En esta demostración, la intensidad sonora no será totalmente nula en los puntos de interferencia destructiva de las ondas sonoras que proceden directamente de los altavoces, debido a las reflexiones del sonido en las paredes y otros objetos presentes en la habitación.

amplificadores diferentes o dos violines tocados por dos violinistas diferentes. En el caso de fuentes incoherentes, la interferencia en un punto concreto varía rápidamente pasando de constructiva a destructiva, y viceversa, y no se observa ningún patrón de interferencia. La intensidad resultante de las ondas originadas por dos o más fuentes incoherentes es simplemente la suma de las intensidades debidas a las fuentes aisladas.

16.2 ONDAS ESTACIONARIAS

Cuando las ondas están confinadas en el espacio, como las ondas de una cuerda de piano, las ondas sonoras de un tubo de órgano o las ondas luminosas de un láser, se producen reflexiones en ambos extremos y, por tanto, existen ondas que se mueven en los dos sentidos que se combinan de acuerdo con el principio de superposición. Para una cuerda o tubo determinados, existen ciertas frecuencias para las cuales la superposición da un patrón de vibración estacionario denominado **onda estacionaria**. Este tipo de ondas tiene aplicaciones importantes en instrumentos musicales y en teoría cuántica.

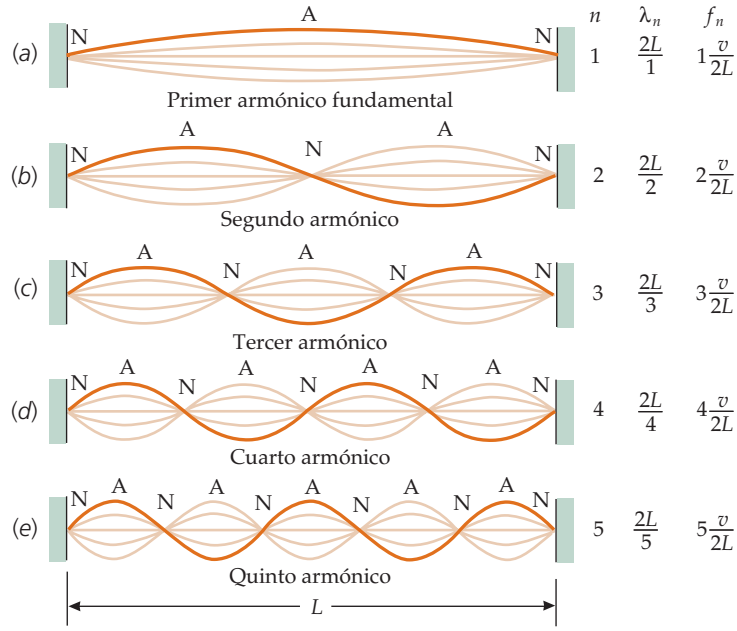
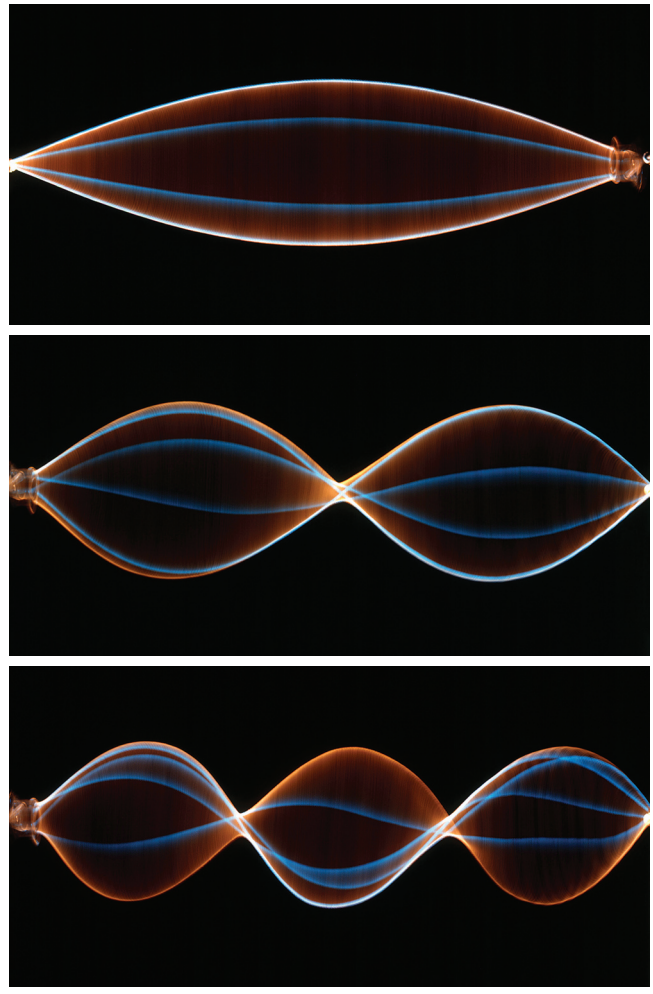


FIGURA 16.12 Ondas estacionarias en una cuerda fija por ambos extremos. Los puntos marcados con A son vientres o antinodos y los señalados con N son nodos. En general, el armónico enésimo tiene n antinodos, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

ONDAS ESTACIONARIAS EN CUERDAS

Cuerda fija por ambos extremos Si fijamos los dos extremos de una cuerda y movemos una parte de la misma hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud, resulta que, a ciertas frecuencias, se obtienen unos patrones de ondas estacionarias semejantes a los indicados en la figura 16.12. Las frecuencias que producen estos patrones se denominan **frecuencias de resonancia** del sistema de la cuerda. Cada una de estas frecuencias y la función de onda que la acompaña se llama **modo de vibración**. La frecuencia de resonancia más baja se denomina frecuencia fundamental f_1 y produce el patrón de ondas estacionarias indicado en la figura 16.12*a* que recibe el nombre de **modo fundamental** de vibración o **primer armónico**. La segunda frecuencia más baja f_2 produce el patrón indicado en la figura 16.12*b*. Este modo de vibración tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia fundamental y se denomina segundo armónico. La tercera frecuencia más baja f_3 es tres veces la fundamental y produce el patrón del tercer armónico indicado en la figura 16.12*c*. El conjunto de todas las frecuencias resonantes de la cuerda se denomina **espectro de frecuencias de resonancia**.

Muchos sistemas tienen un espectro de frecuencias de resonancia en donde las frecuencias resonantes no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (la de menor frecuencia). Se denomina primer sobretono a la primera frecuencia después de la fundamental, el segundo sobretono a la segunda y así sucesivamente. Esta denominación tiene su origen en la terminología usada en la teoría musical, donde los armónicos son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.



Ondas estacionarias sobre una cuerda que se hace oscilar mediante un vibrador situado en el extremo izquierdo de la cuerda. Esas ondas estacionarias tienen lugar a frecuencias muy concretas. *(Richard Megna/Fundamental Photographs, New York.)*

Obsérvese en la figura 16.12 que para cada armónico existen ciertos puntos sobre la cuerda que no se mueven. Por ejemplo, el punto medio en la figura 16.12*b* no se mueve. Estos puntos se denominan **nodos**. En el punto intermedio entre cada par de nodos existe un punto de amplitud de vibración máxima denominado vientre o **antinodo**. Como es natural, los dos extremos fijos de la cuerda son nodos. (Si se sujeta uno de los extremos a un diapasón u otro vibrador en lugar de estar fijo, seguirá siendo todavía, aproximadamente, un nodo porque la amplitud de vibración en dicho extremo será mucho menor que la amplitud en los antinodos.) Obsérvese que el modo fundamental o primer armónico tiene un antinodo, el segundo armónico tiene dos antinodos y así sucesivamente.

Podemos relacionar las frecuencias de resonancia con la velocidad de onda en la cuerda y con su longitud. La distancia entre un nodo y el antinodo más próximo es un cuarto de longitud de onda. Por lo tanto, la longitud de la cuerda L es igual a la mitad de la longitud de onda del primer armónico (figura 16.13) y, como revela la figura 16.12, L es igual a dos medias longitudes de onda para el segundo armónico, tres medias longitudes de onda para el tercer armónico, etc. En general, si λ_n es la longitud de onda del armónico n se cumple

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad 16.10$$

CONDICIÓN DE ONDA ESTACIONARIA CON AMBOS EXTREMOS FIJOS

Este resultado se conoce como **condición de onda estacionaria**. Podemos hallar la frecuencia del enésimo armónico sabiendo que la velocidad de la onda v es igual a la frecuencia f_n multiplicada por la longitud de onda. Así

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2L/n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

o bien

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad 16.11$$

FRECUENCIAS DE RESONANCIA, AMBOS EXTREMOS FIJOS

donde $f_1 = v/2L$ es la frecuencia fundamental.

Podemos entender la producción de ondas estacionarias en función de la resonancia. Consideremos una cuerda de longitud L que está sujeta por un extremo a un dispositivo mecánico que produce vibración (figura 16.14), mientras que tiene fijo el otro extremo. La primera onda producida por el dispositivo mecánico recorre la cuerda hasta que a una distancia L se encuentra con el extremo fijo, en donde se refleja e invierte. Entonces regresa hacia el dispositivo mecánico, y se refleja de nuevo en éste. El tiempo total para recorrer la distancia $2L$ es $2L/v$. Si este tiempo es igual al periodo del dispositivo mecánico, la onda reflejada dos veces se solapa exactamente a la segunda onda producida por el dispositivo mecánico y las dos ondas interferirán constructivamente, lo que significa que se sumarán para producir una onda que tendrá una amplitud doble que la de una de ellas. La onda combinada recorrerá la cuerda hasta el extremo fijo y retornará sumándose a la tercera onda producida por el dispositivo mecánico y así sucesivamente. Así, el dispositivo mecánico entra en resonancia con la cuerda. La longitud de onda es igual a $2L$ y la frecuencia es $v/(2L)$.

La resonancia también se da en otras frecuencias. El dispositivo mecánico entra en resonancia con la cuerda si el tiempo que le cuesta a la primera onda moverse una distancia $2L$ es igual al producto nT_n, donde n es un número entero y T_n es el periodo del dispositivo mecánico. Es decir, si $2L/v = nT_n$, siendo $2L/v$ el tiempo de ida y vuelta de una onda. Así,

$$f_n = \frac{1}{T_n} = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

> **!** No todas las frecuencias de resonancia reciben la denominación de armónicos, sino únicamente aquellas del espectro de frecuencias resonantes que son un múltiplo entero de la frecuencia fundamental.

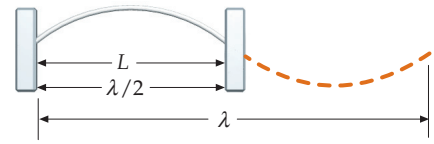


FIGURA 16.13 Para el primer armónico de una cuerda tensa sujeta por los dos extremos, se cumple que $\lambda = 2L$.

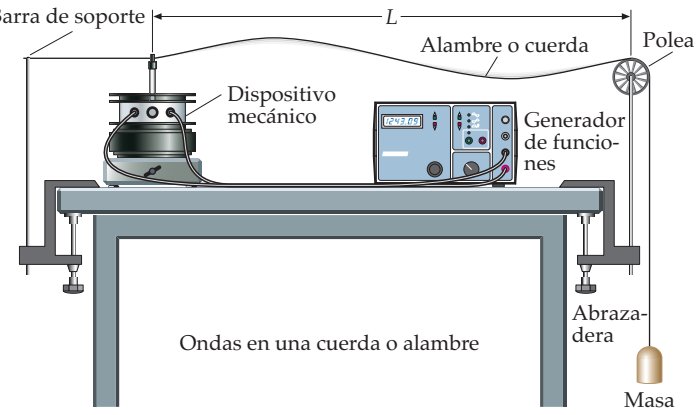


FIGURA 16.14 El dispositivo mecánico envía ondas a la cuerda. Las ondas se reflejan al llegar a la polea.

es la condición de resonancia. Este resultado es el mismo que obtenemos ajustando un número entero de semilongitudes de onda en la distancia L. Diversos efectos amortiguadores, tales como la pérdida de energía durante la reflexión, el rozamiento de la cuerda con el aire y la flexibilidad imperfecta de la cuerda, limitan la amplitud máxima que puede alcanzarse.

Las frecuencias de resonancia dadas por la ecuación 16.11 se denominan también **frecuencias naturales de la cuerda**. Cuando la frecuencia del dispositivo mecánico no coincide con ninguna de las frecuencias naturales de la cuerda vibrante, no se producen ondas estacionarias. Después de que la primera onda haya recorrido la distancia $2L$ y se haya reflejado en el dispositivo mecánico, su fase será diferente de la que posee la onda que en ese momento esté generando el dispositivo mecánico (figura 16.15). Cuando esta onda resultante haya recorrido la distancia $2L$ y se refleje de nuevo en el dispositivo mecánico, tendrá una fase que será, en general, diferente de la que posee la siguiente onda generada en el dispositivo mecánico. En algunos casos, la nueva onda resultante tendrá una amplitud mayor que la primera, mientras que en otros casos la nueva amplitud será menor. En promedio, sin embargo, la amplitud no aumentará sino que permanecerá en el orden de magnitud de la amplitud de la primera onda generada, que es la amplitud del dispositivo mecánico y es muy pequeña en comparación con las amplitudes que se obtienen a las frecuencias de resonancia.

La resonancia de las ondas estacionarias es análoga a la resonancia de un oscilador armónico simple con una fuerza impulsora armónica. Sin embargo, mientras un oscilador posee sólo una frecuencia natural, una cuerda vibrante posee una secuencia de frecuencias naturales que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Esta secuencia se denomina **serie armónica**.

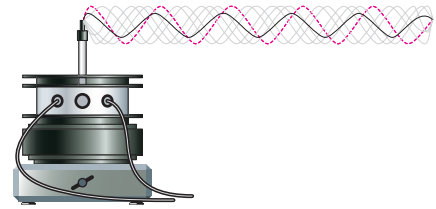


FIGURA 16.15 Ondas en una cuerda producidas por un dispositivo mecánico cuya frecuencia no está en resonancia con las frecuencias naturales de la cuerda. La onda que abandona el dispositivo mecánico por primera vez (línea de trazos roja) no está en fase con las ondas que se han reflejado dos o más veces (líneas grises), y éstas no están en fase entre ellas, por lo que no existe crecimiento de amplitud. La onda resultante (línea negra) tiene, aproximadamente, la misma amplitud que las ondas individuales, que coincide, aproximadamente, con la amplitud del dispositivo.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

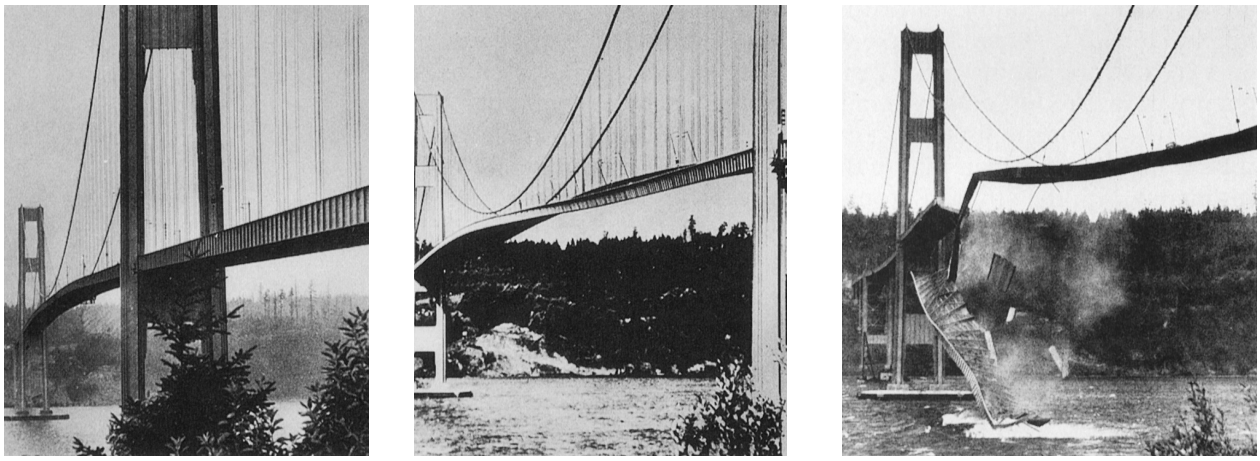
Resolución de problemas mediante la condición de onda estacionaria

PLANTEAMIENTO Un modo sencillo de recordar las frecuencias de resonancia dadas por la ecuación 16.11 es hacer el esquema de la figura 16.12 para reconstruir uno mismo la condición de onda estacionaria $\lambda_n = 2L/n$ y luego utilizar $v = f_n\lambda_n$.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la figura 16.12 para los primeros armónicos (sólo los dibujos de las cuerdas). En cada extremo de la cuerda hay un nodo y la distancia entre un nodo y el siguiente antinodo es siempre $\frac{1}{4}\lambda$.
2. Relacionar la velocidad de la onda con la frecuencia utilizando $v = f\lambda$.
3. Relacionar la velocidad de la onda con la tensión utilizando $v = \sqrt{F_T/\mu}$.

COMPROBACIÓN Verificar que los resultados son dimensionalmente correctos.



El viento que iba a 72,4 km/h produjo ondas estacionarias en el puente colgante de Tacoma Narrows, dando lugar a su derrumbamiento el 7 de noviembre de 1940, sólo cuatro meses después de haber sido abierto al tráfico. *(University of Washington.)*

Ejemplo 16.6 Dame el la

Una cuerda se estira entre dos soportes fijos distantes 0,70 m entre sí y se ajusta la tensión hasta que la frecuencia fundamental de la cuerda es la nota la de 440 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en la cuerda?

PLANTEAMIENTO La velocidad de la onda es igual al producto de la frecuencia por la longitud de onda. Si la cuerda está fija en los dos extremos, en el modo fundamental hay un único antinodo en el centro de la cuerda. Así, la longitud de la cuerda coincide con la mitad de la longitud de onda.

SOLUCIÓN

1. La velocidad de la onda está relacionada con la frecuencia y la longitud de onda: $v = f_1\lambda_1$
2. La longitud de onda del modo fundamental es el doble de la longitud de la cuerda: $\lambda_1 = 2L$
3. Utilizar esta longitud de onda y la frecuencia conocida para determinar la velocidad: $v = f_1\lambda_1 = f_1 2L = 2f_1 L = 2(440\text{ Hz})(0{,}700\text{ m}) = \boxed{616\text{ m/s}}$

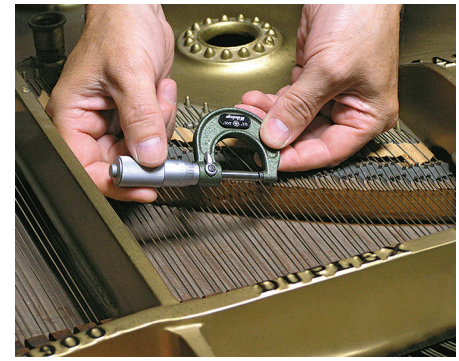
COMPROBACIÓN Comprobemos las unidades del resultado. Las unidades de la frecuencia son Hz, que equivalen a s^{-1}. Al multiplicarlo por metros (distancia) nos da m/s que son unidades de velocidad.

PROBLEMA PRÁCTICO 16.2 La velocidad de las ondas transversales en una cuerda tensa es de 200 m/s. Si la cuerda tiene 5 m de largo, hallar las frecuencias del armónico fundamental y del segundo y tercer armónicos.

Ejemplo 16.7 Probando cuerdas de piano

Póngalo en su contexto

Durante el verano, un estudiante encuentra un trabajo en una tienda de música, donde colabora en la construcción de instrumentos musicales. Uno de los trabajos que tiene encomendado es probar en pianos la idoneidad del uso de cuerdas de un nuevo material. A un fragmento de esta cuerda de 3 m de longitud cuya densidad de masa lineal es 0,0025 kg/m se le han medido dos frecuencias resonantes consecutivas a 252 Hz y a 336 Hz. Hay que determinar la frecuencia fundamental de la cuerda y comprobar si una cuerda de este nuevo material es adecuada, teniendo en cuenta que si la tensión de la misma sobrepasa los 700 N hay problemas de seguridad.



Los técnicos utilizan micrómetros para medir el diámetro de las cuerdas del piano. *(Gentileza de Buck Rogers/Craftsmen Piano Rebuilders North Attleboro, MA.)*

PLANTEAMIENTO La tensión F_T se calcula a partir de la expresión $v = \sqrt{F_T/\mu}$, donde la velocidad v se calcula a partir de $v = f\lambda$ usando cualquier armónico. La longitud de onda de la onda fundamental es el doble de la longitud de la cuerda. Para calcular la frecuencia fundamental, supongamos que el armónico n corresponde a una frecuencia de 252 Hz. Entonces, $f_n = nf_1$ y $f_{n+1} = (n + 1)f_1$, donde $f_{n+1} = 366$ Hz. De estas dos ecuaciones se despeja f_1.

SOLUCIÓN

1. La tensión está relacionada con la velocidad de propagación de la onda: $v = \sqrt{F_T/\mu}$ o $F_T = \mu v^2$
2. La velocidad de la onda está relacionada con la longitud de onda y la frecuencia: $v = f\lambda$
3. Utilizar la figura 16.12 para relacionar la longitud de onda fundamental con la longitud de la cuerda: $\lambda_1 = 2L$
4. Utilizar los resultados de los pasos 2 y 3 para relacionar v con la frecuencia fundamental f_1: $v = f_1\lambda_1 = f_1 \times 2L = 2f_1 L$
5. Sustituir en el resultado del paso 1 para hallar la tensión: $F_T = \mu v^2 = 4\mu f_1^2 L^2$
6. Los armónicos consecutivos f_n y f_{n+1} están relacionados con la frecuencia fundamental f_1: $nf_1 = 252\text{ Hz}$ $\quad (n + 1)f_1 = 336\text{ Hz}$
7. Dividir las dos ecuaciones anteriores permite eliminar f_1 y calcular n: $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{252\text{ Hz}}{336\text{ Hz}} = 0{,}750 \Rightarrow n = 3$
8. Despejar f_1: $f_n = nf_1$ por lo tanto, $f_1 = \dfrac{f_n}{n} = \dfrac{f_3}{3} = \dfrac{252\text{ Hz}}{3} = 84{,}0\text{ Hz}$
9. Se usa el resultado del paso 5 para calcular F_T: $F_T = 4\mu f_1^2 L^2 = 4(0{,}00250\text{ kg/m})(84{,}0\text{ Hz})^2(3{,}00\text{ m})^2 = 635\text{ N}$
10. ¿La tensión es segura? La tensión es inferior a 700 N, con lo que la cuerda es segura.

COMPROBACIÓN El resultado es plausible, ya que la tensión de la cuerda del piano es del mismo orden de magnitud que el valor del límite máximo de seguridad.

Cuerda fija por un extremo y libre por el otro La figura 16.16 muestra una cuerda que tiene un extremo fijo y el otro atado a un anillo sin masa que puede moverse con toda libertad hacia arriba y hacia abajo por una varilla vertical. El movimiento vertical del anillo se produce por la componente vertical de la tensión (despreciamos los efectos de la gravedad). Para simplificar, suponemos que la masa del anillo es cero. Entonces, dado que el movimiento vertical del extremo de la cuerda que está unido al anillo no está ligado, se dice que es un *extremo libre*. Cualquier fuerza vertical finita que actuara sobre el anillo sin masa, le daría una aceleración infinita. Sin embargo, su aceleración es finita en tanto en cuanto la tangente a la cuerda en el punto en el que se une al anillo permanece paralela a la posición de equilibrio de la cuerda. Se deduce entonces que hay un antinodo en el extremo de la cuerda unido al anillo.

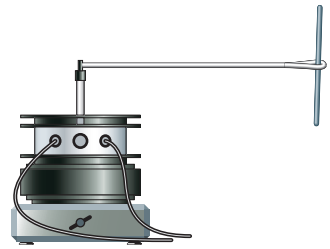


FIGURA 16.16 Se pueden reproducir las condiciones en que una cuerda está fija por un extremo y libre por el otro atando un anillo que se mueve con toda libertad por una varilla vertical al extremo libre de la cuerda. El otro extremo se ata a un dispositivo mecánico que oscila con una amplitud muy pequeña, con lo cual puede suponerse que el extremo está fijo.

En el modo fundamental de vibración de una cuerda sujeta únicamente por un extremo, hay un nodo en un extremo y un antinodo en el otro; por lo tanto, $L = \frac{1}{4}\lambda$ (figura 16.17). (La distancia de un nodo al siguiente antinodo es $\lambda/4$.)

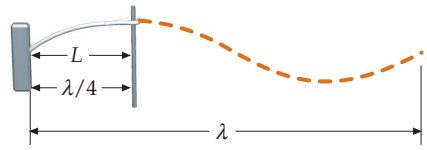


FIGURA 16.17 Para el primer armónico de una cuerda tensa fija en un extremo y libre en el otro extremo, se cumple que $\lambda = 4L$.

En cada modo de vibración mostrado en la figura 16.18, hay un número impar de cuartos de longitud de onda en la cuerda de longitud L, es decir, $L = n\frac{1}{4}\lambda_n$, donde $n = 1, 3, 5, \ldots$ La condición de onda estacionaria se escribe como

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad 16.12$$

CONDICIÓN DE ONDA ESTACIONARIA, UN EXTREMO LIBRE

con lo cual $\lambda n = 4L/n$. En estas condiciones, las frecuencias de resonancia vienen dadas por

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad 16.13$$

FRECUENCIAS DE RESONANCIA, UN EXTREMO LIBRE

donde

$$f_1 = \frac{v}{4L} \qquad 16.14$$

es la frecuencia fundamental. Las frecuencias naturales de este sistema se presentan en las razones 1:3:5:7:…, lo que significa que se han perdido los armónicos pares.

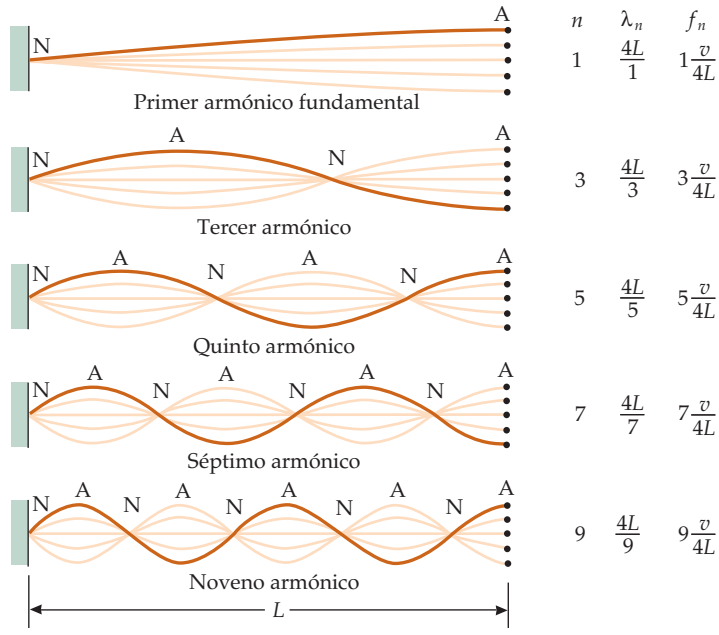


FIGURA 16.18 Ondas estacionarias en una cuerda fija sólo por un extremo. El extremo libre es un vientre o antinodo.

Funciones de onda para ondas estacionarias Cuando una cuerda vibra en su modo n, cada punto de la cuerda se mueve con movimiento armónico simple. Su desplazamiento $y_n(x, t)$ viene dado por

$$y_n(x, t) = A_n(x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

donde ω_n es la frecuencia angular, δ_n la constante de fase, que depende de las condiciones iniciales, y $A_n(x)$ es la amplitud, que depende de la localización del segmento. La función $A_n(x)$ es la forma de la cuerda cuando $\cos(\omega_n t + \delta_n) = 1$ (el instante en que la vibración tiene su amplitud máxima). La amplitud de una cuerda vibrando en su armónico n es

$$A_n(x) = A_n \operatorname{sen} k_n x \qquad 16.15$$

donde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ es el número de ondas. Por lo tanto, la función de onda para una onda estacionaria en el armónico n puede escribirse en la forma

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \qquad 16.16$$

En este punto, conviene recordar las dos condiciones necesarias para que se den ondas estacionarias:

1. Cada punto de la cuerda o bien permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple. (Los puntos en reposo son los nodos.)
2. El movimiento oscilante de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos se produce en fase o con un desfase de 180°.

CONDICIONES NECESARIAS PARA EL MOVIMIENTO DE UNA ONDA ESTACIONARIA EN UNA CUERDA

Ejemplo 16.8 Ondas estacionarias *Inténtelo usted mismo*

(*a*) Las funciones de onda para dos ondas de igual amplitud, frecuencia y longitud de onda, pero que se propagan en sentidos opuestos, vienen dadas por $y_1 = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ e $y_2 = y_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$. Demostrar que la suma de estas dos ondas es una onda estacionaria. (*b*) Una onda estacionaria en una cuerda fija por sus dos extremos viene dada por $y(x, t) = (0{,}024\ \text{m}) \operatorname{sen}(52{,}3\ \text{m}^{-1}\, x) \cos(480\ \text{s}^{-1}\, t)$. Determinar la velocidad de las ondas sobre la cuerda y la distancia entre los nodos para las ondas estacionarias.

PLANTEAMIENTO Para demostrar que la superposición de dos ondas es una onda estacionaria, hay que demostrar que la suma algebraica de y_1 e y_2 puede escribirse de una forma semejante a la ecuación 16.16. Para determinar la velocidad de propagación de la onda y la longitud de onda, se compara la función de onda dada con la ecuación 16.16 y se identifican el número de onda, y la frecuencia angular, y a partir de estos datos se calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Escribir la ecuación 16.16. Si la suma de y_1 e y_2 puede escribirse de esta forma, la superposición de las dos ondas es una onda estacionaria.	$y(x, t) = A \operatorname{sen} kx \cos \omega t$
2. Sumar las dos funciones de onda y usar la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$.	$y = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t)$ $= 2y_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t$ Esta expresión coincide con la forma dada por la ecuación 16.16 con $A = 2y_0$; por lo tanto, la superposición es una onda estacionaria.
(*b*) 1. Identificar el número de onda y la frecuencia angular.	$k =$ 52,3 m^{-1}, $\omega =$ 480 s^{-1}
2. Calcular la velocidad a partir de $v = \omega/k$.	$v =$ 9,18 m/s
3. Determinar la longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$, y usar esta magnitud para calcular la distancia entre nodos.	$\frac{\lambda}{2} =$ 6,01 cm

COMPROBACIÓN Alguien podría pensar que la superposición de dos ondas viajeras idénticas, una que se mueve hacia la derecha y otra hacia la izquierda, no daría lugar a una onda estacionaria. Pero, si fuera así, ¿en qué dirección debería viajar la onda resultante? Por tanto, no nos debería sorprender que el resultado de la superposición de dos ondas viajeras sea una onda estacionaria.

ONDAS SONORAS ESTACIONARIAS

Un tubo de órgano es un ejemplo conocido del empleo de ondas estacionarias en columnas de aire. En estos tubos de tipo lengüeta, se dirige un chorro de aire contra el borde afilado de una abertura (punto A en la figura 16.19). El movimiento turbulento complicado del aire cerca de dicho borde crea vibraciones en la columna de aire. Las frecuencias de resonancia del tubo dependen de su longitud y de que su extremo esté abierto o cerrado.

En un tubo de órgano abierto, la presión en ambos extremos es igual a la presión atmosférica y no varía. Por lo tanto, existe un nodo de presión en los dos extremos del tubo. (Este resultado está basado en la hipótesis de que la onda sonora en el tubo es una onda unidimensional, lo cual es aproximadamente cierto si el diámetro del tubo es mucho menor que la longitud de onda; entonces, el nodo de presión está extremadamente cerca del extremo abierto del tubo. En la práctica, los nodos de presión están ligeramente más allá de los extremos del tubo. La longitud efectiva del tubo es $L_{ef} = L + \Delta L$, donde ΔL es la corrección de los extremos, una distancia que es algo menor que el diámetro del tubo.) La condición de onda estacionaria para este sistema es la misma que para una cuerda fija por ambos extremos. Una vez que se reemplaza L por L_{ef} (la longitud efectiva del tubo), pueden aplicarse las mismas ecuaciones de la cuerda.

En un tubo de órgano cerrado (abierto por un extremo y cerrado por el otro) hay un nodo de presión próximo a la abertura (punto A de la figura 16.19) y un antinodo de presión en el extremo cerrado. La condición de onda estacionaria para este sistema es la misma que la de una cuerda con un extremo fijo y el otro libre. La longitud efectiva del tubo debe ser igual a un número impar de veces $\lambda/4$. Es decir, la longitud de onda del modo fundamental es 4 veces la longitud efectiva del tubo y sólo están presentes los armónicos impares.

Como vimos en el capítulo 15, una onda sonora puede considerarse como una onda de presión o como una onda de desplazamiento. Las variaciones de presión y desplazamiento en una onda sonora están desfasadas 90°. Así, en una onda sonora estacionaria, los nodos de presión son antinodos de desplazamiento y viceversa. Cerca del extremo abierto de un tubo de órgano hay un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento, mientras que en el extremo cerrado hay un antinodo de presión y un nodo de desplazamiento.

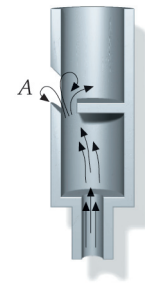


FIGURA 16.19 Tubo de órgano de lengüeta. Se sopla una corriente de aire contra el borde originando un movimiento turbulento del aire cerca de A que excita ondas estacionarias en el tubo. Existe un nodo de presión cerca del punto A, que está abierto a la atmósfera.

Ejemplo 16.9 Ondas sonoras estacionarias en una columna de aire: I

Inténtelo usted mismo

Un tubo de órgano con ambos extremos abiertos tiene una longitud de 1 m. (*a*) Si la velocidad del sonido es 343 m/s, ¿cuáles son las frecuencias y las longitudes de onda permitidas en el caso de las ondas estacionarias en este tubo? (*b*) Si la velocidad del sonido en el helio es 975 m/s, ¿cuáles son las frecuencias permitidas en el caso de las ondas estacionarias en este tubo si está lleno de helio?

PLANTEAMIENTO En cada extremo hay un antinodo para el desplazamiento (y un nodo para la presión). Por consiguiente, la longitud efectiva del tubo es un número entero de semilongitudes de onda.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Calcular la longitud de onda fundamental a partir de $\lambda_1 = 2L_{ef}$.	$\lambda_1 = 2L_{ef} = 2{,}00\ \text{m}$
2. Utilizar $v = f\lambda$ para calcular la frecuencia fundamental f_1.	$f_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} = 172\ \text{Hz}$
3. Escribir expresiones para las frecuencias f_n y longitudes de onda λ_n de los restantes armónicos en función de n.	$f_n = nf_1 = \boxed{n(172\ \text{Hz}) \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$ $\lambda_n = \dfrac{2L}{n} = \boxed{(2{,}00\ \text{m})/n \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$
(*b*) 1. Repetir el apartado (*a*) para calcular el espectro de frecuencias de resonancias del tubo lleno de helio.	$f_n = nf_1 = n\dfrac{v}{\lambda_1} = n\dfrac{v}{2L} = n\dfrac{975\ \text{m/s}}{2{,}00\ \text{m}}$ $= \boxed{n(488\ \text{Hz}) \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$

COMPROBACIÓN El producto de los resultados del paso 3 del apartado (*a*) no depende de *n*. Esto es lógico pues el resultado del producto es la velocidad de la onda, que sólo depende de las propiedades físicas del medio.

PROBLEMA PRÁCTICO 16.3 En el tubo de órgano más grande que existe, la frecuencia fundamental es de 16 Hz, la frecuencia más baja audible por los humanos. Calcular la longitud del tubo si está abierto por ambos extremos.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 16.1

¿Por qué la frecuencia de la voz cambia tanto cuando se habla tras inhalar el contenido de un globo lleno de helio?

Ejemplo 16.10 Ondas sonoras estacionarias en una columna de aire: II

Cuando encima del tubo parcialmente lleno de agua de la figura 16.20 se coloca un diapasón de 500 Hz de frecuencia, aparecen resonancias cuando el nivel del agua está a las distancias L = 16,0, 50,5, 85,0 y 119,5 cm de la parte superior del tubo. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del sonido en el aire? (*b*) ¿A qué distancia del extremo del tubo está el antinodo de desplazamiento?

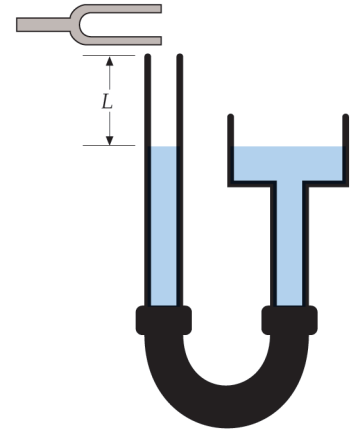


FIGURA 16.20 La longitud de la columna de aire dentro del cilindro de la izquierda se regula moviendo el contenedor de la derecha hacia arriba o hacia abajo. Ambos cilindros están conectados mediante una manguera flexible.

PLANTEAMIENTO Ajustando el nivel del agua, en la columna de aire de longitud ajustable L se producen ondas sonoras de 500 Hz. La columna de aire está cerrada por un extremo y abierta por el otro. Así, cuando hay resonancia, en el tubo hay un número impar de cuartos de longitudes de onda (véase la figura 16.21). Hay un nodo de desplazamiento en la superficie del agua y un antinodo de desplazamiento un poco por encima del extremo abierto del tubo. Ya que la frecuencia está determinada por el diapasón, también lo está la longitud de onda. La velocidad de propagación se calcula entonces a partir de $v = f\lambda$, donde f es 500 Hz.

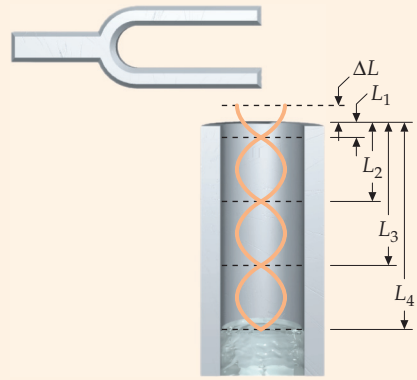


FIGURA 16.21 Existe un nodo de desplazamiento en la superficie del agua y un antinodo de desplazamiento a una distancia ΔL de la cima del cilindro.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La velocidad del sonido en el aire está relacionada con la frecuencia y la longitud de onda:
$$v = f\lambda$$

2. La resonancia aparece cada vez que el nivel de agua se halla en la localización de un nodo de desplazamiento (ver figura 16.21). Es decir, cuando L cambia en una mitad de la longitud de onda:
$$L_{n+1} = L_n + \frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, 4$$

3. La distancia entre dos niveles sucesivos de agua se determina a partir de los datos del problema:
$$L_{n+1} - L_n = L_4 - L_3 = 119{,}5\text{ cm} - 85{,}0\text{ cm} = 34{,}5\text{ cm}$$
$$\text{por tanto,}\quad \lambda = 2(34{,}5\text{ cm}) = 69{,}0\text{ cm} = 0{,}690\text{ m}$$

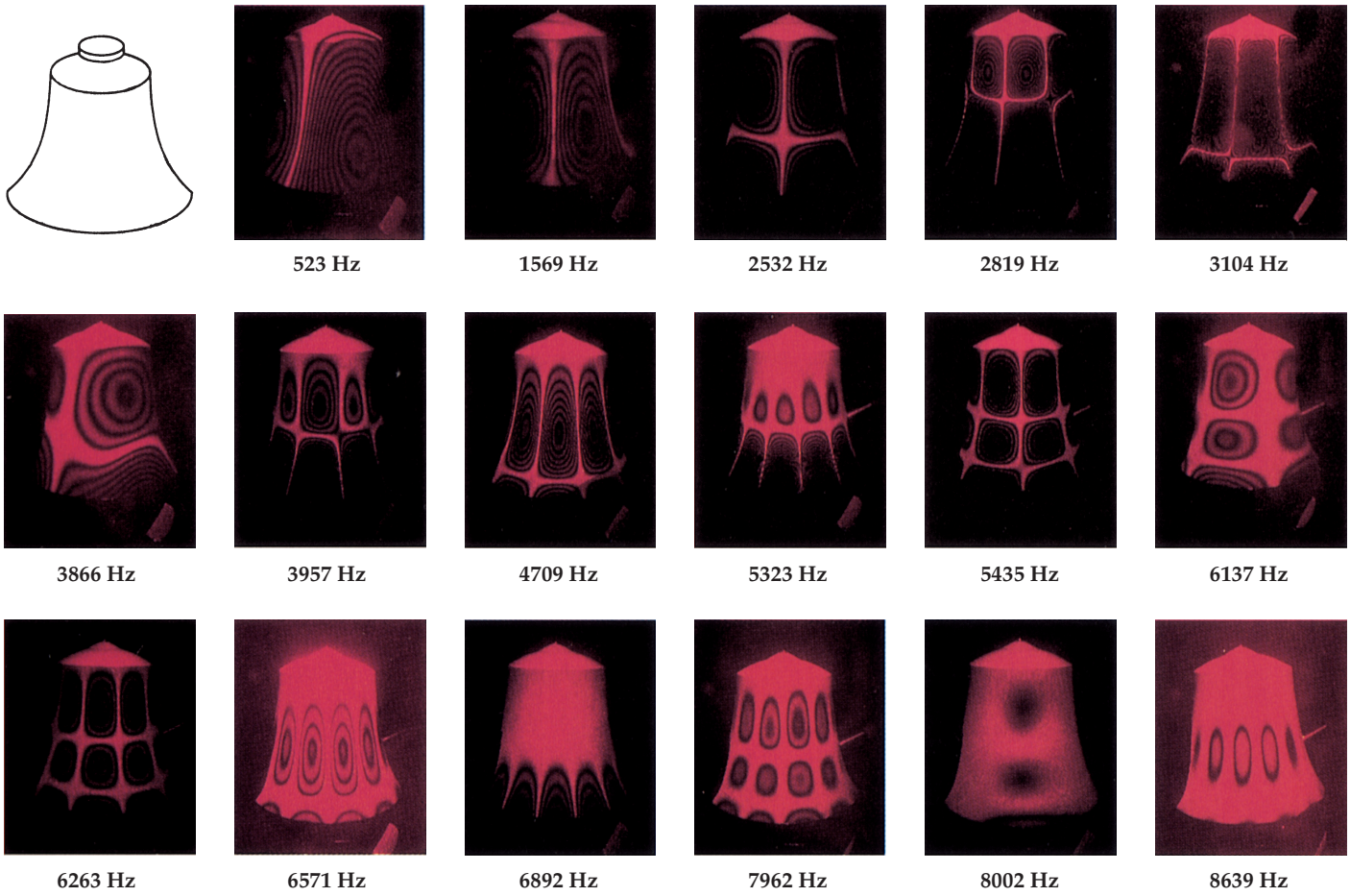
4. Para calcular v, se sustituyen los valores de f y de λ:
$$v = f\lambda = (500\text{ Hz})(0{,}690\text{ m}) = \boxed{345\text{ m/s}}$$

(*b*) Hay un antinodo a una distancia $\lambda/4$ por encima del nodo en la superficie del agua. Así, la distancia entre el nivel del agua más alto que da lugar a resonancia y el antinodo situado por encima del tubo es $\lambda/4$:
$$\tfrac{1}{4}\lambda = L_1 + \Delta L$$
$$\text{por tanto,}\quad \Delta L = \tfrac{1}{4}\lambda - L_1 = \tfrac{1}{4}(69{,}0\text{ cm}) - (16{,}0\text{ cm})$$
$$= \boxed{1{,}25\text{ cm}}$$

COMPROBACIÓN Como era de esperar, la velocidad de la onda del paso 4 es, aproximadamente, igual a la velocidad del sonido en el aire a temperatura ambiente.

La mayoría de los instrumentos musicales son mucho más complicados que un simple tubo cilíndrico. El tubo cónico, que es la base del oboe, el fagot, el corno inglés y el saxofón tienen series armónicas completas con su longitud de onda fundamental igual al doble de la longitud del cono. Los instrumentos de viento son

combinaciones de conos y cilindros. El análisis de estos instrumentos resulta extremadamente complejo. El hecho de que tengan series casi armónicas es un triunfo del método de ensayo error más que la consecuencia de cálculos matemáticos.



Interferogramas holográficos que muestran las ondas estacionarias de una campanilla. Los "ojos de buey" corresponden a las posiciones de los vientres o antinodos. *(Professor Thomas D. Rossing, Northern Illinois University, DeKalb.)*

* 16.3 TEMAS ADICIONALES

SUPERPOSICIÓN DE ONDAS ESTACIONARIAS

Como hemos visto, existen una serie de frecuencias de resonancia naturales que producen ondas estacionarias sonoras en columnas de aire o cuerdas vibrantes que están sujetas por uno o ambos extremos. Por ejemplo, para una cuerda fija en ambos extremos, la frecuencia del modo fundamental de vibración es $f_1 = v/2L$, siendo L la longitud de la cuerda y v la velocidad de la onda. La función de onda correspondiente es la ecuación 16.16:

$$y_1(x, t) = A_1 \operatorname{sen}(k_1 x) \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

En general, un sistema vibrante no vibra con un modo armónico aislado. Por el contrario, el movimiento se compone de una mezcla de los armónicos permitidos. La función de onda es una combinación lineal de funciones de onda armónicas:

$$y(x, t) = \sum_n A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \qquad 16.17$$

donde $k_n = 2\pi/\lambda_n$, $\omega_n = 2\pi f_n$ y A_n y δ_n son constantes. Las constantes A_n y δ_n dependen de la posición y velocidad iniciales de la cuerda. Si, por ejemplo, una cuerda de arpa se pulsa en el centro y se deja en libertad, como muestra la figura 16.22, la forma inicial de la cuerda es simétrica alrededor del punto $x = \frac{1}{2}L$ y la velocidad

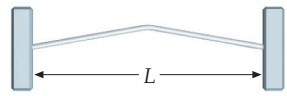


FIGURA 16.22 Cuerda pulsada por el centro. Cuando se deja libre, su vibración es una superposición lineal de ondas estacionarias.

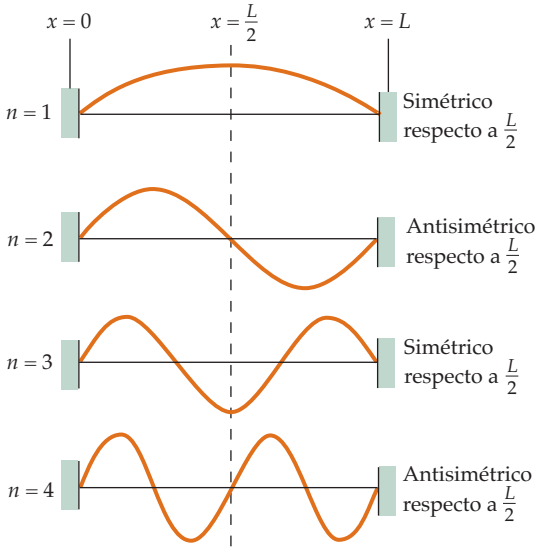


FIGURA 16.23 Los cuatro primeros armónicos correspondientes a una cuerda fija por ambos extremos. Los armónicos impares son simétricos respecto al centro de la cuerda, cosa que no ocurre con los armónicos pares. Cuando una cuerda se pulsa por el centro, vibra únicamente con los armónicos impares.

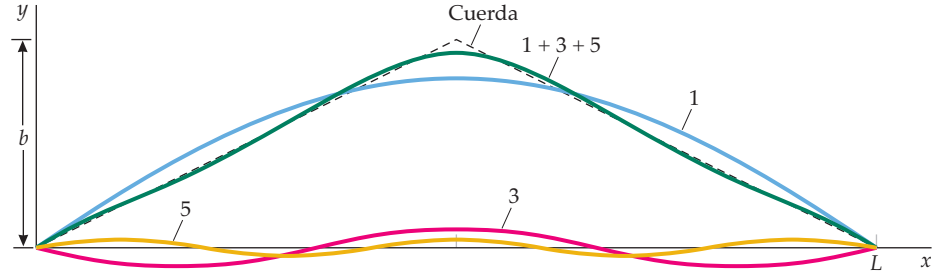


FIGURA 16.24 Forma aproximada de la cuerda pulsada por el centro, de la forma indicada en la figura 16.22, utilizando armónicos. La línea verde es la aproximación a la forma original de la cuerda basada en los tres primeros armónicos impares. La mayor parte de la energía está asociada con el modo fundamental, pero los armónicos tercero, quinto y demás impares poseen también cierta energía.

inicial es cero a lo largo de toda la cuerda. El movimiento de la cuerda permanecerá simétrico alrededor de dicho punto una vez suelta. Sólo se excitarán los armónicos impares, que son también simétricos respecto al punto central y no se excitarán los pares, que son antisimétricos respecto a $x = \frac{1}{2}L$. Es decir, la constante A_n es cero para todo valor par de n. En la figura 16.23, se indican las formas de los cuatro primeros armónicos. La mayor parte de la energía de la cuerda pulsada está asociada con el armónico fundamental, pero existen también pequeñas cantidades de energía asociadas con los modos armónicos tercero, quinto e impares superiores. La figura 16.24 muestra una aproximación de la forma inicial de la cuerda utilizando las superposiciones únicamente de los tres primeros armónicos impares.

(Corbis.)

ANÁLISIS Y SÍNTESIS ARMÓNICOS

Cuando un oboe y un clarinete tocan la misma nota, por ejemplo la nota la, suenan de forma muy diferente. Ambas notas tienen el mismo **tono**, que es una sensación fisiológica de la altura de la nota que está fuertemente correlacionada con su frecuencia. Sin embargo, las notas difieren en lo que se denomina **cualidad del tono o timbre**. La razón principal para la diferencia del timbre es que, aunque tanto el clarinete como el oboe están produciendo vibraciones con la misma frecuencia fundamental, cada uno de ellos está también produciendo armónicos cuyas intensidades relativas dependen del instrumento y de la forma en que se toque. Si cada instrumento produjese sólo la frecuencia fundamental, el sonido sería el mismo para los dos.

En la figura 16.25, se muestran algunos gráficos de las variaciones de presión en función del tiempo para un diapasón, un clarinete y un oboe, que tocan todos la misma nota. Estas curvas reciben el nombre de **formas de onda**. La forma de onda correspondiente a un diapasón es prácticamente una onda sinusoidal pura, lo cual evidentemente no ocurre en el caso del clarinete y el oboe.

Las formas de onda pueden analizarse descomponiéndolas en los armónicos que las constituyen. Dicho análisis recibe el nombre de **análisis armónico**. (El análisis armónico también se llama a veces **análisis de Fourier**, ya que fue este

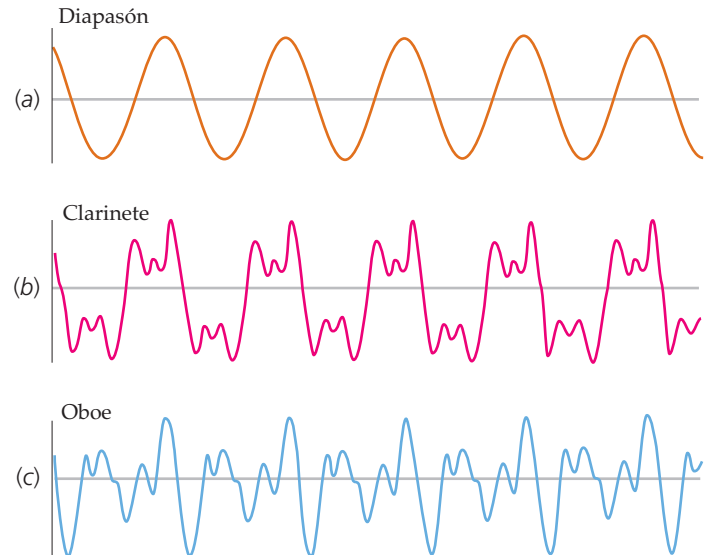


FIGURA 16.25 Formas de onda de (*a*) un diapasón, (*b*) un clarinete y (*c*) un oboe, todos con una frecuencia fundamental de 440 Hz y la misma intensidad aproximada.

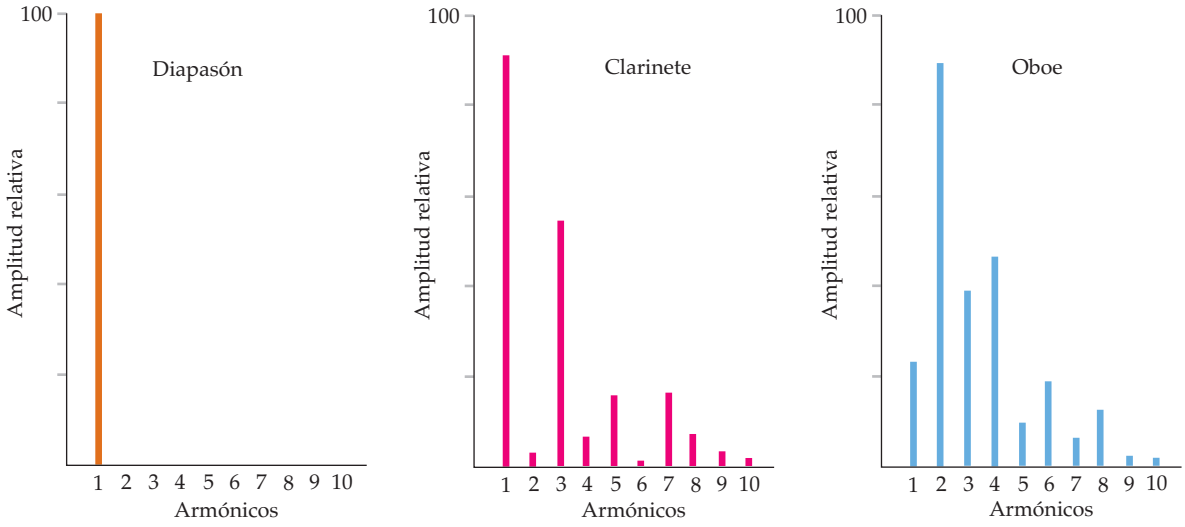


FIGURA 16.26 Intensidades relativas de los armónicos de las formas de onda indicadas en la figura 16.25 para (*a*) el diapasón, (*b*) el clarinete y (*c*) el oboe.

científico francés quien desarrolló el método matemático para analizar funciones periódicas.) La figura 16.26 muestra una representación de las intensidades relativas de los armónicos de las formas de onda de la figura 16.25. La forma de onda del diapasón contiene sólo la frecuencia fundamental. La del clarinete contiene el armónico fundamental, grandes cantidades del tercero, quinto y séptimo armónicos y cantidades menores del segundo, cuarto y sexto armónicos. En el caso del oboe, el segundo y cuarto armónicos tienen más energía que el fundamental.

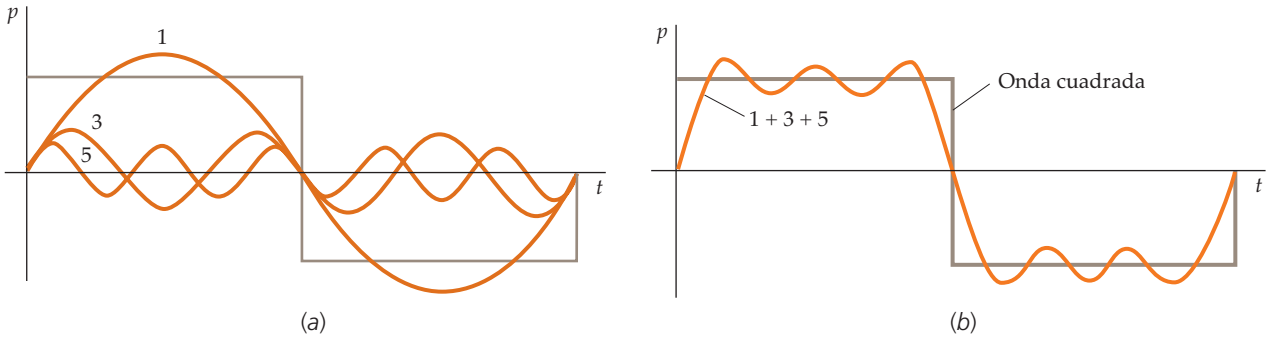


FIGURA 16.27 (*a*) Onda cuadrada y los tres primeros armónicos impares (ondas sinusoidales simples) utilizados para sintetizarla. (*b*) La forma aproximada de una onda cuadrada se obtiene sumando los tres primeros armónicos impares.

La inversa del análisis armónico es la **síntesis armónica**, que es la construcción de una onda periódica a partir de sus componentes armónicos. La figura 16.27*a* muestra los tres primeros armónicos impares utilizados para sintetizar una onda cuadrada y la 16.27*b* muestra la onda cuadrada que resulta de la suma de los tres armónicos. Cuantos más armónicos se empleen en una síntesis, más se aproxima el resultado obtenido a la forma de onda real (la línea gris oscura de la figura). Las amplitudes relativas de los armónicos necesarios para sintetizar la onda cuadrada se indican en la figura 16.28.

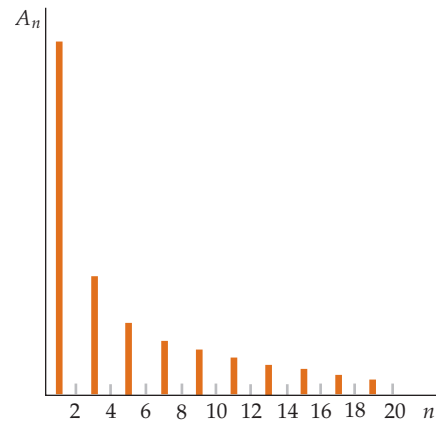


FIGURA 16.28 Amplitudes relativas A_n de los diez primeros armónicos necesarios para sintetizar una onda cuadrada. Cuantos más armónicos se utilicen, más nos aproximaremos a la onda cuadrada.

PAQUETES DE ONDA Y DISPERSIÓN

Las formas de onda estudiadas son periódicas en el tiempo. Los pulsos, que no son periódicos, pueden representarse mediante un grupo de funciones de onda armónicas de distintas frecuencias. Sin embargo, para sintetizar un pulso resulta necesario contar con una distribución continua de frecuencias en lugar de un conjunto discreto como en la figura 16.28. Dicho grupo de ondas se denomina **paquete de ondas**. La propiedad característica de un pulso de onda, que lo distingue de una onda perió-

dica de una sola frecuencia, es que el pulso tiene un principio y un final, mientras que una onda armónica se repite una y otra vez. Si la duración del pulso Δt es muy corta, el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ que se necesita para describir el pulso es muy grande. La relación general existente entre Δt y $\Delta\omega$ es

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1 \qquad 16.18$$

donde el símbolo ~ significa "del orden de".

El valor exacto de este producto depende de cómo se definen las magnitudes $\Delta\omega$ y Δt. En todas las definiciones razonables, $\Delta\omega$ es del orden de $1/\Delta t$. Un pulso de onda producido por una fuente de corta duración Δt, como un golpe de bate sobre una pelota, tiene una anchura corta en el espacio $\Delta x = v\,\Delta t$, siendo v la velocidad de la onda. Toda onda armónica de frecuencia ω tiene un número de onda $k = \omega/v$. Un intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ implica un intervalo de números de onda $\Delta k = \Delta\omega/v$. Sustituyendo $\Delta\omega$ por $v\,\Delta k$ en la ecuación 16.18, se tiene $v\,\Delta k\,\Delta t \sim 1$, o bien

$$\Delta k\,\Delta x \sim 1 \qquad 16.19$$

Ejemplo 16.11 Estimando $\Delta\omega$ y Δk

En el ejemplo 15.1, un pulso de onda se mueve sobre la cuerda de un tendedero a 100 m/s. (*a*) Si la anchura del pulso es 1 m, ¿cuál es la duración del pulso? Es decir, ¿cuánto tiempo tarda el pulso en pasar por un punto del tendedero? (*b*) El pulso se puede considerar como una superposición de ondas armónicas. ¿Cuál es el rango de frecuencias de esas ondas armónicas? (*c*) ¿Cuál es el rango de números de onda?

PLANTEAMIENTO Para determinar la duración del pulso, utilizamos que la distancia es velocidad por tiempo. Para obtener el rango de frecuencias y el rango de números de onda, utilizamos las ecuaciones 16.18 y 16.19, respectivamente.

SOLUCIÓN

(*a*) La duración del pulso es el tiempo que tarda en pasar completamente sobre un punto fijo del tendedero:

$$L = v\,\Delta t \quad \text{por tanto,} \quad \Delta t = \frac{L}{v} = \frac{1{,}00\text{ m}}{100\text{ m/s}} = \boxed{0{,}0100\text{ s}}$$

(*b*) Para determinar el rango de frecuencias, utilizamos la ecuación 16.18:

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1 \quad \text{por tanto,} \quad \Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}0100\text{ s}} = \boxed{100\text{ s}^{-1}}$$

(*c*) Para hallar el rango de números de onda, usamos la ecuación 16.19:

$$\Delta k\,\Delta x \sim 1 \quad \text{por tanto,} \quad \Delta k \sim \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{1{,}00\text{ m}} = \boxed{1{,}00\text{ m}^{-1}}$$

COMPROBACIÓN Sabemos que $k = \omega/v$, de forma que un rango de frecuencias $\Delta\omega$ implica un rango de números de onda $\Delta k = \Delta\omega/v$. Dividiendo el resultado del apartado (*b*) por la velocidad $v = 100$ m/s, se llega al resultado del apartado (*c*).

Si un paquete de ondas ha de mantener su forma cuando se desplaza, todas las ondas armónicas que componen el paquete deben moverse a la misma velocidad. Sucede así si la velocidad de las ondas armónicas en un medio dado no depende de la longitud de onda ni de la frecuencia. Un medio de estas características se denomina **medio no dispersivo**. El aire, en excelente aproximación, es un medio no dispersivo para las ondas sonoras, pero los líquidos y los sólidos generalmente no lo son. (Probablemente, el ejemplo más conocido de la dispersión es el arco iris, el cual surge porque la velocidad de la luz en el agua depende ligeramente de su frecuencia y longitud de onda, de modo que los diferentes colores, correspondientes a las distintas longitudes de onda, poseen ángulos de refracción ligeramente distintos.)

Cuando la velocidad de la onda en un medio dispersivo depende sólo ligeramente de la frecuencia y de la longitud de onda, un paquete de ondas cambia muy lentamente de forma en su propagación y recorre una distancia considerable como una entidad reconocible. Sin embargo, la velocidad de este paquete, denominada **velocidad de grupo**, no es la misma que la velocidad (media) de las ondas armónicas componentes individuales, llamada **velocidad de fase**. (La velocidad de una onda armónica individual es la velocidad de sus frentes de onda. Por lo tanto, se denomina velocidad de fase de la onda a la velocidad de los frentes de onda, ya que éstos son las líneas o superficies de fase constante.)

Temas de actualidad en Física

Ecos del silencio: arquitectura acústica

La arquitectura acústica estudia las formas en las que la energía sonora se refleja, reverbera y absorbe en el interior de salas. La modelización computacional ha permitido a los ingenieros acústicos diseñar espacios flexibles[1,2] a la vez que tienen en cuenta las diferentes necesidades para escuchar conferencias, obras de teatro o diferentes tipos de música. En general, la intención es hacer que el sonido sea uniforme, audible e inteligible en cada posición donde se coloque un asiento.

En el recinto no debería haber ninguna onda estacionaria.[3] Las ondas estacionarias hacen que determinadas frecuencias sean difíciles de oír por aquellas personas sentadas cerca de los nodos y que otras frecuencias se oigan con demasiada intensidad por las personas que están cerca de los antinodos. Para evitar esto, las salas se diseñan de forma que las paredes no sean paralelas unas con otras y que los techos y los suelos tampoco lo sean.

Los paneles que cuelgan del techo y los que están pegados a las paredes sobre la entrada están para absorber el sonido. Sus superficies están fabricadas con materiales como el fieltro. *(Gentileza de Perdue Acoustics.)*

Los oyentes están sentados a unos 15 m, en promedio, de la fuente principal de sonido, por lo que cerca del 1% del sonido llegará de forma directa a sus oídos[4] mientras que el resto lo hace tras reflejarse. Las reflexiones deben ser limpias y lo suficientemente energéticas como para que llegue un volumen de sonido razonable a los oyentes. También es importante cronometrar la duración de las reflexiones. Si una reflexión de hasta 15 dB por debajo del nivel de la fuente llega a los oyentes más de 60 ms después de la emisión del sonido por parte de la fuente, se percibirá como un eco.[5,6] Si las reflexiones más intensas que el nivel de la fuente llegan al oyente durante los primeros 30 ms tras su emisión, también se percibirán como un eco. Los ecos dificultan la inteligibilidad de la locución y hacen que la música sea muy confusa. Las reflexiones que lleguen tras 50 ms o más de ser emitidas deben evitarse.

Los reflectores deberían estar a menos de 15 m de cada oyente. Este es un problema de salas que están en espacios abiertos y rodeadas de edificios altos.[7] Muchas salas antiguas tienen acabados en yeso y eso produce reflexiones que tardan demasiado poco tiempo en llegar a los oyentes. Las salas más modernas utilizan numerosos altavoces instalados en las paredes y el techo. Los paneles suspendidos de los altos techos también ayudan a reflejar el sonido. Las bóvedas y los techos con muchos detalles dispersan el sonido en pequeñas reflexiones con demasiado poca energía.

Los absorbentes acústicos se utilizan para disminuir la energía de ambientes ruidosos en el interior de las habitaciones. Los materiales que se utilizan tanto para estructuras absorbentes como para estructuras reflectoras se seleccionan con cuidado según las necesidades de la sala, pues la mayor parte de los materiales tienen diferentes coeficientes de absorción a diferentes frecuencias.[8] El coeficiente de absorción es una medida de la fracción de energía sonora que se absorbe. Los cristales de las ventanas tienen coeficientes de absorción de 0,35 a 125 Hz y de 0,04 a 4 kHz. En cambio, las moquetas tienen un coeficiente de absorción de 0,01 a 125 Hz y de 0,65 a 4 kHz. En la práctica, se utilizan combinaciones de materiales absorbentes y reflectores para dar una respuesta de amplio espectro en cada asiento de la sala.

Demasiada absorción da lugar a recintos demasiado silenciosos y produce claustrofobia.[9] Los recintos con reverberación o con energía sonora caótica tienen más calidez. El tiempo de reverberación, la medida de lo rápido que disipa el ruido caótico, se utiliza como una medida de lo alegre que suena una habitación. Los tiempos de reverberación de las salas varían en función del propósito al que están destinadas.

---

1 Orfali, and Ahnert, op. cit.
2 "Gallagher Bluedorn Performing Arts Center", Acoustic Dimensions, http://www.acousticdimensions.com/profiles/gb_uni.htm
3 Everest, F. Alton, *Master Handbook of Acoustics*, 4th ed., New York: McGraw-Hill, 2001, 320
4 Noxon, A., "Auditorium Acoustics 101", *Church & Worship Technology*, April 2002, 22+.
5 Everest, op. cit., 356.
6 Noxon, A., "Auditorium Acoustics 102", *Church & Worship Technology*, May 2002, 24+.
7 Orfali, W., and Ahnert, W., "Measurments (sic) and Verification in Two Mosques in Saudi Arabia and Jordan", paper presented at the 151st Meeting of the Acoustical Society of America, Providence, RI, June 1–5, 2006, http://scitation.aip.org/confst/ASA/data/5/1aAA9.pdf
8 Everest, op. cit., 585–587.
9 Freiheit, R., "Historic Recording Gives Choir 'Alien' Feeling: In Anechoic Space, No One Can Hear You Sing", paper presented at the ASA/Noise Conference 2005 Minneapolis, http://www.acoustics.org/press/150th/Freiheit.html

Resumen

1. El principio de superposición, válido para todas las ondas electromagnéticas en el vacío, para las ondas en una cuerda flexible tensa en la aproximación de ángulos pequeños y para las ondas sonoras de pequeña amplitud, resulta de la linealidad de las correspondientes ecuaciones de ondas.
2. La interferencia es un fenómeno ondulatorio importante que se da en todas las ondas que se superponen coherentemente. Resulta del principio de superposición. La difracción y la interferencia diferencian el movimiento ondulatorio del movimiento de partículas.
3. Las condiciones de onda estacionaria pueden recordarse esquematizando una cuerda o un tubo con nodos en un extremo fijo o cerrado y antinodos en un extremo libre o abierto.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Superposición e interferencia	La superposición de dos ondas armónicas de igual amplitud, número de onda y frecuencia, pero de fase distinta δ, da lugar a una onda armónica con el mismo número de onda y frecuencia pero distinta en fase y amplitud respecto a cada una de las ondas. $$y = y_1 + y_2 = y_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) + y_0 \operatorname{sen}(k - \omega t + \delta) = [2y_0 \cos\tfrac{1}{2}\delta] \operatorname{sen}(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \quad (16.6)$$
Interferencia constructiva	Si las ondas están en fase o difieren sus fases en un múltiplo entero de 2π, las amplitudes de las ondas se suman y la interferencia es constructiva.
Interferencia destructiva	Si las ondas difieren en fase en π o en un múltiplo impar de π, las amplitudes se restan y la interferencia es destructiva.
Pulsaciones (o batidos)	Las pulsaciones resultan de la interferencia de dos ondas de frecuencias ligeramente distintas. La frecuencia de batido es igual a la diferencia entre las frecuencias de las dos ondas: $$f_{\text{batido}} = \Delta f \quad (16.8)$$
Diferencia de fase δ debida a la diferencia de trayectos Δx	$$\delta = k\,\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \quad (16.9)$$
2. Ondas estacionarias	Cuando las ondas están confinadas en el espacio, se producen ondas estacionarias a ciertas frecuencias y longitudes de onda. Sólo se dan ondas estacionarias cuando cada punto del sistema oscila en un movimiento armónico simple y dos puntos en movimiento cualesquiera oscilan en fase o con un desfase de 180°.
Longitud de onda	La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es un cuarto de longitud de onda.
Cuerda fija por ambos extremos	En una cuerda fija por sus dos extremos, se forma un nodo en cada uno de ellos. El resultado es que debe ajustarse un número entero de semilongitudes de onda en la longitud completa de la cuerda. En este caso, la condición de onda estacionaria es $$L = n\frac{\lambda_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (16.10)$$
Onda estacionaria en una cuerda fija por los dos extremos	Las ondas permitidas forman una serie armónica, en que las frecuencias vienen dadas por $$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{\lambda_1} = n\frac{v}{2L} = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (16.18)$$ donde $f_1 = v/2L$ es la frecuencia más baja, llamada fundamental.
Tubo de órgano abierto por ambos extremos	Las ondas sonoras estacionarias en el aire de un tubo abierto por ambos extremos dan lugar a un nodo de presión (y un antinodo de desplazamiento) cerca de cada extremo. La condición de onda estacionaria es la misma que la de una cuerda fija por los dos extremos.
Cuerda fija por un extremo y libre por el otro	Si una cuerda tiene un extremo fijo y el otro libre, existe un nodo en el primero y un vientre en el segundo, de modo que el número de cuartos de longitudes de onda debe ajustarse en la longitud de la cuerda. La condición de onda estacionaria en este caso es $$L = n\frac{\lambda_n}{4} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \quad (16.12)$$ Solamente están presentes los armónicos impares. Sus frecuencias vienen dadas por $$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{\lambda_1} = n\frac{v}{4L} = nf_1 \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \quad (16.13)$$ donde $f_1 = v/4L$.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
Tubo de órgano abierto por un un extremo y cerrado por el otro	Las ondas sonoras estacionarias en un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro, tienen un antinodo de desplazamiento en el extremo abierto y un nodo de desplazamiento en el cerrado. La condición de onda estacionaria es la misma que la de una cuerda fija por un extremo.
Funciones de onda estacionaria	$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n)$ 16.16 donde $k_n = 2\pi/\lambda_n$ y $\omega_n = 2\pi f_n$. Las condiciones necesarias para que haya ondas estacionarias en una cuerda son: 1. Cada punto de la cuerda o bien permanece en reposo o bien oscila con movimiento armónico simple. (Los puntos en reposo son los nodos.) 2. El movimiento de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos se produce en fase o con un desfase de 180°.
***3. Superposición de ondas estacionarias**	En general, un sistema vibrante no vibra en un solo modo armónico, sino según una superposición de armónicos permitidos.
***4. Análisis y síntesis armónicos**	Los sonidos de diferente cualidad de tono contienen diferentes mezclas de armónicos. El análisis de un tono particular en función de su contenido armónico se llama análisis armónico. La síntesis armónica es la construcción de un tono por suma de armónicos.
***5. Paquetes de ondas**	Un pulso de onda puede representarse por una distribución continua de ondas armónicas llamada paquete de ondas. El intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ está relacionado con la anchura del tiempo Δt, y el intervalo de números de onda Δk con la anchura del espacio Δx.
Intervalos de frecuencia y tiempo	$\Delta\omega\, \Delta t \sim 1$ 16.18
Intervalos de número de ondas y espacio	$\Delta k\, \Delta x \sim 1$ 16.19
***6. Dispersión**	En un medio no dispersivo, la velocidad de fase no depende de la frecuencia, y el pulso (paquete de ondas) se propaga sin cambio de forma. En un medio dispersivo, la velocidad de fase sí depende de la frecuencia, y el pulso cambia de forma durante su movimiento. El pulso se mueve con una velocidad denominada velocidad de grupo del paquete.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

16.1 Su voz cambia porque la frecuencia fundamental de sus cuerdas vocales y cavidad bucal ha aumentado, de la misma manera que cambia la frecuencia de resonancia del tubo de órgano del ejemplo 16.9 cuando está lleno de helio.

Respuestas a los problemas prácticos

16.1 (*a*) 5,66 cm, (*b*) 120° o 240°

16.2 $f_1 = 20$ Hz, $f_2 = 40$ Hz, $f_3 = 60$ Hz

16.3 Aproximadamente 10,7 m ≈ 35 ft

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Utilizar 343 m/s como la velocidad de propagación del sonido en el aire, a menos que se indique lo contrario.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Dos pulsos de onda rectangulares se mueven en sentidos opuestos a lo largo de una cuerda. En $t = 0$, los dos pulsos están situados tal y como indica la figura 16.29. Dibujar las funciones de onda para $t = 1$ s, 2 s y 3 s. SSM

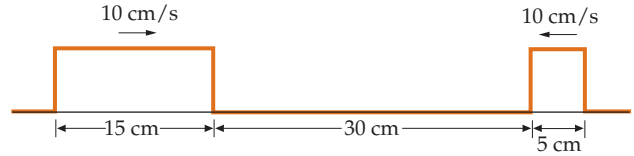


FIGURA 16.29 Problemas 1, 2

2 • Repetir el problema 1 para el caso en que el pulso de la derecha de la figura 16.29 esté invertido.

3 • Las pulsaciones se producen por la superposición de dos ondas armónicas si (*a*) sus amplitudes y frecuencias son iguales, (*b*) sus amplitudes son iguales, pero sus frecuencias difieren ligeramente, (*c*) sus frecuencias son iguales, pero sus amplitudes difieren ligeramente.

4 • Se golpean dos diapasones a la vez. Si las frecuencias de cada uno son 256 Hz y 258 Hz, la frecuencia del "zumbido" es (*a*) 2 Hz, (*b*) 256 Hz, (*c*) 258 Hz, (*d*) 257 Hz.

5 • En el problema 4, la frecuencia de batido es (*a*) 2 Hz, (*b*) 256 Hz, (*c*) 258 Hz, (*d*) 257 Hz.

6 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Para hacer una demostración en clase de la interferencia de las ondas sonoras, se toman dos altavoces cuyos sonidos son coherentes, están en fase y tienen la misma frecuencia. Los altavoces se colocan sobre la mesa del profesor y están orientados hacia los alumnos. Una alumna que está en la fila de delante dice que oye un volumen menor de sonido cuando emiten los dos altavoces que cuando emite uno solo. Si cada altavoz emite un sonido de 2,4 m de longitud de onda, ¿cuál podría ser la diferencia de distancias entre la alumna y cada uno de los dos altavoces? (*a*) 1,2 m. (*b*) 2,4 m. (*c*) 4,8 m. (*d*) No se puede saber con los datos que se aportan.

7 • Determinar la longitud de onda más larga del sonido para la cual la alumna del problema 6 oirá un sonido "extra-fuerte" a causa de la interferencia constructiva. Considerar que la alumna está situada de tal forma que la diferencia de las distancias entre ella y cada uno de los altavoces es de 3 m.

8 • Considerar ondas estacionarias en un tubo de órgano. Verdadero o falso:

(*a*) En un tubo abierto por los dos extremos, la frecuencia del tercer armónico es tres veces la del primer armónico.
(*b*) En un tubo abierto por los dos extremos, la frecuencia del quinto armónico es cinco veces la del fundamental.
(*c*) En un tubo abierto por un extremo y tapado por el otro, los armónicos pares no están excitados.

Razonar las respuestas.

9 • Las ondas estacionarias se producen por la superposición de dos ondas de (*a*) la misma amplitud, frecuencia y sentido de propagación, (*b*) la misma amplitud y frecuencia y sentidos opuestos de propagación, (*c*) la misma amplitud, frecuencia ligeramente distinta y el mismo sentido de propagación, (*d*) la misma amplitud, frecuencia ligeramente distinta y sentidos opuestos de propagación.

10 • Si se sopla aire sobre el extremo de una pajita se puede oír la frecuencia fundamental que produce la onda estacionaria que se forma en el interior. Averiguar qué le sucede a la frecuencia fundamental (*a*) si mientras se sopla, se tapa con el dedo el extremo inferior de la pajita, (*b*) si mientras se sopla, se corta la pajita por la mitad con unas tijeras, (*c*) Explicar las respuestas.

11 • Un tubo de órgano abierto por ambos extremos tiene una frecuencia fundamental de 400 Hz. Si ahora se cierra un extremo de este tubo, la frecuencia fundamental será (*a*) 200 Hz, (*b*) 400 Hz, (*c*) 546 Hz, (*d*) 800 Hz. SSM

12 •• Una cuerda fija por ambos extremos resuena con una frecuencia fundamental de 180 Hz. ¿Cuál de las acciones siguientes reducirá la frecuencia fundamental a 90 Hz? (*a*) Duplicar la tensión y duplicar la longitud. (*b*) Reducir a la mitad la tensión y mantener fija la longitud y la masa por unidad de longitud. (*c*) Mantener fija la tensión y la masa por unidad de longitud y duplicar la longitud. (*d*) Mantener fija la tensión y la masa por unidad de longitud y reducir la longitud a la mitad.

13 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Explicar cómo se podrían utilizar las frecuencias de resonancia de un tubo de órgano para estimar la temperatura del aire del interior del tubo. SSM

14 •• En la onda estacionaria fundamental de un tubo de órgano tapado por un extremo, ¿qué le sucede a la longitud de onda, la frecuencia y la velocidad del sonido si el aire del interior del tubo se enfría de forma significativa? Razonar la respuesta.

15 •• (*a*) Cuando una cuerda de guitarra vibra en su modo fundamental, ¿son iguales las longitudes de onda del sonido que produce y propaga por el aire y la longitud de onda de la onda estacionaria de la cuerda? Explicar la respuesta. (*b*) Cuando un tubo de órgano está en cualquiera de los modos de onda estacionaria, ¿son iguales las longitudes de onda del sonido que produce y propaga por el aire y la longitud de onda de la onda estacionaria de la cuerda? SSM

16 •• La figura 16.30 corresponde a una fotografía de dos telas de seda, muy finas, colocadas una encima de otra. En los puntos donde las telas se superponen, se pueden ver una serie de líneas oscuras y claras que corresponden a una figura de moiré, figura que aparece también cuando se utiliza un escáner para copiar fotos de un libro o de un periódico. ¿Cuál es la causa de la aparición de la figura de moiré y en qué se parece a una interferencia?

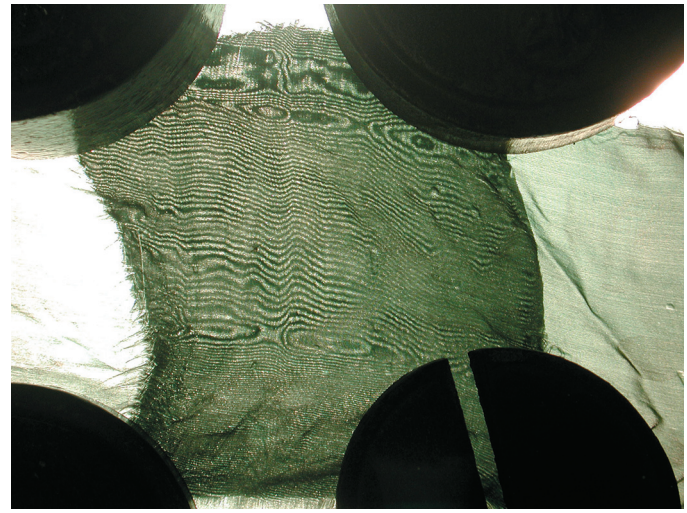


FIGURA 16.30 **Problema 16** *(Gentileza de Chuck Adler.)*

17 •• Un instrumento musical consta de varios vasos de cristal parcialmente llenos de agua a diferentes alturas. Al golpearlos con un pequeño martillo, cada uno de los vasos produce sonidos de frecuencias diferentes. Explicar cómo funciona este instrumento.

18 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Durante un recital de órgano, el compresor de aire que alimenta los tubos se avería súbitamente. Un estudiante de física emprendedor, que forma parte del público, aconseja conectar un tanque de gas nitrógeno puro de alta presión a la salida del compresor. ¿Qué efecto, si lo hay, tendrá el gas nitrógeno sobre la frecuencia de salida del tubo del órgano? ¿Y si el tanque fuera de helio?

19 •• La constante γ del helio (como la de todos los gases monoatómicos) es 1,67. Si un hombre inhala helio y después comienza a hablar, sus sonidos son más agudos, parecidos a los de una película infantil de dibujos animados. ¿Por qué?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

20 • Una soprano puede conseguir dar una nota con tanta intensidad y de tan alta frecuencia que es capaz de romper una copa de cava vacía haciendo que el aire de su interior entre en resonancia con la frecuencia de su voz. Estimar la frecuencia necesaria para obtener una onda estacionaria en un vaso de 8 cm de alto. (Los 8 cm no incluyen la altura del pie de la copa). ¿A cuántas octavas aproximadamente por encima de un do (262 Hz) se situaría este sonido? *Ayuda: subir una octava significa duplicar la frecuencia.*

21 • Estimar cómo se tiene que afinar la cuerda de un piano con un diapasón de frecuencia conocida utilizando sólo los oídos, el diapasón y una llave inglesa.

22 •• Los tubos más cortos utilizados en los órganos tienen aproximadamente 7,5 cm de largo. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de un tubo con esta longitud que está abierto por ambos extremos? (*b*) ¿Cuál es el armónico más alto para un tubo de este tipo que está dentro del intervalo audible? (El intervalo de audición normal está entre 20 y 20 000 Hz.)

23 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Estimar las frecuencias de resonancia del oído humano para el rango de frecuencias audibles. Considerar el canal auditivo como un tubo de aire de una pulgada, abierto por un extremo y tapado por el otro. ¿Cuántas frecuencias de resonancia caben dentro del rango audible? Experimentalmente, se ha observado que el oído humano es más sensible a las frecuencias de 3, 9 y 15 kHz. ¿Coincide el dato experimental con los resultados obtenidos?

SUPERPOSICIÓN E INTERFERENCIA

24 • Dos ondas armónicas que se mueven por una cuerda en la misma dirección y sentido tienen la misma frecuencia de 100 Hz, una longitud de onda de 2 cm y una amplitud de 0,02 m. Determinar la amplitud de la onda resultante si las dos ondas difieren en fase (*a*) en $\pi/6$ y (*b*) en $\pi/3$.

25 • Dos ondas armónicas que tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se están moviendo en la misma dirección y sentido. Si difieren en fase en $\pi/2$ y cada una de ellas tiene una amplitud de 0,05 m, hallar la amplitud de la onda resultante. SSM

26 • Dos fuentes sonoras oscilan en fase con la misma amplitud A. Están separadas en el espacio por una distancia de $\lambda/3$. ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante de las dos fuentes en un punto situado en la línea que une las fuentes, admitiendo que el punto no está entre las fuentes?

27 • Dos fuentes sonoras oscilan en fase con una frecuencia de 100 Hz. En un punto situado a 5,00 m de una de ellas y a 5,85 m de la otra, la amplitud del sonido procedente de cada fuente separadamente es A. (*a*) ¿Cuál es la diferencia de fase de las ondas sonoras procedentes de ambas fuentes en dicho punto? (*b*) ¿Cuál es la amplitud de la onda resultante en dicho punto en función de A?

28 • Con ayuda de un programa informático de dibujo o de un compás, dibujar sendas series de arcos circulares de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm y 7 cm concéntricos respecto a los dos puntos P_1 y P_2 separados por una distancia $d = 3$ cm. Unir mediante curvas suaves las intersecciones de los arcos correspondientes a puntos N centímetros más lejanos de P_1 que de P_2 para $N = 0, \pm 1, \pm 2$, y etiquetar cada curva con el valor de N correspondiente. Además, hay dos curvas adicionales que también pueden dibujarse, para $N = -3$ y $+3$. Si las fuentes son coherentes, están en fase y tienen longitudes de onda de 1 cm y se colocan en los puntos P_1 y P_2, las ondas interferirían constructivamente a lo largo de cada una de las curvas dibujadas.

29 • Dos altavoces separados por una cierta distancia emiten sonidos de una misma frecuencia. En un punto determinado P, la intensidad debida a cada altavoz por separado es I_0. La distancia desde P a uno de los altavoces es $\frac{1}{2}\lambda$ mayor que la de P al otro. Determinar la intensidad de P si los altavoces (*a*) son coherentes y están en fase, (*b*) son incoherentes, y (*c*) son coherentes, pero tienen una diferencia de fase de π rad. SSM

30 • Dos altavoces separados por una determinada distancia emiten ondas sonoras de la misma frecuencia. En P' la intensidad de cada altavoz por separado es I_0. La distancia desde P' a uno de los altavoces es una longitud de onda mayor que desde P' al otro altavoz. ¿Cuál es la intensidad en P' si (*a*) los altavoces son coherentes y están en fase, (*b*) los altavoces son incoherentes y (*c*) los altavoces son coherentes pero están desfasados?

31 •• Una onda transversal de frecuencia 40 Hz se propaga por una cuerda. Dos puntos separados entre sí 5 cm están desfasados en $\pi/6$. (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda? (*b*) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos en un punto determinado para instantes separados 5 ms entre sí? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la onda?

32 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Se supone que el cerebro puede discernir la dirección de una fuente de sonido porque es capaz de apreciar la diferencia de fase entre las ondas sonoras que chocan contra los tímpanos auditivos. Una fuente sonora distante emite un sonido de frecuencia 680 Hz. Si nuestro rostro está frontalmente dirigido hacia la fuente sonora, no apreciamos diferencia de fase. Estimar la diferencia de fase entre los sonidos recibidos por cada oído si ahora giramos 90° respecto a la posición frontal.

33 •• Una fuente sonora A está localizada en $x = 0$, $y = 0$, y otra B en $x = 0$, $y = 2{,}4$ m. Las dos fuentes emiten coherentemente en fase. Una estudiante en $x = 15$ m, $y = 0$ observa que cuando camina en dirección y positiva o negativa alejándose de $y = 0$, la intensidad del sonido disminuye. ¿Cuál es la frecuencia más baja y más alta de las fuentes que puede explicar dicha observación? SSM

34 •• Suponer que la estudiante del problema 33 localiza un punto de intensidad mínima en $x = 15$ m, $y = 0$. ¿Cuál es entonces la frecuencia más alta y más baja congruente con esta observación?

35 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Se superponen dos ondas armónicas en agua que tienen igual amplitud pero distinta frecuencia, número de onda y velocidad. Las ondas se propagan en la misma dirección. La perturbación total viene dada por $y(x, t) = A[\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$, donde $\omega_1/k_1 = v_1$ (la velocidad de la primera onda) y $\omega_2/k_2 = v_2$ (la velocidad de la segunda onda). (*a*) Demostrar que $y(x, t)$ puede escribirse de la forma $y(x, t) = Y(x, t)\cos(k_mx - \omega_mt)$, donde $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $k_m = (k_1 + k_2)/2$, $Y(x, t) = 2A\cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ y $\Delta k = k_1 - k_2$. El factor $2A\cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]$ es lo que se denomina la envolvente de la onda. (*b*) Usando una **hoja de cálculo** o una **calculadora gráfica**, representar $y(x, t)$ si $A = 1$ cm, $\omega_1 = 1$ rad/s, $k_1 = 1$ m^{-1}, $\omega_2 = 0{,}9$ rad/s y $k_2 = 0{,}8$ m^{-1} cuando $t = 0$ s, $t = 0{,}5$ s y $t = 1$ s y si, además, x está entre 0 y 5 m. (*c*) Hacer gráficos de $Y(x, t)$ en función de x para -5 m $< x < +5$ m sobre el mismo gráfico. Hacer un gráfico para $t = 0$ s, otro para $t = 5$ s y otro para $t = 10$ s. A partir de los tres gráficos, estimar la velocidad a la que se desplaza la envolvente y comparar el resultado con el que obtiene de $v_e = \Delta\omega/\Delta k$. SSM

36 ••• Dos focos puntuales que están en fase se encuentran separados una distancia d. Se detecta un patrón de interferencia a lo largo de una recta paralela a la que une los focos y situada a una distancia grande D, como se indica en la figura 16.31. (*a*) Demostrar que la diferencia de trayectos desde los dos focos al mismo punto de la línea situado a un ángulo θ viene dada, aproximadamente, por $\Delta s \simeq d \operatorname{sen}\theta$. (*Sugerencia: suponer que $D >> d$, es decir, las líneas procedentes de las fuentes hacia P son, aproximadamente, paralelas.*) (Figura 16.31*b*.) (*b*) Demostrar que las ondas interfieren constructivamente en P si $\Delta s = m\lambda$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$ (Es decir, demostrar que hay un máximo de interferencia de P si $\Delta s = m\lambda$, donde $m = 0, 1, 2, \ldots$) (*c*) Demostrar que la distanica y_m desde el máximo central (en $y = 0$) al m-ésimo máximo de interferencia en P viene dada por $y_m = D \operatorname{tg}\theta_m$, donde $d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda$.

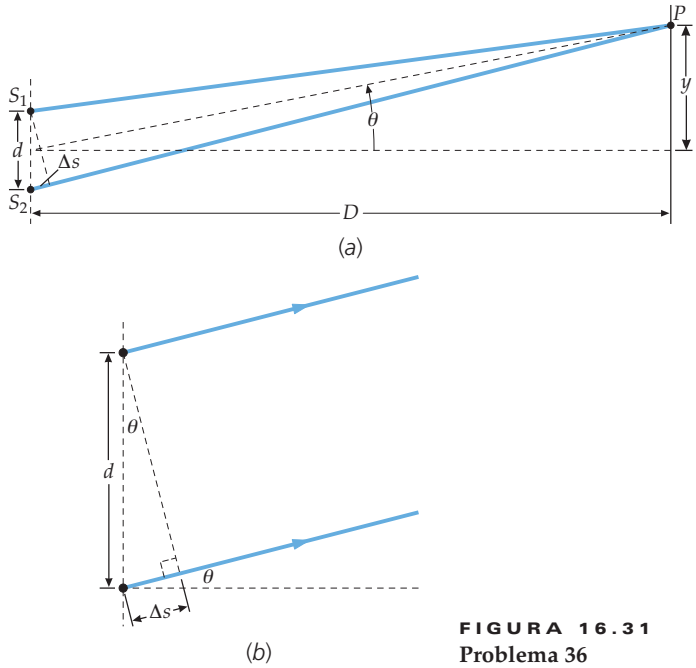


FIGURA 16.31
Problema 36

37 •• Dos focos sonoros que emiten en fase con una frecuencia de 480 Hz interfieren de tal modo que los máximos se oyen para ángulos de 0° y 23° medidos a partir de una línea perpendicular a la que une los dos focos. El oyente está a una distancia muy grande de la línea que pasa por los focos y no se oyen máximos adicionales para ángulos comprendidos entre 0° y 23°. Determinar la separación entre ambos focos, así como cualquier otro ángulo para el cual se percibe una intensidad máxima. (Utilizar los resultados del problema 36.)

38 •• Se accionan en fase dos altavoces con un amplificador de audiofrecuencia de 600 Hz. Ambos están sobre el eje y, uno en $y = +1{,}00$ m y el otro en $y = -1{,}00$ m. Un observador empieza a andar desde $(x, y) = (D, 0)$, siendo $D >> 2$ m, en la dirección $+y$ a lo largo de la recta $x = D$. (Ver problema 36.) (*a*) ¿Para qué ángulo θ escuchará por primera vez un mínimo de intensidad sonora? (θ es el ángulo entre el eje positivo de las x y la recta que va del origen al oyente.) (*b*) ¿Para qué ángulo escuchará el primer máximo (después de $\theta = 0$)? (*c*) ¿Cuántos máximos podrá escuchar posiblemente si se mantiene andando en la misma dirección?

39 ••• Dos focos sonoros, accionados en fase por el mismo amplificador, están sobre el eje y separados una distancia de 2 m, uno en $y = +1$ m y el otro en $y = -1$ m. En un punto situado a una distancia muy grande del eje y, se oyen interferencias constructivas en direcciones cuyos ángulos respecto al eje x son $\theta_0 = 0$ rad, $\theta_1 = 0{,}140$ rad, y $\theta_2 = 0{,}283$ rad. (Ver figura 16.31.) (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas sonoras procedentes de los focos? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de los focos? (*c*) ¿A qué otros ángulos se escuchará interferencia constructiva? (*d*) ¿Cuál es el ángulo menor para el cual se anularán completamente las ondas sonoras? SSM

40 ••• Los dos focos sonoros del problema 39 funcionan ahora con un desfase de 90°, pero con la misma frecuencia del problema anterior. ¿A qué ángulos se oyen las interferencias constructiva y destructiva?

41 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un radiotelescopio se compone de dos antenas separadas una distancia de 200 m. Las dos antenas se sintonizan a una frecuencia de 20 MHz. Las señales procedentes de cada antena pasan a un amplificador común, pero una de las señales pasa primero por un ajustador de fase, que retrasa la fase en una cantidad concreta, de modo que el telescopio pueda "mirar" en diferentes direcciones (figura 16.32). Con un retraso de fase cero, las ondas de radio planas que inciden verticalmente se suman constructivamente en el amplificador. ¿Cuál deberá ser el retraso de fase para que las señales que llegan formando un ángulo de $\theta = 10°$ con la vertical (en el plano formado por la vertical y la línea que une las antenas) se sumen constructivamente en el amplificador? *Ayuda: las ondas de radio viaja a 300 000 km/s.*

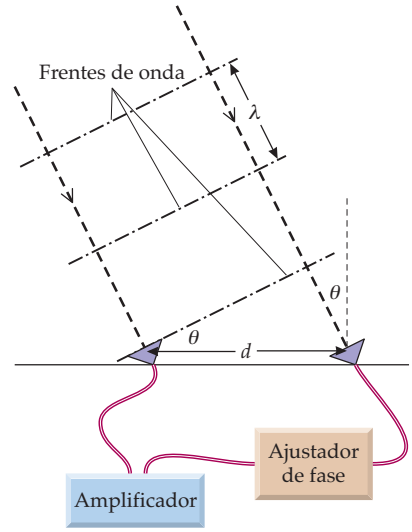


FIGURA 16.32
Problema 41

PULSACIONES

42 • Se golpean simultáneamente dos diapasones y se oyen 4 batidos por segundo. La frecuencia de uno de los diapasones es 500 Hz. (*a*) ¿Cuáles son los valores posibles de la frecuencia del otro diapasón? (*b*) Se coloca un trocito de cera en el diapasón de 500 Hz para disminuir ligeramente su frecuencia. Explicar cómo puede utilizarse la medida de la nueva frecuencia de batido para determinar cuál de las respuestas al apartado (*a*) es la frecuencia correcta del segundo diapasón.

43 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un radar de policía estacionario emite microondas a 5 GHz. Cuando el radar se orienta hacia un coche, las ondas transmitida y reflejada se superponen. Como las frecuencias de ambas ondas son diferentes, se generan pulsaciones, de forma que la velocidad del coche es proporcional a la frecuencia de batido. La velocidad del coche que aparece en el display es de 134 km/h. Suponiendo que el coche se desplaza en línea recta con la dirección de propagación de las ondas del radar, (*a*) demostrar que, para una frecuencia de emisión del radar, la frecuencia de batido es proporcional a la del coche. *Ayuda: la velocidad del coche es ridícula en comparación con la velocidad de la luz.* (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de batido en este caso? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia de calibración del radar? Es decir, ¿cuál es la frecuencia de batido generada por km/h de velocidad? SSM

ONDAS ESTACIONARIAS

44 • Una cuerda fija por ambos extremos tiene 3 m de largo. Resuena en su segundo armónico a una frecuencia de 60 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las ondas transversales en ella?

45 • Una cuerda de 3 m de largo y fija por sus dos extremos está vibrando en su tercer armónico. El desplazamiento máximo de los puntos de la cuerda es 4 mm. La velocidad de las ondas transversales en ella es 50 m/s. (*a*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de esta onda? (*b*) Escribir la función de onda correspondiente a este caso.

46 • Calcular la frecuencia fundamental de un tubo de órgano de 10 m de longitud que está (*a*) abierto por sus dos extremos y (*b*) cerrado por un extremo.

47 • Un hilo de acero de 5 g de masa y 1,4 m de longitud está fijo por ambos extremos y soporta una tensión de 968 N. (*a*) Hallar la velocidad de las ondas transversales en él. (*b*) Hallar la longitud de onda y la frecuencia fundamental. (*c*) Determinar las frecuencias del segundo y tercer armónicos. SSM

48 • Una cuerda de 4 m de longitud se fija por un extremo y se liga por el otro a una cuerda ligera de modo que puede moverse libremente en dicho extremo. La velocidad de las ondas en la cuerda es 20 m/s. (*a*) Hallar la frecuencia del armónico fundamental, (*b*) del segundo armónico y (*c*) del tercer armónico.

49 • Una cuerda de piano tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz. Cuando se le enrolla un hilo, su densidad de masa lineal se duplica. ¿Cuál es la nueva frecuencia fundamental, suponiendo que no se varía la tensión?

50 • El intervalo normal de audición humana está comprendido entre 20 y 20 000 Hz. ¿Cuál es la mayor longitud de un tubo de órgano cuya nota fundamental se encuentre dentro de este intervalo si (*a*) está cerrado por un extremo y (*b*) está abierto por los dos extremos?

51 •• La función de onda $y(x, t)$ correspondiente a una onda estacionaria en una cuerda fija por ambos extremos viene dada por $y(x, t) = 4{,}2 \text{ sen } (0{,}20x) \cos (300t)$, con y y x en centímetros y t en segundos. (*a*) ¿Qué longitud de onda y frecuencia tienen las dos ondas viajeras que dan lugar a esta onda? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en esta cuerda? (*c*) Si la cuerda está vibrando en su cuarto armónico, ¿cuál es su longitud? SSM

52 •• La función de onda $y(x, t)$ para una onda estacionaria sobre una cuerda que está fija por ambos extremos es $y(x, t) = (0{,}05 \text{ m}) \text{ sen } (2{,}5 \text{ m}^{-1}x) \cos (500 \text{ s}^{-1}t)$. (*a*) Hallar la velocidad y la amplitud de las dos ondas móviles que originan esta onda estacionaria. (*b*) ¿Cuál es la distancia entre nodos sucesivos de la cuerda? (*c*) ¿Cuál es la longitud más corta posible de la cuerda?

53 •• Un tubo tapado por un solo extremo tiene una longitud de 120 cm. Cerca del extremo abierto existe un altavoz accionado por un oscilador de audio cuya frecuencia puede variarse de 10 a 5000 Hz. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia más baja del oscilador que resonará dentro del tubo? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia mayor con la que resonará? (*c*) ¿Cuántas frecuencias diferentes del oscilador producirán resonancia? (Despreciar la corrección de los extremos.)

54 •• Un diapasón de 460 Hz produce resonancia en el tubo de la figura 16.33 cuando la columna de aire L situada sobre el agua es de 18,3 cm o de 55,8 cm. (*a*) Hallar la velocidad del sonido en el aire. (*b*) ¿Cuál es la corrección del extremo para ajustar el hecho de que el vientre o antinodo no se presente exactamente en el extremo del tubo abierto?

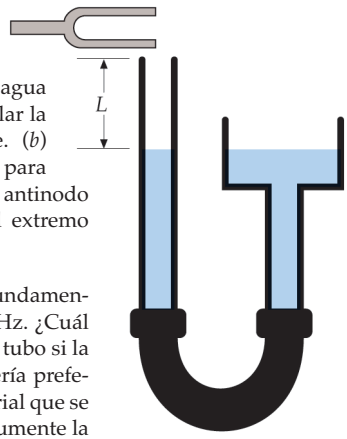


FIGURA 16.33
Problema 54

55 •• A 16 ºC la frecuencia fundamental de un tubo de órgano es 440,0 Hz. ¿Cuál será la frecuencia fundamental del tubo si la temperatura aumenta a 32 ºC? ¿Sería preferible construir el tubo con un material que se dilatara sustancialmente cuando aumente la temperatura o con un material que mantuviera su longitud a todas las temperaturas normales? SSM

56 •• La corrección del extremo ΔL para un tubo circular es, aproximadamente, $\Delta L = 0{,}3186D$, donde D es el diámetro del tubo (véase el ejemplo 16.9). Determinar la longitud de un tubo abierto por ambos extremos que produzca un do (256 Hz) como armónico fundamental si $D = 1$ cm, 10 cm y 30 cm.

57 •• Una cuerda de violín de 40 cm de longitud y 1,2 g de masa tiene una frecuencia de 500 Hz cuando está vibrando en su modo fundamental.* (*a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda? (*b*) ¿Cuál es la tensión de la cuerda? (*c*) ¿Dónde se debería colocar el dedo para incrementar la frecuencia a 650 Hz?

* Una cuerda de un instrumento no vibra en un solo modo. Por tanto, las condiciones descritas en este enunciado son imaginarias.

58 •• La cuerda sol de un violín tiene 30 cm de longitud. Cuando se toca sin pulsar, vibra con una frecuencia de 196 Hz. Las notas próximas más altas en la escala son: la (220 Hz), si (247 Hz), do (262 Hz) y re (294 Hz). ¿A qué distancia del extremo de la cuerda debe colocarse un dedo para generar estas notas?

59 •• Una cuerda con una densidad de masa 4×10^{-3} kg/m está sometida a una tensión de 360 N y está fija en ambos extremos. Una de sus frecuencias de resonancia es 375 Hz. La frecuencia de resonancia más alta siguiente es 450 Hz. (*a*) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia fundamental? (*b*) ¿Qué armónicos son los que se dan? (*c*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

60 •• Una cuerda sujeta por ambos extremos tiene resonancias sucesivas con longitudes de onda de 0,54 m para el armónico n y de 0,48 m para el armónico $(n + 1)$. (*a*) ¿Qué armónicos son? (*b*) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

61 •• Las cuerdas de un violín están afinadas con los tonos sol, re, la y mi, que están separados entre sí por un quinto. Es decir, $f(\text{re}) = 1{,}5\, f(\text{sol})$, $f(\text{la}) = 1{,}5\, f(\text{re}) = 440$ Hz y $f(\text{mi}) = 1{,}5\, f(\text{la})$. La distancia entre los dos puntos fijos de las cuerdas es de 30 cm. La tensión de la cuerda mi es 90 N. (*a*) ¿Cuál es la masa por metro de longitud de dicha cuerda? (*b*) Para evitar distorsiones del instrumento con el tiempo, es importante que la tensión en todas las cuerdas sea la misma. Determinar las masas por metro de longitud de las restantes cuerdas. SSM

62 •• En un violoncello, como en la inmensa mayoría de los instrumentos, la posición de los dedos del músico determina la frecuencia fundamental de las cuerdas. Suponer que una de las cuerdas de un violoncello se afina para tocar un do (262 Hz) cuando se toca con su longitud completa. ¿Cuál debe ser la fracción de acortamiento de la cuerda que debe hacerse con el dedo para tocar un mi (330 Hz)? ¿Y para un sol (392 Hz)?

63 •• Para afinar un violín, el violinista primero afina la cuerda la con el tono correcto de 440 Hz y después toca simultáneamente con el arco dos cuerdas contiguas y escucha las pulsaciones producidas. Cuando toca con el arco las cuerdas la y mi, detecta una frecuencia de batido de 3 Hz y observa que esta frecuencia crece cuando la tensión de la cuerda mi aumenta (la cuerda mi se afina a 660 Hz). (*a*) ¿Por qué se produce el batido cuando estas cuerdas se tocan simultáneamente? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia de la cuerda mi en vibración si la frecuencia de batido es de 3 Hz?

64 •• Se fija una cuerda de 2 m por un extremo mientras que el otro extremo es libre y se la hace vibrar en su tercer armónico con una amplitud de 3 cm y una frecuencia de vibración de 100 Hz. (*a*) Escribir la función de onda correspondiente a esta vibración. (*b*) Obtener una expresión para la energía cinética de un segmento de la cuerda de longitud dx en el punto x y en cierto tiempo t. ¿En qué instante es máxima esta energía cinética? ¿Cuál es la forma de la cuerda en dicho momento? (*c*) Hallar la energía cinética máxima de la cuerda integrando la expresión del apartado (*b*) en la longitud total de la cuerda.

65 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** En la figura 16.34, se muestra la disposición de un experimento de física muy habitual que sirve para estudiar las ondas transversales en una cuerda. Se cuelga un peso del extremo de una cuerda (que no se deforma) que pasa por una polea, y en el otro extremo un oscilador mecánico mueve la cuerda hacia arriba y hacia abajo con una frecuencia f que permanece fija durante toda la demostración. La longitud L entre el oscilador y la polea se mantiene constante y las ondas que se producen en la cuerda resuenan para determinados valores del peso. (*a*) Explicar por qué solamente ciertos valores discretos de la tensión dan lugar a ondas estacionarias en la cuerda. (*b*) Para producir una onda estacionaria con un antinodo extra, ¿hay que aumentar o disminuir la tensión? (*c*) Demostrar el razonamiento del apartado (*b*) comprobando que los valores de la tensión F_{Tn}

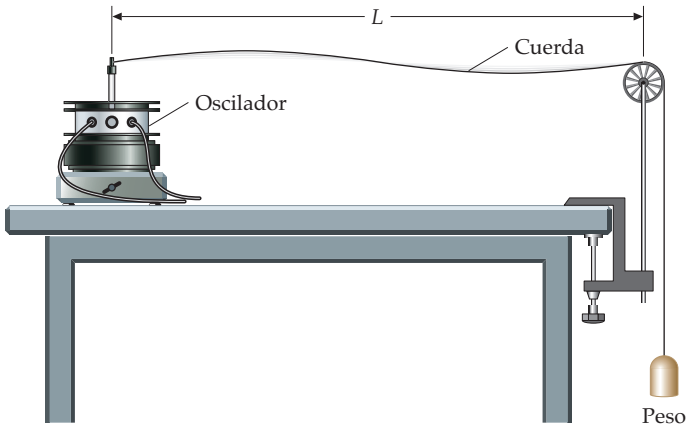


FIGURA 16.34 Problema 65

para el n-ésimo modo de la onda vienen dados por $F_{Tn} = 4L^2 f^2 \mu / n^2$, y, por tanto, F_{Tn} es inversamente proporcional a n^2. (*d*) Si $L = 1$ m, $f = 80$ Hz, y la masa por unidad de longitud de la cuerda es $\mu = 0{,}75$ g/m, ¿qué pesos habrá que colgar del extremo de la cuerda para que se produzcan los tres primeros modos resonantes? SSM

* ANÁLISIS ARMÓNICO

66 • A una cuerda de guitarra se le da un punteo justo en su punto medio. Mediante un micrófono conectado a un ordenador, se observa que la mayor parte del sonido emitido produce un tono de 100 Hz mientras que una pequeña parte corresponde a un tono de 300 Hz. ¿Cuáles son los modos de onda estacionaria dominantes en la cuerda?

* PAQUETES DE ONDAS

67 •• Un diapasón de frecuencia f_0 empieza a vibrar en el instante $t = 0$ y se detiene después de un intervalo de tiempo Δt. En la figura 16.35, se muestra la forma de la onda sonora un cierto tiempo después como una función de x. Sea N el número (aproximado) de ciclos de esta forma de onda. (*a*) Si Δx es la longitud en el espacio de este paquete de ondas, ¿cuál es el rango de números de onda Δk del paquete? (*b*) ¿Cuál es la longitud de onda media en función de Δx y N? (*c*) ¿Cuál es el número de ondas k en función de N y Δx? (*d*) Si Δt es el tiempo que tarda el paquete en pasar por un punto del espacio, ¿cuál es el rango de frecuencias angulares $\Delta\omega$ del paquete? (*e*) Expresar f_0 en función de N y Δt. (*f*) El número de ciclos N posee una incertidumbre de $\pm$ 1 ciclo, aproximadamente. Explicar por qué, usando la figura 16.35. (*g*) Demostrar que la incertidumbre del número de onda debida a la incertidumbre en N es $2\pi/\Delta x$. SSM

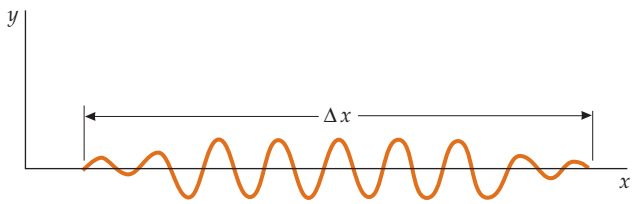


FIGURA 16.35 Problema 67

PROBLEMAS GENERALES

68 •• Una cuerda de 35 m tiene una densidad de masa lineal de 0,0085 kg/m y soporta una tensión de 18 N. Determinar las frecuencias de los cuatro primeros armónicos si (*a*) la cuerda está fija por ambos extremos, y (*b*) la cuerda está fija por un extremo y atada a un hilo largo y delgado, de masa despreciable, en el otro extremo.

69 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para medir la longitud del túnel de una mina se emplea un emisor de sonido con frecuencia variable. Se determina que las frecuencias de resonancias consecutivas se producen a las frecuencias de 63,58 Hz y 89,25 Hz. Estimar la longitud del túnel.

70 •• Una cuerda de 5 m de largo que está fija sólo por un extremo está vibrando en su quinto armónico con una frecuencia de 400 Hz. El desplazamiento máximo de cualquier segmento de la cuerda es 3 cm. (*a*) ¿Cuál es su longitud de onda? (*b*) ¿Cuál es el número de onda k? (*c*) ¿Cuál es la frecuencia angular? (*d*) Escribir la función de onda correspondiente a esta onda estacionaria.

71 •• Una onda estacionaria en una cuerda está representada por la siguiente función de onda: $y(x, t) = (0{,}020)\,\text{sen}(4\pi x)\cos(60\pi t)$, donde x e y se expresan en metros y t en segundos. Determinar el desplazamiento máximo y la velocidad máxima de un punto de la cuerda situado en (*a*) $x = 0{,}10$ m, (*b*) $x = 0{,}25$ m, (*c*) $x = 0{,}30$ m y (*d*) $x = 0{,}50$ m. SSM

72 •• Un alambre de longitud 2,5 m y masa 0,10 kg está fijo por ambos extremos bajo una tensión de 30 N. Al excitar el armónico n, se forma un nodo a 0,5 m de un extremo. (*a*) ¿Cuánto vale n? (*b*) ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros tres modos permitidos de vibración?

73 •• Un tubo de órgano es tal que bajo condiciones normales su frecuencia fundamental es 220 Hz. Se coloca en una atmósfera de hexafluoruro de azufre (SF_6) a la misma temperatura y presión. La masa molar del aire es 29 g/mol y la del SF_6 es 146 g/mol. ¿Cuál es la frecuencia fundamental del tubo en la atmósfera de SF_6?

74 •• En una demostración en una clase de ondas estacionarias, se sujeta una cuerda a un diapasón que vibra a 60 Hz que origina la formación de ondas transversales de esta frecuencia en la cuerda. El otro extremo de la cuerda se pasa por una polea, variándose la tensión con pesos en este extremo. La cuerda tiene nodos aproximadamente en el diapasón y en la polea. (*a*) Si la cuerda tiene una densidad de masa lineal de 8 g/m y tiene una longitud de 2,5 m (desde el diapasón hasta la polea), ¿cuál debe ser la tensión para que la cuerda vibre en su modo fundamental? (*b*) Hallar las tensiones necesarias para que la cuerda vibre en sus armónicos segundo, tercero y cuarto.

75 •• Tres frecuencias de resonancia sucesivas de un tubo de órgano son 1310, 1834 y 2358 Hz. (*a*) ¿Está el tubo cerrado por un extremo o abierto en ambos extremos? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? (*c*) ¿Cuál es la longitud del tubo? SSM

76 •• Durante un experimento que estudia la velocidad del sonido en el aire se observa que la frecuencia de resonancia de un tubo abierto por un extremo y cerrado por el otro, tiene sus nodos separados 6,94 cm. Al aumentar la frecuencia externa se observa que aparece una nueva frecuencia de resonancia tal que sus nodos distan 5,4 cm. (*a*) ¿Cuáles son estas dos frecuencias de resonancia? (*b*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental? (*c*) ¿A qué armónicos corresponden? La velocidad del sonido es 343 m/s.

77 •• Una onda estacionaria sobre una cuerda viene descrita por la siguiente función de onda: $y(x, t) = (0{,}020)\,\text{sen}(\frac{1}{2}\pi x)\cos(40\pi t)$, en donde x e y están en metros y t en segundos. (*a*) Escribir funciones de onda para dos trenes de ondas que al superponerse produzcan este patrón de ondas estacionarias. (*b*) ¿Cuál es la distancia entre los nodos de la onda estacionaria? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de un segmento de cuerda en $x = 1$ m? (*d*) ¿Cuál es la aceleración del mismo segmento de cuerda?

78 •• **HOJA DE CÁLCULO** Dos pulsos de onda que se mueven sobre una cuerda están representados por las funciones de onda

$$y_1(x, t) = \frac{0{,}020}{2{,}0 + (x - 2{,}0t)^2} \quad \text{y} \quad y_2(x, t) = \frac{-0{,}020}{2{,}0 + (x + 2{,}0t)^2}$$

donde x está en metros y t en segundos. (*a*) Dibujar por separado cada onda en función de x para $t = 0$, y para $t = 1$ s, utilizando para ello una **hoja de cálculo** o una **calculadora gráfica**, y describir el comporta-

miento de ambas ondas al aumentar el tiempo. Para cada gráfico tomar $-5\text{ m} < x < +5\text{ m}$. (*b*) Hallar la función de onda resultante para $t = 0$, $t = -1\text{ s}$ y $t = 1\text{ s}$

79 ••• Tres ondas con la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, se mueven en la misma dirección y sentido. Las tres ondas vienen dadas por $y_1(x, t) = (5{,}00\text{ cm})\ \text{sen}(kx - \omega t - \frac{1}{3}\pi)$, $y_2(x, t) = (5{,}00\text{ cm})\ \text{sen}(kx - \omega t)$ y $y_3(x, t) = (5{,}00\text{ cm})\ \text{sen}(kx - \omega t + \frac{1}{3}\pi)$, donde x y t se dan en metros y segundos, respectivamente. La onda resultante tiene la forma $y(x, t) = A\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \delta)$. Hallar A y δ.

80 ••• Una onda plana tiene la forma $p(x, y, t) = A\cos(k_x x + k_y y - \omega t)$. Demostrar que la dirección en que se mueve la onda forma un ángulo $\theta = \text{arctg}(k_y/k_x)$ con la dirección positiva del eje x y que la velocidad de propagación de la onda es $v = \omega\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

81 •• La velocidad del sonido es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T (ecuación 15.5). (*a*) Demostrar que si la temperatura varía en una pequeña cantidad ΔT, la frecuencia fundamental de un tubo de órgano varía aproximadamente en Δf, siendo $\Delta f/f \approx \frac{1}{2}\Delta T/T$. (*b*) Suponer un tubo de órgano cerrado por un extremo y que tiene una frecuencia fundamental de 200 Hz cuando la temperatura es de 20 ºC. ¿Cuál será su frecuencia fundamental cuando la temperatura sea de 30 ºC? (*c*) Comparar el resultado del apartado (*b*) con el que se obtendría efectuando los cálculos exactos. (Ignorar cualquier variación de longitud del tubo debida a la dilatación térmica.) SSM

82 •• El tubo de la figura 16.36 se mantiene lleno de gas natural (principalmente metano). Se han practicado una serie de perforaciones a lo largo del tubo de 2,2 m, separados una distancia de 1 cm. Uno de los extremos está cerrado por un altavoz y en el otro hay una tapa metálica. ¿Cuál es la frecuencia del sonido del altavoz según la imagen de la figura 16.36? La velocidad del sonido en el metano es de 460 m/s.

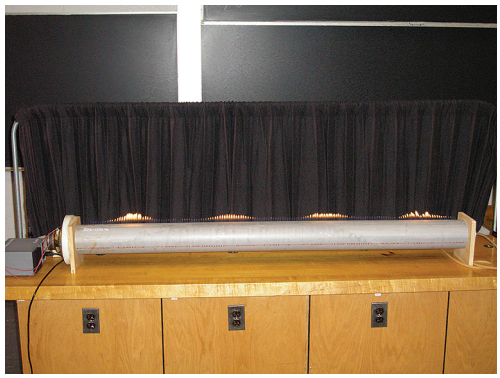


FIGURA 16.36 **Problema 82** *(University of Michigan Demonstration Laboratory.)*

83 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Suponer que un clarinete está lleno de helio y que, antes de comenzar a tocar, el músico llena sus pulmones de helio. El músico coloca los dedos con la intención de tocar un si de 277 Hz. La frecuencia de 277 Hz es la frecuencia natural de resonancia del clarinete cuando suena con aire con todos los dedos colocados sobre los agujeros. ¿Qué frecuencia se oye en realidad?

84 ••• Un alambre de 2 m fijo por ambos extremos está vibrando en su modo fundamental. La tensión es 40 N y la masa del alambre es 0,1 kg. El punto medio del alambre tiene una amplitud de 2 cm. (*a*) Hallar la energía cinética máxima del alambre. (*b*) En el instante en que el desplazamiento transversal viene dado por $y = (0{,}02\text{ m})\ \text{sen}\ (\pi x/2)$, donde x e y se dan en metros y $0\text{ m} < x < 2\text{ m}$, ¿cuál es la energía cinética del alambre? (*c*) ¿En qué posición del alambre tiene su mayor valor la energía cinética por unidad de longitud del alambre? (*d*) ¿Para que valor de x tiene su máximo valor la energía potencial por unidad de longitud?

85 ••• **HOJA DE CÁLCULO** En principio, una onda de forma arbitraria puede expresarse como la suma de ondas armónicas de diferentes frecuencias. (*a*) Considere una función definida por

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \cdots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1}$$

Escribir un programa en una **hoja de cálculo** que calcule esta serie utilizando un número finito de términos, y hacer tres representaciones gráficas de la función en el intervalo de x comprendido entre 0 y 4π. En la primera representación gráfica, aproximar la suma desde $n = 0$ hasta $n = \infty$ con el primer término de la suma. En la segunda y tercera representación gráfica, usar sólo los cinco y los diez primeros términos, respectivamente. Esta función se suele denominar la *onda cuadrada*. (*b*) Hallar la relación entre esta función y la serie de Leibnitz para π,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$ SSM

86 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Escribir un programa en una **hoja de cálculo** para calcular y representar gráficamente la función

$$y(x) = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}\,x - \frac{\text{sen}\,3x}{9} + \frac{\text{sen}\,5x}{25} - \cdots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n}\frac{(-1)^n\,\text{sen}(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

para $0 < \mathbf{x} < 4\ \pi$. Utilizar sólo los 25 primeros términos de la suma para cada punto del gráfico. ¿Qué clase de onda es ésta?

87 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Si se dan palmadas en el extremo de un tubo cilíndrico largo, el eco no suena igual que las palmadas sino que se oyen sonidos como los procedentes de un silbato, inicialmente con una frecuencia muy alta que rápidamente desciende hasta hacerse imperceptible. Este efecto puede explicarse si se piensa que el sonido de la palmada es una compresión que sale de las manos y que se propaga. Los diferentes ecos que llegan al oído, tal como se muestra en la figura 16.37, recorren trayectorias distintas por el tubo. El primer eco resulta de una única reflexión en el fondo del tubo, mientras que el segundo también se refleja en el centro de las paredes del tubo, una vez al ir y otra al volver; el tercer eco se refleja dos veces en puntos situados a distancias 1/4 y 3/4, etc. El tono del sonido que llega al oído es consecuencia de la frecuencia a la que estos sonidos reflejados llegan al oído. (*a*) Demostrar que el retraso del tiempo entre el eco n y el eco $n + 1$ viene dado por

$$\Delta t_n = \frac{2}{v}\left(\sqrt{(2n)^2r^2 + L^2} - \sqrt{[2(n-1)]^2r^2 + L^2}\right)$$

donde v es la velocidad del sonido, L la longitud del tubo y r su radio. (*b*) Usando una **hoja de cálculo** o una **calculadora gráfica**, representar gráficamente Δt_n frente a n si $L = 90$ m, $r = 1$ m. (Estas son las dimensiones de un tubo del Exploratorium de San Francisco.) Represente como mínimo hasta $n = 100$. (*c*) A partir del gráfico, explique por qué la frecuencia disminuye con el tiempo. ¿Cuáles son las frecuencias máxima y mínima que se oirán?

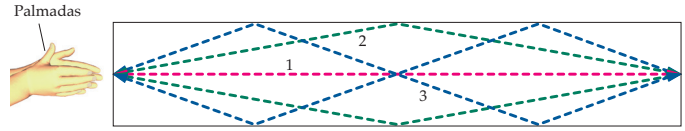


FIGURA 16.37 **Problema 87**

CAPÍTULO 17

CUANDO BENJAMIN FRANKLIN FUE A PARÍS, PRESENCIÓ EL PRIMER VUELO TRIPULADO CONOCIDO DE UN GLOBO DE AIRE CALIENTE. DESDE ENTONCES, LA GENTE HA ESTADO VOLANDO EN ARTEFACTOS DE ESTE TIPO. *(Corbis.)*

Temperatura y teoría cinética de los gases

17.1 Equilibrio térmico y temperatura
17.2 Termómetros de gas y escala de temperaturas absolutas
17.3 Ley de los gases ideales
17.4 La teoría cinética de los gases

? ¿Por qué asciende el globo cuando el aire de su interior se calienta? (Véase el ejemplo 17.7.)

Incluso los niños más pequeños entienden la diferencia entre caliente y frío, pero ¿qué es la temperatura? ¿En qué consiste una medida de esa propiedad? En el capítulo 17, iniciamos nuestro estudio de la temperatura.

Un piloto de avión o de globo y un buzo deben tener un buen conocimiento básico de las temperaturas del aire y del agua cuando planean sus vuelos y sus inmersiones. Los pilotos necesitan saber cómo afectan los cambios de temperatura del aire a su densidad y a los patrones de viento. Los buzos saben que los cambios en la temperatura corporal afectan a la cantidad de aire que han de utilizar en el transcurso de una inmersión. Son también conscientes de la importancia de igualar la presión sobre sus cuerpos y la de los gases dentro de su propio cuerpo. Para buzos y pilotos es de importancia vital saber cómo se comportan los gases con respecto a la temperatura. Por tanto, iniciamos nuestro estudio de la termodinámica con una discusión sobre la temperatura y un análisis de la ley de los gases ideales.

En este capítulo, veremos cómo puede definirse una escala lógica de temperaturas en función de las propiedades de los gases a bajas densidades y que la temperatura es una medida de la energía cinética molecular de un cuerpo.

17.1 EQUILIBRIO TÉRMICO Y TEMPERATURA

Normalmente, nuestro sentido del tacto puede decirnos si un objeto está caliente o frío. Desde la infancia se aprende que para conseguir que un objeto frío se caliente, basta con ponerlo en contacto con un cuerpo caliente. Y para enfriar un cuerpo caliente, lo hemos de poner en contacto con un objeto frío.

Cuando un cuerpo se calienta o se enfría, cambian algunas de sus propiedades físicas. Por ejemplo, si un sólido o un líquido se calientan, en general su volumen aumenta. Si un gas se calienta manteniendo la presión constante, éste se expande. Si el gas se calienta, manteniendo el voumen constante, entonces aumenta la presión. Si se calienta un conductor eléctrico, variará su resistencia eléctrica, como se estudiará en el capítulo 25. Una propiedad física que varía con la temperatura se denomina **propiedad termométrica**. Un cambio en una propiedad termométrica indica que se ha producido una variación de la temperatura del objeto.

Supóngase que colocamos una barra caliente de cobre en contacto estrecho con una barra fría de hierro. La barra de cobre se contrae ligeramente, indicando que se está enfriando, mientras que la barra de hierro se dilata ligeramente, lo que indica que se está calentando. Se dice que ambas barras están en **contacto térmico**. Finalmente, este proceso termina; es decir, ninguna de las dos barras varía posteriormente de longitud. Cuando ocurre esto se dice que las dos barras están en **equilibrio térmico** entre sí.

Supongamos ahora que introducimos la barra de cobre caliente en una corriente de agua fría. La barra se enfría, contrayéndose hasta alcanzar el equilibrio térmico con el agua. A continuación, introducimos la barra de hierro fría en la corriente, lejos de la barra de cobre. La barra de hierro se calentará hasta alcanzar el equilibrio térmico con el agua. Si ahora sacamos las barras y las colocamos en contacto una con otra, observaremos que sus longitudes no cambian. Ambas están en equilibrio térmico entre sí. Aunque este hecho es de sentido común, no existe ningún procedimiento lógico para su deducción. Constituye el **principio cero de la termodinámica** (figura 17.1):

> Si dos objetos están en equilibrio térmico con un tercero, entonces están en equilibrio térmico entre sí.
>
> PRINCIPIO CERO DE LA TERMODINÁMICA

Se dice que dos objetos tienen la misma *temperatura* cuando están en equilibrio térmico entre sí. Como veremos, el principio cero nos permite definir una escala de temperatura.

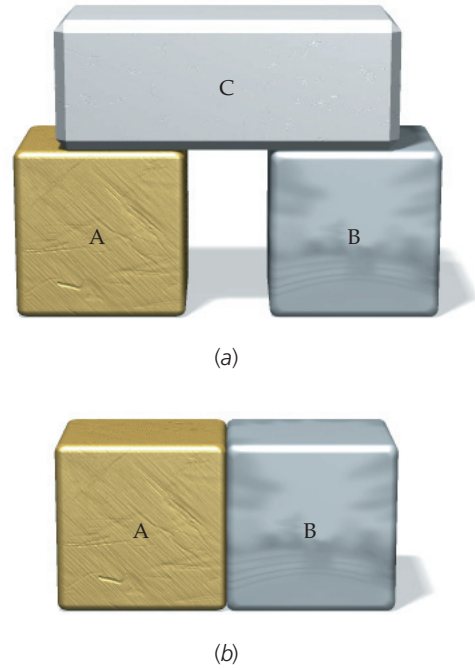


FIGURA 17.1 Principio cero de la termodinámica. (*a*) Los sistemas A y B están en contacto térmico con el sistema C, pero no entre sí. Cuando A y B están cada uno en equilibrio térmico con C, están en equilibrio térmico entre sí, como puede comprobarse colocándolos en contacto, como se muestra en (*b*).

ESCALAS DE TEMPERATURA CELSIUS Y FAHRENHEIT

Para establecer una escala de temperatura, se puede utilizar cualquier propiedad termométrica. Un termómetro común de mercurio está compuesto por un bulbo y un tubo de vidrio que contienen una cantidad fija de mercurio.* Cuando se calienta el mercurio al colocar el termómetro en contacto con un cuerpo más caliente, el mercurio se dilata más que el vidrio y aumenta la longitud de la columna de mercurio. Podemos crear una escala de temperatura a lo largo del tubo de vidrio del modo siguiente. Primero, se coloca el termómetro en una mezcla de hielo y agua en equilibrio† a una presión de 1 atm. Cuando el termómetro está en equilibrio con el hielo y el agua, se marca la posición de la columna de mercurio sobre el tubo de vidrio. Esta es la **temperatura del punto del hielo** (también denominada **punto de congelación normal** del agua). A continuación, se coloca el termómetro en agua hirviendo a una presión de 1 atm y, cuando el termómetro queda en equilibrio tér-

* Como el mercurio es muy tóxico, hoy en día se usan más los termómetros de alcohol.

† El agua y el hielo en equilibrio constituyen un baño a temperatura constante. Cuando se coloca hielo en agua caliente, ésta se enfría y parte del hielo funde. Finalmente, se alcanza el equilibrio térmico y no se funde más hielo. Si el sistema se calienta ligeramente, se funde algo más de hielo, pero la temperatura no varía en tanto exista algo de hielo.

mico con el agua hirviendo, se marca la nueva posición de la columna de mercurio. Esta es la **temperatura del punto del vapor** (también denominada **punto de ebullición normal** del agua).

La **escala de temperatura Celsius** define la temperatura del punto del hielo como cero grados Celsius (0 °C) y la temperatura del punto del vapor como 100 °C. El espacio de la columna entre las marcas 0° y 100° se divide en 100 intervalos iguales (grados). Las marcas de los grados se extienden por debajo y por encima de estos puntos. Si L_t es la longitud de la columna de mercurio, la temperatura Celsius, t_C, viene dada por

$$t_C = \frac{L_t - L_0}{L_{100} - L_0} \times 100° \qquad 17.1$$

donde L_0 es la longitud de la columna de mercurio cuando el termómetro está dentro de un baño de hielo, y L_{100} es su longitud cuando el termómetro está en el baño de vapor. La temperatura normal del cuerpo humano medido en la escala Celsius es de 37 °C, aproximadamente.

Históricamente, la **escala de temperatura Fahrenheit** (usada habitualmente en los países de habla inglesa) define como 32 °F la temperatura del punto del hielo y como 212 °F* la del punto de ebullición del agua. Obsérvese que entre la temperatura del punto del hielo y la del punto del vapor hay 100 grados Celsius y 180 grados Fahrenheit. Un cambio de temperatura de un grado Celsius es, por lo tanto, igual a un cambio de 1,8 = 9/5 grados Fahrenheit. Para convertir una temperatura dada en una escala a la otra, debemos tener también en cuenta que las temperaturas cero de ambas no son iguales. La relación general entre una temperatura Fahrenheit t_F y una temperatura Celsius t_C es

$$t_C = \tfrac{5}{9}(t_F - 32°) \qquad (\text{o } t_F = \tfrac{9}{5}t_C + 32°) \qquad 17.2$$

CONVERSIÓN FAHRENHEIT-CELSIUS

Hoy en día, se suele definir la escala Fahrenheit utilizando la ecuación (17.2), siendo t_C la temperatura *Celsius*.

Ejemplo 17.1 Conversión de temperaturas Fahrenheit y Celsius

Una madre mide la temperatura de su hija de seis meses con un termómetro Celsius, y observa que es de 40,0 ºC. Entonces consulta por teléfono al médico y cuando le dice la temperatura de la niña, el médico le pregunta a qué valor Fahrenheit correspondería. Ella hace la conversión utilizando la ecuación 17.2 y obtiene 102 ºF. ¿Ha realizado la conversión correctamente?

PLANTEAMIENTO Despejar t_F haciendo uso de $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$ (ecuación 17.2), siendo $t_C = 40{,}0°$.

SOLUCIÓN

1. Despejar $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$ (ecuación 17.2) en función de t_C: $t_F = \frac{9}{5}t_C + 32°$
2. Reemplazar $t_C = 40{,}0$ °C: $t_F = \frac{9}{5}(40{,}0°) + 32° = \boxed{104\ °F}$

El resultado de la madre está por debajo de éste en 2 ºF.

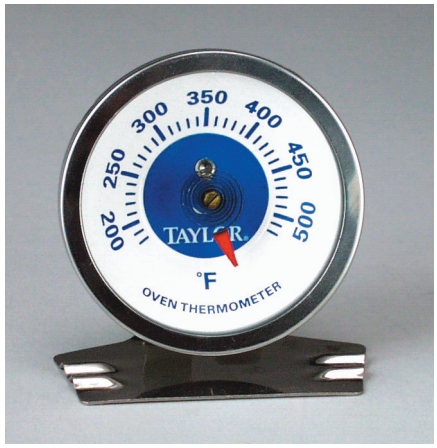
COMPROBACIÓN La temperatura de 40 ºC es el 40% del intervalo entre 0 ºC y 100 ºC, y la temperatura de 72 ºF es el 40% del intervalo entre 0 ºF y 180 ºF. Por tanto, lo lógico es que la temperatura Fahrenheit sea 72 ºF + 32 ºF = 104 ºF, lo que concuerda con el resultado del paso 2.

PROBLEMA PRÁCTICO 17.1 (*a*) Determinar la temperatura Celsius equivalente a 68 °F. (*b*) Determinar la temperatura Fahrenheit equivalente a −40 °C.

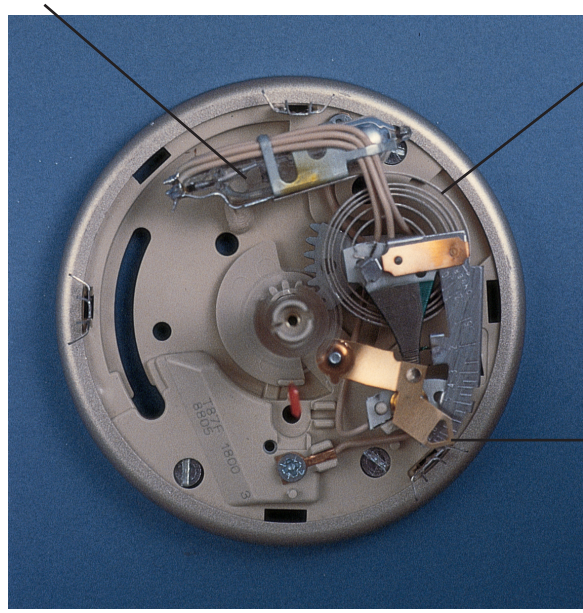
* Cuando el físico alemán Daniel Fahrenheit ideó su escala de temperatura, quería que todas las temperaturas mensurables fuesen positivas. Inicialmente, escogió 0 °F para la temperatura más baja que pudo obtener con una mezcla de hielo y agua salada, y 96 °F (un número conveniente con muchos divisores) para la temperatura del cuerpo humano. Luego, modificó su escala ligeramente para conseguir que el punto del hielo y el del vapor fuesen números enteros. Esto dio como resultado que la temperatura del cuerpo humano estuviese comprendida entre 98 °F y 99 °F.

Pueden utilizarse otras propiedades termométricas para construir termómetros y establecer escalas de temperatura. La figura 17.2 muestra una cinta o tira bimetálica compuesta por dos metales diferentes unidos entre sí. Cuando la cinta se calienta o se enfría, se curva para acomodarse a la diferencia de las dilataciones térmicas de los dos metales. La figura 17.3 muestra un arrollamiento bimetálico con una aguja que indica la temperatura sobre una escala adecuada. Cuando se calienta el termómetro, la espiral se curva más y la aguja se desplaza hacia la derecha. Este termómetro se calibra de la misma forma que un termómetro de mercurio, es decir, determinando el punto del hielo y el de ebullición del agua y dividiendo el intervalo entre ellos en 100 grados Celsius (o 180 grados Fahrenheit).

FIGURA 17.2 Cinta bimetálica. Cuando se calienta o se enfría, los dos metales se dilatan o contraen en diferente medida, haciendo que la cinta se curve.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 17.3 (*a*) Termómetro que utiliza una cinta bimetálica en forma de arrollamiento en espiral. (La aguja roja está unida a uno de los extremos de la cinta.) Cuando el arrollamiento se calienta, la aguja gira en sentido horario porque el metal externo se dilata más que el interno. (*b*) Termostato casero. Cuando la habitación se calienta en exceso, la espiral se expansiona y el tubo montado sobre ella se inclina, de modo que el mercurio que contiene se desliza y cierra un interruptor eléctrico poniendo en marcha un acondicionador de aire. En la parte derecha puede verse una palanca de corredera montada sobre la espiral para ajustar la temperatura deseada. El circuito se abre cuando el aire más frío contrae suficientemente la espiral. *((a) Gentileza de Taylor Precision Products. (b) Richard Menga/ Fundamental Photographs.)*

17.2 TERMÓMETROS DE GAS Y ESCALA DE TEMPERATURAS ABSOLUTAS

Todos los termómetros centígrados calibrados mediante agua con hielo y vapor de agua coinciden (por definición) a 0 °C y 100 °C, pero ofrecen lecturas ligeramente distintas en los puntos intermedios. Las discrepancias pueden ser muy grandes por encima del punto del vapor y por debajo del punto del hielo. Sin embargo, existe un grupo de termómetros en el que las temperaturas medidas concuerdan

muy bien incluso lejos de los puntos de calibración: se trata de los termómetros de gas. En una de sus versiones, el **termómetro de gas a volumen constante**, se mantiene constante el volumen del gas y su presión se utiliza como propiedad termométrica para medir temperaturas (figura 17.4). La presión P_0 del punto del hielo y la presión P_{100} del punto del vapor de agua se determinan situando el termómetro en baños agua-hielo y agua-vapor, y el intervalo entre ellos se divide en 100 grados iguales (escala Celsius). Si la presión es P_t en el baño cuya temperatura desea determinarse, dicha temperatura en grados Celsius se define por

$$t_C = \frac{P_t - P_0}{P_{100} - P_0} \times 100\ ^\circ\text{C} \qquad 17.3$$

TERMÓMETRO CELSIUS DE GAS A VOLUMEN CONSTANTE

Supongamos que medimos una temperatura concreta, por ejemplo el punto de ebullición del azufre a 1 atm de presión, utilizando para ello cuatro termómetros de gas a volumen constante que contienen, cada uno de ellos, uno de los cuatro gases siguientes: aire, hidrógeno, nitrógeno u oxígeno. Los termómetros han sido calibrados y se han determinado para cada uno de ellos los valores de P_{100} y P_0. A continuación, se sumergen en azufre hirviendo, y cuando están en equilibrio térmico con el azufre, se mide la presión en cada uno de los termómetros. Luego, se calcula la temperatura haciendo uso de la ecuación 17.3. ¿Dará este proceso el mismo resultado en cada uno de los termómetros? Aunque parezca sorprendente, la respuesta es sí. Los cuatro termómetros miden la misma temperatura siempre que la densidad del gas en cada uno de ellos sea suficientemente baja.

Una medida de la densidad del gas en el termómetro es su presión en el punto del vapor, P_{100}. Si se varía la cantidad de gas en un termómetro a volumen constante, ya sea añadiendo o quitando gas, cambia tanto P_{100} como P_0. Por lo tanto, cada vez que se varía la cantidad de gas, el termómetro debe ser calibrado de nuevo. La figura 17.5 muestra los resultados de las medidas del punto de ebullición del azufre utilizando termómetros de gas a volumen constante llenos con diversos gases. En esta figura, se representa la temperatura medida en función de la presión del punto del vapor del agua, P_{100}, que se varía modificando la cantidad de gas contenido en el termómetro. Cuando se reduce dicha cantidad, la densidad del gas disminuye, y lo mismo le ocurre a la presión del punto del vapor del agua. A partir de esta figura se comprueba que la coincidencia entre los termómetros es muy grande cuando las densidades de los gases son bajas (P_{100} baja). En el límite, cuando la densidad del gas tiende a cero, todos los termómetros de gas dan exactamente el mismo valor para la temperatura de ebullición del azufre, con independencia de las propiedades del gas utilizado. Por supuesto, la temperatura de ebullición del azufre no tiene nada de especial. Los termómetros de gas a volumen constante y a densidades bajas concuerdan para cualquier temperatura. Por este motivo, los termómetros de gas a bajas densidades pueden utilizarse para definir la temperatura.

Consideremos a continuación una serie de medidas de temperatura con un termómetro de gas a volumen constante que contiene una cantidad de gas muy pequeña pero fija. De acuerdo con la ecuación 17.3, la presión P_t en el termómetro varía linealmente con la temperatura medida t_C. La figura 17.6 muestra una gráfica de la presión en función

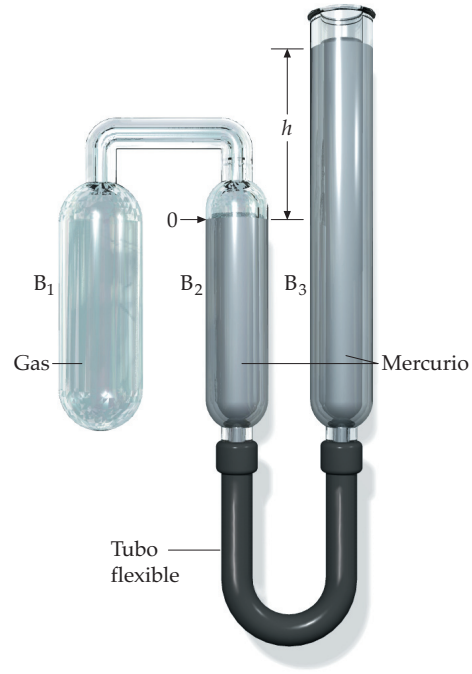


FIGURA 17.4 Termómetro de gas a volumen constante. Se mantiene constante el volumen subiendo o bajando el tubo B_3 de modo que se mantenga en la marca cero el mercurio que contiene el tubo B_2. Se escoge que la temperatura sea proporcional a la presión del gas contenido en el tubo B_1. Esta presión la indica la altura h de la columna de mercurio en el tubo B_3.

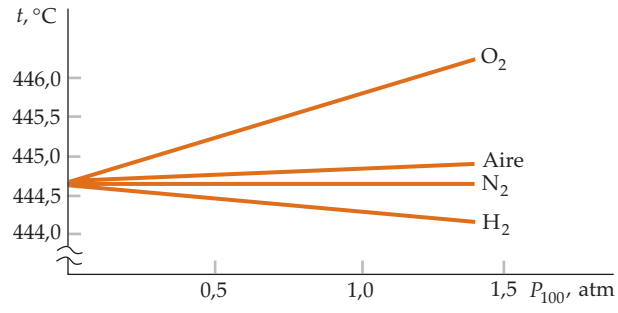


FIGURA 17.5 Temperatura del punto de ebullición del azufre medida con termómetros de gas a volumen constante rellenos con gases diferentes. Se modifica la presión en el punto de ebullición del agua P_{100} variando la cantidad de gas en los termómetros. Cuando se reduce la cantidad de gas, la temperatura del punto de ebullición del azufre medida por todos los termómetros se aproxima al valor 444,60 °C. Obsérvese que el eje de temperaturas muestra un intervalo que va desde 444 °C hasta 446 °C.

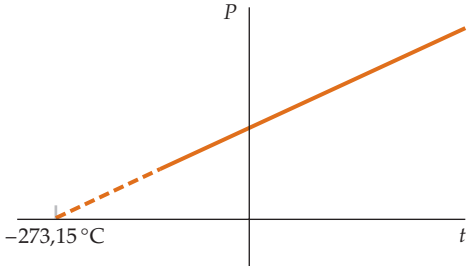


FIGURA 17.6 Gráfico que muestra la presión en función de la temperatura según la mide un termómetro de gas a volumen constante. Cuando se extrapola a presión nula, la gráfica corta al eje de temperaturas en el valor de −273,15 °C.

de la temperatura medida en un termómetro de gas a volumen constante. Cuando extrapolamos esta línea recta hasta presión cero, la temperatura tiende a −273,15 °C. Este límite es siempre el mismo con independencia del gas utilizado.

FIGURA 17.7 H_2O en su punto triple. Contiene agua, hielo y vapor de agua, todo en equilibrio. *(Richard Menga/Fundamental Photographs.)*

Un estado de referencia que puede reproducirse con mucha mayor precisión que el punto del hielo o el de ebullición del agua es el **punto triple del agua**, el cual se da a una temperatura y presión únicas en las que coexisten en equilibrio el agua, su vapor y el hielo (véase la figura 17.7). Este equilibrio tiene lugar a la presión de 4,58 mmHg y temperatura de 0,01 °C. La **escala de temperatura del gas ideal** se define de tal manera que la temperatura del punto triple sea 273,16 kelvins (K). (El kelvin es una unidad de temperatura que tiene el mismo tamaño que el grado Celsius.) Se define la temperatura T de cualquier otro estado de modo que sea proporcional a la presión de un termómetro de gas a volumen constante:

$$T = \frac{P}{P_3} T_3 \qquad 17.4$$

ESCALA DE TEMPERATURA DEL GAS IDEAL

donde P es la presión del gas en el termómetro cuando éste se halla en equilibrio térmico con el sistema cuya temperatura se está midiendo, P_3 es la presión del gas en el termómetro cuando se encuentra inmerso en un baño de agua-vapor-hielo en su punto triple y T_3 = 273,16 K (la temperatura del punto triple). El valor de P_3 depende de la cantidad de gas contenido en el termómetro.

El grado Celsius es una unidad de temperatura que tiene el mismo tamaño que el kelvin, pero el punto cero de la **escala Celsius** difiere del punto cero de la escala de temperatura del gas ideal. Por definición, el cero de la escala Celsius corresponde a una temperatura del gas ideal de exactamente 273,15 K.

La temperatura más baja que puede medirse con un termómetro de gas a volumen constante es aproximadamente 20 K y ello exige que el gas sea helio. Por debajo de esta temperatura, el helio licúa; todos los demás gases licúan a temperaturas más altas (véase la tabla 17.1). En el capítulo 19, veremos que puede utilizarse el segundo principio de la termodinámica para definir la **escala de temperatura absoluta** con independencia de las propiedades de cualquier sustancia y sin limitaciones en el margen de temperaturas que pueden medirse. Ha sido posible medir temperaturas tan bajas como 10^{-10} kelvin. La escala absoluta así definida es idéntica a la que se definió mediante la ecuación 17.4 en el intervalo de temperaturas en que puede utilizarse el termómetro de gas. Cuando nos referimos a la temperatura absoluta se utiliza el símbolo T.

Como el grado Celsius y el kelvin tienen el mismo tamaño, las *diferencias* de temperaturas son las mismas tanto en la escala Celsius como en la escala de temperatura absoluta (también llamada **escala Kelvin**). Es decir, una variación de temperatura de 1 K es idéntica a una *variación* de temperatura de 1 °C. La única diferencia entre las dos escalas radica en la elección de la temperatura cero. Para convertir los grados Celsius en kelvins, basta con sumar 273,15:*

$$T = t_C + 273{,}15\ \text{K} \qquad 17.5$$

CONVERSIÓN CELSIUS-KELVIN

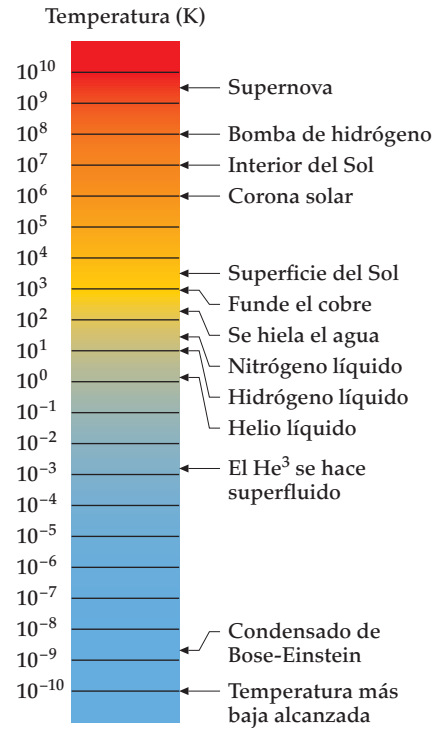
Aunque las escalas Celsius y Fahrenheit son útiles en su empleo cotidiano, la escala absoluta es mucho más conveniente para fines científicos, en parte porque muchas fórmulas se expresan de forma más simple si se utiliza la escala absoluta, y en parte porque puede darse una interpretación más fundamental de la temperatura absoluta.

* En la mayor parte de los casos, es posible redondear la temperatura del cero absoluto a −273 °C.

¡ La escala de temperatura del gas ideal, definida por la ecuación 17.4, tiene la ventaja de que cualquier temperatura medida no depende de las propiedades del gas que se está utilizando, sino solamente de las propiedades generales de los gases.

¡ Obsérvese que la unidad de temperatura del SI, el kelvin, no es un grado y no va acompañado por el símbolo de grado.

Tabla 17.1 Las temperaturas de diversos lugares y fenómenos



Ejemplo 17.2 Transformación de grados Fahrenheit en kelvins

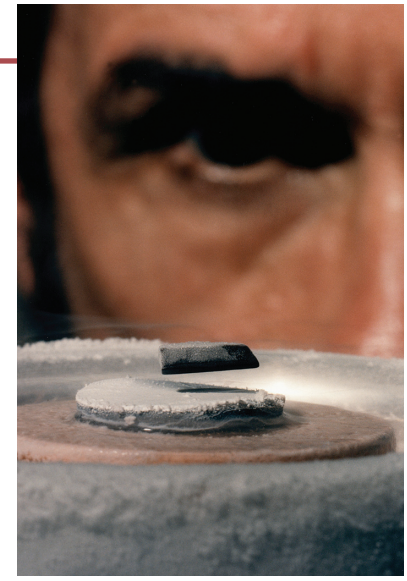
El superconductor de "alta temperatura" $YBa_2Cu_3O_7$ adquiere la propiedad de superconducción cuando su temperatura se baja a 92 K. Determinar esta temperatura en grados Fahrenheit.

PLANTEAMIENTO Pasar el dato primero a grados Celsius y luego a kelvins.

SOLUCIÓN

1. Pasar de kelvins a grados Celsius: $T = t_C + 273{,}15$ de modo que $92 = t_C + 273{,}15 \Rightarrow t_C = -181{,}15\ °C$
2. Para hallar la temperatura Fahrenheit, utilizamos $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$ (ecuación 17.2): $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$ de donde $-181{,}15° = \frac{5}{9}(t_F - 32°) \Rightarrow t_F = \boxed{-294\ °F}$

COMPROBACIÓN Una temperatura de 92 K está más cerca de 0 K que de 273 K, de modo que es de esperar que la temperatura Fahrenheit sea considerablemente más pequeña que 32 °F. Este resultado concuerda con lo esperado.



(U.S. Dept. of Energy.)

17.3 LEY DE LOS GASES IDEALES

Las propiedades de los gases a bajas densidades permiten definir la escala de temperaturas del gas ideal. Si comprimimos este gas manteniendo su temperatura constante, la presión crece. Del mismo modo, si el gas se expande a temperatura constante, su presión decrece. Con una buena aproximación, el producto de la presión por el volumen de un gas de baja densidad es constante a temperatura constante. Esta propiedad de los gases fue descubierta experimentalmente por Robert Boyle (1627-1691) y se conoce como **ley de Boyle**:

$$PV = \text{constante} \qquad \text{(temperatura constante)}$$

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Proporciones directas e inversas

Existe una ley más general que reproduce la ley de Boyle como un caso especial. De acuerdo con la ecuación 17.4, la temperatura absoluta de un gas de baja densidad es proporcional a su presión a volumen constante. Además, tal como fue descubierto experimentalmente por Jacques Charles (1746-1823) y Gay-Lussac (1778-1850), la temperatura absoluta de un gas de baja densidad es proporcional a su volumen a presión constante. Estas dos propiedades pueden combinarse mediante la expresión

$$PV = CT \qquad 17.6$$

donde C es una constante positiva que, como veremos a continuación, es proporcional a la cantidad de gas. En efecto, consideremos dos recipientes que tienen volúmenes idénticos que contienen cada uno la misma cantidad de cierto tipo de gas a la misma temperatura y presión. Si ponemos en comunicación ambos recipientes, combinándolos, nos encontraremos al final con una cantidad y un volumen doble de gas a la misma presión y temperatura. Hemos duplicado la magnitud PV/T duplicando la cantidad de gas. Por lo tanto, podemos escribir C como una constante k multiplicada por el número N de moléculas del gas:

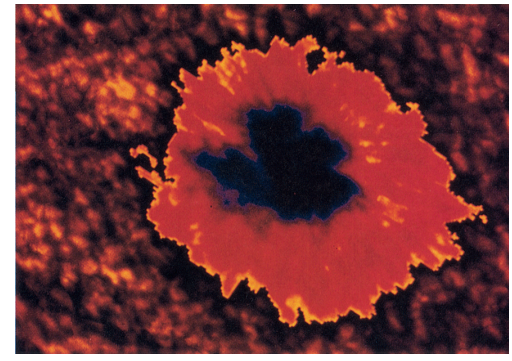
$$C = kN$$

Por lo tanto, la ecuación 17.6 se convierte en

$$PV = NkT \qquad 17.7$$

La constante k se denomina **constante de Boltzmann**. Se ha comprobado experimentalmente que tiene el mismo valor para cualquier tipo de gas:

$$k = 1{,}381 \times 10^{-23}\ \text{J/K} = 8{,}617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K} \qquad 17.8$$



Manchas solares aparecen en la superficie del Sol cuando corrientes de gases procedentes del interior profundo de la estrella entran lentamente en erupción. La "flor" solar tiene un diámetro de unos 10 000 kilómetros. La variación de temperatura, indicada por los cambios de color, no se comprende completamente. La porción central de la mancha solar es más fría que las regiones exteriores, como aparece indicada por el área oscura. La temperatura en el centro del Sol es del orden de 10^7 K, mientras que en la superficie la temperatura es solamente de unos 6000 K. *(NASA.)*

Una cantidad determinada de gas suele expresarse en moles. Un mol de cualquier sustancia es la cantidad de la misma que contiene el **número de Avogadro** N_A de átomos o moléculas, definido como el número de átomos de carbono que hay en 12 gramos de ^{12}C:

$$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1} \qquad 17.9$$

NÚMERO DE AVOGADRO

Si tenemos n moles de una sustancia, el número de moléculas es

$$N = nN_A \qquad 17.10$$

La ecuación 17.7 se expresa entonces como

$$PV = nN_A kT = nRT \qquad 17.11$$

donde $R = N_A k$ se denomina **constante universal de los gases**. Su valor, que es el mismo para todos los gases, es

$$R = N_A k = 8{,}314\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)} = 0{,}08206\ \text{atm} \cdot \text{L/(mol} \cdot \text{K)} \qquad 17.12$$

La figura 17.8 muestra una representación de $PV/(nT)$ en función de la presión P para varios gases. Para todos los gases, $PV/(nT)$ es casi constante en un intervalo de presiones bastante grande. Incluso el oxígeno, que presenta la mayor variación en esta representación, varía sólo alrededor del 1 por ciento entre 0 y 5 atm. Se define un gas ideal como aquel para el que $PV/(nT)$ es constante a todas las presiones. En este caso, la presión, el volumen y la temperatura están relacionados por

$$PV = nRT \qquad 17.13$$

LEY DE LOS GASES IDEALES

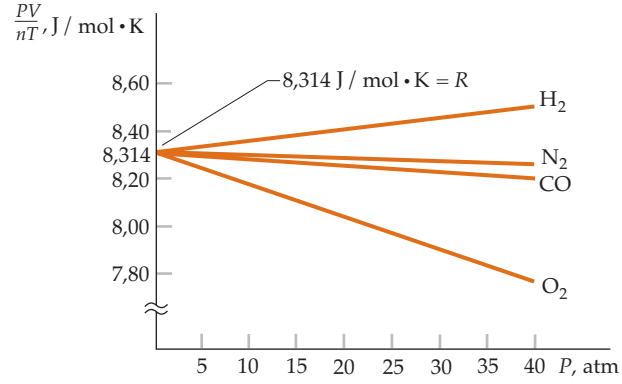


FIGURA 17.8 Gráfico de PV/nT en función de la presión para gases reales. En estos gráficos, la presión varía modificando la cantidad de gas. Cuando se reduce la densidad del gas, y por lo tanto la presión, la relación PV/nT se aproxima al mismo valor: 8,314 J/mol · K para todos los gases. Este valor es la constante universal de los gases R.

La ecuación 17.13, que relaciona las variables P, V y T, se conoce como ley de los gases ideales, y es un ejemplo de una **ecuación de estado**. A bajas densidades (y por consiguiente, a bajas presiones) describe las propiedades de los gases reales. A densidades más elevadas se han de hacer correcciones a esta ecuación. En el capítulo 20, se tratará otra ecuación de estado, la ecuación de Van der Waals, que incluye dichas correcciones. Para todo gas a cualquier densidad existe una ecuación de estado que relaciona P, V y T para una cantidad dada de gas. Así, el estado de una cantidad dada de gas queda determinado por dos cualesquiera de las tres **variables de estado** P, V y T.

PRESIONES PARCIALES

El aire seco posee aproximadamente un 21% de oxígeno y un 79% de nitrógeno. Los buzos utilizan a menudo aire enriquecido en oxígeno porque alarga el tiempo de una inmersión. En inmersiones muy profundas se utiliza una mezcla de oxígeno y helio porque esta mezcla reduce el riesgo de que un buzo sufra una narcosis por el nitrógeno.

Si tenemos una mezcla de dos o más gases, y si la mezcla está lo suficientemente diluida (de este modo cada gas puede ser considerado ideal), entonces se puede suponer que cada gas ocupa todo el volumen del recipiente. Esto es así porque el volumen de las moléculas individuales del gas es insignificante comparado con el volumen del espacio vacío que las rodea. La presión total ejercida por la mezcla es la suma de las presiones individuales, llamadas **presiones parciales**, ejercidas por

cada uno de los gases individuales en la mezcla. Además, la presión parcial de cada gas en la mezcla es la presión que ejercería si ocupase él sólo el recipiente. Esta propiedad —la presión total es la suma de las presiones parciales— recibe el nombre de **ley de las presiones parciales**.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Gases diluidos

PLANTEAMIENTO Un gas diluido es aquel para el cual el modelo de gas ideal da resultados suficientemente exactos. Las variables son la presión, el volumen, la temperatura, la masa y/o la cantidad de sustancia (número de moles).

SOLUCIÓN

1. Aplicar la ley de los gases ideales, $PV = nRT$, a cada gas diluido. Asegurarse de usar la temperatura absoluta y la presión absoluta.
2. Para una mezcla de gases diluidos, la ley de los gases ideales se aplica a cada gas de la mezcla, el volumen de cada gas en la mezcla es el volumen del recipiente, y la presión de cada gas es la presión parcial de ese gas. La presión de la mezcla es la suma de las presiones parciales de los gases componentes.
3. Relaciones adicionales útiles son $R = N_A k$, $N = nN_A$, y $m = nM$, donde k es la constante de Boltzmann, N es el número de moléculas, m es la masa del gas y M la masa molar.
4. Hallar la solución para la magnitud deseada.

COMPROBACIÓN La presión, el volumen y la temperatura no pueden ser nunca negativos.

Ejemplo 17.3 Mezcla de Gases

Un depósito de oxígeno de 20 L está a una presión de 0,30 P_{at} y otro de nitrógeno de 30 L está a una presión de 0,60 P_{at}. La temperatura de cada gas es 300 K. A continuación, el oxígeno se transporta al depósito de 30 L que contiene el nitrógeno, donde ambos se mezclan. ¿Cuál es la presión de la mezcla si su temperatura es 300 K?

PLANTEAMIENTO El volumen final de ambos gases es 30 L. Las temperaturas iniciales de ambos gases son iguales. De este modo, se puede utilizar la ley de Boyle ($P_i V_i = P_f V_f$) para hallar la presión parcial de cada gas en la mezcla. Entonces, se hace uso de la ley de las presiones parciales para obtener la presión de la mezcla.

SOLUCIÓN

1. La presión de la mezcla es la suma de las presiones parciales de los dos gases:
$$P = P_{O_2} + P_{N_2}$$
2. Las temperaturas inicial y final de los gases son las mismas. Por lo tanto, a partir de la ley de Boyle, se obtienen las presiones parciales de los gases:
$$P_i V_i = P_f V_f \Rightarrow P_f = \frac{V_i}{V_f} P_i$$
3. El volumen final del oxígeno es 30 L (como también lo es el volumen final del nitrógeno):
$$P_{O_2} = \frac{V_i}{V_f} P_i = \frac{20\ \text{L}}{30\ \text{L}} 0{,}30 P_{at} = 0{,}20 P_{at}$$
$$P_{N_2} = \frac{V_i}{V_f} P_i = \frac{30\ \text{L}}{30\ \text{L}} 0{,}60 P_{at} = 0{,}60 P_{at}$$
4. La presión es la suma de las presiones parciales:
$$P = P_{O_2} + P_{N_2} = 0{,}20 P_{at} + 0{,}60 P_{at} = \boxed{0{,}80 P_{at}}$$

COMPROBACIÓN Es de esperar un aumento de la presión en el depósito de 30 L cuando el oxígeno se transfiere a él. Esto se ve confirmado en el resultado final (0,80 P_{at} representa un aumento de la presión de 0,20 P_{at}).

Ejemplo 17.4 Volumen de un gas ideal

¿Qué volumen ocupa 1,00 mol de gas a una temperatura de 0,00 °C y una presión de 1,00 atm?

PLANTEAMIENTO Usar la ley de los gases ideales para determinar el volumen ocupado por el gas ideal.

SOLUCIÓN

Podemos hallar el volumen mediante la ley de los gases ideales, siendo $T = 273$ K:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1{,}00\text{ mol})[0{,}0821\text{ atm}\cdot\text{L}/(\text{mol}\cdot\text{K})](273{,}15\text{ K})}{1{,}00\text{ atm}} = \boxed{22{,}4\text{ L}}$$

COMPROBACIÓN Si R se expresa en atm · L/mol · K, podemos expresar P en atm y obtener V en litros.

PROBLEMA PRÁCTICO 17.2 Hallar (*a*) el número de moles n y (*b*) el número de moléculas N que hay en 1 cm^3 de un gas a 0 °C y 1 atm.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 17.1

Dos habitaciones de una residencia, de idéntico tamaño, están comunicadas por una puerta abierta. Una de ellas, que tiene aire acondicionado, está 5,0 °C más fría que la otra. ¿Cuál de las habitaciones tiene más aire?

La temperatura de 0 °C = 273,15 K y la presión de 1 atm suelen denominarse **condiciones estándar**. En el ejemplo 17.4 hemos visto que, en condiciones estándar, 1 mol de un gas ideal ocupa un volumen de 22,4 L.

La figura 17.9 muestra los gráficos de P en función de V a varias temperaturas constantes T. Estas curvas se llaman **isotermas**. Las isotermas de un gas ideal son hipérbolas. Para una cantidad determinada de gas, vemos en la ecuación 17.13 que la magnitud PV/T es constante. Utilizando el subíndice 1 para los valores iniciales y 2 para los valores finales, tenemos

$$\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_1V_1}{T_1} \qquad 17.14$$

LEY DE LOS GASES IDEALES PARA UNA CANTIDAD FIJA DE GAS

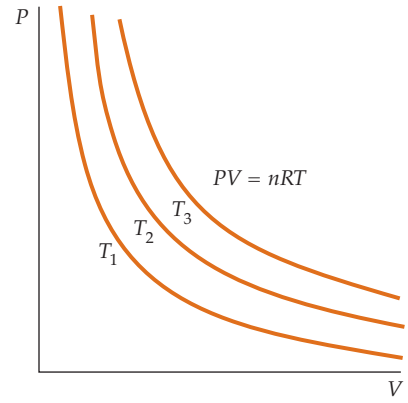


FIGURA 17.9 Isotermas de un gas en un diagrama PV. Para un gas ideal, estas curvas son hiperbolas definidas por $PV = nRT$. (La ecuación genérica de una hipérbola que se aproxima asintóticamente a los ejes de coordenadas es xy = constante.)

Ejemplo 17.5 Calentamiento y compresión de un gas

Un gas tiene un volumen de 2,00 L, una temperatura de 30,0 °C y una presión de 1,00 atm. Se calienta a 60,0 °C y se comprime hasta un volumen de 1,5 L. Hallar su nueva presión.

PLANTEAMIENTO Como la cantidad de gas es fija, la presión puede determinarse mediante la ecuación 17.14. Sean 1 y 2 los subíndices correspondientes a los estados inicial y final, respectivamente.

SOLUCIÓN

1. Expresar la presión P_2 en función de P_1 y los volúmenes y temperaturas inicial y final:

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$
$$P_2 = \frac{T_2V_1}{T_1V_2}P_1$$

2. Calcular las temperaturas absolutas inicial y final:

$$T_1 = 273{,}15 + 30{,}0 = 303{,}15\text{ K}$$
$$T_2 = 273{,}15 + 60{,}0 = 333{,}15\text{ K}$$

3. Reemplazar por los valores numéricos del resultado del paso 1 para determinar P_2:

$$P_2 = \frac{(333{,}15\text{ K})(2{,}00\text{ L})}{(303{,}15\text{ K})(1{,}50\text{ L})}(1{,}00\text{ atm}) = \boxed{1{,}47\text{ atm}}$$

COMPROBACIÓN Tanto el calentamiento de un gas como la compresión de un gas tienden a aumentar la presión. Así, esperamos que la presión supere a la presión inicial de 1,00 atm. Nuestro resultado de 1,47 atm coincide con lo esperado.

PROBLEMA PRÁCTICO 17.3 ¿Cuántos moles de gas existen en el sistema descrito en este ejemplo?

La masa de 1 mol de una sustancia se denomina **masa molar**, M. (Algunas veces se utilizan los términos *peso molecular* y *masa molecular*.) La masa molar del ^{12}C es, por definición, 12 g/mol o 12×10^{-3} kg/mol. Las masas molares de los elementos se dan en la tabla periódica del Apéndice C. La masa molar de un elemento representa el promedio de las masas molares de los isótopos de ese elemento, promedio ponderado por la abundancia relativa de esos isótopos en la Tierra. La masa molar de una molécula como el CO_2, por ejemplo, es la suma de las masas molares de los elementos que la componen. Como la masa molar del oxígeno es 16 g/mol (realmente 15,999 g/mol) y la masa molar del O_2 es 32 g/mol, entonces la del CO_2 es 12,011 g/mol + 2 × 15,999 g/mol = 44,009 g/mol.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 17.2

Si la temperatura decrece a presión constante, ¿qué le sucede al volumen?

Ejemplo 17.6 La masa de un átomo de hidrógeno

La masa molar del hidrógeno es 1,008 g/mol. ¿Cuál es la masa de un átomo de hidrógeno en un vaso de H_2O (agua)?

PLANTEAMIENTO Sea m la masa de un átomo de hidrógeno. Como en un mol existen N_A átomos, la masa molar viene dada por $M = mN_A$. Utilizaremos esta expresión para deducir m.

SOLUCIÓN

La masa media de un átomo de hidrógeno es la masa molar dividida por el número de Avogadro:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{1{,}008 \text{ g/mol}}{6{,}022 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}} = \boxed{1{,}674 \times 10^{-24} \text{ g/átomo}}$$

COMPROBACIÓN Como era de esperar, la masa calculada del átomo de hidrógeno es muchos órdenes de magnitud menor que la masa molar de 1 g/mol.

OBSERVACIÓN Los tres isótopos del hidrógeno son el protio ^1H, el deuterio ^2H y el tritio ^3H. La abundancia relativa de ^1H en el hidrógeno natural es del 99,985%.

Ejemplo 17.7 Flotación de un globo de aire caliente

Un pequeño globo de aire caliente posee un volumen de 15,0 m^3 y está abierto por la parte inferior. El aire del interior del globo está a una temperatura media de 75 °C, mientras que el aire próximo al globo tiene una temperatura de 24 °C y una presión, en promedio, de 1,00 atm. El globo está atado para impedir que se eleve, y la tensión en la soga es de 10,0 N. Usar 0,0290 kg/mol para la masa molar del aire. ¿Cuál es, en promedio, la presión en el interior del globo? (No tener en cuenta la fuerza gravitatoria correspondiente al tejido y demás componentes del globo.)

PLANTEAMIENTO Sobre el globo y sus componentes actúan tres fuerzas. La de flotación o ascensional es igual al peso del aire desplazado (principio de Arquímedes). La presión, la temperatura y el volumen del gas están relacionados por medio de $PV = nRT$. La masa m del aire es igual al número de moles n multiplicado por la masa molar M del aire.

SOLUCIÓN

1. La fuerza neta sobre el sistema (el globo y el aire de su interior) es cero. Hacer un esquema del diagrama de fuerzas (figura 17.10) del sistema:

2. Aplicar al sistema la segunda ley de Newton:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$
$$\vec{F}_T + \vec{F}_B + \vec{F}_g = 0 \Rightarrow F_B = F_T + F_g$$

3. La fuerza ascensional es igual al peso de un volumen V del aire próximo al globo. Sea ρ_1 la densidad media de este aire, y ρ_2 la densidad media del aire del interior del globo:

$$F_B = \rho_1 Vg$$
$$F_g = \rho_2 Vg$$

4. Sustituyendo en la igualdad del paso 2 las expresiones del paso 3, resulta:

$$F_T = F_B - F_g$$
$$F_T = \rho_1 Vg - \rho_2 Vg = (\rho_1 - \rho_2)Vg$$

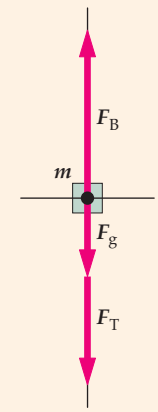


FIGURA 17.10

5. La masa de una muestra de aire del globo es el número de moles n multiplicado por la masa molar del aire M:

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{n_1 M}{V}$$

$$\rho_2 = \frac{m_2}{V} = \frac{n_2 M}{V}$$

6. Sustituyendo los resultados del paso 5 en las ecuaciones del paso 4, se obtiene:

$$F_T = \left(\frac{n_1 M}{V} - \frac{n_2 M}{V}\right) Vg \Rightarrow \frac{F_T}{Mg} = n_1 - n_2$$

7. A partir de la ley de los gases ideales ($PV = nRT$), se obtienen los valores de n_1 y n_2:

$$\frac{F_T}{Mg} = \frac{P_1 V}{RT_1} - \frac{P_2 V}{RT_2}$$

8. Despejar P_2:

$$P_2 = \left(\frac{P_1}{T_1} - \frac{F_T R}{MgV}\right) T_2$$

9. Hallar el valor de P_2. La temperatura en kelvins es igual a 273 más la temperatura en grados Celsius, 1 atm = 101,3 kPa y R = 8,314 J/(mol · K):

$$P_2 = \left(\frac{1{,}013 \times 10^5}{297} - \frac{10{,}0 \times 8{,}314}{0{,}0290 \times 9{,}81 \times 15{,}0}\right) 348$$

$$= \boxed{1{,}12 \times 10^5 \text{ Pa}} = \boxed{1{,}10 \text{ atm}}$$

COMPROBACIÓN Para producir una fuerza neta ascendente sobre la estructura del globo, el aire del interior del globo debe estar a una presión mayor que la del aire del exterior. De este modo, nuestro resultado de 1,10 atm para la presión media del interior del globo es plausible.

OBSERVACIÓN La presión en la abertura de la parte inferior del globo es la misma que la del aire que la rodea a esa altitud. En un fluido estático, la presión disminuye al crecer la altitud, y cuanto mayor es la densidad del fluido, mayor es la tasa de decrecimiento de la presión con la altitud. El aire del interior del globo es menos denso que el del exterior. Por lo tanto, dentro del globo, el descenso de la presión desde la abertura inferior hasta lo más alto del artefacto es menor en el aire más interior que en el aire contiguo al globo.

17.4 LA TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

La descripción del comportamiento de un gas en función de las variables macroscópicas de estado P, V y T puede relacionarse con los valores medios de magnitudes microscópicas, tales como la masa y velocidad de las moléculas del gas. La teoría correspondiente, conocida como **teoría cinética de los gases**, proporciona un modelo detallado de los gases diluidos.

Desde el punto de vista de la teoría cinética, un gas está constituido por un gran número de partículas que se desplazan rápidamente. En un gas monoatómico, como el helio y el neón, estas partículas son sólo átomos, pero en gases poliatómicos, como el oxígeno y el dióxido de carbono, las partículas son moléculas. En teoría cinética, es una práctica común referirse a las partículas constituyentes de un gas como moléculas. (Esta es la costumbre, aunque designar como molécula a un átomo sea un término equivocado.)

En un gas a temperatura ambiente, las moléculas se están moviendo a velocidades de cientos de metros por segundo y experimentan colisiones elásticas entre sí y con las paredes del recipiente. En ausencia de fuerzas externas (las moléculas se mueven con tanta rapidez que podemos despreciar la acción de la gravedad), no existe ninguna posición preferida para una molécula en el interior del recipiente* y los vectores velocidad tampoco poseen ninguna dirección preferida. Las moléculas están separadas, en promedio, por distancias que son grandes en comparación con su diámetro y no ejercen ninguna fuerza entre sí, excepto durante el choque mutuo. (Esta última hipótesis es equivalente a suponer una densidad gaseosa muy baja, lo cual significa, como vimos en la última sección, que el gas es ideal. Como en las colisiones o choques se conserva la cantidad de movimiento, los choques que las moléculas experimentan entre sí no influyen sobre la cantidad de movimiento total en ninguna dirección, de modo que podemos despreciarlos.)

* Debido a la gravedad, la densidad molecular en el fondo del recipiente es ligeramente mayor que en la parte superior. Como se vio en el capítulo 13, la densidad del aire disminuye con la altura, siendo igual a la mitad de su valor en la superficie terrestre aproximadamente a la altura de 5,5 km. Por ello, la variación de densidad en un recipiente de tamaño normal es despreciable.

CÁLCULO DE LA PRESIÓN EJERCIDA POR UN GAS

La presión que un gas ejerce sobre el recipiente que lo contiene se debe a las colisiones entre las moléculas de gas y las paredes del recipiente. La presión es una fuerza por unidad de área y, según la segunda ley de Newton, esta fuerza es la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de las moléculas que chocan contra la pared.

Supongamos que tenemos un recipiente rectangular de volumen V que contiene N moléculas de masa m y con velocidad v. Deseamos calcular la fuerza ejercida por estas moléculas sobre la pared de la derecha que es perpendicular al eje x y tiene el área A. El número de moléculas que chocan contra esta pared en el intervalo Δt es la totalidad de las que se están moviendo hacia la derecha y están a una distancia igual o inferior a $|v_x|\,\Delta t$ (figura 17.11). Este número es igual al número de moléculas que hay por unidad de volumen N/V multiplicado por el volumen $A|v_x|\,\Delta t$ y multiplicado por $\frac{1}{2}$ porque, en promedio, la mitad de las moléculas se estarán moviendo hacia la derecha y la otra mitad hacia la izquierda. Por lo tanto, el número de moléculas que choca contra la pared en el tiempo Δt es

$$\text{Moléculas que chocan contra la pared} = \frac{1}{2}\frac{N}{V}|v_x|\,\Delta t\,A$$

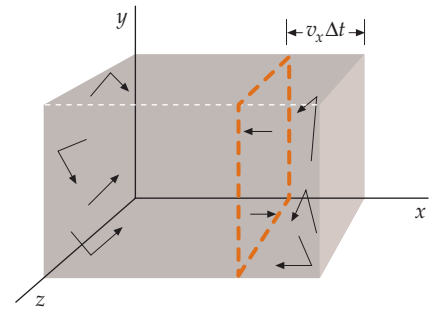


FIGURA 17.11 Moléculas gaseosas en un recipiente rectangular. En un intervalo de tiempo Δt, las moléculas situadas a una distancia $v_x\,\Delta t$ de la pared derecha chocarán contra esta pared si se mueven hacia la derecha.

La componente x de la cantidad de movimiento de una molécula antes de chocar contra la pared es $+mv_x$ y después de que tenga lugar un choque elástico con ella será $-mv_x$. El valor de la variación de la cantidad de movimiento durante el choque de una molécula contra la pared es, pues, $2mv_x$. El módulo de la variación total de la cantidad de movimiento de todas las moléculas durante un cierto intervalo de tiempo Δt es $2m|v_x|$ multiplicado por el número de moléculas que chocan contra la pared en dicho intervalo:

$$|\Delta\vec{p}| = (2m|v_x|) \times \left(\frac{1}{2}\frac{N}{V}|v_x|\,\Delta t\,A\right) = \frac{N}{V}mv_x^2 A\,\Delta t \qquad 17.15$$

El módulo de la fuerza ejercida por la pared sobre las moléculas y por éstas sobre la pared es $|\Delta\vec{p}|/\Delta t$, y la presión es esta fuerza dividida por el área A:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{N}{V}mv_x^2$$

o también

$$PV = Nmv_x^2 \qquad 17.16$$

Para tener en cuenta el hecho de que no todas las moléculas dentro del recipiente tienen la misma velocidad, basta sustituir v_x^2 por el valor medio $(v_x^2)_{\text{m}}$. Entonces, si escribimos la ecuación 17.16 en función de la energía cinética $\frac{1}{2}mv_x^2$ asociada con el movimiento a lo largo del eje x, se tiene

$$PV = 2N\left(\tfrac{1}{2}mv_x^2\right)_{\text{m}} \qquad 17.17$$

INTERPRETACIÓN MOLECULAR DE LA TEMPERATURA

Comparando la ecuación 17.17 con $PV = NkT$ (ecuación 17.7) que se obtuvo experimentalmente para todo gas a densidades muy bajas, podemos ver que

$$NkT = 2N\left(\tfrac{1}{2}mv_x^2\right)_{\text{m}} \quad \text{o} \quad \left(\tfrac{1}{2}mv_x^2\right)_{\text{m}} = \tfrac{1}{2}kT \qquad 17.18$$

Así pues, la energía cinética media asociada con el movimiento a lo largo del eje x es $\frac{1}{2}kT$. Pero la dirección x no tiene ningún privilegio especial. En promedio

$$(v_x^2)_{\text{m}} = (v_y^2)_{\text{m}} = (v_z^2)_{\text{m}} \quad \text{y} \quad (v^2)_{\text{m}} = (v_x^2)_{\text{m}} + (v_y^2)_{\text{m}} + (v_z^2)_{\text{m}} = 3(v_x^2)_{\text{m}}$$

Escribiendo $(v_x^2)_{\text{m}} = \frac{1}{3}(v^2)_{\text{m}}$ y $K_{\text{tras m}}$ para la energía cinética media de traslación de las moléculas, la ecuación 17.18 se reduce a

$$K_{\text{tras m}} = \left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{\text{m}} = \tfrac{3}{2}kT \qquad 17.19$$

ENERGÍA CINÉTICA MEDIA DE TRASLACIÓN DE UNA MOLÉCULA

Además de energía cinética de traslación, las moléculas pueden tener también energía cinética de rotación y de vibración. Sin embargo, sólo la energía cinética de traslación es relevante para el cálculo de la presión ejercida por un gas sobre las paredes de su recipiente.

La temperatura absoluta es, pues, una medida de la energía cinética media de traslación de las moléculas. La energía cinética de traslación total de n moles de un gas que contiene N moléculas es

$$K_{\text{tras}} = N\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)_{\text{m}} = \tfrac{3}{2}NkT = \tfrac{3}{2}nRT \qquad 17.20$$

donde se ha utilizado $Nk = nN_{\text{A}}k = nR$. Por lo tanto, la energía de traslación es $\frac{3}{2}kT$ por molécula y $\frac{3}{2}RT$ por mol.

Podemos utilizar estos resultados para hacer una estimación del orden de magnitud de las velocidades de las moléculas en un gas. El valor medio de v^2 es, según la ecuación 17.19,

$$(v^2)_{\text{m}} = \frac{3kT}{m} = \frac{3N_A kT}{N_A m} = \frac{3RT}{M}$$

donde $M = N_{\text{A}}m$ es la masa molar. La raíz cuadrada de $(v^2)_{\text{m}}$ recibe el nombre de **velocidad cuadrática media** (cm):

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{(v^2)_{\text{m}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad 17.21$$

VELOCIDAD CUADRÁTICA MEDIA

Obsérvese que la ecuación 17.21 es semejante a la ecuación 15.5 correspondiente a la velocidad del sonido en un gas:

$$v_{\text{sonido}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad 17.22$$

donde $\gamma = 1{,}4$ para el aire. Esto no debe sorprendernos porque una onda sonora en el aire es una perturbación de la presión que se propaga mediante colisiones entre moléculas del aire.

Ejemplo 17.8 La velocidad cuadrática media de las moléculas de un gas

El gas oxígeno (O_2) tiene una masa molar aproximada de 32,0 g/mol, mientras que el gas hidrógeno (H_2) tiene una masa molar aproximada de 2,00 g/mol. Calcular (*a*) la velocidad cm de una molécula de oxígeno cuando la temperatura es 300 K y (*b*) la velocidad cm de una molécula de hidrógeno a la misma temperatura.

PLANTEAMIENTO Determinaremos v_{cm} a partir de la ecuación 17.21. Para que las unidades concuerden, utilizaremos $R = 8{,}31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}$ y expresaremos la masa molar del O_2 en kg/mol.

SOLUCIÓN

(*a*) Sustituir los valores dados en la ecuación 17.21:

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0{,}0320\ \text{kg/mol}}}$$
$$= 483{,}56\ \text{m/s} = \boxed{484\ \text{m/s}}$$

(*b*) Repetir el cálculo con $M = 0{,}00200$ kg/mol:

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{0{,}00200\ \text{kg/mol}}}$$
$$= 1934\ \text{m/s} = \boxed{1{,}93 \times 10^3\ \text{m/s}}$$

COMPROBACIÓN Como v_{cm} es proporcional a $\sqrt{M}$ (ecuación 17.21), y la masa molar del hidrógeno es 1/16 la del oxígeno, la velocidad cm del hidrógeno es 4 veces la del oxígeno. Nuestros cálculos son coherentes con la razón de masas puesto que 1930/484 = 4,00.

OBSERVACIÓN La velocidad cm de las moléculas de oxígeno es 484 m/s, unas 1,4 veces la velocidad del sonido en el aire, que a 300 K vale aproximadamente 343 m/s.

PROBLEMA PRÁCTICO 17.4 Determinar la velocidad cm de una molécula de nitrógeno ($M = 28$ g/mol) a 300 K.

EL TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

Hemos visto que la energía cinética media asociada con el movimiento de traslación en cualquier dirección es $\frac{1}{2}kT$ por molécula (ecuación 17.19) (lo que es equivalente a $\frac{1}{2}RT$ por mol), siendo k la constante de Boltzmann y R la constante universal de los gases. Si la energía de una molécula asociada con su movimiento en una dirección se incrementa momentáneamente, por ejemplo, a causa de una colisión entre la molécula y un pistón móvil durante una compresión, los choques entre esa molécula y otras moléculas rápidamente redistribuirán la energía adicional. Cuando el gas se encuentre de nuevo en equilibrio, la energía estará repartida por igual entre las energías cinéticas de traslación, asociadas con el movimiento en las direcciones x, y, z. Este modo de compartir la energía por igual entre los tres términos de la energía cinética de traslación es un caso especial del **teorema de equipartición**, que se obtiene de la mecánica estadística clásica. Cada componente de la posición y cantidad de movimiento (la posición angular y el momento angular incluidos) que aparece como un término cuadrático en la expresión de la energía del sistema se denomina **grado de libertad**. Los grados típicos de libertad están asociados a la energía cinética de traslación, rotación y vibración y a la energía potencial de vibración. El teorema de equipartición establece que

> Cuando una sustancia está en equilibrio, existe una energía media de $\frac{1}{2}kT$ por molécula o $\frac{1}{2}RT$ por mol asociada con cada grado de libertad.
>
> TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

En el capítulo 18, utilizaremos el teorema de equipartición para estudiar la relación entre las capacidades caloríficas medidas de los gases y su estructura molecular.

Ejemplo 17.9 Mezcla de gases — *Conceptual*

Un recipiente térmicamente aislado está dividido por un tabique en dos partes de 20 L. Una de ellas contiene un mol de nitrógeno a 300 K y la otra un mol de helio a 320 K. El tabique se elimina y los gases se mezclan. En la mezcla, ¿es la presión parcial del nitrógeno menor que, igual a, o mayor que la presión parcial del helio? ¿Es la temperatura final de la mezcla menor que, igual a, o mayor que 310 K?

PLANTEAMIENTO Como el recipiente está aislado, la energía de su contenido permanece constante. La energía ganada por las moléculas de nitrógeno la pierden las moléculas de helio. Después de la mezcla, la temperatura de cada gas es igual a la temperatura de la mezcla, y la temperatura de cada gas es proporcional a su energía cinética de traslación. El helio es monoatómico y el nitrógeno diatómico. De este modo, cabría esperar que la energía ganada por las moléculas de nitrógeno termina como energía cinética de rotación y energía cinética de traslación.

SOLUCIÓN

1. Después de la mezcla, el volumen, la temperatura y el número de moles son los mismos para ambos gases. La ley de los gases ideales relaciona el volumen, la temperatura, la presión parcial y el número de moles de cada gas.

   La ley de los gases ideales establece que, para cada gas, la presión parcial viene especificada completamente por el volumen, la temperatura y el número de moles. Volumen, temperatura y número de moles son los mismos para los dos gases, de modo que las presiones parciales son las mismas también.

2. El recipiente está aislado, de manera que la energía total de los dos gases permanece constante durante la mezcla.

   El recipiente está térmicamente aislado; por tanto, la energía ganada por las moléculas de nitrógeno la pierden los átomos de helio, es decir, el aumento medio de la energía de una molécula de nitrógeno es igual a la disminución media de la energía de un átomo de helio.

3. La temperatura final de ambos gases es la misma que la temperatura de la mezcla.

   Después de la mezcla, la temperatura es la misma para cada gas, de tal manera que la energía cinética media de traslación es la misma para las moléculas de cada gas.

4. El nitrógeno es un gas diatómico y el helio es monoatómico, de modo que el nitrógeno tiene más grados de libertad que el helio. Parte de la energía ganada por el nitrógeno acabará como incremento de la energía cinética de rotación.

   La disminución de la energía cinética de traslación de los átomos de helio es igual al aumento de la energía cinética de traslación más el aumento de la energía cinética de rotación de las moléculas de nitrógeno.

5. El cambio de temperatura en cada gas es proporcional al cambio en la energía cinética de traslación de cada gas.

   El descenso en la temperatura del gas helio es mayor que el aumento de la temperatura del gas nitrógeno. La temperatura final es menor que 310 K.

COMPROBACIÓN Si los dos gases hubiesen sido monoatómicos, la temperatura final habría sido igual a 310 K. Esto es así, incluso si las masas atómicas de los dos gases fuesen muy diferentes.

RECORRIDO LIBRE MEDIO

La velocidad media de las moléculas de un gas a presiones normales es de varios centenares de metros por segundo. Sin embargo, si alguien en el extremo de una habitación abre un frasco de perfume, el aroma no llega al otro extremo hasta transcurridos varios minutos. En realidad, si no fuera por las corrientes de aire de la habitación (convección), el olor del perfume tardaría semanas en percibirse. Ello es debido a que las moléculas del perfume, aunque individualmente son muy rápidas, viajan según una trayectoria en zigzag debido a los choques que experimentan con las moléculas del aire. La distancia media recorrida por una molécula entre colisiones, λ, se denomina **recorrido libre medio**.

El recorrido libre medio de una molécula está relacionado con su tamaño, el tamaño de las moléculas de gas que le rodean y la densidad del gas. Consideremos una molécula de radio r_1 que se mueve con velocidad v a través de una región de moléculas estacionarias (figura 17.12). La molécula chocará con otra molécula de radio r_2 si los centros de las dos moléculas distan entre sí la distancia $d = r_1 + r_2$. (Si todas las moléculas fueran del mismo tipo, d sería el diámetro molecular.) Cuando la molécula se desplace, chocará con cualquier otra molécula cuyo centro se encuentre en un círculo de radio d (figura 17.13). En un tiempo t, la molécula recorre la distancia vt y choca con todas las moléculas contenidas en el volumen cilíndrico $\pi d^2 vt$. El número de moléculas contenido en este volumen es $n_V \pi d^2 vt$, donde $n_V = N/V$ es el número de moléculas por unidad de volumen. (Después de cada choque, la dirección de la velocidad cambia de modo que la trayectoria es en zigzag.) La longitud total recorrida dividida por el número de colisiones es el recorrido libre medio:

$$\lambda = \frac{vt}{n_V \pi d^2 vt} = \frac{1}{n_V \pi d^2}$$

Este cálculo del recorrido libre medio supone que todas las moléculas del gas excepto una son estacionarias. Cuando se tiene en cuenta el movimiento de todas las moléculas, la expresión correcta del recorrido libre medio viene dada por

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2} \qquad 17.23$$

RECORRIDO LIBRE MEDIO DE UNA MOLÉCULA

El tiempo medio entre colisiones se denomina **tiempo de colisión**, τ. El valor recíproco del tiempo de colisión, $1/\tau$, es aproximadamente igual al número medio de choques por segundo o **frecuencia de colisión**. Si v_m es la velocidad media, la distancia media recorrida entre colisiones es

$$\lambda = v_m \tau \qquad 17.24$$

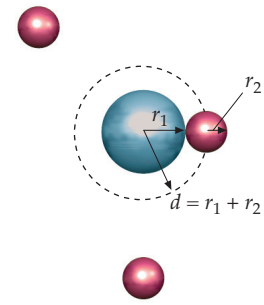


FIGURA 17.12 Modelo de una molécula (esfera central) que se mueve en un gas. La molécula de radio r_1 chocará con cualquier otra molécula de radio r_2 si sus centros se encuentran a una distancia $d = r_1 + r_2$, es decir, con cualquier molécula cuyo centro se encuentre en un círculo de radio $d = r_1 + r_2$, centrado alrededor de la molécula.

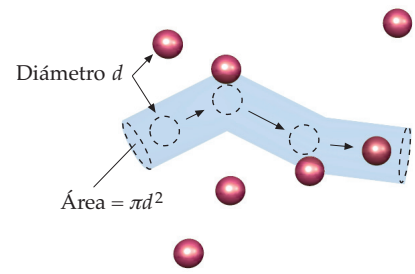


FIGURA 17.13 Modelo de una molécula que se mueve con velocidad v en un gas de moléculas semejantes. Se muestra el movimiento durante el intervalo de tiempo t. La molécula de diámetro d chocará con cualquier otra molécula semejante cuyo centro se encuentre en un cilindro de volumen $\pi d^2 vt$. En esta imagen, se supone que todos los choques son elásticos y que todas las moléculas excepto una se encuentran en reposo.

Ejemplo 17.10 Recorrido libre medio de una molécula de CO en el aire

Póngalo en su contexto

El centro local de control de sustancias tóxicas desea tener más información sobre el monóxido de carbono y saber cómo se difunde por una habitación. Se pide (*a*) calcular el recorrido libre medio de una molécula de monóxido de carbono y (*b*) hacer una estimación del tiempo medio entre colisiones. La masa molar del monóxido de carbono es 28,0 g/mol. Se supone que una molécula de CO se desplaza en el aire a 300 K y 1,00 atm, y que los diámetros de la molécula de CO y de las moléculas de aire son de aproximadamente $3{,}75 \times 10^{-10}$ m.

PLANTEAMIENTO (*a*) Como se nos proporciona el valor de d, podemos hallar λ a partir de $\lambda = 1/\left(\sqrt{2}\, n_V \pi d^2\right)$ haciendo uso de la ley de los gases ideales para obtener $n_V = N/V$. (*b*) Podemos hacer una estimación del tiempo de colisión utilizando v_{cm} como velocidad media.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Expresar λ en función de la densidad numérica n_V y del diámetro molecular d:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2}$$

2. Utilizar la ecuación $PV = NkT$ para calcular $n_V = N/V$:

$$n_V = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT} = \frac{101{,}3 \times 10^3 \text{ Pa}}{(1{,}381 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})} = 2{,}446 \times 10^{25} \text{ moléculas/m}^3$$

3. Aplicar este valor de n_V y el valor dado de d para calcular λ:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_V \pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2}(2{,}451 \times 10^{25}/\text{m}^3)\pi(3{,}75 \times 10^{-10} \text{ m}^2)^2}$$

$$= 6{,}5428 \times 10^{-8} \text{ m} = \boxed{6{,}54 \times 10^{-8} \text{ m}}$$

(*b*) 1. Expresar τ en función del recorrido libre medio λ:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_m}$$

2. Hacer una estimación de v_m a partir de v_{cm}:

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{3\,RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8{,}3145 \text{ J/[mol} \cdot \text{K]})(300 \text{ K})}{0{,}0280 \text{ kg/mol}}} = 517{,}0 \text{ m/s}$$

3. Utilizar $v_m < v_{cm}$ para dar valor de τ:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_m} \approx \frac{\lambda}{v_{cm}} = \frac{6{,}530 \times 10^{-8} \text{ m}}{517{,}0 \text{ m/s}} = \boxed{1{,}27 \times 10^{-10} \text{ s}}$$

COMPROBACIÓN El recorrido libre medio [el resultado de la parte (*a*), paso 3] es 174 veces el diámetro molecular $d = 3{,}75 \times 10^{-10}$ m. Si el valor calculado del recorrido libre medio fuese menor que el diámetro molecular, habría que localizar un error en el cálculo.

OBSERVACIÓN La frecuencia de colisión es aproximadamente igual a $1/\tau \approx 8 \times 10^9$ colisiones por segundo. (Estas son muchas colisiones por segundo.)

* DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES MOLECULARES

No es lógico que todas las moléculas de un gas posean la misma velocidad. El cálculo de la temperatura de un gas nos permite obtener el valor medio del cuadrado de la velocidad (el cuadrado de la velocidad cm) y, por lo tanto, la energía media de traslación de las moléculas de un gas, pero ello no nos da ningún detalle respecto a la *distribución* de las velocidades moleculares. Antes de considerar este problema, analizaremos el concepto general de funciones de distribución con algunos ejemplos elementales extraídos de la experiencia ordinaria.

Funciones de distribución Supongamos que un profesor propone una prueba de 25 cuestiones a un gran número N de estudiantes. Para describir los resultados obtenidos, el profesor podría utilizar la puntuación media, pero esta descripción no sería completa. Si todos los estudiantes obtienen una puntuación de 12,5, por ejemplo, esto sería completamente distinto al caso en que la mitad de los alumnos obtuviesen una puntuación de 25 puntos y la otra mitad cero puntos, a pesar de que en ambos ejemplos la puntuación media sería la misma. Una descripción completa de los resultados sería la especificación del número n_i de estudiantes que recibieron la puntuación s_i extendida a todas las puntuaciones recibidas. Dicho de otro modo, podríamos especificar la fracción $f_i = n_i/N$ de los estudiantes que recibieron la puntuación s_i. Tanto n_i como f_i, que son funciones de la variable s, se denominan **funciones de distribución**. La distribución fraccionaria suele ser la más conveniente. La probabilidad de que uno

de los N estudiantes seleccionado al azar haya recibido la puntuación s_i es igual al número total de alumnos que recibieron dicha puntuación n_i dividido por N, es decir, la probabilidad es igual a f_i. Obsérvese que

$$\sum_i f_i = \sum_i \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_i n_i$$

y como $\Sigma n_i = N$,

$$\sum_i f_i = 1 \qquad 17.25$$

DEFINICIÓN: CONDICIÓN DE NORMALIZACIÓN

La ecuación 17.25 se denomina **condición de normalización** de las distribuciones fraccionarias.

Para determinar la puntuación media, basta sumar todas las puntuaciones y dividir por N. Como cada puntuación s_i fue obtenida por $n_i = Nf_i$ estudiantes, esto es equivalente a

$$s_m = \frac{1}{N}\sum_i n_i s_i = \sum_i s_i f_i \qquad 17.26$$

De igual modo, el valor medio de cualquier función $g(s)$ se define por

$$g(s)_m = \frac{1}{N}\sum_i g(s_i) n_i = \sum_i g(s_i) f_i \qquad 17.27$$

VALOR MEDIO DE $g(s)$

En concreto, el valor medio del cuadrado de las puntuaciones es

$$(s^2)_m = \frac{1}{N}\sum_i s_i^2 n_i = \sum_i s_i^2 f_i \qquad 17.28$$

donde $(s^2)_m$ recibe el nombre de *cuadrado medio de la puntuación*, y la raíz cuadrada de $(s^2)_m$ se denomina **puntuación cuadrática media** o puntuación cm:

$$s_{cm} = \sqrt{(s^2)_m} \qquad 17.29$$

DEFINICIÓN: VALOR CUADRÁTICO MEDIO DE s

En la figura 17.14, se muestra una posible función de distribución. En ella, la puntuación más probable (la obtenida por el mayor número de estudiantes) es 16, la puntuación media es 14,2 y la puntuación cm es 14,9.

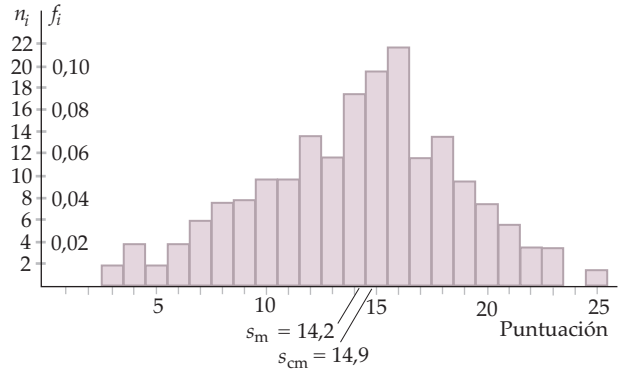


FIGURA 17.14 Distribución de calificaciones en una prueba de 25 cuestiones a 200 estudiantes. n_i es el número de estudiantes que recibieron la calificación s_i, y $f_i = n_i/N$ es la fracción de estudiantes que recibieron la calificación s_i. La calificación más probable es 16.

Ejemplo 17.11 Poniendo las notas

Quince estudiantes realizan una prueba de puntuación máxima 25. Las calificaciones son 25, 22, 22, 20, 20, 20, 18, 18, 18, 18, 18, 15, 15, 15 y 10. Determinar la calificación media y la calificación cm.

PLANTEAMIENTO La función de distribución de este problema es $n_{25} = 1$, $n_{22} = 2$, $n_{20} = 3$, $n_{18} = 5$, $n_{15} = 3$ y $n_{10} = 1$. Para determinar la puntuación media, utilizamos la ecuación 17.26. Para calcular la puntuación cuadrática media, usamos la ecuación 17.28 y luego extraemos la raíz cuadrada.

SOLUCIÓN

1. Por definición, s_m es:
$$s_m = \frac{1}{N}\sum_i n_i s_i = \frac{1}{15}[1(25) + 2(22) + 3(20) + 5(18) + 3(15) + 1(10)] = \frac{1}{15}(274) = 18{,}27 = \boxed{18{,}3}$$

2. Para calcular s_{cm}, determinamos primero el valor medio de s^2:
$$(s^2)_m = \frac{1}{N}\sum_1 n_i s_i^2 = \frac{1}{15}[1(25)^2 + 2(22)^2 + 3(20)^2 + 5(18)^2 + 3(15)^2 + 1(10)^2] = \frac{1}{15}(5188) = 345{,}9$$

3. Extraemos la raíz cuadrada de $(s^2)_m$:
$$s_{cm} = \sqrt{(s^2)_m} = \boxed{18{,}6}$$

COMPROBACIÓN Las puntuaciones media y cuadráticas medias difieren sólo en un 1 o 2 por ciento. Por otro lado, el valor cuadrático medio es mayor que el valor medio. El hecho de que el valor cm sea siempre mayor que (o igual a) el valor medio se aclara en la discusión que sigue a la ecuación 17.34*b*.

Consideremos ahora el caso de una distribución continua, por ejemplo, la distribución de estaturas de los habitantes de una nación. Para cualquier número finito N, el número de personas que tienen *exactamente* la estatura 2 m es cero. Si suponemos que la estatura puede determinarse con cualquier exactitud deseada, existen un número infinito de estaturas posibles y, por lo tanto, la probabilidad de que alguien tenga una estatura exacta particular es cero. Por lo tanto, dividiremos las estaturas en intervalos Δh (por ejemplo, Δh podría ser 1 cm o 0,5 cm) y determinaremos la fracción de personas del total cuyas estaturas están comprendidas en un determinado intervalo. Para valores muy grandes de N, este número es proporcional al tamaño del intervalo, siempre que el intervalo sea suficientemente pequeño. Definiremos esta función de distribución $f(h)$ como la fracción del número de personas con estaturas comprendidas en el intervalo entre h y $h + \Delta h$. Así, para N personas, $Nf(h)\,\Delta h$ es el número de éstas cuya estatura está comprendida entre h y $h + \Delta h$. La figura 17.15 muestra una distribución posible de estaturas.

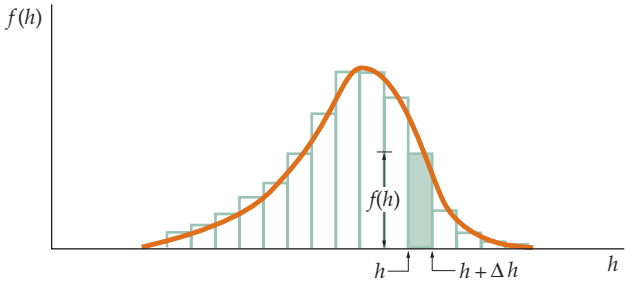


FIGURA 17.15 Distribución posible de estaturas. La fracción del número de estaturas comprendidas entre h y $h + \Delta h$ es igual al área sombreada $f(h)\,\Delta h$. El histograma puede aproximarse mediante una curva continua del modo que se indica.

La fracción de personas con estaturas en un intervalo determinado Δh es el área $f(h)\,\Delta h$. Si N es muy grande, podemos escoger un valor de Δh muy pequeño y el histograma será, aproximadamente, una curva continua. Podemos, pues, considerar la función de distribución $f(h)$ como una función continua, expresar el intervalo como dh y reemplazar las sumas de las ecuaciones 17.25 a 17.28 por integrales:

$$\int f(h)\,dh = 1 \qquad 17.30$$

CONDICIÓN DE NORMALIZACIÓN

$$h_m = \int h f(h)\,dh \qquad 17.31$$

$$[g(h)]_m = \int g(h) f(h)\,dh \qquad 17.32$$

VALOR MEDIO DE $g(h)$

donde $g(h)$ es una función arbitraria de h. Así,

$$(h^2)_m = \int h^2 f(h)\,dh \qquad 17.33$$

La probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga una altura comprendida entre h y $h + dh$ es $f(h)\,dh$. Una magnitud útil que caracteriza una distribución es la **desviación estándar** σ definida por

$$\sigma^2 = [(x - x_m)^2]_m \qquad 17.34a$$

DESVIACIÓN ESTÁNDAR σ

Desarrollando el cuadrado del segundo miembro, se obtiene

$$\sigma^2 = [x^2 - 2xx_m + x_m^2]_m = (x^2)_m - 2x_m x_m + x_m^2 = (x^2)_m - x_m^2$$

es decir

$$\sigma^2 = (x^2)_m - x_m^2 \qquad 17.34b$$

La desviación estándar mide la dispersión de los valores respecto al valor medio. En la mayor parte de las distribuciones existen pocos valores que difieran de x_m en una cantidad superior a unos pocos múltiplos de σ. En la conocida distribución en forma de campana (o distribución normal) aproximadamente el 68% de los valores suele localizarse dentro del intervalo $x_m \pm \sigma$.

En el ejemplo 17.11, vimos que el valor cm era mayor que el valor medio. Esta es una característica general para cualquier distribución (a menos que todos los valores sean idénticos, en cuyo caso $x_{cm} = x_m$). Podemos ver esto a partir de la

Gente caminando por una calle de la ciudad. Observe la diferente estatura de la gente que ve. *(Getty Images/PhotoAlto.)*

ecuación 17.29 observando que $x_{cm}^2 = (x^2)_m$. Sustituyendo x_{cm}^2 por $(x^2)_m$ en la ecuación 17.34*b*, se obtiene

$$\sigma^2 = x_{cm}^2 - x_m^2$$

Como σ^2 y x_{cm} son siempre positivas, x_{cm} debe ser siempre mayor que $|x_m|$.

Para la conocida distribución en forma de campana (llamada distribución normal), el 68% de los valores caen dentro del intervalo $x_m \pm \sigma$, el 95,5% caen dentro del intervalo $x_m \pm 2\sigma$, y el 99,7% caen dentro del intervalo $x_m \pm 3\sigma$. Esto se conoce como la regla 68, 95, 99,7.

Distribución de Maxwell-Boltzmann La distribución de las velocidades moleculares de un gas puede medirse directamente mediante el aparato que se muestra en la figura 17.16. En la figura 17.17, se representan estas velocidades para dos temperaturas distintas. La magnitud $f(v)$ de la figura 17.17 se denomina **función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann**. Si el número total de moléculas es N, el número dN de las que tienen velocidades comprendidas en el intervalo entre v y $v + dv$, viene dado por

$$dN = Nf(v)\,dv \qquad 17.35$$

La fracción $dN/N = f(v)\,dv$ en un intervalo concreto dv corresponde a la zona rayada de la figura. La función de distribución de Maxwell-Boltzmann puede obtenerse utilizando la mecánica estadística. El resultado es

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)} \qquad 17.36$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES DE MAXWELL-BOLTZMANN

La velocidad más probable $v_{máx}$ es aquella velocidad que corresponde al máximo de $f(v)$. Se deja como problema demostrar que

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2\,kT}{m}} = \sqrt{\frac{2\,RT}{M}} \qquad 17.37$$

VELOCIDAD MÁS PROBABLE

La velocidad cm viene dada por $v_{cm} = \sqrt{3RT/M}$ (ecuación 17.21). Comparando la ecuación 17.37 con la 17.21, se ve que la velocidad más probable es ligeramente menor que la velocidad cm.

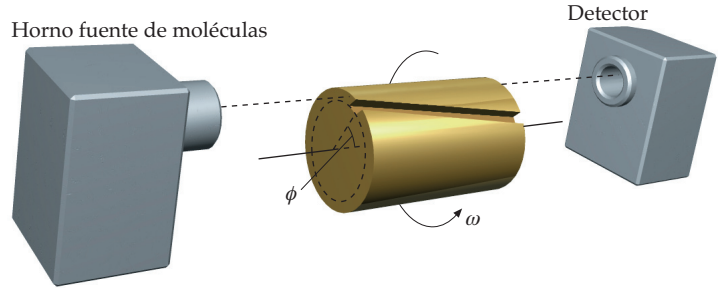


FIGURA 17.16 Esquema del aparato para la determinación de la distribución de velocidades de las moléculas de un gas. Una sustancia se vaporiza en un horno y las moléculas de vapor escapan a través de un orificio hecho en la pared del horno hacia un recinto vacío. Estas moléculas son colimadas en un haz estrecho mediante una serie de rendijas (no indicadas en la figura). El haz apunta a un detector que cuenta el número de partículas que inciden sobre él en un determinado periodo de tiempo. La mayor parte del haz es detenido por un cilindro rotatorio. Unas pequeñas ranuras helicoidales del cilindro (sólo se ha representado una de ellas) permiten el paso de aquellas moléculas que están comprendidas dentro de un estrecho intervalo de velocidades (determinado por la velocidad angular de rotación ω). El número de moléculas de cada intervalo de velocidades se mide variando ω en el cilindro y contando las que inciden en el detector para cada valor de ω.

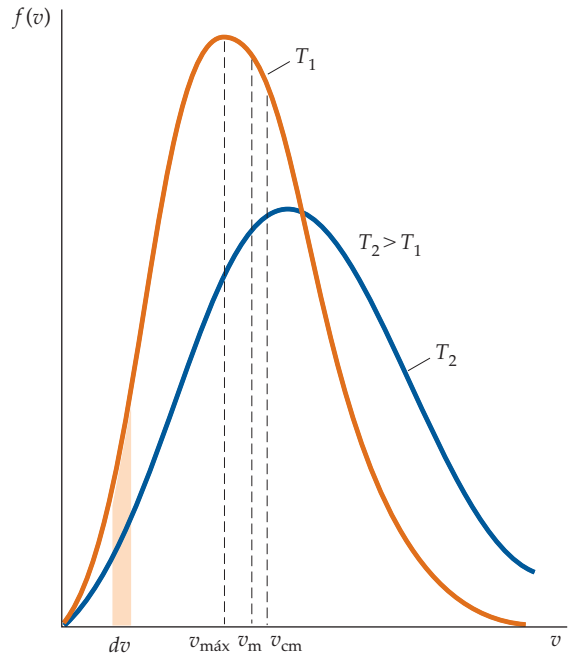


FIGURA 17.17 Distribución de velocidades moleculares de un gas a dos temperaturas, T_1 y $T_2 > T_1$. El área sombreada $f(v)\,dv$ es igual a la fracción del número de moléculas que poseen una velocidad concreta en un margen estrecho de velocidades dv. La velocidad media v_m y la velocidad cm v_{cm} son las dos ligeramente mayores que la velocidad más probable, $v_{máx}$.

Ejemplo 17.12 Uso de la distribución de Maxwell-Boltzmann

Utilizar la función de distribución de Maxwell-Boltzmann para calcular el valor medio de v^2 de las moléculas de un gas haciendo uso de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann.

PLANTEAMIENTO El valor medio de v^2 se determina a partir de la ecuación 17.33 reemplazando h por v. La función $f(v)$ viene dada por la ecuación 17.36.

SOLUCIÓN

1. Por definición, $(v^2)_m$ es: $$(v^2)_m = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv$$
2. Utilizar la ecuación 17.36 para $f(v)$: $$(v^2)_m = \int_0^\infty v^2 \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}\, dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2kT)}\, dv$$
3. La integral del paso 2 puede encontrarse en las tablas de integrales: $$\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/(2kT)}\, dv = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2}$$
4. Utilizar el resultado anterior para el cálculo de $(v^2)_m$: $$(v^2)_m = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{5/2} = \boxed{\frac{3kT}{m}}$$

COMPROBACIÓN Este resultado está de acuerdo con $v_{cm} = \sqrt{3kT/m}$ de la ecuación 17.21.

En el ejemplo 17.8, hallamos que la velocidad cm de las moléculas de hidrógeno es aproximadamente 1,93 km/s, valor que es un sexto de la velocidad de escape en la superficie de la Tierra, que resultaba ser 11,2 km/s como vimos en la sección 11.3. ¿Por qué no hay, pues, hidrógeno libre en la atmósfera terrestre? Como puede verse en la figura 17.17, una fracción considerable de las moléculas de un gas en equilibrio a una cierta temperatura tiene velocidades mayores que la velocidad cm. Cuando la velocidad cm de las moléculas de un gas concreto es solamente del orden del 15 al 20% de la velocidad de escape correspondiente a un determinado planeta, hay un número bastante elevado de moléculas que tienen velocidades mayores que la velocidad cm, de modo que el gas no puede permanecer en la atmósfera de dicho planeta durante mucho tiempo. Por consiguiente, en la práctica no hay hidrógeno en la atmósfera terrestre. Por otra parte, la velocidad cm de las moléculas de oxígeno es del orden de un cuarto de la correspondiente al hidrógeno, es decir, aproximadamente el 4% de la velocidad de escape en la superficie de la Tierra. Por lo tanto, muy pocas moléculas de oxígeno tienen velocidades mayores que la de escape y por eso se encuentra este gas en nuestra atmósfera.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 17.3

Como saben los físicos de bajas temperaturas, el nitrógeno líquido es mucho más barato que el helio líquido. Una razón de esto es que mientras el nitrógeno es el componente más corriente de la atmósfera, el helio sólo se encuentra en cantidades insignificantes. (El helio está presente en yacimientos de gas natural.) ¿Por qué el helio sólo se halla en cantidades insignificantes en la atmósfera?

Distribución de energías La distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann dada por la ecuación 15.36 puede escribirse también como una distribución de energía. Escribamos el número de moléculas con energía E en el intervalo entre E y $E + dE$ como

$$dN = NF(E)\, dE$$

donde $F(E)$ es la función de distribución de la energía. Esta dará el mismo número que se obtendría con la ecuación 17.36 si la energía está relacionada con la velocidad v por la expresión $E = \frac{1}{2}mv^2$. Entonces

$$dE = mv\, dv$$

y

$$Nf(v)\, dv = NF(E)\, dE$$

Podemos escribir

$$f(v)\, dv = Cv^2 e^{-mv^2/(2kT)}\, dv = Cve^{-E/(kT)} v\, dv = C\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2} e^{-E/(kT)}\frac{dE}{m}$$

donde $C = (4/\sqrt{\pi})[m/(2kT)]^{3/2}$ según la ecuación 17.36. Así pues, la función $F(E)$ viene dada por

$$F(E) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2}{m}\right)^{1/2}\frac{1}{m}E^{1/2}e^{-E/(kT)}$$

Simplificando, se obtiene la **función de distribución de energías de Maxwell-Boltzmann**:

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E^{1/2}e^{-E/(kT)} \qquad 17.38$$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE ENERGÍAS DE MAXWELL-BOLTZMANN

En el lenguaje de la mecánica estadística, la distribución de energía se considera como el producto de dos factores: uno, llamado **densidad de estados**, es proporcional a $\sqrt{E}$, el otro, $e^{-E/(kT)}$, es la probabilidad de que un estado sea ocupado y recibe el nombre de **factor de Boltzmann**.

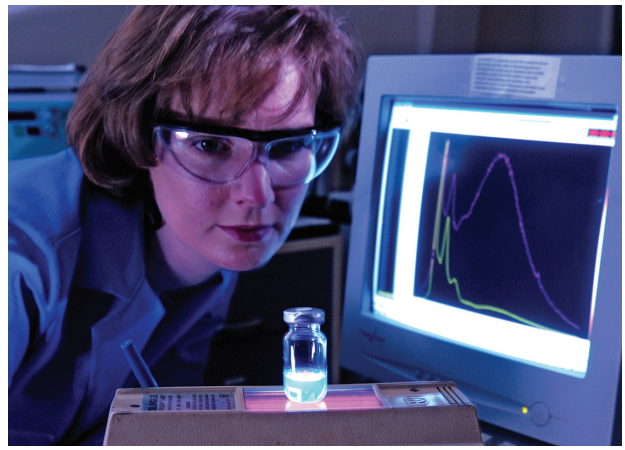
Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* **Cálculo diferencial**

Temas de actualidad en Física

Termómetros moleculares

Los termómetros moleculares muestran cambios de temperatura debidos a los cambios que experimentan las propias moléculas. Estos termómetros pueden ser bastante simples y económicos, y en la actualidad constituyen un objetivo de investigación intensiva.

Anillos que poseen características de cristales líquidos[1] experimentan cambios de color al variar la temperatura del dedo que lo lleva puesto. Muchos cristales líquidos tienen propiedades *termocrómicas* puesto que cambian de color con la temperatura. Dichos cristales líquidos están formados por moléculas enrolladas en torno a un eje. Cuando cambia la temperatura, las espiras de cada molécula se aprietan o se aflojan, lo que hace que los cristales líquidos absorban o reflejen la luz. Unos cristales líquidos son sensibles a variaciones del orden de 0,1 ºC[2] y, en particular, algunos muestran cambios de color en un pequeño intervalo de temperatura normalmente menor que 7 ºC. Sin embargo, distintos cristales líquidos pueden encerrarse en diferentes compartimentos en tiras que permiten detectar temperaturas dentro del intervalo que se extiende desde −30 ºC hasta 120 ºC. Estos termómetros de tiras se utilizan como termómetros de acuario, así como termómetros clínicos.[3] Los termómetros de cristal líquido proporcionan una vigilancia en tiempo real,[4] y son una opción económica cuando el coste constituye una preocupación.[5]



Una investigadora observa una muestra que es fluorescente en dos longitudes de onda. Es fluorescente porque está siendo iluminada por la parte inferior con luz ultravioleta. La razón de las dos longitudes de onda es una propiedad termométrica del material. *(LeRoy N. Sanchez/ Los Alamos National Laboratory.)*

Los termómetros fluorescentes pueden resultar útiles en la supervisión de los cambios de temperatura de los diminutos chips de ordenador durante los procesos de fabricación y en el control de los cambios de temperatura en automóviles durante las pruebas aerodinámicas y de fabricación.[6] Cuando estos termómetros están bañados por luz ultravioleta, la mayoría responde emitiendo luz en dos longitudes de onda. La razón de estas dos longitudes de onda está relacionada con la temperatura. Un termómetro fluorescente recientemente desarrollado mide las variaciones que experimenta la razón de las longitudes de onda de la luz emitida, con una precisión de hasta 0,05 ºC dentro del intervalo comprendido entre 25 ºC y 140 ºC.[7] A medida que la razón de las longitudes de onda cambia, los colores del espectro visible varían con la temperatura.

Pero hay veces que los termómetros moleculares han de medir temperaturas que son superiores a 150 ºC. En ese caso, los objetos cuya tempertura hay que medir pueden cubrirse con un polvo que emite fosforescencia, o brilla brevemente, cuando es excitado por la luz. La duración del brillo depende de la temperatura del objeto fosforescente. La duración de la fosforescencia ha sido utilizada por la industria del acero para determinar si un producto está a la temperatura correcta para la formación de la aleación deseada. Esta termometría de fosforescencia permite la medida de acero de 700 ºC con un margen de 3 ºC.[8] La termometría convencional cometía errores de hasta 40 ºC. Una mayor precisión ahorraría a la industria del acero unos 50 millones de euros al año.

Los termómetros a tiempo real no pueden decir lo sucedido en el pasado. La mayor temperatura que la carne alcanza en la cocina es un importante factor para la seguridad alimentaria. La temperatura de punto final (TPF) determina si una enfermedad relacionada con los alimentos es probable que ocurra. Por desgracia, no es posible medir la TPF una vez que el alimento se ha enfriado. Sin embargo, la razón de tres moléculas grandes en la carne de vacuno permite determinar la TPF con una precisión de 2 ºC,[9] incluso si la carne ha sido congelada y descongelada desde que fue cocinada. Así, es posible decir si carnes precocinadas repartidas en residencias de ancianos y escuelas han alcanzado una temperatura inadecuada antes de ser refrigeradas.

Debido al gran número de aplicaciones, que se extienden desde un control económico de la temperatura hasta la detección de temperaturas del pasado y el control industrial en tiempo real, la termometría tiene un brillante futuro.

---

[1] James, B. G., "Heat Sensitive Novelty Device", *U.S. Patent 3,802,945*, Apr. 9, 1974.
[2] White, M. A., and LeBlanc, M., "Thermochromism in Commercial Products", *Journal of Chemical Education*, Sept. 1999, Vol. 76, 1201–1205.
[3] Krause, B. F., "Accuracy and Response Time Comparisons of Four Skin Temperature-Monitoring Devices", *Nurse Anesthesia*, June 1993, Vol. 4, 55–61.
[4] Dart, R. C., et al., "Liquid Crystal Thermometry for Continuous Temperature Measurement in Emergency Department Patients", *Annals of Emergency Medicine*, Dec. 1985, Vol. 14, 1188–1190.
[5] Manandhar, N., et al., "Liquid Crystal Thermometry for the Detection of Neonatal Hypothermia in Nepal", *Journal of Tropical Pediatrics*, Feb. 1998, Vol. 55, 15+.
[6] Chandrasekharan, N., and Kelly, L., "Fluorescent Molecular Thermometers Based on Monomer/Exciplex Interconversion", *The Spectrum*, Sept. 2002, Vol. 15, No. 3, 1–7.
[7] Hanson, T., "Laboratory Scientists Develop Novel Fluorescent Thermometer", *Los Alamos National Laboratory News*, Sept. 4, 2004. http://www.lanl.gov/news/index.php?fuseaction=nb.story&story_id=5007&nb_date=2004-04-15 as of July 2006.
[8] "Thermometry for the Steel Industry", *Thermographic Phosphor Sensing Applications*, Oak Ridge National Laboratory. http://www.ornl.gov/sci/phosphors/galv.htm as of July 2006.
[9] Miller, D. R., and Keeton, J. T., "Verification of Safe Cooking Endpoints in Beef by Multiple Antigen Elisa", *2004 Beef Cattle Research In Texas Publication*. http://animalscience.tamu.edu/ANSC/beef/bcrt/2004/miller_3.pdf as of July 2006.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Escala Celsius y Fahrenheit	En la escala Celsius, el punto del hielo es 0 °C y el punto del vapor de agua, 100 °C. En la escala Fahrenheit, el punto del hielo es igual a 32 °F mientras que el punto de ebullición es 212 °F. Las temperaturas de las escalas Celsius y Fahrenheit están relacionadas por $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32°)$	17.2
2. Termómetros de gas	Los termómetros de gas tienen la propiedad de que todos ellos concuerdan entre sí en la medición de cualquier temperatura con tal de que la densidad del gas empleado en el termómetro sea muy baja. Se define la temperatura T (en kelvins) del gas ideal mediante la expresión $T = \frac{P}{P_3}T_3$ donde P es la presión del gas en el termómetro cuando éste se encuentra en equilibrio térmico con el sistema cuya temperatura se está midiendo, P_3 es la presión que se tiene cuando el termómetro está inmerso en un baño de agua-hielo-vapor en su punto triple y T_3 = 273,16 K (la temperatura del punto triple).	17.4
3. Escala de Celsius	La temperatura Celsius t_C está relacionada con la temperatura del gas ideal en kelvins mediante la expresión $t_C = T + 273{,}15\ \text{K}$	17.5
4. Gas ideal	A densidades bajas, todos los gases obedecen la ley de los gases ideales:	
Ecuación de estado	$PV = nRT$	17.13
Constante universal de los gases	$R = N_A k = 8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)} = 0{,}08206\ \text{atm}\cdot\text{L/(mol}\cdot\text{K)}$	17.12
Constante de Boltzmann	$k = 1{,}381 \times 10^{-23}\ \text{J/K} = 8{,}617 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}$	17.8
Número de Avogadro	$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$	17.9
Ecuación para una cantidad fija de gas	Una expresión de la ley de los gases ideales que es útil para la resolución de problemas en los que intervenga una cantidad fija de gas es $\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_1V_1}{T_1}$	17.14
5. Teoría cinética de gases		
Interpretación molecular de la temperatura	La temperatura absoluta T es una medida de la energía cinética media de traslación de las moléculas.	
Teorema de equipartición	Cuando un sistema está en equilibrio, hay una energía media de $\frac{1}{2}kT$ por molécula ($\frac{1}{2}RT$ por mol) asociada a cada grado de libertad.	
Energía cinética media	En el caso de un gas ideal, la energía cinética de traslación media de las moléculas es $K_{\text{tras m}} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{3}{2}kT$	17.19
Energía cinética de traslación total	La energía cinética de traslación total de n moles de gas que contienen N moléculas viene dada por $K_{\text{tras}} = N\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_m = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT$	17.20
Velocidad cm de las moléculas	La velocidad cm de una molécula de un gas está relacionada con la temperatura absoluta por $v_{cm} = \sqrt{(v^2)_m} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ donde m es la masa de la molécula y M, la masa molar.	17.21
Recorrido libre medio	El recorrido libre medio λ de una molécula está relacionado con su diámetro d y el número de moléculas por unidad de volumen n_V mediante la expresión $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,n_V \pi d^2}$	17.23

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
*6. **Distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann**	$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}$	17.36
Distribución de energías de Maxwell-Boltzmann	$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{kT}\right)^{3/2} E^{1/2} e^{-E/(kT)}$	17.38

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

17.1 La habitación provista de aire acondicionado es la que tiene más aire.

17.2 Decrece el volumen.

17.3 La velocidad cuadrática media del helio viene a ser el 12% de su velocidad de escape de la superficie de la Tierra. Por tanto, hay bastantes moléculas de helio con velocidades por encima de la de escape, lo que permite al helio escapar lentamente de la Tierra.

Respuestas a los problemas prácticos

17.1 (*a*) 20 °C, (*b*) −40 °F

17.2 (*a*) $n = 4{,}47 \times 10^{-5}$ mol, (*b*) $N = 2{,}69 \times 10^{19}$ moléculas

17.3 $n = 0{,}0804$ mol

17.4 $5{,}2 \times 10^2$ m/s

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Verdadero o falso:

(*a*) La ley cero de la termodinámica establece que dos objetos en equilibrio térmico entre sí deben estar en equilibrio térmico con un tercer objeto.

(*b*) Las escalas Fahrenheit y Celsius difieren sólo en la elección de la temperatura del **punto del hielo**.

(*c*) El kelvin tiene el mismo tamaño que el grado Celsius.

2 • ¿Cómo podemos determinar si dos cuerpos están en equilibrio térmico entre sí, cuando al ponerlos en contacto físico apareciesen efectos no deseados? (Por ejemplo, si ponemos un trozo de sodio en contacto con agua se produciría una violenta reacción química.)

3 • "Un día me desperté y mi habitación estaba a 20 °F", dijo Hugo. "Eso no es nada", le replicó un viejo amigo. "Mi habitación estaba una vez a −5 °C". ¿Qué habitación era la más fría? SSM

4 • Dos recipientes idénticos contienen gases ideales distintos a igual presión y temperatura. Se deduce que (*a*) el número de moléculas gaseosas es el mismo en ambos recipientes, (*b*) la masa total del gas es la misma en ambos recipientes, (*c*) la velocidad media de las moléculas del gas es la misma en ambos recipientes, (*d*) ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

5 • La figura 17.18 muestra un gráfico del volumen V en función de la temperatura T para un proceso seguido por un gas ideal desde el punto A al punto B. ¿Qué le ocurre a la presión del gas durante este proceso? SSM

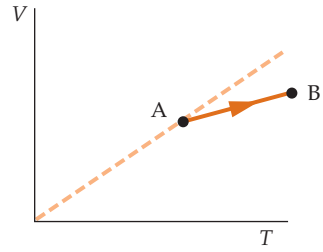


FIGURA 17.18
Problema 5

6 • La figura 17.19 muestra un gráfico de la presión P en función de la temperatura T para un proceso seguido por un gas ideal desde el punto A al punto B. ¿Qué le ocurre al volumen del gas durante este proceso?

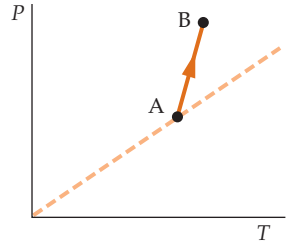


FIGURA 17.19
Problema 6

7 • Si un recipiente contiene cantidades iguales de masa de helio y argón, ¿cuáles de las siguientes respuestas son verdaderas?
(*a*) La presión parcial ejercida por cada uno de los dos gases sobre las paredes del recipiente es la misma.
(*b*) La velocidad media de un átomo de helio es la misma que la de un átomo de argón.
(*c*) Hay el mismo número de átomos de helio que de argón.
(*d*) Ninguna de las respuestas anteriores.

8 • ¿En qué factor debe incrementarse la temperatura absoluta de un gas para duplicar la velocidad cm de sus moléculas?

9 • Dos gases diferentes están a la misma temperatura. ¿Qué se puede decir de las energías cinéticas medias de traslación de las moléculas? ¿Y qué de las velocidades cm de las moléculas de los gases?

10 • Una vasija contiene una mezcla de helio, He, y metano, CH_4. La relación que existe entre las velocidades cm de los átomos de helio y las moléculas de CH_4 es (*a*) 1, (*b*) 2, (*c*) 4, (*d*) 16.

11 • Verdadero o falso: si la presión de un gas aumenta, la temperatura debe aumentar.

12 • ¿Por qué las escalas Celsius y Fahrenheit son más convenientes que la escala absoluta para objetivos ordinarios, no científicos?

13 • Un astrónomo sostiene que la temperatura en el centro del Sol es del orden de 10^7 grados. ¿Estos grados son Celsius o kelvins o en realidad no importa una escala u otra?

14 • Imagínese que tenemos una cantidad fija de gas ideal en un recipiente que se expande para mantener constante la presión. Si se duplica la temperatura absoluta del gas, la velocidad media de las moléculas (*a*) permanece constante, (*b*) se duplica, (*c*) se cuadruplica, (*d*) crece en un factor $\sqrt{2}$.

15 • Si durante cierto proceso la temperatura y el volumen de un gas ideal se reducen a la mitad, la presión del gas (*a*) disminuye en un factor 2, (*b*) permanece constante, (*c*) crece en un factor 2, (*d*) crece en un factor 4. SSM

16 • La energía cinética de traslación media de las moléculas de un gas ideal depende (*a*) del número de moles del gas y su temperatura, (*b*) de la presión del gas y su temperatura, (*c*) sólo de la presión del gas, (*d*) sólo de la temperatura del gas.

17 •• ¿Qué velocidad es mayor, la velocidad del sonido en un gas o la velocidad cuadrática media de las moléculas del gas? Justificar la respuesta haciendo uso de las fórmulas apropiadas, y explicar por qué la respuesta es intuitivamente correcta. SSM

18 •• Suponer que la temperatura de un gas se aumenta mientras permanece fijo su volumen. Explicar en términos del movimiento molecular por qué aumenta la presión del gas sobre las paredes del recipiente.

19 •• Imaginar que se comprime un gas manteniendo constante una temperatura fija (quizás sumergiendo el recipiente en agua fría). Explicar en términos del movimiento molecular por qué aumenta la presión del gas sobre las paredes del recipiente.

20 •• El oxígeno tiene una masa molar de 32 g/mol y el nitrógeno de 28 g/mol. Las moléculas de oxígeno y nitrógeno en una habitación tienen:
(*a*) iguales energías cinéticas de traslación medias, pero las moléculas de oxígeno tienen velocidades medias más grandes que las de nitrógeno.
(*b*) iguales energías cinéticas de traslación media, pero las moléculas de oxígeno tienen una velocidad media más pequeña que la de las moléculas de nitrógeno.
(*c*) iguales energías cinéticas e iguales velocidades.
(*d*) iguales velocidades medias, pero las moléculas de oxígeno tienen mayor energía cinética media de traslación que las moléculas de nitrógeno.
(*e*) iguales velocidades de traslación medias, pero las moléculas de oxígeno tienen una energía cinética media de traslación más pequeña que la de las moléculas de nitrógeno.
(*f*) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

21 •• El nitrógeno líquido es relativamente barato, mientras que el helio líquido es relativamente caro. Un motivo de esta diferencia de precio es que mientras el nitrógeno es el componente más abundante de la atmósfera, el helio sólo se encuentra en pequeñas trazas. Utilizar ideas de este capítulo para explicar por qué sólo se encuentran pequeñas trazas de helio en la atmósfera. SSM

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

22 • Hacer un cálculo aproximado del número de moléculas de aire que hay en su aula.

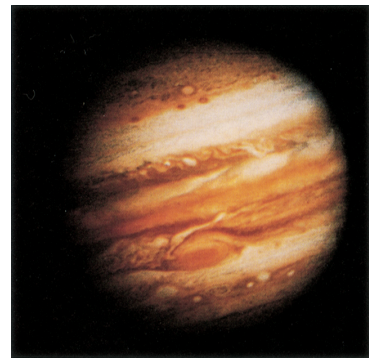
23 •• Hacer un cálculo aproximado de la densidad del aire seco a nivel del mar en un día cálido de verano.

24 •• Un tubo de ensayo sellado de 10,0 mL de volumen contiene 1 mL de agua, está a una temperatura de 100 °C e inicialmente a una presión de 1 atm ($1{,}01 \times 10^5$ N/m^2). El tubo de ensayo se mantiene sobre una llama hasta que el agua ha hervido completamente. Hacer una estimación de la presión en el interior del tubo de ensayo.

25 •• En el capítulo 11, demostramos que la velocidad de escape en la superficie de un planeta de radio R y aceleración de la gravedad g viene dada por $v_e = \sqrt{2gR}$. Si la velocidad cm de un gas es entre un 15 y un 20% mayor que la velocidad de escape de un planeta, prácticamente todas las moléculas de ese gas escaparán de la atmósfera del planeta.
(*a*) ¿A qué temperatura el valor de v_{cm} para el O_2 será igual al 15% de la velocidad de escape de la Tierra?
(*b*) ¿A qué temperatura el valor v_{cm} para el H_2 será igual al 15% de la velocidad de escape de la Tierra?
(*c*) Las temperaturas en la alta atmósfera alcanzan los 1000 K. ¿Puede esto explicar la escasa presencia de hidrógeno en la atmósfera terrestre?
(*d*) Calcular las correspondientes temperaturas para que los valores de v_{cm}, del O_2 y el H_2, sean iguales al 15% de la velocidad de escape en la Luna, donde g es un sexto de su valor en la Tierra y $R = 1738$ km. ¿Puede explicarse de esta forma la ausencia de atmósfera en la Luna? SSM

26 •• La velocidad de escape de moléculas gaseosas en la atmósfera de Marte es 5,0 km/s y la temperatura típica de su superficie es 0 °C. Calcular la velocidad cm del (*a*) H_2, (*b*) O_2 y (*c*) CO_2 a esta temperatura. (*d*) En base a este criterio, ¿es probable encontrar H_2, O_2 y CO_2 en la atmósfera de Marte?

27 •• Repetir el problema 26 para Júpiter cuya velocidad de escape es 60 km/s y cuya temperatura es – 150 °C. SSM



Júpiter visto desde una distancia de casi veinte millones de kilómetros. Como la velocidad de escape en la superficie de Júpiter es de 600 km/s, aproximadamente, Júpiter retiene fácilmente hidrógeno en su atmósfera. *(Jet Propulsion Laboratory/ NASA.)*

28 •• Hacer un cálculo aproximado de la presión media sobre la pared frontal de una pista de frontón, debida a las colisiones de la pelota con la pared durante un juego. Utilizar números razonables para la masa de la pelota, su velocidad típica, y las dimensiones de la pista. ¿Es la presión media debida a la pelota importante comparada con la del aire?

29 •• En primera aproximación, el Sol es un gas de igual número de protones y electrones. (Las masas de estas partículas se encuentran en el Apéndice B.) La temperatura en el centro del Sol es de unos 10^7 K y la densidad del Sol es de 10^5 kg/m^3. Debido a que la temperatura es tan alta, protones y electrones son partículas separadas (más que unidas para formar átomos de hidrógeno). (*a*) Hacer un cálculo aproximado de la presión en el centro del Sol. (*b*) Estimar las velocidades cuadráticas medias de los protones y electrones en el centro del Sol.

30 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Estamos diseñando una cámara de vacío para fabricar capas reflectivas. Dentro de esta cámara, una pequeña muestra de metal se vaporizará para que sus átomos se muevan en línea recta (los efectos de la gravedad carecen de importancia durante el breve tiempo de vuelo) hasta una superficie donde aterrizan para formar una película muy delgada. La muestra de metal está a 30 cm de la superficie en la que los átomos de metal se depositan. ¿Cómo de baja debe ser la presión en la cámara para que los átomos de metal sólo raramente colisionen con moléculas de aire antes de depositarse sobre la superficie?

31 ••• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** En condiciones normales de respiración, aproximadamente el 5% de cada espiración es dióxido de carbono. Con esta información, y dejando a un lado cualquier diferencia en el contenido agua-vapor, hacer un cálculo aproximado de la diferencia habitual en masa entre una inspiración y una espiración. SSM

ESCALA DE TEMPERATURA

32 • Se aplica un tipo de cera en los esquíes para que resistan mejor las temperaturas comprendidas entre −12 °C y −7 °C. ¿Cuál es este intervalo de temperaturas en la escala Fahrenheit?

33 • El punto de fusión del oro (Au) es 1945,4 °F. Expresar esta temperatura en la escala Celsius. SSM

34 • Un parte meteorológico señala que se espera que la temperatura descienda más de 15,0 ºC en las próximas cuatro horas. ¿En cuántos grados en la escala Fahrenheit descenderá la temperatura?

35 • La longitud de una columna de mercurio de un termómetro es de 4,0 cm cuando el termómetro se sumerge en agua con hielo a 1 atm de presión y 24,0 cm cuando el termómetro se coloca en agua hirviendo a 1 atm de presión. Suponer que la longitud de la columna de mercurio varía linealmente con la temperatura. (*a*) Dibujar una gráfica de la longitud de la columna de mercurio en función de la temperatura en grados Celsius. (*b*) ¿Cuál será su longitud en una habitación a 22,0 °C? (*c*) La columna de mercurio mide 25,4 cm cuando el termómetro se introduce en una solución química. ¿Cuál es la temperatura de la solución?

36 • La temperatura en el interior del Sol es de unos 10^7 K. ¿Cuál es esta temperatura (*a*) en la escala de Celsius? (*b*) ¿Y en la escala de Fahrenheit?

37 • El punto de ebullición del nitrógeno, N_2, es 77,35 K. Expresar esta temperatura en grados Fahrenheit.

38 • La presión de un termómetro de gas a volumen constante es de 0,400 atm en el punto del hielo y de 0,546 atm en el punto del vapor. (*a*) Dibujar una gráfica de la presión en función de la temperatura Celsius para este termómetro. (*b*) Cuando la presión es de 0,100 atm, ¿cuál es la temperatura? (*c*) ¿Cuál es la presión en el punto de ebullición del azufre (444,6 °C)?

39 • Un termómetro de gas a volumen constante indica una presión de 50 torr en el punto triple del agua. (*a*) Dibujar una gráfica de la presión en función de la temperatura absoluta para este termómetro. (*b*) ¿Cuál será la presión cuando el termómetro mida una temperatura de 300 K? (*c*) ¿Qué temperatura de gas ideal corresponde a una presión de 678 torr? SSM

40 • Un termómetro de gas a volumen constante se encuentra a una presión de 30 torr cuando se aplica una temperatura de 373 K. (*a*) Dibujar una gráfica de la presión en función de la temperatura absoluta para este termómetro. (*b*) ¿Cuál es su presión P_3 en el punto triple? (*c*) ¿Qué temperatura corresponde a una presión de 0,175 torr?

41 • ¿A qué temperatura las escalas Fahrenheit y Celsius ofrecen la misma lectura?

42 • El sodio funde a 371 K. ¿Cuál es el punto de fusión del sodio en las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit?

43 • El punto de ebullición del oxígeno a 1,00 atm es 90,2 K. ¿Cuál es el punto de ebullición del oxígeno a 1,00 atm en las escalas Celsius y Fahrenheit?

44 •• En la escala de temperaturas Réaumur, el punto de fusión del hielo es 0 °R y el punto de ebullición del agua 80 °R. Deducir expresiones para convertir las temperaturas de la escala Réaumur en temperaturas Celsius o Fahrenheit.

45 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un termistor es un dispositivo de estado sólido cuya resistencia varía considerablemente con la temperatura. Esta dependencia frente a la temperatura viene dada aproximadamente por $R = R_0 e^{B/T}$, donde R se expresa en ohmios (Ω), T en kelvins, y R_0 y B son constantes que pueden determinarse midiendo R para puntos de calibración conocidos, como el punto de congelación del hielo y el punto de ebullición del agua. (*a*) Si $R = 7360\ \Omega$ en el punto de congelación y 153 Ω en el punto de ebullición, calcular R_0 y B. (*b*) ¿Cuál es la resistencia del termistor a 98,6 °F? (*c*) ¿Cuál es la variación de la resistencia con la temperatura (dR/dT) en el punto de congelación y en el punto de ebullición? (*d*) ¿Para cuál de estas temperatura es este termistor más sensible? SSM

LEY DE LOS GASES IDEALES

46 • Un gas ideal se mantiene a presión constante en un cilindro provisto de un émbolo (figura 17.20). Si su temperatura varía desde 50 ºC a 100 °C, ¿en qué factor varía su volumen?

FIGURA 17.20 Problemas 46 y 71

47 • Una vasija de 10,0 L contiene gas a 0 °C y a una presión de 4,00 atm. ¿Cuántos moles de gas hay en la vasija? ¿Cuántas moléculas? SSM

48 •• Una baja presión de $1{,}00 \times 10^{-8}$ torr puede conseguirse mediante una bomba de difusión de aceite. ¿Cuántas moléculas hay en 1,00 cm^3 de un gas a esta presión si la temperatura es de 300 K?

49 •• De un libro de texto de física marciano copiamos el siguiente párrafo "1 *smorf* de un gas ideal ocupa un volumen de 1,35 *zaks*. A una temperatura de 22 *glips*, el gas tiene una presión de 12,5 *klads*. A temperatura de −10 *glips*, el mismo gas tiene ahora una presión de 8,7 *klads*." Determinar la temperatura del cero absoluto en *glips*.

50 •• Un conductor hincha los neumáticos de su coche a una presión de 180 kPa un día en que la temperatura ambiente es de −8,0 °C. Cuando llega a su destino, la presión de los neumáticos ha aumentado hasta 245 kPa. ¿Cuál es la temperatura de los neumáticos si suponemos que (*a*) los neumáticos no se dilatan o (*b*) que los neumáticos se dilatan un 7%?

51 •• Una habitación tiene 6 m × 5 m × 3 m. (*a*) Si la presión del aire en ella es 1 atm y su temperatura es 300 K, hallar el número de moles de aire en la habitación. (*b*) Si la temperatura sube en 5 K y la presión permanece constante, ¿cuántos moles de aire salen de la habitación?

52 •• Supóngase que 10,0 g de helio líquido, inicialmente a 4,20 K, se evaporan en un globo vacío que se mantiene a 1 atm de presión. ¿Cuál es el volumen del globo a (*a*) 25,0 K, y (*b*) 293 K?

53 •• Un recipiente cerrado con un volumen de 6,00 L contiene 10,0 g de helio líquido a 25,0 K y aire suficiente para llenar el resto de su volumen a una presión de 1,00 atm. El helio se evapora después y el recipiente se calienta a temperatura ambiente (293 K). ¿Cuál es la presión final dentro del recipiente?

54 •• Un neumático de un automóvil está a una presión manométrica (que es la diferencia entre la presión real y la atmosférica) de 200 kPa cuando se encuentra a la temperatura de 20 °C. Se conduce el coche a alta velocidad y la temperatura del neumático aumenta hasta 50 °C. (*a*) Suponiendo que el volumen del neumático no varía, calcular la presión manométrica del aire en el mismo (suponiendo que el aire se comporta como gas ideal). (*b*) Calcular la presión manométrica si el neumático se dilata de forma que su volumen aumenta en un 10%.

55 •• Después del nitrógeno (N_2) y del oxígeno (O_2), la molécula más abundante en la atmósfera terrestre es el agua (H_2O). Sin embargo, la fracción de moléculas H_2O en un volumen dado de aire varía de manera espectacular, desde prácticamente un 0% en condiciones de extrema sequedad hasta un 4% donde es muy húmeda. (*a*) A una temperatura y presión dadas, ¿podría el aire ser más denso cuando su contenido de vapor de agua fuese grande o pequeño? (*b*) ¿Cuál es la diferencia en masa, a temperatura ambiente y presión atmosférica, entre un metro cúbico de aire sin moléculas de vapor de agua y un metro cúbico de aire en el que el 4% de las moléculas son de vapor de agua? SSM

56 •• Un submarinista situado a 40 m por debajo de la superficie de un lago, donde la temperatura es 5 °C, suelta una burbuja de aire con volumen de 15 cm^3. La burbuja sube a la superficie, donde la temperatura es 25 °C. Suponer que el aire de la burbuja está siempre en equilibrio térmico con el agua que la rodea, y que no hay intercambio de moléculas entre la burbuja y el agua circundante. ¿Cuál es el volumen de la burbuja justo antes de romperse en la superficie? *Ayuda: recordar que también varía la presión.*

57 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un globo lleno de aire caliente está abierto por la parte inferior. El globo, que tiene un volumen de 446 m^3, está lleno de aire que tiene una temperatura media de 100 ºC. El aire del exterior del globo tiene una temperatura de 20,0 ºC y una presión de 1 atm. ¿Cuánta carga (incluyendo la envoltura del globo) puede levantar éste? Usar como masa molar del aire 29,0 g/mol. (Despreciar el volumen de la carga y el de la envoltura del globo.) SSM

58 ••• Un globo de helio se utiliza para elevar una carga de 110 N. El peso de la cubierta del globo es 50 N y su volumen cuando está totalmente hinchado es de 32,0 m^3. La temperatura del aire es 0 °C y la presión atmosférica es de 1 atm. El globo se infla lo suficiente con gas helio para que la fuerza neta sobre él y su carga sea de 30,0 N. Despreciar los cambios de temperatura con la altura. (*a*) ¿Cuántos moles de gas helio contiene el globo? (*b*) ¿A qué altura el globo estará completamente hinchado? (*c*) ¿Alcanzará el globo la altura a la cual está completamente hinchado? (*d*) Si la respuesta a (*c*) es afirmativa, ¿cuál será la altura máxima alcanzada por el globo?

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

59 • (*a*) Calcular la v_{cm} de un átomo de argón si un mol de este gas se encuentra en un recipiente de 1 L a 10 atm. (Para el argón $M = 40 \times 10^{-3}$ kg/mol.) (*b*) Compárese este resultado con la v_{cm} del gas helio en las mismas condiciones. SSM

60 • Hallar la energía cinética de traslación total de 1,0 L de gas oxígeno a una temperatura de 0,0 °C y una presión de 1,0 atm.

61 • Hallar la velocidad cm y la energía cinética media de un átomo de hidrógeno a una temperatura de 10^7 K. (A esta temperatura, que es del orden de las que existen en el interior de las estrellas, el hidrógeno está ionizado y está constituido por un simple protón.)

62 • El helio líquido tiene una temperatura de solo 4,2 K y está en equilibrio con su vapor a presión atmosférica. Calcular la velocidad cuadrática media de un átomo de helio en el vapor a esta temperatura y comentar el resultado.

63 • Demostrar que el recorrido libre medio de una molécula en un gas ideal a la temperatura T y presión P viene dado por $\lambda = kT/(\sqrt{2}\,P\pi d^2)$.

64 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un equipo moderno de vacío puede alcanzar presiones tan bajas como $P = 7{,}0 \times 10^{-11}$ Pa. Supongamos que una cámara contiene helio a esta presión y a temperatura ambiente (300 K). Hacer un cálculo aproximado del recorrido libre medio λ y del tiempo medio de colisión t para el helio en esta cámara. Considerar que el diámetro de una molécula de helio es 10^{-10} m.

65 •• En una vasija cúbica de 15 cm de arista tenemos oxígeno (O_2) a la temperatura de 300 K. Comparar la energía cinética media de una molécula del gas con la variación que experimentaría su energía potencial si cayera desde la parte superior al fondo del recipiente. SSM

*DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES MOLECULARES

66 •• Demostrar que la función $f(v)$ dada por la ecuación 17.36 es un máximo cuando $v = \sqrt{2kT/m}$.

67 •• Como $f(v)\,dv$ da la fracción de moléculas que tienen velocidades en el intervalo dv, la integral de $f(v)\,dv$ extendida a todos los intervalos posibles de velocidades debe ser igual a 1. Dada la integral $\int_0^\infty v^2 e^{-av^2}\,dv = \sqrt{(\pi/4)}a^{-3/2}$, demostrar que $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$, donde $f(v)$ viene dada por la ecuación 17.36. SSM

68 •• Dada la integral $\int_0^\infty v^3 e^{-av^2}\,dv = (1/2a^2)$, calcular la velocidad media v_m de las moléculas de un gas utilizando la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

69 •• **MÚLTIPLES PASOS** Las energías cinéticas de traslación de las moléculas de un gas se reparten de acuerdo con la distribución de energía de Maxwell-Boltzmann, ecuación 17.38. (*a*) Determinar el valor más probable de la energía de traslación (en función de la temperatura T) y comparar este valor con el valor medio. (*b*) Hacer una gráfica de la distribución de energía cinética de traslación [$f(E)$ en función de E] y marcar la energía más probable y la energía media (no preocuparse de calibrar la escala vertical de la gráfica). (*c*) Fijarse sólo en la gráfica $f(E)$ en función de E permite ver que la energía cinética media de traslación es considerablemente mayor que la energía cinética más probable de traslación. ¿Qué rasgos de la gráfica respaldan esa afirmación?

PROBLEMAS GENERALES

70 • ¿A qué temperatura será la velocidad cm de una molécula de hidrógeno gaseoso igual a 343 m/s?

71 •• (*a*) Si un mol de gas ocupa un volumen de 10 L a la presión de 1,0 atm, ¿cuál es la temperatura del gas en kelvins? (*b*) El recipiente, a fin de que el volumen pueda variarse, lleva acoplado un pistón (figura 17.20). El gas se calienta a presión constante y se expande hasta un volumen de 20 L. ¿Cuál es la temperatura del gas en kelvins? (*c*) El volumen se fija ahora a 20 L y el gas se calienta a volumen constante hasta que su temperatura alcanza los 350 K. ¿Cuál es la presión del gas ahora?

72 •• **MÚLTIPLES PASOS** (*a*) El volumen por molécula de un gas es el recíproco de la densidad numérica (el número de moléculas por unidad de volumen). Hallar el volumen medio por molécula del aire seco a temperatura ambiente y presión atmosférica. (*b*) Extraer la raíz cúbica del resultado de (*a*) para obtener un valor aproximado de la distancia media d entre las moléculas de aire. (*c*) Hallar o hacer un cálculo aproximado del diámetro D de una molécula de aire, y compararlo con la respuesta obtenida en (*b*). (*d*) Dibujar las moléculas en un volumen de aire de forma cúbica, con la longitud de la arista del cubo igual a $3d$. Hacer la figura a escala y colocar las moléculas en una configuración que nos parezca característica. (*e*) Utilizar el dibujo para dar una explicación de por qué el recorrido libre medio de una molécula de aire es mucho mayor que la distancia media entre moléculas.

73 •• **CONCEPTUAL** La distribución de Maxwell–Boltzmann no sólo se aplica a los gases, sino también a los movimientos moleculares dentro de los líquidos. El hecho de que no todas las moléculas tengan la misma velocidad nos ayuda a comprender el proceso de la evaporación. (*a*) Explicar en términos del movimiento molecular por qué una gota de agua se enfría cuando se evaporan moléculas de la superficie de la gota. (El enfriamiento por evaporación es un importante mecanismo de regulación de la temperatura de nuestro cuerpo, y se usa también para enfriar edificios en lugares calurosos y secos.) (*b*) Utilizar la distribución de Maxwell-Boltzmann para explicar por qué incluso un ligero aumento de temperatura puede aumentar mucho la tasa de evaporación de las gotas de agua. SSM

74 •• Una caja cúbica metálica, de 20 cm de lado, contiene aire a la presión de 1,0 atm y a 300 K de temperatura. Se cierra herméticamente, de forma que el volumen sea constante, y se calienta hasta 400 K. Hallar la fuerza neta que actúa sobre cada pared de la caja.

75 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** En el intento de producir hidrógeno líquido como combustible, una de las propuestas consiste en convertir algo tan sencillo como el agua (H_2O) en los gases H_2 y O_2 por medio de la *electrolisis*. ¿Cuántos moles de estos gases resultan de la electrólisis de 2,0 L de agua? SSM

76 •• Un cilindro hueco de masa despreciable de 40 cm de longitud descansa sobre una mesa horizontal sin rozamiento. El cilindro se divide en dos secciones iguales por una membrana no porosa. Una sección contiene nitrógeno y la otra oxígeno. La presión del nitrógeno es doble de la del oxígeno. ¿Qué distancia recorrerá el cilindro si la membrana se rompe?

77 •• Un cilindro de volumen fijo contiene una mezcla de gas helio (He) y gas hidrógeno (H_2) a una temperatura T_1 y presión P_1. Si la temperatura se dobla a $T_2 = 2T_1$, la presión también se haría doble si no se considera que a esa temperatura el H_2 está completamente disociado en H_1. En realidad, a la presión $P_2 = 2P_1$, la temperatura es $T_2 = 3T_1$. Si la masa del hidrógeno en el cilindro es m, ¿cuál es la masa del helio en el cilindro?

78 •• El recorrido libre medio de las moléculas de O_2 a una temperatura de 300 K y una presión de 1,00 atm ($1{,}01 \times 10^5$ Pa) es $l = 7{,}1 \times 10^{-8}$ m. Utilizar este dato para hacer una estimación del tamaño de una molécula de O_2.

79 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Experimentos actuales pueden crear gases de baja densidad de rubidio y otros átomos con temperaturas del orden del nanokelvin (10^{-9} K). Estos átomos son atrapados y enfriados utilizando campos magnéticos y láseres en cámaras de vacío ultraelevado. Un método que se utiliza para medir la temperatura de un gas atrapado consiste en cerrar la trampa y medir el tiempo que tardan las moléculas del gas en caer una distancia dada. Considerar un gas de átomos de rubidio a una temperatura de 120 nK. Calcular cuanto tardaría un átomo en recorrer una distancia de 10,0 cm desplazándose a la velocidad cuadrática media del gas si (*a*) estuviese inicialmente moviéndose hacia abajo, y (*b*) si estuviese inicialmente moviéndose hacia arriba. Suponer que los átomos no colisionan entre sí a lo largo de su trayectoria. SSM

80 ••• Un cilindro se llena con 0,1 mol de un gas ideal a temperatura y presión normales, un émbolo de 1,4 kg sin rozamiento cierra el cilindro (figura 17.21) y la columna de gas encerrada tiene 2,4 m de altura. El émbolo y el cilindro están rodeados de aire también a temperatura y presión normales. A continuación, se suelta el émbolo y empieza a caer. El movimiento del émbolo cesa después de detenerse las oscilaciones con el émbolo y el aire encerrado en equilibrio térmico con el aire que les rodea. (*a*) Hallar la altura de la columna de gas. (*b*) Suponer que el émbolo se empuja ligeramente por debajo de su posición de equilibrio y después se suelta. Admitiendo que la temperatura del gas permanece constante, hallar la frecuencia de vibración del émbolo.

FIGURA 17.21
Problema 80

81 ••• **HOJA DE CÁLCULO, MÚLTIPLES PASOS** Para resolver este problema, se ha de utilizar una hoja de cálculo con la que estudiar la distribución de velocidades moleculares de un gas. La figura 17.22 nos ayudará a comenzar. (*a*) Introducir los valores de las constantes R, M y T como se muestran en la figura. Luego, se introducen en la columna A los valores de las velocidades que se extienden entre 0 y 1200 m/s, en incrementos de 1 m/s. (Esta hoja de cálculo será larga.) En la celda B7, se introduce la fórmula de la distribución fraccionaria de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Esta fórmula contiene los parámetros v, R, M y T. Sustituir A7 por v, B$1 por R, B$2 por M y B$3 por T. A continuación, se usa el comando LLENAR para introducir la fórmula en las celdas por debajo de B7. Se ha de construir una gráfica de $f(v)$ en función de v utilizando los datos de las columnas A y B. (*b*) Se ha de explorar cómo varía la gráfica cuando aumenta y disminuye la temperatura y describir los resultados. (*c*) Se añade una tercera columna en la que cada celda contiene la suma acumulada de todos los valores de $f(v)$, multiplicados por el tamaño del intervalo dv (que es igual a 1), en las filas de arriba y se incluye la fila en cuestión. ¿Cuál es la interpretación física de los números de esta columna? (*d*) Para el gas nitrógeno, ¿qué porcentaje de moléculas tiene velocidades mayores que 700 m/s?

	A	B	C
1	R =	8,31	J/mol-K
2	M =	0,028	kg/mol
3	T =	300	K
4			
5	**v**	**f(v)**	**sum f(v)dv**
6	(m/s)	(s/m)	(sin unidades)
7	0	0	0
8	1	3,0032E-08	3,00325E-08
9	2	1,2013E-07	1,5016E-07
10	3	2,7028E-07	4,20441E-07
11	4	4,8048E-07	9,0092E-07
12	5	7,5071E-07	1,65163E-06

FIGURA 17.22 Problema 81 (Sólo se muestran las primeras filas de la hoja de cálculo.)

CAPÍTULO 18

IMAGEN DE LA CARRERA CICLISTA MASCULINA QUE SE CELEBRA EN LA UNIVERSIDAD DE INDIANA DESDE 1951. (UNA ESCENA DE LA PELÍCULA *BREAKING AWAY* MOSTRABA ESTA CARRERA CUANDO COMPETÍA UN EQUIPO LOCAL, LOS CUTTERS.) SÓLO PUEDEN COMPETIR EN ESTA PRUEBA DE 50 MILLAS (200 VUELTAS AL CIRCUITO) LOS ESTUDIANTES DE LA UI. ESTA IMAGEN CORRESPONDE A LA CARRERA DEL AÑO 2006 GANADA POR EL EQUIPO ALFA TAU OMEGA. *(AJ Mast/Icon SMI/Corbis.)*

Calor y primer principio de la termodinámica

18.1 Capacidad calorífica y calor específico
18.2 Cambio de fase y calor latente
18.3 El experimento de Joule y el primer principio de la termodinámica
18.4 La energía interna de un gas ideal
18.5 Trabajo y diagrama *PV* para un gas
18.6 Capacidades caloríficas de los gases
18.7 Capacidades caloríficas de los sólidos
18.8 Fallos del teorema de equipartición
18.9 Compresión adiabática cuasiestática de un gas

? ¿Cuánto trabajo se necesita para comprimir el aire al inflar el neumático de una bicicleta? (Véase el ejemplo 18.13.)

La relación entre calentar un sistema, hacer trabajo sobre dicho sistema, y la variación de su energía interna constituyen las bases del primer principio de la termodinámica. La Parte I de este libro trataba del movimiento; ahora vamos a considerar el papel que el calor desempeña en la generación del movimiento, sea el de la gente corriendo para tomar un autobús, el movimiento cíclico de los émbolos en un motor de automóvil, o incluso el de las gotas de agua que se deslizan por las paredes de un vaso de limonada fría en un día caluroso.

El ser humano siempre ha sabido aprovechar la potencia generada por el calor. Desde las primeras máquinas de vapor hasta los motores de combustión interna y

los de los aviones de propulsión, los ingenieros han encontrado formas de mejorar los rendimientos de sus máquinas para extraer de ellas la mayor cantidad posible de energía. Incluso los actuales atletas se entrenan y se alimentan para optimizar sus marcas, tratando sus cuerpos básicamente como si fueran máquinas mecánicas.

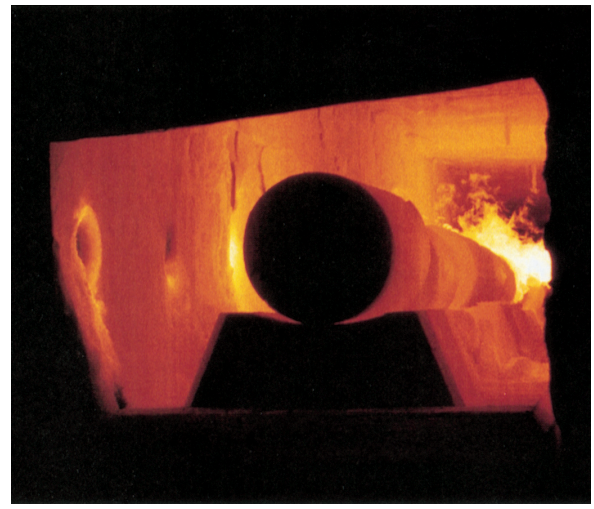
En este capítulo, se define la capacidad calorífica y se estudia que el calentamiento de un sistema puede causar un cambio en su temperatura o un cambio de fase (de sólido a líquido, por ejemplo). A continuación, se estudia la relación que existe entre la ley de conservación de la energía para estos sistemas y se formulá esta relación como primer principio de la termodinámica. Por último, veremos que la capacidad calorífica de un sistema está relacionada con su estructura molecular.

18.1 CAPACIDAD CALORÍFICA Y CALOR ESPECÍFICO

El calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas. En el siglo XVII, Galileo, Newton y otros científicos apoyaban la teoría de los atomistas griegos, los cuales consideraban el calor como una manifestación del movimiento molecular. En el siglo siguiente, se descubrieron métodos para realizar medidas cuantitativas de la cantidad de calor que entra o sale de un cuerpo y se observó que, cuando dos cuerpos se hallan en contacto térmico, la cantidad de calor que sale de un cuerpo es igual a la cantidad de calor que entra en el otro. Este descubrimiento condujo al desarrollo de una teoría en la que se consideraba el calor como una sustancia material fluida, invisible y sin peso que se conservaba; esta sustancia, que se llamó "calórico", no podía ser creada ni destruida, pero sí transferida de un cuerpo a otro.

La teoría del calórico prevaleció hasta el siglo XIX, cuando se observó que el rozamiento entre los cuerpos podía generar una cantidad ilimitada de calor, en contra de la idea del calórico como sustancia presente en una cantidad fija. La teoría moderna del calor no surgió hasta el decenio 1840-50, cuando James Joule (1818-1889) demostró que la ganancia o pérdida de una cantidad determinada de calor venía acompañada de la desaparición o aparición de una cantidad equivalente de energía mecánica. La energía térmica, por lo tanto, no se conserva por sí sola. El calor es una forma de energía interna y es la energía la magnitud que se conserva.

Cuando un objeto caliente está en contacto con uno más frío, la energía que se transfiere del objeto caliente al frío debido a la diferencia de temperaturas entre los dos objetos se denomina **calor**. La energía no se identifica ya como calor una vez que ha sido transferida al objeto más frío. La **energía interna** de un objeto es su energía total en el sistema de referencia del centro de masas del objeto. En este libro, Q es el símbolo que designa el calor y E_{int} es el símbolo para la energía interna.



Lingotes de acero dentro de un horno en forma de túnel de dos tubos gemelos. Los tres lingotes de acero al carbono de 53 cm de diámetro que se ven aquí, se han estado calentando durante 7 horas, aproximadamente, hasta alcanzar los 1340 °C. Cada lingote de 3200 kg está situado sobre un carrito que lo va transportando a lo largo del horno de 81 m de largo, dividido en doce zonas de calentamiento separadas de forma que se haga aumentar gradualmente la temperatura del lingote para prevenir la formación de grietas. Los lingotes, que brillan con un color blanco amarillento, salen del horno en condiciones de ser laminados y transformados en tubos grandes y de paredes gruesas. *(Phoenix Pipe & Tube/ Lana Berkovich.)*

Cuando se transfiere energía a una sustancia calentándola, la temperatura de la sustancia normalmente se incrementa.* La cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de un sistema es proporcional a la variación de temperatura y a la masa de la sustancia:

$$Q = \Delta E_{int} = C\,\Delta T = mc\,\Delta T \qquad 18.1$$

DEFINICIÓN: CAPACIDAD CALORÍFICA

* Una excepción tiene lugar durante los cambios de fase, por ejemplo, cuando el agua se congela o evapora. Los cambios de fase se tratan en la sección 18.2.

donde C es la **capacidad calorífica** de la sustancia, que se define como la cantidad de energía transferida por calentamiento necesaria para aumentar un grado la temperatura de la sustancia. El **calor específico** c es la capacidad calorífica por unidad de masa:

$$c = \frac{C}{m} \qquad 18.2$$

DEFINICIÓN: CALOR ESPECÍFICO

El término *calor específico* es una expresión corta de capacidad calorífica específica. La unidad histórica de la energía calorífica, la **caloría**, se definió originalmente como la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un gramo de agua en un grado Celsius.* Como ahora sabemos que el calor es simplemente un modo de transferir energía, no necesitamos ninguna unidad especial para su medida. La caloría se define ahora en función de la unidad de la energía del SI, el joule:

$$1 \text{ cal} = 4{,}184 \text{ J} \qquad 18.3$$

La unidad de uso cotidiano del sistema técnico inglés es la **Btu** (*British thermal unit*, unidad británica de calor), que se definió como la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una libra de agua en un grado Fahrenheit. Esta unidad se relaciona con la caloría y el joule mediante las expresiones

$$1 \text{ Btu} = 252 \text{ cal} = 1{,}054 \text{ kJ} \qquad 18.4$$

Según la definición original de la caloría, el calor específico del agua (en estado líquido) es†

$$c_{\text{agua}} = 1 \text{ cal/(g} \cdot \text{K)} = 1 \text{ kcal/(kg} \cdot \text{K)} = 4{,}184 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)} \qquad 18.5a$$

Análogamente, a partir de la definición de la Btu, el calor específico del agua en las unidades del sistema técnico inglés es

$$c_{\text{agua}} = 1 \text{ Btu/(lb} \cdot \text{°F)} \qquad 18.5b$$

La capacidad calorífica por mol se denomina **calor específico molar**, c',

$$c' = \frac{C}{n}$$

donde n es el número de moles. Como $C = mc$, el calor específico molar c' y el calor específico c están relacionados de la forma siguiente

$$c' = \frac{C}{n} = \frac{mc}{n} = Mc \qquad 18.6$$

CALOR ESPECÍFICO MOLAR

donde $M = m/n$ es la masa molar. La tabla 18.1 indica los calores específicos y los calores molares de algunos sólidos y líquidos. Obsérvese que los calores molares de todos los metales son aproximadamente iguales. El significado de este hecho será analizado en la sección 18.7.

> **!** El término *capacidad calorífica* no quiere decir que un cuerpo contiene una cierta cantidad de calor.

Tabla 18.1 Calores específicos y calores molares de algunos sólidos y líquidos

Sustancia	c, kJ/kg · K	c, kcal/kg · K o Btu/lb · °F	c', J/mol · K
Agua	4,18	1,00	75,2
Alcohol etílico	2,4	0,58	111
Aluminio	0,900	0,215	24,3
Bismuto	0,123	0,0294	25,7
Cobre	0,386	0,0923	24,5
Hielo (−10 °C)	2,05	0,49	36,9
Mercurio	0,140	0,033	28,3
Oro	0,126	0,0301	25,6
Plata	0,233	0,0558	24,9
Plomo	0,128	0,0305	26,4
Tungsteno	0,134	0,0321	24,8
Vapor (a 1 atm)	2,02	0,48	36,4
Vidrio	0,840	0,20	—
Zinc	0,387	0,0925	25,2

Los líquidos aparecen en rojo y el gas en azul.

* La kilocaloría es, por lo tanto, la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 kg de agua en un grado Celsius. La "caloría" utilizada en la medida del equivalente de energía de los alimentos es realmente la kilocaloría.

† Medidas cuidadosas demuestran que el calor específico del agua varía, aproximadamente, en un 1% en todo el rango de temperaturas de 0° a 100 °C. Normalmente, despreciaremos esta pequeña variación.

Ejemplo 18.1 Incrementando la temperatura

Un joyero está diseñando amuletos de oro. Para hacer estas piezas debe fundir el oro para llenar los moldes. ¿Cuánto calor se necesita para aumentar la temperatura de 3 kg de oro desde 22 °C (temperatura ambiente) hasta 1063 °C, el punto de fusión del oro?

PLANTEAMIENTO La cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de la sustancia (oro) es proporcional a la variación de temperatura y a la masa de la sustancia.

SOLUCIÓN

1. El calor necesario viene dado por la ecuación 18.1, con $c = 0{,}126$ kJ/(kg · K) a partir de la tabla 18.1:

$$Q = mc\,\Delta T = (3{,}00\text{ kg})(0{,}126\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)})(1041\text{ K})$$
$$= \boxed{393\text{ kJ}}$$

COMPROBACIÓN El problema busca una cantidad de energía y la respuesta viene dada en joules, que son unidades de energía.

OBSERVACIÓN Obsérvese que utilizamos $\Delta T = 1063\text{ °C} - 22\text{ °C} = 1041\text{ °C} = 1041\text{ K}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 18.1 Un bloque de aluminio de 2 kg está inicialmente a 10 °C. Si se suministran 36 kJ de energía al bloque, ¿cuál es su temperatura final?

Podemos ver en la tabla 18.1 que el calor específico del agua es considerablemente mayor que el de las demás sustancias. Debido a esta capacidad térmica tan grande, el agua es un material excelente para almacenar energía térmica, por ejemplo en una central térmica solar, y también es un excelente refrigerante, por ejemplo en un motor de automóvil. (El refrigerante usado en motores de automóvil es una mezcla de agua y etilenglicol.)

Una gran masa de agua, como un lago o un océano, tiende a moderar las variaciones de temperatura del aire de sus cercanías porque puede absorber o desprender grandes cantidades de energía térmica experimentando sólo cambios de temperatura pequeños. *(From Frank Press and Raymond Siever,* Understanding Earth, *3rd ed., W. H. Freeman and Company, 2001.)*

CALORIMETRÍA

El calor específico de un cuerpo se puede medir calentándolo primero hasta una cierta temperatura, por ejemplo, el punto de ebullición del agua, situándolo a continuación en un baño de agua, de masa y temperatura conocidas, y midiendo, por último, la temperatura final de equilibrio entre el cuerpo y el baño. Si el sistema en su totalidad está aislado térmicamente de su entorno (aislando, por ejemplo, el recipiente), el calor que sale del cuerpo tiene que ser igual al calor que entra en el agua y en el recipiente. Este procedimiento recibe el nombre de **calorimetría** y el recipiente aislado que contiene el agua, **calorímetro**.

Sea m la masa del cuerpo u objeto, c su calor específico y T_{io} su temperatura inicial. Si T_f es la temperatura final del cuerpo dentro de su baño de agua, el calor que sale del cuerpo vale

$$Q_{\text{sale}} = mc(T_{io} - T_f)$$

Análogamente, si T_{ia} es la temperatura inicial del agua y su recipiente, y T_f su temperatura final, el calor absorbido por el agua y el recipiente es

$$Q_{\text{entra}} = m_a c_a (T_f - T_{ia}) - m_c c_c (T_f - T_{ia})$$

donde m_a y $c_a = 4{,}18\text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$ son la masa y el calor específico del agua, y m_c y c_c son la masa y el calor específico del recipiente. (Obsérvese que en estas ecuaciones hemos escogido las diferencias de temperaturas de forma que tanto el calor cedido

como el recibido sean cantidades positivas.) Igualando estas cantidades de calor, puede obtenerse el calor específico c del objeto:

$$Q_{\text{sale}} = Q_{\text{entra}} \Rightarrow mc(T_{\text{io}} - T_{\text{f}}) = m_{\text{a}}c_{\text{a}}(T_{\text{f}} - T_{\text{ia}}) + m_{\text{c}}c_{\text{c}}(T_{\text{f}} - T_{\text{ia}}) \quad 18.7$$

Como en la ecuación 18.7 sólo aparecen diferencias de temperaturas y como los grados Celsius y los Kelvin tienen el mismo tamaño, pueden medirse todas las temperaturas bien en la escala Celsius o en la Kelvin sin que se vea afectado el resultado.

Ejemplo 18.2 Medida del calor específico

Para medir el calor específico del plomo, se calientan 600 g de perdigones de este metal a 100 °C y se colocan en un calorímetro de aluminio de 200 g de masa que contiene 500 g de agua inicialmente a 17,3 °C. Si la temperatura final del sistema es 20,0 °C, ¿cuál es el calor específico del plomo? [El calor específico del aluminio del calorímetro es 0,900 kJ(kg · K).]

PLANTEAMIENTO Igualamos el calor cedido por el plomo con el calor absorbido por el agua y el recipiente, y despejamos el calor específico del plomo c_{Pb}.

SOLUCIÓN

1. Expresar el calor cedido por el plomo en función de su calor específico:
$$Q_{\text{Pb}} = m_{\text{Pb}}c_{\text{Pb}}|\Delta T_{\text{Pb}}|$$

2. Determinar el calor absorbido por el agua:
$$Q_{\text{a}} = m_{\text{a}}c_{\text{a}}\,\Delta T_{\text{a}}$$

3. Determinar el calor absorbido por el calorímetro:
$$Q_{\text{c}} = m_{\text{c}}c_{\text{c}}\,\Delta T_{\text{c}}$$

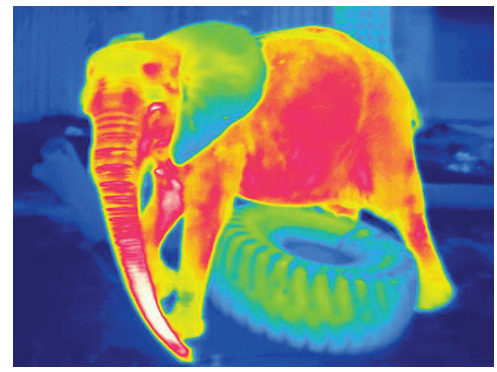
4. Igualar el calor cedido por el plomo con el calor absorbido por el agua y el calorímetro:
$$Q_{\text{sale}} = Q_{\text{entra}} \Rightarrow Q_{\text{Pb}} = Q_{\text{a}} + Q_{\text{c}}$$
$$m_{\text{Pb}}c_{\text{Pb}}|\Delta T_{\text{Pb}}| = m_{\text{a}}c_{\text{a}}\,\Delta T_{\text{a}} + m_{\text{c}}c_{\text{c}}\,\Delta T_{\text{c}}$$
$$\text{donde} \quad \Delta T_{\text{c}} = \Delta T_{\text{w}} = 2{,}7\ \text{K} \quad \text{y} \quad |\Delta T_{\text{Pb}}| = 80{,}0\ \text{K}$$

5. Despejar c_{Pb}:
$$c_{\text{Pb}} = \frac{(m_{\text{w}}c_{\text{w}} + m_{\text{c}}c_{\text{c}})\,\Delta T_{\text{w}}}{m_{\text{Pb}}|\Delta T_{\text{Pb}}|}$$
$$= \frac{[(0{,}50\ \text{kg})(4{,}18\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)}) + (0{,}20\ \text{kg})(0{,}90\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)})](2{,}7\ \text{K})}{(0{,}600\ \text{kg})(80{,}0\ \text{K})}$$
$$= 0{,}128\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)} = \boxed{0{,}13\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)}}$$

COMPROBACIÓN Como se esperaba, el calor específico del plomo es considerablemente menor que el del agua. [El calor específico del agua líquida es 4,18 kJ/(kg · K).]

OBSERVACIÓN El resultado del paso 5 se expresa con dos cifras porque el cambio de la temperatura del agua se conoce con sólo dos cifras.

PROBLEMA PRÁCTICO 18.2 Una casa solar contiene 105 kg de hormigón (calor específico = 1 kJ/(kg · K). ¿Cuánto calor libera el hormigón cuando se enfría desde 25 °C hasta 20 °C?



(Edward Kinsman/ Photo Researchers, Inc.)

18.2 CAMBIO DE FASE Y CALOR LATENTE

Si se absorbe calor por hielo a 0 °C, la temperatura del hielo no se modifica. En cambio, el hielo se funde. La fusión es un ejemplo de **cambio de fase**. Las formas más corrientes de cambios de fase incluyen la solidificación (líquido a sólido), la fusión (sólido a líquido), la vaporización (líquido a vapor o gas), la condensación (gas o vapor a líquido) y la sublimación (sólido directamente a gas, como ocurre con el dióxido de carbono sólido o hielo seco que se transforma en vapor). Existen otros tipos de cambios de fase, como el cambio que experimenta un sólido de una

forma cristalina a otra distinta. Así, el carbono en forma de grafito a grandes presiones se convierte en diamante.

El hecho de que la temperatura permanezca constante durante un cambio de fase puede entenderse en función de la teoría molecular. Las moléculas de un líquido están muy próximas unas de otras y ejercen fuerzas atractivas entre sí, mientras que las moléculas de un gas están muy separadas. Convertir una sustancia de líquido a vapor requiere la energía necesaria para vencer la atracción intermolecular del líquido. Consideremos una olla de agua colocada sobre la llama de un hornillo. Al principio, a medida que el agua se calienta, el movimiento de sus moléculas aumenta y la temperatura sube. Cuando la temperatura alcanza el punto de ebullición, las moléculas no pueden ya aumentar su energía cinética y permanecen en el líquido. Cuando el agua líquida se vaporiza, el calor añadido se emplea en vencer las fuerzas atractivas entre las moléculas, que se separan cada vez más en la fase gaseosa. La energía suministrada al líquido para vaporizarlo incrementa de este modo la energía potencial de las moléculas, pero no su energía cinética. Como la temperatura es una medida de la energía cinética media de traslación de las moléculas, la temperatura permanece constante durante el cambio de fase.

En una sustancia pura, un cambio de fase a una presión dada tiene lugar sólo a una temperatura determinada. Por ejemplo, el agua pura a una presión de 1 atm pasa de sólido a líquido a 0 °C (el punto de fusión normal del agua) y de líquido a gas a 100 °C (el punto de ebullición normal del agua).

El calor necesario para fundir una sustancia de masa m sin cambiar su temperatura es proporcional a la masa de la sustancia:

$$Q_f = mL_f \qquad 18.8$$

donde L_f se denomina **calor latente de fusión** de la sustancia. A una presión de 1 atm, el calor latente de fusión del agua es 333,5 kJ/kg = 79 kcal/kg. Cuando el cambio de fase corresponde al paso de líquido a gas, el calor requerido es

$$Q_v = mL_v \qquad 18.9$$

donde L_v es el **calor latente de vaporización**. En el caso del agua a una presión de 1 atm, el calor latente de vaporización es 2,26 MJ/kg = 540 kcal/kg. En la tabla 18.2, se indican los puntos normales de fusión y ebullición, y los calores latentes de fusión y de vaporización a 1 atm para diversas sustancias.

Aunque la fusión indica que el hielo ha experimentado un cambio de fase, la temperatura del hielo no varía. *(From Donald Wink, Sharon Gislason, and Sheila McNicholas,* The Practice of Chemistry, *W. H. Freeman and Company, 2002.)*

Tabla 18.2 **Punto de fusión normal (PF), calor latente de fusión (L_f), punto de ebullición normal (PE), y calor latente de vaporización L_v para varias sustancias a 1 atm**

Sustancia	PF, K	L_f, kJ/kg	PE, K	L_v, kJ/kg
Agua (líquida)	273,15	333,5	373,15	2257
Alcohol etílico	159	109	351	879
Azufre	388	38,5	717,75	287
Bromo	266	67,4	332	369
Cobre	1356	205	2839	4726
Dióxido de carbono	—	—	194,6*	573*
Helio	—	—	4,2	21
Mercurio	234	11,3	630	296
Nitrógeno	63	25,7	77,35	199
Oro	1336	62,8	3081	1701
Oxígeno	54,4	13,8	90,2	213
Plata	1234	105	2436	2323
Plomo	600	24,7	2023	858
Zinc	692	102	1184	1768

* Estos valores corresponden a la sublimación. El dióxido de carbono no tiene fase líquida a 1 atm.

Ejemplo 18.3 Transformación de hielo en vapor

¿Cuánto calor es necesario suministrar para transformar 1,5 kg de hielo a –20 °C y 1 atm en vapor?

PLANTEAMIENTO El calor necesario consta de cuatro partes: Q_1, calor necesario para elevar la temperatura del hielo de −20 a 0 °C; Q_2, calor necesario para fundir el hielo; Q_3, calor necesario para elevar la temperatura del agua de 0 a 100 °C; y Q_4, calor necesario para vaporizar el agua. Al calcular Q_1 y Q_3, admitiremos que los calores específicos son constantes, con los valores 2,05 kJ/kg · K para el hielo y 4,18 kJ/kg · K para el agua.

SOLUCIÓN

1. Utilizar $Q_1 = mc\,\Delta T$ para hallar el calor necesario para elevar la temperatura del hielo a 0 °C:
$$Q_1 = mc\,\Delta T = (1{,}5\text{ kg})(2{,}05\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(20\text{ K}) = 61{,}5\text{ kJ} = 0{,}0615\text{ MJ}$$

2. Usar L_f de la tabla 18.2 para hallar el calor Q_2 necesario para fundir el hielo.:
$$Q_2 = mL_f = (1{,}5\text{ kg})(333{,}5\text{ kJ/kg}) = 500\text{ kJ} = 0{,}500\text{ MJ}$$

3. Determinar el calor Q_3 necesario para elevar la temperatura del agua de 0° a 100 °C:
$$Q_3 = mc\,\Delta T = (1{,}5\text{ kg})(4{,}18\text{ kJ/kg}\cdot\text{K})(100\text{ K}) = 627\text{ kJ} = 0{,}627\text{ MJ}$$
$$Q_3 = 627\text{ kJ} = 0{,}627\text{ MJ}$$

4. Usar L_v de la tabla 18.2 para hallar el calor Q_4 necesario para vaporizar el agua:
$$Q_4 = mL_V = (1{,}5\text{ kg})(2{,}26\text{ MJ/kg}) = 3{,}39\text{ MJ}$$

5. Sumar todos estos resultados para obtener el calor total Q:
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = \boxed{4{,}6\text{ MJ}}$$

COMPROBACIÓN Se puede observar que se necesita mucho menos tiempo para llevar una tetera llena de agua a su punto de ebullición que el que necesitaría para alcanzar ese punto una tetera seca. Esta observación concuerda con el hecho de que el resultado del paso 3 es menor que el 20% del resultado del paso 4.

OBSERVACIÓN La mayor parte del calor suministrado se ha invertido en vaporizar el agua y la cantidad necesaria para fundir el hielo fue casi tanta como la necesaria para elevar la temperatura del agua 100 °C. En la figura 18.1 puede verse el gráfico de la temperatura en función del tiempo en el caso de que el calor se adicione a un ritmo constante de 1 kJ/s. Obsérvese que se tarda mucho más en vaporizar el agua que en fundir el hielo o en elevar la temperatura del agua. Cuando toda el agua se ha vaporizado, la temperatura aumentará de nuevo conforme se vaya adicionando calor.

PROBLEMA PRÁCTICO 18.3 Un trozo de plomo de 830 g se calienta hasta su punto de fusión de 600 K. ¿Cuánta energía calorífica adicional debe añadirse para fundir completamente todo el plomo?

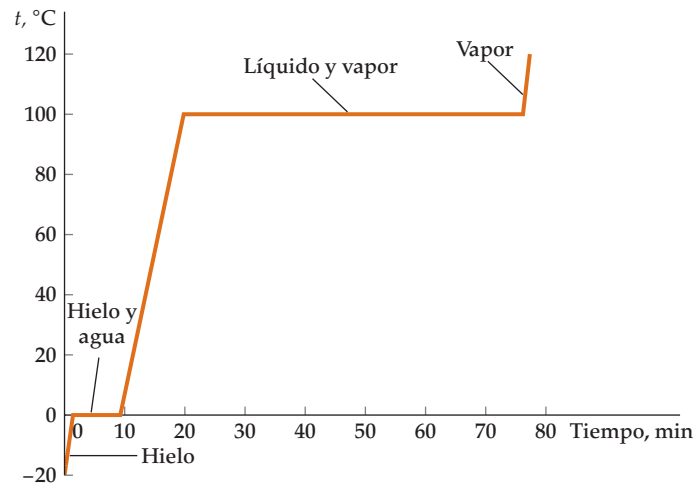


FIGURA 18.1 Una muestra de 1,5 kg de agua se calienta desde −20 °C hasta 120 °C a una tasa constante de 60 kJ/min.

Ejemplo 18.4 Una bebida fresca

Póngalo en su contexto

Una jarra de limonada de 2 litros ha permanecido todo el día sobre una mesa de picnic a 33 °C. En un vaso de poliestireno echamos 0,24 kg de limonada y dos cubitos de hielo (cada uno de 0,025 kg a 0 °C). (*a*) Suponiendo que no hay pérdidas de calor a través de las paredes del vaso, ¿cuál será la temperatura final de la limonada? (*b*) ¿Cuál sería la temperatura final si añadimos 6 cubitos de hielo en lugar de dos?

PLANTEAMIENTO Establecemos que el calor perdido por la limonada es igual al calor ganado por los cubos de hielo. Llamemos T_f a la temperatura final de la limonada y el agua. Se supone que la limonada tiene la misma capacidad calorífica que el agua.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Expresar el calor perdido por la limonada en función de la temperatura final, T_f:

$$Q_{per} = m_L c|\Delta T| = m_L c(T_{Lh} - T_f)$$

2. Expresar el calor ganado por los cubos de hielo y el agua resultante en función de la temperatura final:

$$Q_{gan} = m_{hielo}L_f + m_{hielo}c\,\Delta T_a = m_{hielo}L_f + m_{hielo}c(T_f - T_{ah})$$

3. Igualar el calor perdido con el calor ganado y despejar T_f:

$$Q_{per} = Q_{gan}$$

$$m_L c(T_{Lh} - T_f) = m_{hielo}L_f + m_{hielo}c(T_f - T_{ah})$$

de modo que

$$T_f = \frac{(m_{hielo}T_{ah} + m_L T_{Lh})c - m_{hielo}L_f}{(m_L + m_{hielo})c}$$

$$= \frac{(0{,}050 \times 273{,}15 + 0{,}24 \times 306{,}15)4{,}18 - 0{,}050 \times 333{,}5}{0{,}29 \times 4{,}18}$$

$$= 286{,}7\ \text{K} = \boxed{14\ ^\circ\text{C}}$$

(*b*) 1. En el caso de los 6 cubos de hielo, $m_{hielo} = 0{,}15$ kg. Determinar la temperatura final como en el paso 3 del apartado (*a*):

$$T_f = \frac{(m_{hielo}T_{ah} + m_L T_{Lh})c - m_{hielo}L_f}{(m_L + m_{hielo})c}$$

$$= \frac{(0{,}150 \times 273{,}15 + 0{,}24 \times 306{,}15)4{,}18 - 0{,}150 \times 333{,}5}{0{,}39 \times 4{,}18}$$

$$= 262{,}8\ \text{K} = -10{,}4\ ^\circ\text{C}$$

2. ¡Este resultado no puede ser correcto! Sabemos que si añadimos hielo a 0 °C a la limonada a 33 °C, la temperatura final de la mezcla no puede ser −10 °C. ¿Dónde está el error? El calor cedido por la limonada cuando se enfría de 33 a 0 °C no es suficiente para fundir todo el hielo, en contra de nuestra hipótesis de que todo el hielo se funde, utilizada en el paso 2 del apartado (*a*). La temperatura final es, pues,

$$= \boxed{0\ ^\circ\text{C}}$$

COMPROBACIÓN Comprobemos cuánto hielo se ha fundido en el apartado (*b*). Para que la limonada se enfríe de 33 a 0 °C debe ceder el calor Q_{cedido} = (0,24 kg) (4,18 kJ/kg · °C) (33 °C) = 33,1 kJ. La masa de hielo que esta cantidad de calor fundirá es $m_{hielo} = Q_{cedido}/L_f$ = 33,1 kJ/(333,5 kJ/kg) = 0,10 kg. Esta masa corresponde, aproximadamente, a la de cuatro cubos de hielo. La adición de más de cuatro cubos de hielo no disminuirá la temperatura por debajo de 0 °C, sino que simplemente aumentará la cantidad de hielo en la mezcla hielo-limonada. En problemas como este, primero debemos hallar cuánto hielo debe fundirse para reducir la temperatura del líquido a 0 °C. Si esta cantidad es menor que la añadida, entonces procederemos como en el apartado (*a*). Si se ha añadido más hielo, la temperatura final será 0 °C.

18.3 EL EXPERIMENTO DE JOULE Y EL PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

La temperatura de un sistema puede elevarse dándole calor, pero también puede conseguirse realizando trabajo sobre él. La figura 18.2 es un diagrama del aparato utilizado por Joule en su famoso experimento para determinar el trabajo necesario para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1 °C. En este caso, el sistema consiste en un recipiente aislado térmicamente que contiene 1 g de agua. El aparato de Joule convierte la energía potencial de las pesas que caen en trabajo realizado sobre el agua por medio de unas paletas adosadas, como se muestra en la figura. Joule observó que la temperatura de 1 libra de agua de su muestra se elevaba en 1 °F cuando la máquina funcionaba con la caída de 772 libras de peso desde la altura de un pie. En unidades modernas esto equivale a decir que es necesario el trabajo de 4,184 J (unidad de energía adoptada por la comunidad científica en 1948) para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1 °C. Este resultado según el cual 4,184 J de energía mecánica es equivalente a 1 cal de energía térmica se conoce con el nombre de **equivalente mecánico del calor**.

Existen otras formas de realizar trabajo sobre este sistema. Por ejemplo, podríamos simplemente dejar caer el recipiente de agua aislado desde cierta altura h, de forma que se produzca un choque inelástico contra el suelo, o bien podríamos

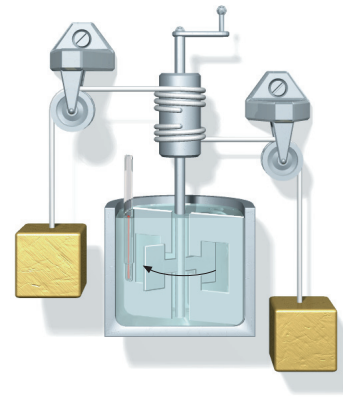


FIGURA 18.2 Diagrama esquemático del aparato utilizado por Joule. El agua se encuentra en un recipiente con paredes aislantes para evitar la transmisión de calor. Cuando las pesas caen a velocidad constante, hacen girar una rueda de paletas, que produce trabajo sobre el agua. Si el rozamiento es despreciable, este trabajo es igual a la pérdida de energía mecánica de las pesas, es decir, a la pérdida de su energía potencial.

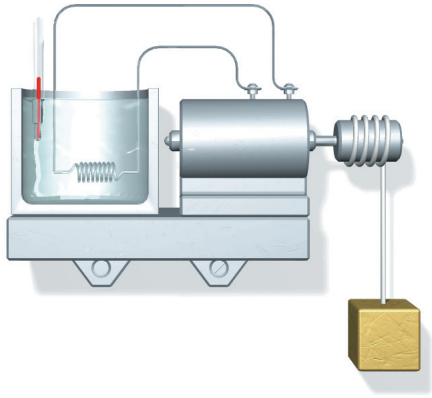


FIGURA 18.3 Otro método para realizar trabajo sobre un recipiente con agua térmicamente aislado. El generador, que está accionado por un peso que cae, realiza trabajo eléctrico sobre el sistema.

aprovechar el trabajo mecánico para generar electricidad y utilizar luego la electricidad para calentar el agua (figura 18.3). En todos estos experimentos se necesita la misma cantidad de trabajo para producir un determinado cambio de temperatura en un sistema dado. Según la conservación de la energía, el trabajo realizado debe convertirse en un incremento de la energía interna del sistema.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 18.1

El experimento de Joule que establece la equivalencia mecánica del calor implica la conversión de energía mecánica en energía interna. Dar algunos ejemplos de la energía interna de un sistema que se convierte en energía mecánica.

Ejemplo 18.5 Calentar agua dejándola caer

(*a*) En las cataratas del Niágara, el agua cae 50 m. Si la disminución de la energía potencial gravitatoria del agua es igual al aumento de su energía interna, calcular el aumento de la temperatura del agua. (*b*) En las cataratas de Yosemite, el agua cae 740 m. Si la disminución de la energía potencial gravitatoria del agua es igual al aumento de su energía interna, calcular el aumento de la temperatura del agua. (Estos aumentos de temperatura no son de fácil observación porque cuando el agua cae su temperatura se ve afectada por diversos efectos. Por ejemplo, se enfría por evaporación y se calienta cuando el aire realiza trabajo sobre ella por interacción viscosa.)

PLANTEAMIENTO La energía cinética del agua justo antes de que choque contra el suelo es igual a su energía potencial original mgh. Durante el choque, esta energía se convierte en energía interna, la cual origina a su vez una elevación de temperatura dada por $mc\,\Delta T$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Igualar la disminución de energía potencial y el aumento de energía interna:

$$mgh = mc\,\Delta T$$

2. Despejar la variación de temperatura:

$$\Delta T = \frac{gh}{c} = \frac{(9{,}81\ \text{N/kg})(50\ \text{m})}{4{,}184\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}} = 0{,}117\ \text{K} = \boxed{0{,}12\ \text{K}}$$

(*b*) Repetir el cálculo con $h = 740$ m:

$$\Delta T = \frac{gh}{c} = \frac{(9{,}81\ \text{N/kg})(740\ \text{m})}{4{,}184\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}} = 1{,}74\ \text{K} = \boxed{1{,}7\ \text{K}}$$

COMPROBACIÓN Las cataratas de Yosemite son 14,8 veces más altas que las del Niágara, de modo que la variación de energía potencial del agua de Yosemite es 14,8 veces mayor que la del agua del Niágara. Multiplicando 0,117 K por 14,8 se obtiene 1,73 K, que es un valor muy próximo al resultado dado en (*b*).

OBSERVACIÓN Estos cálculos ponen de manifiesto una de las dificultades que presenta el experimento de Joule, que no es otra que la gran cantidad de energía mecánica que se ha de disipar para producir una variación apreciable de la temperatura del agua.

Supongamos, a continuación, que realizamos el experimento de Joule, pero sustituyendo las paredes aislantes del recipiente por paredes conductoras. En este caso, se observa que el trabajo necesario para producir una variación dada de la temperatura del sistema depende de la cantidad de calor que se añade o se quita del sistema por conducción a través de las paredes. Sin embargo, si se suma el trabajo realizado sobre el sistema y el calor neto suministrado al mismo, el resultado

es siempre el mismo para una variación dada de la temperatura. Es decir, la suma del calor añadido al sistema más el trabajo realizado sobre él es igual a la variación de la energía interna del sistema. Este es el **primer principio de la termodinámica**, que es simplemente un enunciado de la conservación de la energía.

Es costumbre utilizar W para expresar el trabajo realizado sobre el sistema por el medio que le rodea y $-W$ para designar el trabajo realizado por el sistema sobre el medio. Por ejemplo, supongamos que el sistema es un gas encerrado en un cilindro por medio de un émbolo. Si el émbolo comprime el gas, el medio realiza un trabajo positivo sobre el gas, es decir, W es positivo. (Sin embargo, si el gas se expande contra el émbolo, es el gas el que realiza trabajo sobre el medio y el trabajo se considera negativo.) Asimismo, si se transfiere calor al sistema, Q es positivo y si se extrae del sistema, Q es negativo (figura 18.4). Utilizando este criterio de signos y tomando el símbolo E_{int} para la energía interna del sistema, el primer principio de la termodinámica se expresa:

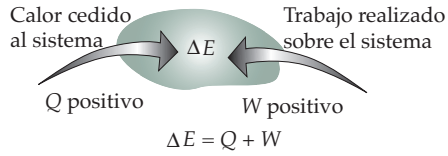


FIGURA 18.4 Convenio de signos para las magnitudes que intervienen en el primer principio de la termodinámica.

$$\Delta E_{int} = Q + W \qquad 18.10$$

La variación de energía interna de un sistema es igual al calor transferido al sistema más el trabajo realizado sobre el sistema.

PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

La ecuación 18.10 es equivalente al teorema trabajo-energía, $W_{ext} = \Delta E_{sist}$ del capítulo 7 (ecuación 7.9), excepto en que hemos añadido el término del calor Q, hemos cambiado la convención de signos para W y hemos llamado E_{int} a la energía del sistema.

Ejemplo 18.6 Remover el agua

Un sistema consiste en 3 kg de agua. Sobre él se realiza un trabajo de 25 kJ agitándolo con una rueda de paletas. Durante este tiempo, 15 kcal de calor se escapan del sistema debido a un deficiente aislamiento. ¿Cuál es la variación de la energía interna del sistema?

PLANTEAMIENTO Expresaremos todas las energías en joules y aplicaremos el primer principio de la termodinámica.

SOLUCIÓN

1. ΔE_{int} se deduce del primer principio de la termodinámica: $\Delta E_{int} = Q + W$
2. El calor se *extrae* del sistema; por tanto, el calor *añadido* es negativo: $Q = -15 \text{ kcal} = -(15 \text{ kcal})\left(\dfrac{4{,}18 \text{ kJ}}{1 \text{ kcal}}\right) = -62{,}7 \text{ kJ}$
3. El trabajo realizado sobre el sistema es positivo: $W = +25 \text{ kJ}$
4. Sustituir estas magnitudes y despejar ΔE_{int}: $\Delta E_{int} = Q + W = (-62{,}7 \text{ kJ}) + (+25 \text{ kJ})$
   $= -37{,}7 \text{ kJ} = \boxed{-38 \text{ kJ}}$

COMPROBACIÓN La pérdida de calor es mayor que el trabajo ganado y, por lo tanto, la variación de energía interna es negativa.

Es importante comprender que la energía interna E_{int} es una función del estado del sistema, de la misma forma que lo son P, V y T. Consideremos un gas en cierto estado inicial (P_i, V_i). La temperatura T_i está determinada por la ecuación de estado. Por ejemplo, si el gas es ideal, $T_i = P_i V_i / nR$. La energía interna $E_{int\,i}$ también depende solamente del estado del gas, el cual está determinado por dos cualesquiera de las va-

* Otro símbolo usado con frecuencia para expresar la energía interna es U.

riables de estado, por ejemplo, P y V, P y T, o V y T. Si comprimimos el gas o le dejamos expandirse, si le añadimos o le extraemos calor, o si realizamos trabajo sobre él o es el gas el que realiza el trabajo, el gas se irá encontrando en una secuencia de estados; esto es, irá teniendo valores diferentes de las funciones de estado P, V, T y E_{int}.

Por otra parte, el calor neto Q que entra en el gas y el trabajo W realizado por el mismo, no son funciones de estado del sistema. Es decir, no hay funciones Q o W asociadas con un estado particular del gas. Podemos hacer que el gas pase por una secuencia de estados comenzando y terminando en el estado (P_i, V_i) y durante ese proceso es posible que el gas realice un trabajo positivo y absorba una cantidad igual de calor. O podemos conseguir a través de una secuencia diferente de estados que sobre el gas se realice un trabajo y al mismo tiempo el gas desprenda calor. El calor no es algo contenido en un sistema. Más bien es una medida de la energía que fluye de un sistema a otro a causa de una diferencia de temperatura. El trabajo es una medida de la energía que fluye de un sistema a otro porque el punto de contacto de una fuerza ejercida por un sistema sobre el otro sufre un desplazamiento con una componente que es paralela a la fuerza.

En el caso en que las cantidades de calor añadidas, el trabajo realizado y las variaciones de energía interna sean muy pequeñas, es costumbre escribir la ecuación 18.10 en la forma

$$dE_{int} = dQ + dW \qquad 18.11$$

En esta ecuación, dE_{int} es la diferencial de la función energía interna. Sin embargo, ni dQ ni dW son diferenciales de ninguna función. Simplemente, representan pequeñas cantidades de calor adicionado al sistema, o de trabajo realizado sobre él.

> ! Si luego se hace volver al gas a su estado inicial (P_i, V_i), la temperatura T y la energía interna E_{int} deben ser iguales a sus valores originales.

> ! Es correcto decir que ha aumentado la energía interna de un sistema, pero no es correcto decir que el trabajo de un sistema o el calor de un sistema han aumentado.

18.4 LA ENERGÍA INTERNA DE UN GAS IDEAL

La energía cinética de traslación K de las moléculas de un gas ideal está relacionada con la temperatura absoluta T por la ecuación 17.20:

$$K = \tfrac{3}{2}nRT$$

donde n es el número de moles del gas y R, la constante universal de los gases. Si se considera que esta energía de traslación constituye toda la energía interna del gas, $E_{int} = K$, y entonces

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT \qquad 18.12$$

En este caso, la energía interna dependerá sólo de la temperatura y no de su volumen o de su presión. Si las moléculas, además de la energía cinética de traslación, tienen otros tipos de energía, tales como la energía de rotación, la energía interna será mayor que la expresada por la ecuación 18.12. Sin embargo, de acuerdo con el teorema de equipartición (capítulo 17, sección 4), la energía media asociada con cualquier grado de libertad será $\frac{1}{2}RT$ por mol o $(\frac{1}{2}kT$ por molécula) de modo que de nuevo, la energía interna dependerá sólo de la temperatura y no del volumen ni de la presión.

Podemos imaginar que la energía interna de un gas *real* incluye otras formas de la energía que dependan de la presión y volumen del gas. Supóngase, por ejemplo, que entre las moléculas del gas que se encuentran próximas se ejercen fuerzas atractivas. Entonces se requiere trabajo para aumentar la separación entre las moléculas. Así pues, si se incrementa la distancia media entre las moléculas, también se verá incrementada la energía potencial asociada con la atracción molecular. Por lo tanto, la energía interna del gas dependerá ahora del volumen del gas además de depender de la temperatura.

Joule, utilizando un aparato semejante al que se muestra en la figura 18.5, realizó un interesante experimento para determinar si la energía interna de un gas depende de su volumen. Inicialmente, el compartimento de la izquierda de la figura 18.5 contiene un gas, mientras que se ha hecho el vacío en el compartimento de la derecha.

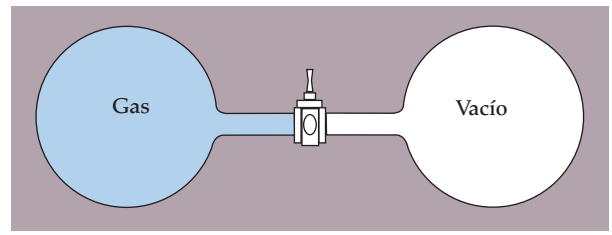


FIGURA 18.5 Expansión libre de un gas. Al abrir la llave de paso, el gas se expansiona rápidamente en la cámara donde se ha hecho el vacío. Como no se realiza trabajo y todo el sistema está térmicamente aislado, las energías internas inicial y final del gas son iguales.

Ambos están conectados por una llave de paso inicialmente cerrada. El sistema completo está térmicamente aislado del exterior usando paredes rígidas que no permiten el intercambio de calor ni la realización de ningún trabajo entre el sistema y el exterior. Cuando se abre la llave, el gas se expansiona bruscamente en su tendencia a ocupar la cámara vacía. Este proceso se denomina **expansión libre**. Finalmente, el gas alcanza el equilibrio térmico consigo mismo. Puesto que no se ha realizado ningún trabajo sobre el gas ni se le ha transferido ningún calor, la energía interna final del gas debe ser igual a su energía interna inicial. Si las moléculas del gas ejercen fuerzas atractivas entre sí, la energía potencial asociada con estas fuerzas aumentará al aumentar el volumen. Pero, como la energía se conserva, la energía cinética de traslación deberá disminuir, dando como resultado un descenso de la temperatura del gas.

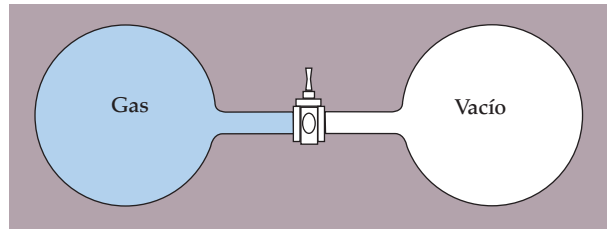


FIGURA 18.5 (*repetido*)
Expansión libre de un gas. Al abrir la llave de paso, el gas se expansiona rápidamente en la cámara donde se ha hecho el vacío. Como no se realiza trabajo y todo el sistema está térmicamente aislado, las energías internas inicial y final del gas son iguales.

Cuando Joule realizó este experimento, se encontró con que la temperatura final era igual a la inicial. Otros experimentos confirmaron este resultado para gases a densidades bajas. Esto implica que en el caso de un gas a baja densidad (es decir, para un gas ideal), la temperatura depende únicamente de la energía interna o, como es más corriente decir, la energía interna depende únicamente de la temperatura. Sin embargo, cuando se realiza el experimento con una gran cantidad de gas inicialmente en el compartimento de la izquierda, de modo que la densidad sea alta, la temperatura después de la expansión es ligeramente menor que antes de la expansión. Esto indica que existe una pequeña atracción entre las moléculas de un gas real.

18.5 TRABAJO Y DIAGRAMA *PV* PARA UN GAS

En muchos tipos de máquinas, el trabajo se obtiene permitiendo que un gas se expansione contra un pistón o émbolo móvil. Por ejemplo, en una máquina de vapor, el agua se calienta en una caldera para producir vapor, que a continuación produce trabajo al expandirse y desplazar un émbolo. En un motor de automóvil, se provoca la ignición de una mezcla de vapor de gasolina y aire, originando su explosión. Las elevadas presiones y temperaturas resultantes hacen que el gas se expanda rápidamente empujando a un pistón y realizando trabajo. En esta sección, veremos cómo se puede describir matemáticamente el trabajo realizado por un gas que se expande.

PROCESOS CUASIESTÁTICOS

En la figura 18.6, se ve un gas ideal confinado en un recipiente provisto de un pistón que ajusta muy bien y que supondremos sin rozamiento. Cuando el pistón se mueve, el volumen del gas varía. La temperatura o la presión, o ambas a la vez, deberán variar también puesto que estas tres variables están relacionadas mediante la ecuación de estado $PV = nRT$. Si empujamos rápidamente hacia dentro el pistón para comprimir el gas, inicialmente la presión cerca del pistón será mayor que en un lugar más alejado. Finalmente, el gas se estabilizará en una nueva presión y temperatura. No podemos determinar variables macroscópicas, tales como T, P o E_{int} para el sistema gaseoso completo hasta que el equilibrio se restaure en el gas.

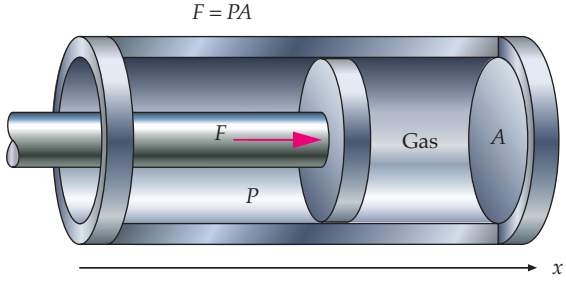


FIGURA 18.6 Gas confinado en un cilindro térmicamente aislado dotado de un pistón móvil. Cuando el pistón se desplaza una distancia dx, el volumen del gas varía en $dV = A\,dx$. El trabajo realizado por el gas es $PA\,dx = P\,dV$, siendo P la presión.

Sin embargo, si movemos lentamente el pistón en pequeños desplazamientos y permitimos que se reestablezca el equilibrio después de cada desplazamiento, podemos comprimir y dilatar el gas de forma que se aleje poco de su estado de equilibrio. En este tipo de proceso, denominado **proceso cuasiestático**, el gas pasa por una serie de estados de equilibrio. En la práctica, es posible aproximarse bastante bien a los procesos cuasiestáticos.

Comencemos con un gas a presión alta y dejémosle expandirse cuasiestáticamente. El módulo de la fuerza ejercida por el gas sobre el pistón es PA, donde A es el área del pistón y P es la presión del gas. Si el pistón se desplaza una distancia dx, el trabajo realizado por el gas sobre el pistón vale

$$dW_{\text{por el gas}} = F_x\,dx = PA\,dx = P\,dV \qquad 18.13$$

donde $dV = A\,dx$ es el incremento de volumen del gas. Durante la expansión, el pistón ejerce sobre el gas una fuerza de módulo PA, pero en sentido opuesto a la fuerza del gas sobre el pistón. Así, el trabajo realizado por el pistón sobre el gas es exactamente el realizado por el gas cambiado de signo:

$$dW_{\text{sobre el gas}} = -dW_{\text{por el gas}} = -P\,dV \qquad 18.14$$

Obsérvese que en una expansión, dV es positivo y el gas realiza trabajo sobre el pistón, de modo que $dW_{\text{sobre el gas}}$ es negativo, y para una compresión, dV es negativo y se realiza trabajo sobre el gas, siendo $dW_{\text{sobre el gas}}$ positivo.

El trabajo efectuado sobre el gas durante una expansión o compresión desde un volumen V_i hasta un volumen V_f es

$$W_{\text{sobre el gas}} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV \qquad 18.15$$

TRABAJO REALIZADO SOBRE UN GAS

Para calcular este trabajo, se necesita saber cómo varía la presión durante la expansión o compresión. Las distintas posibilidades pueden ilustrarse fácilmente utilizando un diagrama PV.

DIAGRAMAS *PV*

Los estados de un gas pueden representarse en un diagrama de P en función de V. Dado que especificando ambos, P y V, especificamos el estado del gas, cada punto sobre el diagrama PV indica un estado particular del gas. La figura 18.7 muestra un diagrama PV con una línea horizontal que representa una serie de estados en que todos tienen el mismo valor de P. Esta recta representa una *compresión* a presión constante, proceso que recibe el nombre de **compresión isobara**. Para una variación de volumen ΔV (ΔV es negativo en una compresión), tenemos

$$W_{\text{sobre el gas}} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -P\int_{V_i}^{V_f} dV = -P\,\Delta V = |P\,\Delta V|$$

que es igual al área sombreada bajo la línea recta de la figura. En general, para una compresión, el trabajo realizado por el gas es igual al área bajo la correspondiente curva de P en función de V. (Para una expansión, el trabajo realizado sobre el gas es igual al área bajo la curva de P en función de V, cambiada de signo.) Como las presiones suelen darse en atmósferas y los volúmenes se dan a veces en litros, es conveniente tener un factor de conversión entre atmósferas-litro y joules:

$$1\ \text{atm}\cdot\text{L} = (10^{-3}\ \text{m}^3)(101{,}325 \times 10^3\ \text{N/m}^2) \approx 101{,}3\ \text{J} \qquad 18.16$$

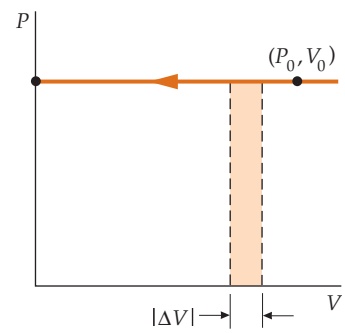


FIGURA 18.7 Cada punto de un diagrama PV, como el (P_0, V_0), representa un estado particular del gas. La recta horizontal representa estados con una presión constante P_0. El trabajo realizado sobre el gas cuando se comprime una cantidad $|\Delta V|$ está representado por la zona sombreada $P_0|\Delta V|$.

PROBLEMA PRÁCTICO 18.4

Si 5,00 L de un gas ideal a una presión de 2,00 atm se enfrían de forma que el gas se contrae hasta que su volumen es 3,00 L, ¿cuál es el trabajo realizado sobre el gas?

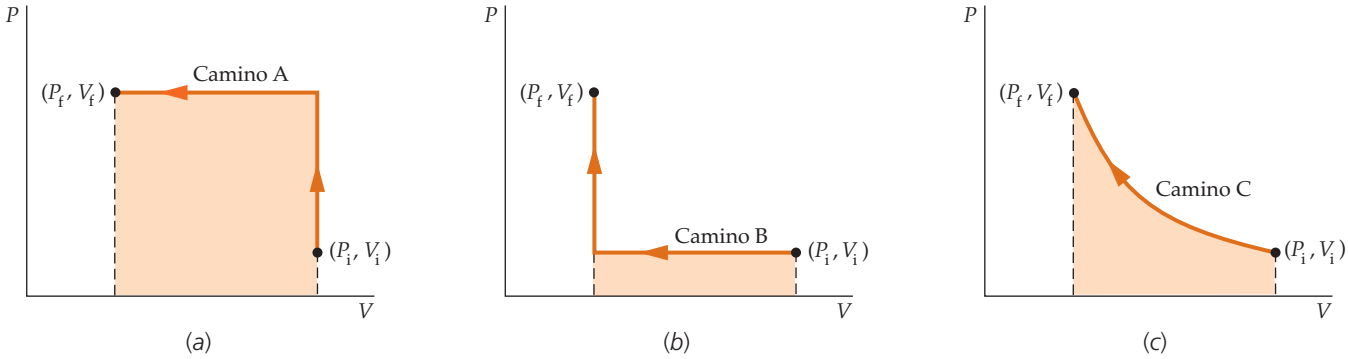


FIGURA 18.8 Tres caminos sobre un diagrama PV para conectar un estado inicial (P_i, V_i) y un estado final (P_f, V_f). El trabajo realizado a lo largo de cada trayecto está indicado por las zonas sombreadas.

En la figura 18.8, se ven tres posibles caminos o procesos sobre un diagrama PV para un gas que inicialmente está en el estado (P_i, V_i) y al final se encuentra en el estado (P_f, V_f). Suponemos que el gas es ideal y hemos escogido los estados inicial y final, de modo que tengan la misma temperatura, de forma que $P_iV_i = P_fV_f = nRT$. Como la energía interna depende sólo de la temperatura, las energías internas inicial y final también son iguales.

En la figura 18.8*a*, el gas se calienta a volumen constante* hasta que su presión es P_f y luego se enfría a presión constante hasta que su volumen es V_f. El trabajo realizado sobre el gas a lo largo del camino A es $P_i|V_f - V_i| = -P_i(V_f - V_i)$, para la parte horizontal del mismo, y es nulo en el trayecto a volumen constante.

$$P_f|V_f - V_i| = -P_f(V_f - V_i).$$

En la figura 18.8*b*, primero se enfría el gas a presión constante hasta que su volumen es V_f y después se calienta a volumen constante hasta que su presión vale P_f. El trabajo realizado a lo largo del camino B es $P_i|V_f - V_i| = -P_i(V_f - V_i)$, que es mucho menor que el obtenido a lo largo del camino A, como puede verse comparando las regiones sombreadas en las figuras 18.8*a* y *b*.

En la figura 18.8*c*, la trayectoria C representa una **compresión isoterma**, es decir, un proceso a temperatura constante. (Mantener constante la temperatura durante la compresión exige que se extraiga calor del gas a lo largo de ese proceso.) El trabajo realizado a lo largo de C puede calcularse teniendo en cuenta que $P = nRT/V$. De aquí que el trabajo realizado sobre el gas cuando se comprime isotérmicamente desde V_i hasta V_f sea

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}dV$$

Dado que en un proceso isotermo, T es constante, podemos extraerla de la integral. Entonces, se tiene

$$W_{\text{isotermo}} = -nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} = -nRT\ln\frac{V_f}{V_i} = nRT\ln\frac{V_i}{V_f} \qquad 18.17$$

TRABAJO REALIZADO SOBRE UN GAS EN UNA COMPRESIÓN ISOTERMA

Vemos que la cantidad de trabajo realizado sobre el gas es diferente en cada uno de los procesos que aparecen ilustrados en la figura 18.8. La variación de energía interna del gas depende de los estados inicial y final del gas, pero no depende del camino seguido. La variación de energía interna es igual al trabajo realizado sobre el gas más el calor suministrado al gas. De este modo, se puede ver que como el trabajo efectuado es diferente en cada proceso ilustrado, la cantidad de calor suministrado debe ser también diferente en cada proceso. Este análisis pone de manifiesto el hecho de que tanto el trabajo realizado como el calor transferido dependen solamente de cómo un sistema pasa de un estado a otro, pero la variación de energía interna del sistema no depende de cómo se ha llevado a cabo el proceso.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Logaritmos

* Los procesos a volumen constante también se denominan *procesos isócoros o procesos isovolumétricos*.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo del trabajo realizado por un gas ideal obligado a experimentar un proceso cuasiestático

PLANTEAMIENTO El trabajo realizado por un gas es igual al producto de la presión por la variación de volumen, es decir, $dW = P\,dV$. De aquí se desprende que $W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$. El proceso dicta cómo resolver esta integral.

SOLUCIÓN

1. Si el volumen V es constante, entonces dV es cero y $W = 0$.
2. Si la presión P es constante, entonces $W = P\int_{V_i}^{V_f} dV = P(V_f - V_i)$.
3. Si la temperatura T es constante, entonces $P = nRT/V$ y
$$W = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V}dV = nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$
4. Si no se transfiere energía al gas o desde el gas en forma de calor, ver entonces la sección 18.9.

COMPROBACIÓN Si el volumen aumenta, entonces el trabajo W debe ser positivo, y viceversa.

Ejemplo 18.7 Trabajo realizado sobre un gas ideal

Un gas ideal experimenta un proceso cíclico *A-B-C-D-A*, como indica la figura 18.9. El gas inicialmente tiene un volumen de 1 L y una presión de 2 atm, y se expansiona a presión constante hasta que su volumen es 2,5 L, después de lo cual se enfría a volumen constante hasta que su presión es 1 atm. Entonces se comprime a presión constante hasta que su volumen es de nuevo 1 L. Finalmente, se calienta a volumen constante hasta volver a su estado original. Determinar el trabajo total realizado sobre el gas y el calor total añadido durante el ciclo.

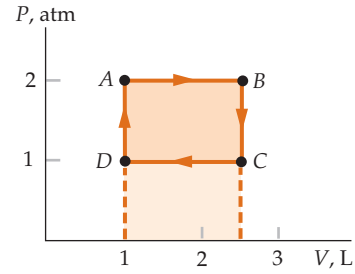


FIGURA 18.9

PLANTEAMIENTO Calcularemos el trabajo realizado en cada paso. Como $\Delta E_{int} = 0$ para cualquier ciclo completo, el primer principio de la termodinámica establece que la suma de la cantidad total de calor suministrado al gas y del trabajo total realizado sobre el gas sea igual a cero.

SOLUCIÓN

1. De *A* a *B*, el proceso es una expansión isobara (la presión es constante), de modo que el trabajo realizado sobre el gas es negativo. El trabajo realizado sobre el gas es igual al área sombreada bajo la recta *AB* de la figura 18.10*a* cambiada de signo:
$$W_{AB} = -P\,\Delta V = -P(V_B - V_A)$$
$$= -(2{,}00\text{ atm})(2{,}50\text{ L} - 1{,}00\text{ L})$$
$$= -3{,}00\text{ atm}\cdot\text{L}$$
2. Convertir las unidades en joules:
$$W_{AB} = -3{,}00\text{ atm}\cdot\text{L} \times \frac{101{,}3\text{ J}}{1\text{ atm}\cdot\text{L}} = -304\text{ J}$$
3. De *B* a *C* (figura 18.10), el gas se enfría a volumen constante y el trabajo es cero:
$$W_{BC} = 0$$
4. Como el gas experimenta una compresión isóbara de *C* a *D*, el trabajo realizado sobre él es positivo y viene dado por el área bajo la línea *CD*, mostrada en la figura 18.10*b*:
$$W_{CD} = -P\,\Delta V = -P(V_D - V_C)$$
$$= -(1{,}00\text{ atm})(1{,}00\text{ L} - 2{,}50\text{ L})$$
$$= 1{,}50\text{ atm}\cdot\text{L} = 152\text{ J}$$
5. Dado que al volver a su estado original *A*, el gas se calienta a volumen constante (figura 18.10), no se realiza trabajo en este proceso:
$$W_{DA} = 0$$

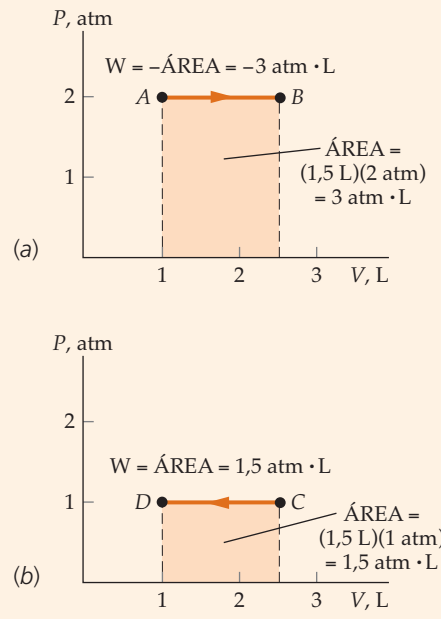


FIGURA 18.10 (*a*) El trabajo realizado sobre el gas durante la expansión de *A* a *B* es igual al área bajo la recta cambiada de signo. (*b*) El trabajo realizado sobre el gas durante la compresión de *C* a *D* es igual al área bajo la recta.

6. El trabajo total realizado por el gas es la suma de los trabajos realizados en cada uno de los pasos:
$$W_{\text{total}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}$$
$$= (-304\ \text{J}) + 0 + 152\ \text{J} + 0 = \boxed{-152\ \text{J}}$$

7. Dado que el gas vuelve a su estado inicial, el cambio total de energía interna es cero:
$$\Delta E_{\text{int}} = 0$$

8. La cantidad de calor transferida al gas se deduce del primer principio:
$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W$$
de donde $Q = \Delta E_{\text{int}} - W = 0 - (-152\ \text{J}) = \boxed{152\ \text{J}}$

COMPROBACIÓN Para un proceso cíclico, la energía neta transferida al gas ha de ser cero, como es el caso de este ejemplo puesto que el trabajo realizado sobre el gas es −152 J y la cantidad de calor transferida al gas es +152 J.

OBSERVACIÓN El trabajo realizado por el gas es igual al realizado sobre el gas cambiado de signo, de modo que el trabajo total realizado por el gas durante el ciclo es +152 J. A lo largo del ciclo, el gas extrae 152 J del medio en forma de calor y suministra al medio 152 J en forma de trabajo. Este proceso deja al gas en su estado inicial. El trabajo total realizado por el gas viene representado por el área encerrada por el ciclo en la figura 18.9. Estos procesos cíclicos tienen importantes aplicaciones en las máquinas térmicas, como veremos en el capítulo 20.

18.6 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE LOS GASES

La determinación de la capacidad calorífica de una sustancia proporciona información sobre su energía interna, que está relacionada con su estructura molecular. En el caso de todas las sustancias que se dilatan al calentarse, la capacidad calorífica a presión constante C_P es mayor que la capacidad calorífica a volumen constante C_V. Si se suministra calor a presión constante, la sustancia se expande y efectúa trabajo positivo sobre el medio (figura 18.11). Por lo tanto, se necesita más calor para obtener un cambio de temperatura dado a presión constante que para obtener el mismo cambio de temperatura calentando a volumen constante. La expansión es normalmente despreciable en el caso de los sólidos y los líquidos, de modo que para ellos $C_P \approx C_V$. Sin embargo, cuando un gas se calienta a presión constante, se dilata fácilmente y realiza un trabajo importante, de modo que $C_P - C_V$ no es despreciable.

Cuando se añade calor a un gas a volumen constante, éste no realiza trabajo (figura 18.12), de modo que el calor añadido es igual al incremento de energía interna del gas. Llamando Q_V al calor suministrado a volumen constante, se tiene

$$Q_V = C_V\,\Delta T$$

Como $W = 0$, tenemos según el primer principio de la termodinámica

$$\Delta E_{\text{int}} = Q_V + W = Q_V$$

Por lo tanto,

$$\Delta E_{\text{int}} = C_V\,\Delta T$$

Tomando el límite cuando ΔT tiende a cero, obtenemos

$$dE_{\text{int}} = C_V\,dT \qquad 18.18a$$

y

$$C_V = \frac{dE_{\text{int}}}{dT} \qquad 18.18b$$

Así pues, la capacidad calorífica a volumen constante es la tasa de variación de la energía interna con la temperatura. Como E_{int} y T son funciones de estado, las ecuaciones 18.18*a* y 18.18*b* son válidas para cualquier proceso.

Calcularemos ahora la diferencia $C_P - C_V$ para un gas ideal. Si designamos con Q_P al calor añadido a presión constante, tendremos a partir de la definición de C_P

$$Q_P = C_P\,\Delta T$$

Según el primer principio de la termodinámica

$$\Delta E_{\text{int}} = Q_P + W = Q_P - P\,\Delta V$$

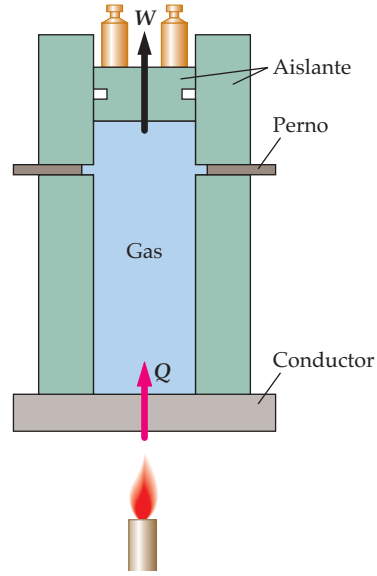


FIGURA 18.11 El calor se suministra a presión constante. El gas se expande y realiza trabajo positivo sobre el pistón.

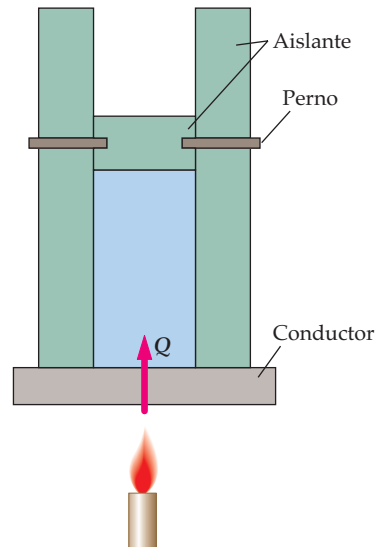


FIGURA 18.12 El calor se suministra a volumen constante, de modo que no se realiza trabajo y todo el calor se convierte en energía interna del gas. El pistón se mantiene en su posición mediante unos pernos.

Por consiguiente,

$$\Delta E_{int} = C_P \Delta T - P \Delta V \qquad \text{o} \qquad C_P \Delta T = \Delta E_{int} + P \Delta V$$

En el caso de cambios infinitesimales, esta expresión se reduce a

$$C_P \, dT = dE_{int} + P \, dV$$

Utilizando la ecuación 18.18*a* para dE_{int}, se obtiene

$$C_P \, dT = C_V \, dT + P \, dV \qquad 18.19$$

La presión, el volumen y la temperatura de un gas ideal están relacionados por

$$PV = nRT$$

Diferenciando ambos miembros de la ley de los gases ideales, se tiene

$$P \, dV + V \, dP = nR \, dT$$

Para un proceso a presión constante $dP = 0$, de donde

$$P \, dV = nR \, dT$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 18.19, se obtiene

$$C_P \, dT = C_V \, dT + nR \, dT = (C_V + nR) \, dT$$

Por lo tanto,

$$C_P = C_V + nR \qquad 18.20$$

que muestra que para un gas ideal, la capacidad calorífica a presión constante es mayor que a volumen constante en una cantidad nR.

En la tabla 18.3, se recogen las capacidades molares medidas c'_P y c'_V para varios gases. En ella se observa que la predicción para el gas ideal de que $c'_P - c'_V = R$, se cumple bastante bien para todos los gases. Obsérvese también que c'_V es aproximadamente 1,5R para todos los gases monoatómicos, 2,5R para todos los diatómicos y mayor que 2,5R para los gases cuyas moléculas son más complejas. Podemos comprender estos resultados considerando el modelo molecular de un gas estudiado en el capítulo 17. La energía cinética de traslación total de n moles de un gas es $K_{tras} = \frac{3}{2}nRT$ (ecuación 17.20). Así pues, si la energía interna de un gas está constituida únicamente por energía cinética de traslación, se tiene

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}nRT \qquad 18.21$$

Tabla 18.3 Capacidades caloríficas molares (J/mol · K) de varios gases a 25 °C

Gas	c'_P	c'_V	c'_V/R	$c'_P - c'_V$	$(c'_P - c'_V)/R$
Monoatómico					
He	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Ne	20,79	12,68	1,52	8,11	0,98
Ar	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Kr	20,79	12,45	1,50	8,34	1,00
Xe	20,79	12,52	1,51	8,27	0,99
Diatómico					
N_2	29,12	20,80	2,50	8,32	1,00
H_2	28,82	20,44	2,46	8,38	1,01
O_2	29,37	20,98	2,52	8,39	1,01
CO	29,04	20,74	2,49	8,30	1,00
Poliatómico					
CO_2	36,62	28,17	3,39	8,45	1,02
N_2O	36,90	28,39	3,41	8,51	1,02
H_2S	36,12	27,36	3,29	8,76	1,05

Entonces, las capacidades caloríficas son

$$C_V = \frac{dE_{int}}{dT} = \tfrac{3}{2}nR \qquad 18.22$$

C_V PARA UN GAS IDEAL MONOATÓMICO

y

$$C_P = C_V + nR = \tfrac{5}{2}nR \qquad 18.23$$

C_P PARA UN GAS IDEAL MONOATÓMICO

En el caso de los gases monoatómicos, se ha comprobado que los resultados experimentales recogidos en la tabla 18.3 concuerdan bien con estas predicciones, pero para los demás gases, las capacidades caloríficas son mayores que las predichas por las ecuaciones 18.22 y 18.23. La energía interna de un gas compuesto por moléculas diatómicas o aún más complicadas es evidentemente mayor que $\frac{3}{2}nRT$. La razón está en que estas moléculas pueden tener otros tipos de energía, como la de rotación o vibración, además de la energía cinética de traslación.

Ejemplo 18.8 Calentamiento, enfriamiento y compresión de un gas ideal

Un sistema formado por 0,32 moles de un gas ideal monoatómico con $c'_V = \frac{3}{2}RT$, ocupa un volumen de 2,2 L a una presión de 2,4 atm (punto A de la figura 18.13). El sistema describe un ciclo formado por tres procesos:

1. El gas se calienta a presión constante hasta que su volumen es 4,4 L en el punto *B*.
2. El gas se enfría a volumen constante hasta que la presión disminuye a 1,2 atm (punto *C*).
3. El gas experimenta una compresión isoterma y vuelve al punto *A*.

(*a*) ¿Cuál es la temperatura en los puntos *A*, *B* y *C*? (*b*) Determinar *W*, *Q* y ΔE_{int} para cada proceso y para el ciclo completo.

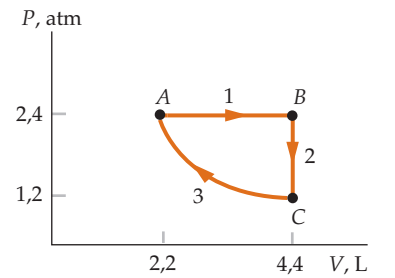


FIGURA 18.13 El trabajo total realizado sobre el gas durante un ciclo es el valor negativo del área *ABCA*. El trabajo total realizado por el gas durante un ciclo es el área *ABCA*.

PLANTEAMIENTO A partir de la ley de los gases ideales, se pueden determinar las temperaturas de todos los puntos *A*, *B* y *C*. El trabajo correspondiente a cada proceso puede determinarse a partir del área bajo la curva representativa. El calor intercambiado en cada proceso se obtiene de la capacidad calorífica dada y de las temperaturas inicial y final correspondientes. En el proceso 3, *T* es constante, de modo que $\Delta E_{int} = 0$ y el calor absorbido más el trabajo realizado sobre el gas es igual a cero.

SOLUCIÓN

(*a*) Determinar las temperaturas de los puntos *A*, *B* y *C* a partir de la ley de los gases ideales:

$$T_C = T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{(2{,}4\text{ atm})(2{,}2\text{ L})}{(0{,}32\text{ mol})(0{,}08206\text{ atm}\cdot\text{L}/(\text{mol}\cdot\text{K}))}$$
$$= 201\text{ K} = \boxed{2{,}0\times10^2\text{ K}}$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_A 2V_A}{nR} = 2\frac{P_A V_A}{nR} = 2T_A = 402\text{ K} = \boxed{4{,}0\times10^2\text{ K}}$$

(*b*) 1. En el proceso 1, utilizar $W_1 = -P_c\,\Delta V$ para calcular el trabajo y $C_P = \frac{5}{2}nR$ para calcular el calor Q_1. Después, usar W_1 y Q_1 para calcular $\Delta E_{int\,1}$:

$$W_1 = -P_A\,\Delta V = -P_A(V_B - V_A) = -(2{,}4\text{ atm})(2{,}2\text{ L})$$
$$= -5{,}28\text{ atm}\cdot\text{L}\left(\frac{101{,}3\text{ J}}{1\text{ atm}\cdot\text{L}}\right) = -534{,}9\text{ J} = \boxed{-0{,}53\text{ kJ}}$$

$$Q_1 = C_P\,\Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T = \tfrac{5}{2}(0{,}32\text{ mol})(8{,}314\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K}))(201\text{ K})$$
$$= 1337\text{ J} = \boxed{1{,}3\text{ kJ}}$$

$$\Delta E_{int\,1} = Q_1 + W_1 = 1337\text{ J} - 534{,}9\text{ J} = 802\text{ J} = \boxed{0{,}80\text{ kJ}}$$

2. En el proceso 2, usar $C_V = \frac{3}{2}nR$ y $T_C - T_B$ a partir del paso (*a*) para determinar Q_2. Después, dado que $W_2 = 0$, $\Delta E_{int\,2} = Q_2$:

$$W_2 = \boxed{0}$$

$$Q_2 = C_V\,\Delta T = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T = \tfrac{3}{2}(0{,}32\text{ mol})[8{,}314\text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})](-201\text{ K})$$
$$= -802\text{ J} = \boxed{-0{,}80\text{ kJ}}$$

$$\Delta E_{int\,2} = W_2 + Q_2 = 0 + (-802\text{ J}) = \boxed{-0{,}80\text{ kJ}}$$

3. Calcular W_3 a partir de $W = -nRT \ln (V_A/V_C)$ (ecuación 18.17) en la compresión isoterma. Entonces, como $\Delta E_{\text{int}\,3} = 0$, $Q_3 = -W_3$:

$$W_3 = nRT_A \ln \frac{V_A}{V_C} = (0{,}32\ \text{mol})[8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](-201\ \text{K}) \ln 2{,}0$$
$$= 371\ \text{J} = \boxed{0{,}37\ \text{kJ}}$$
$$\Delta E_{\text{int}\,3} = \boxed{0}$$
$$Q_3 = \Delta E_{\text{int}\,3} - W_3 = -371\ \text{J} = \boxed{-0{,}37\ \text{kJ}}$$

4. Determinar el trabajo total W, el calor total Q y la variación total de energía interna ΔE_{int} sumando las magnitudes deducidas en los pasos 1, 2 y 3:

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + W_3 = (-535\ \text{J}) + 0 + 371\ \text{J} = \boxed{-0{,}16\ \text{kJ}}$$
$$Q_{\text{total}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 1337\ \text{J} + (-802\ \text{J}) + (-371\ \text{J})$$
$$= \boxed{0{,}16\ \text{kJ}}$$
$$\Delta E_{\text{int total}} = \Delta E_{\text{int}\,1} + \Delta E_{\text{int}\,2} + \Delta E_{\text{int}\,3}$$
$$= 802\ \text{J} + (-802\ \text{J}) + 0 = \boxed{0{,}00\ \text{kJ}}$$

COMPROBACIÓN La variación total de energía interna es cero por tratarse de un proceso cíclico. El trabajo total realizado sobre el gas más el calor total absorbido por el gas es igual a cero.

OBSERVACIÓN El trabajo total realizado sobre el gas es igual al área bajo la curva CA menos el área bajo la recta AB, es decir, el área encerrada por las tres líneas de la figura 18.13 cambiada de signo.

CAPACIDADES CALORÍFICAS Y TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

Según el teorema de equipartición formulado en la sección 4 del capítulo 17, la energía interna de n moles de un gas debería ser igual a $\frac{1}{2}nRT$ por cada grado de libertad de la molécula del gas. La capacidad calorífica a volumen constante de un gas sería $\frac{1}{2}nR$ multiplicado por el número de grados de libertad de la molécula. De acuerdo con la tabla 18.2, el nitrógeno, el oxígeno, el hidrógeno y el monóxido de carbono tienen todos capacidades caloríficas molares a volumen constante de $\frac{5}{2}R$, aproximadamente. Por lo tanto, las moléculas de cada uno de estos gases tienen cinco grados de libertad. En torno al año 1880, Clausius especulaba que estos gases debían estar formados por moléculas diatómicas que pueden rotar alrededor de dos ejes, lo que les da dos grados de libertad adicionales (figura 18.14). Se sabe ahora que los dos grados de libertad que se añaden a los tres de traslación, están asociados con su rotación alrededor de los dos ejes x' e y' perpendiculares a la línea que une los dos átomos. Por consiguiente, la energía cinética de una molécula diatómica es

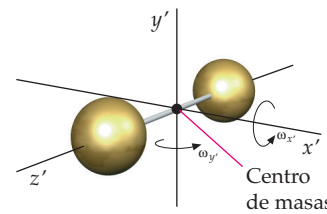


FIGURA 18.14 Modelo "pesa de gimnasia" rígida de una molécula diatómica.

$$K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \tfrac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2$$

La energía interna total de n moles de estos gases es, por lo tanto,

$$E_{\text{int}} = 5 \times \tfrac{1}{2}nRT = \tfrac{5}{2}nRT \qquad 18.24$$

y la capacidad calorífica a volumen constante es

$$C_V = \tfrac{5}{2}nR \qquad 18.25$$

Aparentemente, los gases diatómicos no rotan alrededor de la línea que une los dos átomos. Si lo hicieran, tendrían seis grados de libertad y C_V sería $\frac{6}{2}nR = 3nR$, lo cual contradice los resultados experimentales. Por otra parte, los gases monoatómicos carecen de movimientos de rotación. En la sección 18.8, veremos cómo estos hechos enigmáticos pueden explicarse fácilmente cuando se tiene en cuenta la cuantización del momento angular.

Ejemplo 18.9 Calentamiento de un gas ideal diatómico

Dos moles de gas oxígeno se calientan desde una temperatura de 20 °C y una presión de 1 atm a una temperatura de 100 °C. Suponer que el oxígeno es un gas ideal. (*a*) ¿Cuánto calor debe suministrarse si el volumen se mantiene constante durante el calentamiento? (*b*) ¿Cuánto calor debe suministrarse si la presión permanece constante? (*c*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas en el apartado (*b*)?

PLANTEAMIENTO El calor necesario para el calentamiento a volumen constante es $Q_V = C_V \Delta T$, siendo $C_V = \frac{5}{2}nR$, ya que el oxígeno es un gas diatómico. Para el calentamiento a presión constante, $Q_P = C_P \Delta T$, siendo $C_P = C_V + nR$. Finalmente, el trabajo realizado por el gas es igual (cambiado de signo) al realizado sobre el gas, el cual puede obtenerse a partir de $\Delta E_{int} = Q + W_{sobre}$. Asimismo, $W_{por} = P \Delta V$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Expresar el calor necesario para el proceso a volumen constante en función de C_V y ΔT: $Q_V = C_V \Delta T$

2. Calcular el calor para $\Delta T = 80\ °C = 80\ K$:
$$Q_V = C_V \Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T = \tfrac{5}{2}(2{,}00\ \text{mol})[8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](80{,}0\ \text{K}) = \boxed{3{,}33\ \text{kJ}}$$

(*b*) 1. Expresar el calor necesario para el proceso a presión constante en función de C_P y ΔT: $Q_P = C_P \Delta T$

2. Calcular la capacidad calorífica a presión constante: $C_P = C_V + nR = \tfrac{5}{2}nR + nR = \tfrac{7}{2}nR$

3. Calcular el calor suministrado a presión constante para $\Delta T = 80\ K$:
$$Q_P = C_P \Delta T = \tfrac{7}{2}(2{,}00\ \text{mol})[8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](80{,}0\ \text{K}) = \boxed{4{,}66\ \text{kJ}}$$

(*c*) 1. El trabajo W realizado sobre el gas puede determinarse a partir del primer principio de la termodinámica: $\Delta E_{int} = Q + W$ de modo que $W = \Delta E_{int} - Q$

2. La variación de energía interna es igual al calor suministrado a volumen constante en (*a*):
$$\Delta E_{int} = Q_V = C_V \Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T$$
y $Q_P = C_P \Delta T = \tfrac{7}{2}nR\,\Delta T$
por tanto, $W = \Delta E_{int} - Q_p = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T - \tfrac{7}{2}nR\,\Delta T = -nR\,\Delta T$
$= -(2{,}00\ \text{mol})[8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](80{,}0\ \text{K}) = -1{,}33\ \text{kJ}$

3. El trabajo realizado a presión constante es, por lo tanto: $W_{por} = -W = \boxed{1{,}33\ \text{kJ}}$

COMPROBACIÓN Obsérvese que el trabajo realizado por el gas en el apartado (*c*) tiene un valor positivo. Esto era de esperar porque el gas se expande cuando se calienta a presión constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 18.5 Determinar los volúmenes inicial y final de este gas a partir de la ley de los gases ideales y utilizarlos para calcular el trabajo realizado por el gas a partir de $W_{por} = P \Delta V$ cuando el calor se añade a presión constante.

Ejemplo 18.10 Modos de vibración del dióxido de carbono *Conceptual*

La molécula de dióxido de carbono consta de un átomo de carbono justo entre dos átomos de oxígeno. Esta molécula posee tres modos distintos de vibración. Dibujar estos modos en un sistema de referencia en el que el centro de masas de la molécula esté en reposo.

PLANTEAMIENTO Si la molécula no estuviese vibrando, los centros de los átomos estarían en una línea recta. Cuando vibran los átomos se pueden mover paralela y perpendicularmente a la línea que pasa por sus centros. Hay dos modos de estiramiento en los que los átomos se mueven paralelamente a la línea que une sus centros, y un modo de flexión donde se desplazan perpendicularmente a la línea que pasa por sus centros.

SOLUCIÓN

1. En el modo de estiramiento simétrico (figura 18.15*a*), el átomo de carbono permanece estacionario y los átomos de oxígeno oscilan 180° desfasados uno respecto al otro. ¿Se imagina por qué este modo se denomina a veces modo de respiración?
2. En el modo de estiramiento asimétrico (figura 18.15*b*), los dos átomos de oxígeno vibran en fase entre sí, pero desfasados 180° respecto al movimiento del átomo de carbono:
3. En el modo de flexión (figura 18.15*c*), los dos átomos de oxígeno vibran en fase entre sí, pero desfasados 180° respecto al movimiento del átomo de carbono:

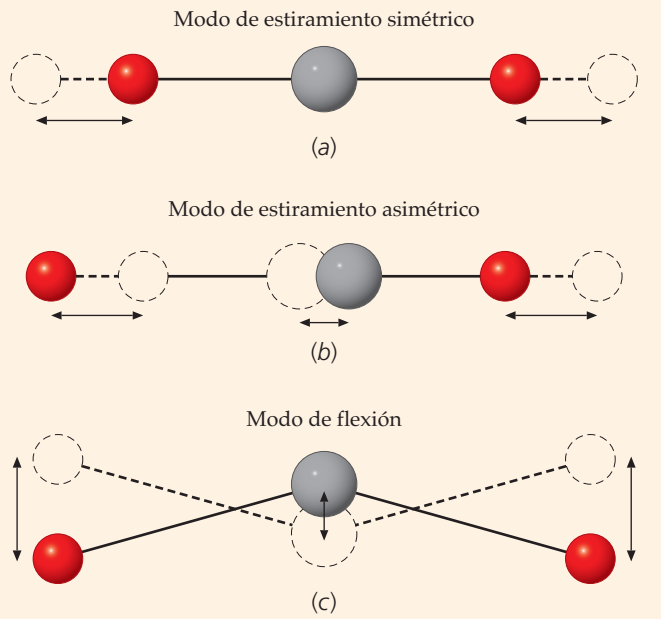


FIGURA 18.15

18.7 CAPACIDADES CALORÍFICAS DE LOS SÓLIDOS

En la sección 18.1, señalábamos que todos los metales que aparecen en la tabla 18.1 tienen calores molares muy similares. Experimentalmente, se ha comprobado que la mayoría de los sólidos tienen capacidades caloríficas molares aproximadamente iguales a $3R$:

$$c' = 3R = 24{,}9\ \text{J/mol}\cdot\text{K} \qquad 18.26$$

Esta propiedad se conoce como **ley de Dulong-Petit**. Puede comprenderse esta ley si aplicamos el teorema de equipartición al modelo sencillo de sólido indicado en la figura 18.16. De acuerdo con este modelo, un sólido consiste en una disposición regular de átomos, cada uno de los cuales tiene una posición fija de equilibrio y está conectado mediante "muelles" a sus vecinos. Todos los átomos pueden vibrar en las direcciones x, y y z. La energía total de un átomo en un sólido es, pues,

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}k_{\text{eff}}x^2 + \tfrac{1}{2}k_{\text{eff}}y^2 + \tfrac{1}{2}k_{\text{eff}}z^2$$

donde k_{ef} es la constante de fuerza efectiva de los hipotéticos muelles. Cada átomo tiene así seis grados de libertad. El teorema de equipartición establece que una sustancia en equilibrio tiene una energía media por mol de $\frac{1}{2}RT$ por cada grado de libertad. Así, la energía interna de 1 mol de un sólido es

$$E_{\text{int m}} = 6 \times \tfrac{1}{2}RT = 3RT \qquad 18.27$$

lo cual significa que la capacidad calorífica molar c' es 3R.

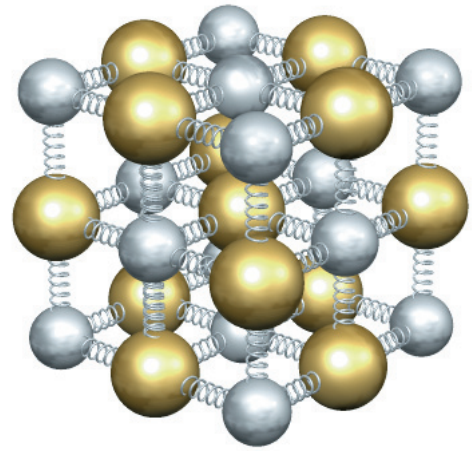


FIGURA 18.16 Modelo de un sólido en el que los átomos están conectados entre sí mediante "muelles". La energía interna del sólido se compone de las energías cinética y potencial de vibración.

Ejemplo 18.11 Uso de la ley de Dulong-Petit

La masa molar del cobre es 63,5 g/mol. Utilizar la ley de Dulong-Petit para calcular el calor específico del cobre.

PLANTEAMIENTO La ley de Dulong-Petit nos permite determinar el calor molar de un sólido, c'. El calor específico es $c = c'/M$ (ecuación 18.6), siendo M la masa molar.

SOLUCIÓN

1. La ley de Dulong-Petit nos da c' en función de R: $c' = 3R$

2. Como $M = 63{,}5$ g/mol para el cobre, el calor específico es:

$$c = \frac{c'}{M} = \frac{3R}{M} = \frac{3(8{,}314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)})}{63{,}5\ \text{g/mol}}$$

$$= 0{,}392\ \text{J/(g}\cdot\text{K)} = \boxed{0{,}392\ \text{kJ/(kg}\cdot\text{K)}}$$

COMPROBACIÓN Esta solución difiere del valor medido experimentalmente, 0,386 kJ/kg · K, dado en la tabla 18.1, en menos del 2%.

PROBLEMA PRÁCTICO 18.6 El calor específico de cierto metal, medido experimentalmente, resulta ser 1,02 kJ/kg · K. (*a*) Calcular la masa molar de este metal, suponiendo que cumple la ley de Dulong-Petit. (*b*) ¿De qué metal se trata?

18.8 FALLOS DEL TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

Si bien el teorema de equipartición permitió interpretar con notable éxito los calores molares de gases y sólidos, tuvo igualmente fallos de enorme importancia. Por ejemplo, si una molécula de un gas diatómico, como la de la figura 18.14, gira alrededor de la línea que une los átomos, deberá haber un grado de libertad adicional. Análogamente, si una molécula diatómica no es rígida, los dos átomos deberán vibrar a lo largo de la línea que los une. Entonces deberíamos tener dos grados de libertad más, correspondientes a las energías cinética y potencial de vibración. Pero, de acuerdo con los valores medidos de las capacidades caloríficas molares de

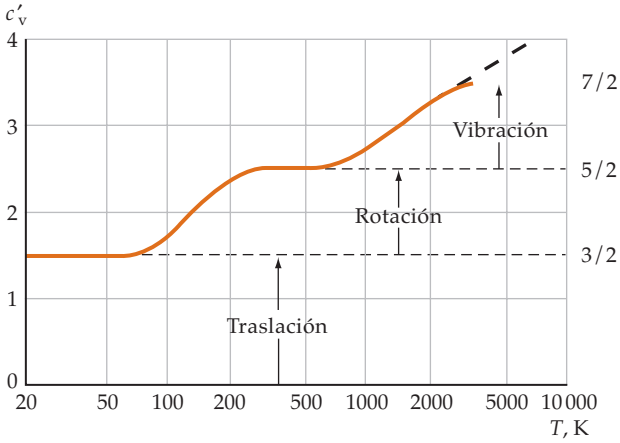


FIGURA 18.17 Dependencia con la temperatura del calor molar del H_2. (La curva es cualitativa en los lugares donde c'_v varía.) El 95% de las moléculas de H_2 están disociadas en hidrógeno atómico a 5000 K.

la tabla 18.3, los gases diatómicos, aparentemente, ni giran alrededor de la línea que une los átomos, ni vibran. El teorema de equipartición no da ninguna explicación para esto, ni para el hecho de que las moléculas monoatómicas, aparentemente, no giren alrededor de ninguno de los tres ejes posibles de rotación mutuamente perpendiculares. Además, el teorema de equipartición predice valores constantes para las capacidades caloríficas de los gases, pero cuando se hacen medidas cuidadosas se ve que estas magnitudes dependen ligeramente de la temperatura, lo cual es contrario a las predicciones del teorema de equipartición. El caso más espectacular de la dependencia de la capacidad calorífica con la temperatura es el del H_2, que se muestra en la figura 18.17. A temperaturas inferiores a 70 K, el valor de c'_v para el H_2 es $\frac{3}{2}R$, el mismo que el correspondiente a moléculas de gas que tienen movimiento de traslación, pero no de rotación o vibración. A temperaturas entre 250 K y 700 K, $c'_v = \frac{5}{2}R$, que corresponde a moléculas con movimiento de rotación, pero no de vibración, y a temperaturas mayores que 700 K, las moléculas de H_2 empiezan a vibrar. Sin embargo, las moléculas se disocian antes de que c'_v alcance el valor $\frac{7}{2}R$. Por último, el teorema de equipartición de la energía predice un valor constante de $3R$ para la capacidad calorífica de los sólidos. Este resultado es válido para la mayoría de los sólidos a altas temperaturas, aunque no para todos, y deja de ser válido a temperaturas muy bajas.

El teorema de equipartición falla porque la energía está **cuantizada**. Una molécula puede tener sólo ciertos valores de energía interna, como ilustra esquemáticamente el diagrama de niveles de energía de la figura 18.17. La molécula puede ganar o perder energía sólo si la ganancia o pérdida le conduce a otro nivel permitido. Por ejemplo, en un gas la energía que puede transferirse por choques moleculares es del orden de kT, la energía térmica típica de una molécula. La validez del teorema de equipartición depende del tamaño relativo de kT y del espaciado de los niveles de energía permitidos.

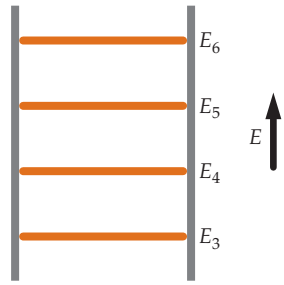


FIGURA 18.18 Diagrama de niveles de energía. Un sistema sólo puede tener ciertas energías discretas.

Si el espaciado de los niveles de energía permitidos es grande comparado con kT, la energía no puede transferirse por choques y el teorema de equipartición clásico no es válido. Si el espaciado de los niveles es mucho menor que kT, la cuantización de la energía no se observa y el teorema de equipartición se cumplirá.

CONDICIONES PARA LA VALIDEZ DEL TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

Consideremos la rotación de una molécula. La energía de rotación es

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I} \qquad 18.28$$

donde I es el momento de inercia de la molécula, ω su velocidad angular y $L = I\omega$ su momento angular. En la sección 10.5, vimos que el momento angular está cuantizado y su valor restringido a

$$L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad 18.29$$

donde $\hbar = h/(2\pi)$, y h es la constante de Planck. La energía de una molécula en rotación está, por lo tanto, cuantizada según los valores

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell + 1)\, E_{0r} \qquad 18.30$$

donde

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \qquad 18.31$$

es una característica del espaciado de energía entre los niveles. Si esta energía es mucho menor que kT, la física clásica y el teorema de equipartición deberán cumplirse. Definimos una temperatura crítica, T_c, mediante la expresión

$$kT_c = E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \qquad 18.32$$

Si T es mucho mayor que esta temperatura crítica, kT será mucho mayor que el espaciado de los niveles de energía, el cual es del orden de kT_c, y se cumplirán la física clásica y el teorema de equipartición. Para valores de T inferiores o del orden de T_c, kT no será mucho mayor que el espaciado de los niveles de energía y la física clásica y el teorema de equipartición dejan de ser válidos. Hagamos una estimación de T_c para algunos casos de interés.

1. *Rotación del H_2 alrededor de un eje perpendicular a la línea que une los átomos de H y pasa por su centro de masas* (figura 18.19). El momento de inercia del H_2 alrededor del eje es

$$I_H = 2M_H\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}M_H r_s^2$$

donde M_H es la masa de un átomo de H, y r_s es la distancia de separación de los dos átomos. Para el hidrógeno, $M_H = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, y $r_s \approx 8 \times 10^{-11}$ m. La temperatura crítica es, por lo tanto,

$$T_c = \frac{\hbar^2}{2kI} = \frac{\hbar^2}{kM_H r_s^2}$$

$$= \frac{(1{,}05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(8 \times 10^{-11}\ \text{m})^2} \approx 75\ \text{K}$$

Como puede verse en la figura 18.17, ésta es aproximadamente la temperatura por debajo de la cual la energía de rotación no contribuye a la capacidad calorífica.

2. *O_2*. Como la masa del O_2 es aproximadamente 16 veces la del H_2, y la separación atómica es aproximadamente la misma, la temperatura crítica del O_2 deberá ser aproximadamente $(75/16) \approx 4{,}6$ K. Para todas las temperaturas a las que el O_2 existe en forma gaseosa, $T >> T_c$, de modo que kT es mucho mayor que el espaciado de niveles energéticos y es lógico que se cumpla el teorema de equipartición de la física clásica.

3. *Rotación de un gas monoatómico*. Consideremos el átomo de He, que está formado por un núcleo compuesto de dos protones y dos neutrones, además de dos electrones. La masa del electrón es, aproximadamente, 8000 veces menor que la del núcleo de He. Sin embargo, el radio del núcleo es, aproximadamente, 100 000 veces menor que la distancia del núcleo al electrón. Así, el momento de inercia del átomo es casi enteramente debido a sus dos electrones. La distancia del núcleo de He a uno de sus eléctrones es, aproximadamente, la mitad que la distancia de separación de los átomos de H en el H_2, y la masa del electrón es, aproximadamente, 2000 veces menor que la del núcleo de H. Así, utilizando $m_e = M_H/2000$ y $r = r_s/2$, el momento de inercia de los dos electrones del He es, aproximadamente,

$$I_{He} = 2m_e r^2 \approx 2\frac{M_H}{2000}\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 = \frac{I_H}{2000}$$

La temperatura crítica del He será, por lo tanto, 2000 veces la del H_2, o sea, del orden de 150 000 K. Este valor es muy superior al de la temperatura de disociación (la temperatura a la cual los electrones se separan de sus núcleos) del helio.

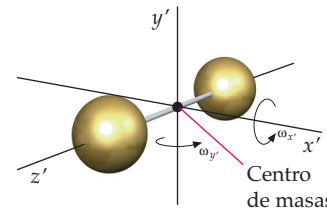


FIGURA 18.19 Modelo "pesa de gimnasia" rígida de una molécula de un gas diatómico.

Así, el espaciado entre los niveles energéticos permitidos es siempre mayor que kT y las moléculas de He no pueden ser inducidas a girar por colisiones ocurridas en el gas. Otros gases monoatómicos poseen momentos de inercia ligeramente mayores por su mayor número de electrones, pero sus temperaturas críticas son todavía del orden de decenas de miles de kelvins y, por lo tanto, sus moléculas tampoco pueden adquirir movimientos de rotación por colisiones en el gas.

4. *Rotación de un gas diatómico alrededor del eje que une sus átomos*. De acuerdo con nuestra exposición sobre gases monoatómicos, el momento de inercia para el gas diatómico será también debido principalmente a los electrones y, por lo tanto, del mismo orden de magnitud que el de un gas monoatómico. De nuevo, la temperatura crítica T_c calculada para decidir si esta rotación ocurre por causa de las colisiones entre moléculas del gas, excede la temperatura de disociación del gas, haciendo imposible la rotación en esas circunstancias.

Es interesante señalar que los éxitos del teorema de equipartición al explicar las capacidades caloríficas experimentales de los sólidos y de los gases condujeron, por primera vez, a entender realmente la estructura molecular en el siglo XIX, mientras que sus fallos jugaron un papel importante en el desarrollo de la mecánica cuántica en el siglo XX.

Ejemplo 18.12 Energía de rotación del átomo de hidrógeno

A temperatura ambiente (300 K) el gas hidrógeno es diatómico. Sin embargo, a temperaturas más altas, las moléculas de hidrógeno se disocian. A una temperatura de 8000 K, el gas hidrógeno es 99,99% monoatómico. (*a*) Calcular la energía de rotación más baja (distinta de cero) del átomo de hidrógeno y compararla con kT a la temperatura ambiente. (*b*) Calcular la temperatura crítica T_c para un gas de hidrógeno atómico.

PLANTEAMIENTO Según la ecuación 18.30, la energía de rotación más baja corresponde a $\ell = 1$. Hacemos uso de esa ecuación para determinar la energía en función del momento de inercia. Como el momento de inercia del núcleo puede despreciarse (pues su radio es 100 000 veces menor que el radio del átomo), el momento de inercia del átomo es esencialmente el momento de inercia del electrón alrededor del núcleo. Por lo tanto, $I = m_e r^2$, donde $r \approx 5{,}29 \times 10^{-11}$ m es la distancia del núcleo al electrón.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La energía más baja superior a cero corresponde a $\ell = 1$: $E_\ell = \dfrac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$

de aquí que $E_1 = \dfrac{1(1+1)\hbar^2}{2m_e r^2} = \dfrac{\hbar^2}{m_e r^2}$

2. Los valores numéricos son: $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$; $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}$; $r = 5{,}29 \times 10^{-11}\ \text{m}$

3. Reemplazar por los valores numéricos: $E_1 = \dfrac{\hbar^2}{m_e r^2} = \boxed{4{,}32 \times 10^{-18}\ \text{J}}$

4. El valor de kT para $T = 300$ K es: $kT = (1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K}) = 4{,}14 \times 10^{-21}\ \text{J}$

5. Comparar E_1 con kT: $\dfrac{E_1}{kT} = \dfrac{4{,}32 \times 10^{-18}\ \text{J}}{4{,}14 \times 10^{-21}\ \text{J}} \approx 10^3$

$\boxed{E_1 \text{ es aproximadamente tres órdenes de magnitud mayor que } kT.}$

(*b*) Hacer $kT_c = E_1$, y despejar T_c: $kT_c = E_1$

$T_c = \dfrac{E_1}{k} = \dfrac{4{,}32 \times 10^{-18}\ \text{J}}{1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}} = \boxed{3{,}13 \times 10^5\ \text{K}}$

COMPROBACIÓN La temperatura crítica de un átomo de hidrógeno (3×10^5 K) es tan elevada que el átomo se ionizaría antes de alcanzar el valor crítico. Esto "explica" por qué los grados de libertad de rotación contribuyen a la capacidad calorífica de los átomos de hidrógeno.

18.9 COMPRESIÓN ADIABÁTICA CUASIESTÁTICA DE UN GAS

Todo proceso en el que no se transfiere calor hacia el sistema o desde el sistema se denomina **proceso adiabático**. Un proceso de este tipo puede darse cuando el sistema está muy bien aislado, o cuando el proceso ocurre muy rápidamente. En esta sección consideraremos la expansión adiabática cuasiestática de un gas, durante la cual el gas, contenido en un recipiente térmicamente aislado, se comprime lentamente mediante un pistón, el cual realiza trabajo sobre el gas. Como ni entra ni sale calor del gas, el trabajo realizado sobre el mismo es igual a su aumento de energía interna, y la temperatura del gas aumenta. En la figura 18.20, se indica la curva que representa este proceso en un diagrama PV.

Podemos hallar la ecuación correspondiente a la curva adiabática de un gas ideal utilizando la ecuación de estado ($PV = nRT$) y el primer principio de la termodinámica ($dE_{int} = dQ + dW$). Se tiene

$$C_V\,dT = 0 + (-P\,dV) \qquad 18.33$$

donde se ha hecho uso de $dE_{int} = C_V\,dT$ (ecuación 18.18*a*), $dQ = 0$ (el proceso es adiabático) y $dW = -P\,dV$ (ecuación 18.15 para el trabajo realizado sobre el gas). Por lo tanto, si se sustituye $P = nRT/V$, se obtiene

$$C_V\,dT = -nRT\frac{dV}{V}$$

y, tras reordenar, se expresa

$$\frac{dT}{T} + \frac{nR}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

Si se integra, se llega a

$$\ln T + \frac{nR}{C_V}\ln V = \text{constante}$$

Esta expresión puede simplificarse en la forma

$$\ln T + \frac{nR}{C_V}\ln V = \ln T + \ln V^{nR/C_V} = \ln(TV^{nR/C_V}) = \text{constante}$$

o bien

$$TV^{nR/C_V} = \text{constante} \qquad 18.34$$

donde las constantes de las dos ecuaciones precedentes no son las mismas. La ecuación 18.34 puede escribirse de nuevo recordando que $C_P - C_V = nR$:

$$\frac{nR}{C_V} = \frac{C_P - C_V}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} - 1 = \gamma - 1 \qquad 18.35$$

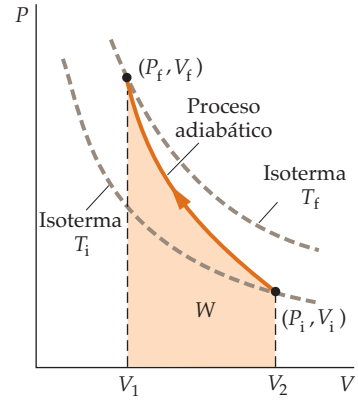


FIGURA 18.20 Compresión adiabática cuasiestática de un gas ideal. Las líneas a trazos son las isotermas correspondientes a las temperaturas inicial y final. La curva que conecta los estados inicial y final de la compresión adiabática tiene una pendiente mayor que las isotermas, debido a que la temperatura aumenta durante la compresión.

Se forman nubes cuando al elevarse el aire húmedo se enfría debido a la expansión adiabática del aire. El enfriamiento provoca vapor de agua que se condensa en gotitas líquidas. *(Will and Deni McIntyre/Photo Researchers.)*

donde γ es la razón de las capacidades caloríficas:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad 18.36$$

Por lo tanto,

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \qquad 18.37$$

Si se elimina T de la ecuación 18.37 por medio de $PV = nRT$, se tiene

$$\frac{PV}{nR}V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

o sea

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \qquad 18.38$$

PROCESO ADIABÁTICO CUASIESTÁTICO

La ecuación 18.38 relaciona las variables P y V para expansiones y compresiones adiabáticas. Despejando V en $PV = nRT$ (la ecuación de los gases ideales) y sustituyendo la expresión resultante en la ecuación 18.38, después de simplificar, se obtiene

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{constante} \qquad 18.39$$

PROBLEMA PRÁCTICO 18.7
Demostrar que para un proceso adiabático cuasiestático $T^{\gamma}/P^{\gamma-1} = \text{constante}$.

El trabajo realizado sobre el gas en una compresión adiabática cuasiestática puede calcularse a partir del primer principio de la termodinámica:

$$dE_{int} = dQ + dW \qquad \text{o bien} \qquad dW = dE_{int} - dQ$$

Como $dE_{int} = C_V\,dT$ y $dQ = 0$, resulta

$$dW = C_V\,dT$$

Por lo tanto,

$$W_{\text{adiabático}} = \int dW = \int C_V\,dT = C_V\,\Delta T \qquad 18.40$$

TRABAJO ADIABÁTICO REALIZADO SOBRE UN GAS IDEAL

donde hemos supuesto que C_V es constante.* Obsérvese que el trabajo realizado sobre el gas depende únicamente de la variación de la temperatura absoluta del mismo. En una compresión adiabática cuasiestática, se realiza trabajo sobre el gas y tanto su energía interna como su temperatura aumentan. En una *expansión* adiabática cuasiestática, el trabajo es realizado *por* el gas, y disminuyen su temperatura y su energía interna.

Podemos utilizar la ley de los gases ideales para expresar la ecuación 18.40 en función de los valores inicial y final de la presión y del volumen. Si la temperatura inicial es T_i y la final es T_f, tenemos para el trabajo realizado

$$W_{\text{adiabático}} = C_V\,\Delta T = C_V(T_f - T_i)$$

Utilizando $PV = nRT$, se tiene

$$W_{\text{adiabático}} = C_V\left(\frac{P_fV_f}{nR} - \frac{P_iV_i}{nR}\right) = \frac{C_V}{nR}(P_fV_f - P_iV_i)$$

y haciendo uso de la ecuación 18.35 para simplificar esta expresión, se tiene

$$W_{\text{adiabático}} = \frac{P_fV_f - P_iV_i}{\gamma - 1} \qquad 18.41$$

* En el caso de un gas ideal, E_{int} es proporcional a la temperatura absoluta y, por lo tanto, $C_v = dE_{int}/dT$ es una constante.

Ejemplo 18.13 Compresión adiabática cuasiestática del aire

Se utiliza una bomba de mano para inflar el neumático de una bicicleta a una presión manométrica de 482 kPa (unas 70 lb/in^2). (*a*) ¿Cuánto trabajo ha de hacerse si cada embolada de la bomba es un proceso adiabático cuasiestático? La presión atmosférica es 1 atm, la temperatura del exterior es 20 °C y el volumen del aire en el neumático es de 1 L y permanece constante. (*b*) ¿Cuál es la presión en el neumático inflado después de quitar la bomba cuando la temperatura del aire del neumático vuelve a ser de 20 °C?

PLANTEAMIENTO El trabajo realizado se halla a partir de $\Delta E_{int} = Q + W$, con $Q = 0$. Para un gas ideal, $\Delta E_{int} = C_V \Delta T$ (ecuación 18.40). Como el proceso es cuasiestático y adiabático, sabemos que $TV^{\gamma-1} = P^{\gamma-1}V^{\gamma} =$ constante (ecuación 18.39). (Esta relación da la temperatura final.) Hallar γ utilizando $\gamma = C_P/C_V$, $C_P = C_V + nR$, y $C_V = \frac{5}{2}nR$ (ecuaciones 18.36, 18.20 y 18.25). El subíndice 1 se refiere a los valores iniciales y el subíndice 2 a los valores finales. Entonces, $P_1 = 1{,}00$ atm, $V_2 = 1{,}00$ L, y $T_1 = 20\ °C = 293$ K.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Para hallar el trabajo realizado, aplicamos el primer principio de la termodinámica. Como la compresión es adiabática, $Q = 0$:

$$\Delta E_{int} = Q + W = 0 + W$$

2. Para un gas ideal, la variación de energía interna es $C_V \Delta T$:

$$W = \Delta E_{int} = C_V \Delta T$$

3. Para un gas diatómico, $C_V = \frac{5}{2}nR$:

$$W = C_V \Delta T = \tfrac{5}{2}nR\,\Delta T$$

4. La temperatura final se calcula usando $TV^{\gamma-1} = P^{\gamma-1}V^{\gamma} =$ constante (ecuación 18.39):

$$\frac{T_1^{\gamma}}{P_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^{\gamma}}{P_2^{\gamma-1}} \Rightarrow T_2 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1$$

5. Hallar γ para un gas diatómico haciendo uso de las ecuaciones 18.36, 18.20 y 18.25:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V} = 1 + \frac{nR}{C_V} = 1 + \frac{nR}{\frac{5}{2}nR} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

6. Despejar T_2. La presión dada es una presión manométrica, de modo que hay que sumar 1 atm = 101,3 kPa a la presión dada de 482 kPa:

$$T_2 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} T_1 = \left(\frac{583\ \text{kPa}}{101{,}3\ \text{kPa}}\right)^{0{,}4/1{,}4} 293\ \text{K} = 483\ \text{K}$$

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = (1{,}00\ \text{atm})\left(\frac{4{,}00\ \text{L}}{2{,}00\ \text{L}}\right)^{1{,}4} = \boxed{2{,}64\ \text{atm}}$$

7. Calcular el trabajo haciendo uso del resultado del paso 3. Utilizar $PV = nRT$ (ley de los gases ideales) para expresar nR en función de P_2, V_2 y T_2:

$$W = \frac{5}{2}nR\,\Delta T = \frac{5}{2}\frac{P_2V_2}{T_2}(T_2 - T_1)$$

$$= \frac{5}{2}\frac{(583\ \text{kPa})(1{,}00 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{483\ \text{K}}(483\ \text{K} - 293\ \text{K}) = \boxed{634\ \text{J}}$$

(*b*) El aire en el neumático se enfría a volumen constante. Así $P_3/T_3 = P_2/T_2$, donde P_3 y T_3 son la presión y la temperatura finales:

$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2}, \quad \text{donde} \quad T_3 = T_1 = 293\ \text{K}$$

$$P_3 = \frac{T_3}{T_2}P_2 = \frac{293\ \text{K}}{483\ \text{K}}2{,}64\ \text{atm} = \boxed{1{,}60\ \text{atm}}$$

COMPROBACIÓN En el caso de la compresión adiabática, la temperatura final es mayor que la inicial, y el trabajo realizado sobre el gas es positivo, como era de esperar.

OBSERVACIÓN (1) El trabajo también puede calcularse utilizando la ecuación 18.41 $W_{adiabático} = (P_fV_f - P_iV_i)/(\gamma - 1)$, pero el uso de $W_{adiabático} = C_V\Delta T$ es preferible porque está más directamente conectado a una ley (el primer principio de la termodinámica) y así es más fácil de recordar. (2) Una bomba y un neumático de bicicleta real no están aislados, de modo que el proceso de inflado del neumático no sería ni siquiera aproximadamente adiabático.

VELOCIDAD DE LAS ONDAS SONORAS

Podemos utilizar la ecuación 18.38 para calcular el módulo de compresibilidad adiabática de un gas ideal, que está relacionado con la velocidad de las ondas sonoras en el aire. Diferenciando los dos miembros de $PV^{\gamma} = \text{constante}$ (ecuación 18.38), resulta:

$$P\,d(V^{\gamma}) + V^{\gamma}\,dP = 0$$

o sea,

$$\gamma P V^{\gamma-1}\,dV + V^{\gamma}\,dP = 0$$

y, por lo tanto,

$$dP = -\frac{\gamma P\,dV}{V}$$

Recordando la ecuación 13.6, podemos definir el módulo de compresibilidad adiabático:*

$$B_{\text{adiabático}} = -\frac{dP}{dV/V} = \gamma P \qquad 18.42$$

La velocidad del sonido (ecuación 15.4) viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabático}}}{\rho}}$$

donde la densidad ρ está relacionada con el número de moles n y la masa molecular M por la expresión $\rho = m/\mathrm{V} = nM/V$. Utilizando la ley de los gases ideales $PV = nRT$, podemos eliminar V a partir de la densidad

$$\rho = \frac{nM}{V} = \frac{nM}{nRT/P} = \frac{MP}{RT}$$

Utilizando este resultado y γP para $B_{\text{adiabático}}$, se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{B_{\text{adiabático}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{MP/(RT)}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

que es la ecuación 15.5 para la velocidad del sonido en un gas.

* El módulo de compresibilidad es el cociente negativo entre el cambio de presión y la variación relativa de volumen, $B = -\Delta P/(\Delta V/V)$ (capítulo 13). El módulo de compresibilidad isotermo, que describe los cambios que ocurren a T constante, difiere del módulo de compresibilidad adiabático, que describe los cambios sin transferencia de calor. Para las ondas sonoras a frecuencias audibles, los cambios son tan rápidos que pueden considerarse sin transferencias de calor. El módulo de compresibilidad apropiado es el adiabático.

Respirometría: respirando el calor

La calorimetría, el estudio y medición de la transferencia de calor, ayuda a determinar el balance de energía total de sistemas. Wilber O. Atwater, el primer director de estaciones experimentales del Departamento de Agricultura[1] de los Estados Unidos, decidió realizar un ambicioso experimento, medir el balance energético humano. Este esfuerzo implicaba medir y analizar los alimentos y el agua dados a los participantes en el ensayo, midiendo, analizando y quemando los residuos generados, y analizando también la temperatura, la química y la humedad de una minúscula habitación en la que vivían.[2] Esta habitación estaba térmicamente aislada, y el interior era una caja de cobre, forrada con tubos de cobre llenos de agua para medidas cuidadosas del calor liberado, y bobinas eléctricas para el mantenimiento de la temperatura. Cualquier cambio en la temperatura del aire de la habitación era debido a la energía procedente de la gente que ocupaba la habitación. Esta energía se medía por los cambios de temperatura registrados por los sensibles termómetros colgados dentro de la caja, y por los cambios en la temperatura del agua bombeada a través de los tubos que cubrían las paredes.[3]

Se gastan alrededor de 5 kcal de energía por cada litro de oxígeno consumido. El consumo de oxígeno de este hombre está siendo observado mientras camina sobre una cinta transportadora. *(Philippe Psaila/Photo Researchers, Inc.)*

Sin embargo, aunque esta habitación de cobre era útil para medir los balances de energía de hombres y mujeres en reposo y en acción, resultaba cara y difícil de usar. Esto condujo a la calorimetría indirecta midiendo la respiración, o sea a la *respirometría*. Ulteriores investigaciones demostraron que más del 95%[4] del consumo de energía humana podría estimarse de manera fiable a partir de las medidas de las cantidades de oxígeno inhalado y dióxido de carbono exhalado.[5] Una cifra que en la actualidad se utiliza con frecuencia es la de 5 kcal/L de consumo de oxígeno.[6] Dependiendo del equipo de medida utilizado, el volumen de oxígeno puede calcularse a partir de la presión parcial del oxígeno en el aire inhalado, o puede basarse en el oxígeno clínicamente administrado e inhalado por el paciente.

La respirometría es extremadamente útil, porque es la medida más rápida del uso de energía por los organismos. Con las modificaciones adecuadas, la respirometría se utiliza para el ganado,[7] las aves de corral[8], animales exóticos[9] e incluso para lodos y aguas residuales.[10] Recientemente, la respirometría se ha utilizado para determinar si el abono está maduro para añadirse a la tierra. Si la tasa de intercambio de gas del abono es alta, la actividad bacteriana sigue siendo alta, y el abono no está completamente maduro.[11]

En cuidados médicos, la respirometría se utiliza para adaptar la terapia nutricional, en particular a pacientes gravemente heridos o muy enfermos.[12, 13] En gimnasios e instalaciones deportivas, los respirómetros portátiles dan medidas rápidas y precisas de las necesidades energéticas de atletas[14] y personas que siguen una dieta y también se utilizan para ayudar a pacientes y atletas a alcanzar y mantener un peso saludable.

Finalmente, la respirometría se utiliza como un instrumento para ayudar a evaluar las actuaciones de salud pública y establecer pautas de nutrición. Un estudio comparaba los resultados de dos pautas de nutrición diferentes con medidas de respirometría reales de adultos sedentarios y adultos activos. Uno de los estudios recomendaba más energía que la que los participantes empleaban en realidad.[15] En definitiva, como la calorimetría indirecta resulta menos cara, se está utilizando para ayudar al estudio de las necesidades de energía de la gente en todo el mundo.

---

1 Swan, P., "100 Years Ago", *Nutrition Notes of the American Society for Nutritional Sciences*, June 2004, Vol. 40, No. 2, 4–5. http://www.asns.org/nnjun04a.pdf

2 Atwater, W. O., *A Respiration Calorimeter with Appliances for the Direct Determination of Oxygen*. Washington, D. C.: Carnegie Institution, 1905.

3 Morrison, P., and Morrison, P., "Laws of Calorie Counting", *Scientific American*, Aug. 2000, 93+.

4 Ferrannini, E., "The Theoretical Bases of Indirect Calorimetry: A Review", *Metabolism*, Mar. 1988, Vol. 37, No. 3, 287–301.

5 Mansell, P. I., and MacDonald, I. A., "Reappraisal of the Weir Equation for Calculation of Metabolic Rate", *AJP—Regulatory, Integrative and Comparative Physiology*, June 1990, Vol. 258, No. 6, R1347–R1354.

6 Food and Nutrition Board, *Dietary Reference Intakes for Energy, Carbohydrate, Fiber, Fat, Fatty Acids, Cholesterol, Protein, and Amino Acids*. Washington, D. C.: National Academies Press, 2005, 884.

7 Mcleod, K., et al. "Effects of Brown Midrib Corn Silage on the Energy Balance of Dairy Cattle", *Journal of Dairy Science*, April 2000, Vol. 84, 885–895.

8 "Animal Calorimetry", *Biomeasurements and Experimental Techniques for Avian Species*. http://web.uconn.edu/poultry/NE-127/NewFiles/Home2.html as of July 2006.

9 Schalkwyk, S. J., et al., "Gas Exchange of the Ostrich Embryo During Peak Metabolism in Relation to Incubator Design", *South African Journal of Animal Science*, 2002, Vol. 32, 122–129.

10 Rai, C. L., et al., "Influence of Ultrasonic Disintegration on Sludge Growth Reduction and Its Estimation by Respirometry", *Environmental Science and Technology*, Nov. 2004, Vol. 38, No. 21, 5779–5785.

11 Seekings, B., "Field Test for Compost Maturity", *Biocycle*, July 1996, Vol. 37, No. 8, 72–75.

12 American Association for Respiratory Care, "Metabolic Measurement Using Indirect Calorimetry During Mechanical Ventilation—2004 Revision & Update", *Respiratory Care*, Sept. 2004, Vol. 49, No. 9, 1073–1079. http://www.guideline.gov/summary/summary.aspx?ss=15&doc_id=6515 as of July 2006.

13 Steward, D., and Pridham, K., "Stability of Respiratory Quotient and Growth Outcomes of Very Low Birth Weight Infants", *Biological Research for Nursing*, Jan. 2001, Vol. 2, No. 3, 198–205.

14 St-Onge, M., et al., "A New Hand-Held Indirect Calorimeter to Measure Postprandial Energy Expenditure", *Obesity Research*, April 2004, Vol. 12, No. 4, 704–709.

15 Alfonzo-González, G., et al., "Estimation of Daily Energy Needs with the FAO/WHO/UNU 1985 Procedures in Adults: Comparison to Whole-Body Indirect Calorimetry Measurements", *European Journal of Clinical Nutrition*, Aug. 2004, Vol. 58, No. 8, 1125–1131.

Resumen

1. El primer principio de la termodinámica, que es un enunciado de la conservación de la energía, es una ley fundamental de la Física.

2. El teorema de equipartición es una ley fundamental de la Física clásica. No se cumple cuando la energía térmica típica kT es pequeña comparada con el espaciado de los niveles de energía cuantizados.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Calor	El calor es la energía que se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperaturas.	
Caloría	La caloría, definida originalmente como el calor necesario para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1 °C, se define ahora como 4,184 joules.	
2. Capacidad calorífica	La capacidad calorífica es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una sustancia en un grado.	
	$C = \frac{Q}{\Delta T}$	18.1
A volumen constante	$C_V = \frac{Q_V}{\Delta T}$	
A presión constante	$C_P = \frac{Q_P}{\Delta T}$	
Calor específico (capacidad calorífica por unidad de masa)	$c = \frac{C}{m}$	18.2
Calor específico molar (capacidad calorífica por mol)	$c' = \frac{C}{n}$	18.6
Relación capacidad calorífica energía interna	$C_V = \frac{dE_{int}}{dT}$	18.18*a*
Gas ideal	$C_P - C_V = nR$	18.20
Gas ideal monoatómico	$C_V = \frac{3}{2}nR$	18.22
Gas ideal diatómico	$C_V = \frac{5}{2}nR$	18.25
3. Fusión y vaporización	Durante la fusión y la vaporización, la temperatura no se modifica.	
Calor latente de fusión	El calor necesario para fundir una sustancia sólida es el producto de la masa de la sustancia por el calor latente de fusión L_f:	
	$Q_f = mL_f$	18.8
L_f del agua	$L_f = 333{,}5$ kJ/kg	
Calor latente de vaporización	El calor necesario para vaporizar un líquido es el producto de su masa por su calor latente de vaporización L_v:	
	$Q_v = mL_v$	18.9
L_v del agua	$L_v = 2257$ kJ/kg	
4. Primer principio de la termodinámica	La variación de la energía interna de un sistema es igual al calor suministrado al sistema más el trabajo realizado sobre el mismo:	
	$\Delta E_{int} = Q + W$	18.10
5. Energía interna, E_{int}	La energía interna de un sistema es una propiedad de estado del sistema, igual que lo son la presión, el volumen y la temperatura, pero no ocurre lo mismo con el trabajo ni con el calor.	
Gas ideal	La energía interna de un gas ideal depende únicamente de la temperatura absoluta T.	

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Gas ideal monoatómico	$E_{int} = \frac{3}{2}nRT$	18.12
Energía interna y capacidad calorífica	$dE_{int} = C_V\,dT$	18.18*b*
6. Proceso cuasiestático	Un proceso cuasiestático es aquél que ocurre lentamente, de forma que el sistema recorre una serie de estados de equilibrio.	
Isométrico (isócoro)	V = constante	
Isobárico	P = constante	
Isotermo	T = constante	
Adiabático	$Q = 0$	
Adiabático, gas ideal	$TV^{\gamma-1}$ = constante	18.37
	PV^{γ} = constante	18.38
	$T^{\gamma}/P^{\gamma-1}$ = constante	18.39
	donde	
	$\gamma = C_P/C_V$	18.36
7. Trabajo realizado por un gas	$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = C_V\,\Delta T - Q_{in}$	18.10, 18.15 y 18.18
Isométrico	$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = 0 \qquad V_f = V_i$	
Isobárico	$W = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -P\int_{V_i}^{V_f} dV = -P\,\Delta V$	
Isotermo	$W_{isotermo} = -\int_{V_i}^{V_f} P\,dV = -nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_i}{V_f}$	18.17
Adiabático	$W_{adiabático} = C_V\,\Delta T$	18.40
8. Teorema de equipartición	El teorema de equipartición establece que cuando un sistema está en equilibrio, existe una energía media de $\frac{1}{2}kT$ por molécula o de $\frac{1}{2}RT$ por mol asociada a cada grado de libertad.	
Fallo del teorema de equipartición	El teorema de equipartición no se cumple cuando la energía térmica ($\sim kT$) que puede transferirse en las colisiones es menor que el espaciado energético ΔE entre los niveles de energía cuantizados. Por ejemplo, las moléculas de los gases monoatómicos no poseen movimiento de rotación porque el primer nivel de energía permitido no nulo es mucho mayor que kT.	
9. Ley de Dulong-Petit	El calor molar de la mayor parte de los sólidos es $3R$. Esto se deduce del teorema de equipartición, suponiendo que un átomo de sólido posee seis grados de libertad.	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

18.1 Un muelle comprimido en un rifle que lanza dardos se suelta y su energía interna aparece como energía cinética del dardo. El aire comprimido en un tanque se libera y ese aire se emplea para levantar un automóvil en una estación de servicio.

Respuestas a los problemas prácticos

18.1 30 °C

18.2 500 kJ

18.3 20,5 kJ

18.4 405 J

18.5 V_i = 48,0 L, V_f = 61,1 L, W = 13,1 atm · L = 1,33 kJ

18.6 (*a*) M = 24,4 g/mol. (*b*) El metal debe ser magnesio, cuya masa molar es 24,3 g/mol.

18.7 En un proceso cuasiestático, PV^{γ} = constante. Despejando V de la ley de los gases ideales, se obtiene $V = nRT/P$. Sustituyendo este valor en la ecuación nRT/P para PV^{γ}, resulta $P(nRT/P)^{\gamma}$ = constante o, si se prefiere, $T^{\gamma}/P^{\gamma-1}$ = constante/(nR).

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

Utilizar $v = 343$ m/s para la velocidad del sonido en el aire a menos que se indique lo contrario.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • Un cuerpo A posee una masa doble que la de otro cuerpo B y su calor específico es también el doble. Si a ambos se les suministra la misma cantidad de calor, ¿qué relación existe entre los cambios experimentados por sus respectivas temperaturas? (*a*) $\Delta T_A = 4\Delta T_B$, (*b*) $\Delta T_A = 2\Delta T_B$, (*c*) $\Delta T_A = \Delta T_B$, (*d*) $\Delta T_A = \frac{1}{2}\Delta T_B$, (*e*) $\Delta T_A = \frac{1}{4}\Delta T_B$.

2 • Un bloque A tiene una masa que es doble de la del bloque B. El cambio de temperatura del bloque A es igual al del bloque B cuando ambos absorben iguales cantidades de calor. Se deduce que sus calores específicos están relacionados de la forma (*a*) $c_A = 2c_B$, (*b*) $2c_A = c_B$, (*c*) $c_A = c_B$, (*d*) ninguna de las anteriores.

3 • El calor específico del aluminio es más del doble que el del cobre. En un calorímetro que contiene agua a 40 °C se introducen simultáneamente masas idénticas de cobre y aluminio, ambas a 20 °C. Cuando se alcanza el equilibrio térmico, (*a*) el aluminio está a mayor temperatura que el cobre, (*b*) el aluminio ha absorbido menos energía que el cobre, (*c*) el aluminio ha absorbido más energía que el cobre, (*d*) ambas afirmaciones (*a*) y (*c*) son correctas. SSM

4 • Un bloque de cobre está en una olla de agua hirviendo y tiene una temperatura de 100 °C. Se saca el bloque del agua hirviendo y se coloca inmediatamente en un recipiente aislado lleno con una cantidad de agua a una temperatura de 20 °C y la misma masa que el bloque de cobre. (La capacidad calorífica del recipiente aislado es despreciable.) La temperatura final estará más próxima a (*a*) 40 °C, (*b*) 60 °C, (*c*) 80 °C.

5 • Se vierte en un recipiente aislado una cierta cantidad de agua a 100 °C y una cantidad igual de agua a 20 °C. La temperatura final de la mezcla será (*a*) 60 °C, (*b*) menor que 60 °C, (*c*) mayor que 60 °C.

6 • Se vierte en un recipiente aislado agua a 100 °C y unos cubitos de hielo a 0 °C. La temperatura final de la mezcla será (*a*) 50 °C, (*b*) menor que 50 °C, pero mayor que 0 °C, (*c*) 0 °C, (*d*) a partir de la información dada no se puede saber la temperatura final.

7 • Se vierte en un recipiente aislado agua a 100 °C y unos cubitos de hielo a 0 °C. Cuando se alcanza el equilibrio térmico, se observa algo de hielo flotando en el agua. La temperatura final de la mezcla es (*a*) superior a 0 °C, (*b*) inferior a 0 °C, (*c*) 0 °C, (*d*) a partir de la información dada no se puede saber la temperatura final.

8 • El experimento de Joule, que establece el equivalente mecánico del calor, implica la conversión de energía mecánica en energía interna. Dar algunos ejemplos cotidianos de la conversión de energía interna de un sistema en energía mecánica.

9 • ¿Puede un gas absorber calor sin modificar su energía interna? Si es así, dar un ejemplo. Si no, dar una explicación.

10 • En la ecuación $\Delta E_{int} = Q + W$ (enunciado formal del primer principio de la termodinámica), las magnitudes Q y W representan (*a*) el calor suministrado al sistema y el trabajo realizado por el sistema; (*b*) el calor suministrado al sistema y el trabajo realizado sobre el sistema; (*c*) el calor liberado por el sistema y el trabajo realizado por el sistema; (*d*) el calor liberado por el sistema y el trabajo realizado sobre el sistema.

11 • Un gas real se enfría en una expansión libre, mientras que un gas ideal no varía su temperatura. Dar una explicación. SSM

12 • Un recipiente aislado está dividido en dos partes iguales por un tabique delgado. En una de las mitades se hace el vacío y en la otra se encierra un gas ideal a una atmósfera de presión y 300 K. Se perfora el tabique y el equilibrio se restablece rápidamente. En el equilibrio, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (*a*) La presión del gas es 0,5 atm y la temperatura 150 K. (*b*) La presión del gas es 1 atm y la temperatura 150 K. (*c*) La presión del gas es 0,5 atm y la temperatura 300 K. (*d*) Ninguna de las anteriores.

13 • Un gas está formado por iones que se repelen entre sí. El gas experimenta una expansión libre sin intercambio de calor ni trabajo realizado. ¿La temperatura del gas, aumenta, disminuye o permanece constante durante el proceso? Explique su respuesta.

14 • Dos globos de goma llenos de gas tienen inicialmente el mismo volumen en el fondo de un lago oscuro y frío. La temperatura del agua disminuye al aumentar la profundidad. Un globo asciende rápidamente y se expande de manera adiabática a medida que sube. El otro globo asciende más lentamente y su expansión es isotérmica. La presión de cada globo permanece igual a la presión del agua justo cerca del globo. ¿Qué globo tiene mayor volumen al alcanzar la superficie del lago? Explique su respuesta.

15 • Un gas cambia cuasiestáticamente su estado de A a C (figura 18.21). El trabajo realizado por el gas es (*a*) máximo en la trayectoria A → B → C, (*b*) mínimo en la trayectoria A → C, (*c*) máximo en la trayectoria A → D → C, (*d*) el mismo en las tres trayectorias.

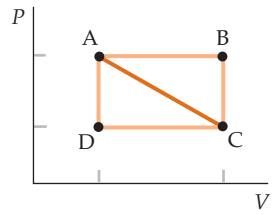


FIGURA 18.21 Problema 15

16 • Cuando un gas ideal se somete a un proceso adiabático, (*a*) el sistema no realiza trabajo, (*b*) no se suministra calor al sistema, (*c*) la energía interna permanece constante, (*d*) el calor suministrado al sistema es igual al trabajo realizado por el sistema.

17 • Verdadero o falso:

(*a*) Cuando un sistema puede ir de un estado 1 a un estado 2 a través de diversos procesos, la cantidad de calor absorbido por el sistema será la misma para todos los procesos.

(*b*) Cuando un sistema puede ir de un estado 1 a un estado 2 a través de diversos procesos, la cantidad de trabajo realizado sobre el sistema será el mismo para todos los procesos.

(*c*) Cuando un sistema puede ir de un estado 1 a un estado 2 a través de diversos procesos, la variación de energía interna del sistema será la misma para todos los procesos.

(*d*) La energía interna de una determinada cantidad de gas ideal depende sólo de su temperatura absoluta.

(*e*) Un proceso cuasiestático es un proceso en el cual el sistema nunca se encuentra lejos del equilibrio.

(*f*) Para toda sustancia que se expansiona al calentarse, C_P es mayor que C_V.

18 • El volumen de una muestra de gas permanece constante mientras su presión aumenta. (*a*) La energía interna del sistema no varía. (*b*) El sistema realiza trabajo. (*c*) El sistema no absorbe calor. (*d*) La variación de energía interna del sistema es igual al calor absorbido por el sistema. (*e*) Ninguna de las respuestas anteriores.

19 •• Cuando un gas ideal experimenta un proceso isotermo, (*a*) ningún trabajo es realizado por el sistema, (*b*) no se suministra calor al sistema, (*c*) el calor suministrado al sistema es igual a la variación de energía interna, (*d*) el calor suministrado al sistema es igual al trabajo realizado por éste.

20 •• Considerar las siguientes series de procesos cuasiestáticos que experimenta un sistema: (*1*) una expansión adiabática, (*2*) una expansión isoterma, (*3*) una compresión adiabática, y (*4*) una compresión isoterma que devuelve el sistema a su estado original. Dibujar la serie de procesos en un diagrama *PV*, y a continuación dibujar los procesos en un diagrama *VT* (en el que el volumen se exprese como una función de la temperatura).

21 • Un cilindro encierra un gas ideal a presión P y volumen V. A lo largo de un proceso adiabático cuasiestático, el gas se comprime hasta que su volumen se hace $V/2$. Entonces, en un proceso isotermo cuasiestático, el gas se expande hasta que su volumen vuelve a tener el valor V. ¿Qué clase de proceso devolverá el sistema a su estado inicial? Dibujar una gráfica del ciclo. SSM

22 •• El metal A es más denso que el metal B. ¿Cuál cabría esperar que tuviese una mayor capacidad calorífica por unidad de masa, el metal A o el metal B? ¿Por qué?

23 •• Un gas ideal experimenta un proceso durante el cual $P\sqrt{V}$ = constante y el volumen del gas decrece. ¿Qué ocurre con la temperatura?, ¿aumenta, disminuye o permanece constante durante el proceso? Explique su respuesta.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

24 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Durante las primeras etapas del diseño de una moderna planta de producción eléctrica, usted tiene a su cargo al equipo de ingenieros medioambientales. La nueva planta se ha de emplazar en el océano y empleará para refrigerar agua del océano. La planta producirá electricidad con una potencia de 1,00 GW. Como la planta tendrá un rendimiento de 1/3 (típico de las más modernas plantas), el calor se cederá al agua de refrigeración a una tasa de 2,00 GW. Si las normas medioambientales exigen que sólo el agua con un incremento de temperatura de 15 °F o menor puede ser devuelta al océano, hacer una estimación de la tasa de flujo (en kg/s) del agua de refrigeración a través de la planta.

25 •• Un horno "típico" de microondas consume una potencia de unos 1200 W. Hacer una estimación de lo que tardaría en hervir una taza de agua en el microondas suponiendo que el 50% de la potencia consumida se emplea en calentar el agua. ¿Concuerda esta estimación con la experiencia cotidiana? SSM

26 •• Una prueba del calentamiento que experimenta un gas en una compresión adiabática comporta colocar unos trocitos de papel en un gran tubo de ensayo que se cierra entonces con un pistón. Si el pistón comprime el aire atrapado muy rápidamente, el papel arderá. Suponiendo que el punto de ignición del papel es 451 °F, hacer una estimación del factor en qué se ha de reducir el volumen del aire atrapado por el pistón para que funcione esta prueba.

27 •• Hay un pequeño cambio en el volumen de un líquido al calentarlo a presión constante. Utilizar los siguientes datos del agua para hacer una estimación de lo que constituye este cambio de volumen en la capacidad calorífica del agua entre 4 °C y 100 °C: la densidad del agua a 4 °C y 1,00 atm de presión es 1,000 g/cm^3; la densidad del agua líquida a 100 °C y 1,00 atm de presión es 0,9584 g/cm^3.

CAPACIDAD CALORÍFICA, CALOR ESPECÍFICO, CALOR LATENTE

28 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Diseñe una casa solar que contenga 10^5 kg de hormigón (calor específico = 1,00 kJ/kg · K). ¿Cuánto calor cederá el hormigón cuando se enfríe de 25 a 20 °C?

29 • ¿Cuánto calor deben absorber 60,0 g de hielo a −10,0 °C para transformarse en 60,0 g de agua líquida a 40,0 °C? SSM

30 •• ¿Qué cantidad de calor se desprende cuando 100 g de vapor de agua a 150 °C se enfrían y congelan produciendo 100 g de hielo a 0 °C? (Tomar para el calor específico del vapor el valor 2,01 kJ/kg · K.)

31 •• Un trozo de 50 g de aluminio a 20 °C se enfría a – 196 °C colocándolo en un recipiente grande con nitrógeno líquido a esa temperatura. ¿Cuánto nitrógeno se vaporizará? (Suponer que el calor específico del aluminio es constante e igual a 0,90 kJ/kg · K.)

32 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Suponga que está supervisando fundiciones de plomo para la industria de la construcción. En cada proceso de fundición, uno de sus trabajadores echa 0,500 kg de plomo fundido, que tiene una temperatura de 327 °C, en una cavidad de un gran bloque de hielo a 0 °C. ¿Cuánta agua líquida cree usted que se extraería por hora si hay 100 trabajadores capaces de hacer en promedio un proceso de fundición cada 10 minutos?

CALORIMETRÍA

33 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Mientras pasaba el verano en la granja de mi tío, estuve una semana de aprendiz con el herrador, que hacía y ajustaba las herraduras. Observaba cómo enfriaba una herradura después de golpearla en caliente y hacerla flexible hasta el tamaño y forma adecuados. Supóngase que una herradura de hierro de 750 g se saca del fuego, se moldea y, a una temperatura de 650 °C, se introduce en un balde de agua de 25,0 L y una temperatura de 10,0 °C. ¿Cuál es la temperatura final del agua una vez que la herradura y el agua hayan alcanzado el equilibrio? No tener en cuenta cualquier calentamiento del balde y suponer que el calor específico del hierro es 460 J/(kg · K). SSM

34 • El calor específico de cierto metal se determina midiendo la variación de temperatura que tiene lugar cuando un trozo del metal se calienta y luego se sitúa en un recipiente aislado construido del mismo material y que contiene agua. El trozo de metal posee una masa de 100 g y una temperatura inicial de 100 °C. El recipiente posee una masa de 200 g y contiene 500 g de agua a una temperatura inicial de 20,0 °C. La temperatura final es 21,4 °C. ¿Cuál es el calor específico del metal?

35 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** En sus muchas participaciones en el Tour de Francia, el campeón ciclista Lance Armstrong consumía una potencia media de 400 W, durante 5 horas diarias a lo largo de 20 días. ¿Qué cantidad de agua, inicialmente a 24 ºC, podría llevarse hasta su punto de ebullición si se aprovechase completamente toda esa energía?

36 •• Un vaso de vidrio de 25 g contiene 200 mL de agua a 24 °C. Si echamos en el vaso dos cubos de hielo de 15 g cada uno a la temperatura de – 3 °C, ¿cuál es la temperatura final de la mezcla? Despreciar la conducción térmica entre el vaso y la habitación.

37 •• Un trozo de hielo de 200 g a 0 °C se introduce en 500 g de agua a 20 °C. El sistema se encuentra en un recipiente de capacidad calorífica despreciable y aislado del exterior. (*a*) ¿Cuál es la temperatura final de equilibrio del sistema? (*b*) ¿Qué cantidad de hielo se funde? SSM

38 •• En un balde que contiene una mezcla de hielo y agua con una masa total de 1,2 kg se deja caer un bloque de cobre de 3,5 kg a una temperatura de 80 °C. Cuando se alcanza el equilibrio térmico, la temperatura del agua es 8,0 °C. ¿Cuánto hielo existía en el balde antes de que el bloque de cobre se situara en él? (Despreciar la capacidad calorífica del balde.)

39 •• Una vasija bien aislada contiene 150 g de hielo a 0 °C. (*a*) Si se introducen en su interior 20 g de vapor a 100 °C, ¿cuál es la temperatura final de equilibrio del sistema? (*b*) ¿Queda algo de hielo?

40 •• Un calorímetro de capacidad calorífica despreciable contiene 1 kg de agua a 303 K y 50 g de hielo a 273 K. (*a*) Hallar la temperatura final, *T*. (*b*) Resolver el mismo problema para una masa de hielo de 500 g.

41 •• Un calorímetro de aluminio de 200 g contiene 500 g de agua a 20 °C. Dentro del recipiente se introduce un trozo de hielo de 100 g enfriado a – 20 °C. (*a*) Determinar la temperatura final del sistema suponiendo que no hay pérdidas caloríficas (para el calor específico del hielo tómese el valor 2,0 kJ/kg · K). (*b*) Se añade un segundo trozo de hielo de 200 g a – 20 °C. ¿Cuánto hielo queda en el sistema, una vez que se ha alcanzado el equilibrio? (*c*) ¿Sería distinta la respuesta al apartado (*b*) si ambos trozos se agregaran al mismo tiempo?

42 •• Para determinar el calor específico de un bloque de 100 g de un material se introduce en un calorímetro de cobre de 25 g que contiene 60 g de agua. El sistema se encuentra inicialmente a 20 °C. A continuación, se añaden 120 mL de agua a 80 °C al vaso calorimétrico. Cuando se alcanza el equilibrio térmico, la temperatura del agua es 54 °C. Determinar el calor específico del bloque.

43 •• Un trozo de cobre de 100 g se calienta en un horno a una temperatura t_C. Se introduce luego el cobre en un calorímetro de cobre de 150 g que contiene 200 g de agua. La temperatura inicial del agua y el calorímetro es 16 °C y la temperatura final después de que se establezca el equilibrio es 38 °C. Cuando se pesan el calorímetro y su contenido se observa que se han evaporado 1,2 g de agua. ¿Cuál era la temperatura t_C? SSM

44 ••• Un calorímetro de 200 g de aluminio contiene 500 g de agua a 20,0 ºC. Unos perdigones de aluminio con una masa igual a 300 g se calientan a 100,0 ºC y se introducen a continuación en el calorímetro. Hallar la temperatura final del sistema suponiendo que no se transfiere calor al medio.

PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

45 • Un gas diatómico realiza 300 J de trabajo y absorbe 2,5 kJ de calor. ¿Cuál es la variación de energía interna experimentada por el gas?

46 • Si un gas absorbe 1,67 MJ de calor mientras realiza 800 kJ de trabajo, ¿cuál es la variación de la energía interna del gas?

47 • Si un gas absorbe 84 J de calor mientras está realizando 30 J de trabajo, ¿cuál es el cambio en la energía interna del gas?

48 •• Una bala de plomo inicialmente a 30 °C se funde al golpear un blanco. Suponiendo que toda la energía cinética inicial de la bala se convierte en energía interna de la misma, calcular su velocidad en el momento del impacto.

49 •• Es posible calentarse las manos en un día frío frotándolas una contra la otra. (*a*) Suponer que el coeficiente de rozamiento entre las manos es 0,5 y que pueden frotarse con una velocidad media de 35 cm/s, mientras las manos se ejercen una fuerza normal de 35 N entre ellas. ¿Con qué ritmo se genera calor? (*b*) Suponer además que la masa de cada mano es aproximadamente de 350 g, que el calor específico de las mismas es del orden de 4 kJ/kg · K y que todo el calor generado se utiliza para elevar la temperatura de las manos. ¿Durante cuánto tiempo habrá que frotarse las manos para conseguir un incremento de temperatura de 5 °C?

TRABAJO Y DIAGRAMA *PV* DE UN GAS

En los problemas 50 a 53, el estado inicial de 1 mol de un gas ideal es $P_1 = 3{,}00$ atm, $V_1 = 1{,}00$ L y $E_{\text{int}\,1} = 456$ J, y su estado final es $P_2 = 2{,}00$ atm, $V_2 = 3{,}00$ L y $E_{\text{int}\,2} = 912$ J.

50 • El gas se deja expansionar a presión constante hasta un volumen de 3 L. Entonces se enfría a volumen constante hasta que su presión es de 2 atm. (*a*) Representar este proceso en un diagrama *PV* y determinar el trabajo realizado por el gas. (*b*) Hallar el calor absorbido durante este proceso.

51 • El gas se enfría primero a volumen constante hasta que alcanza su presión final. Se deja entonces expansionar a presión constante hasta que alcanza su volumen final. (*a*) Representar este proceso en un diagrama *PV* y determinar el trabajo realizado por el gas. (*b*) Hallar el calor absorbido durante este proceso. SSM

52 •• El gas se expansiona isotérmicamente hasta alcanzar su volumen final y una presión de 1,00 atm. Se calienta entonces a volumen constante hasta alcanzar su presión final. (*a*) Representar este proceso en un diagrama *PV* y calcular el trabajo realizado por el gas. (*b*) Determinar el calor absorbido durante este proceso.

53 •• El gas se calienta y se le permite expandirse de tal forma que el gas sigue una línea recta en el diagrama PV desde el estado inicial al estado final. (*a*) Representar este proceso en un diagrama PV y calcular el trabajo realizado por el gas. (*b*) Hallar el calor absorbido en este proceso.

54 •• En este problema, 1,00 mol de un gas diluido tiene inicialmente una presión igual a 1,00 atm, un volumen igual a 25,0 L y una energía interna de 456 J. Como el gas se calienta lentamente, la línea que representa su estado en un diagrama PV sigue una recta hasta el estado final. El gas tiene ahora una presión de 3,00 atm, un volumen de 75,0 L y una energía interna de 912 J. Hallar el trabajo realizado y el calor absorbido por el gas.

55 •• En este problema, 1,00 mol de gas se calienta mientras su volumen varía, de modo que $T = AP^2$, siendo A una constante. La temperatura cambia de T_0 a $4T_0$. Determinar el trabajo realizado por el gas.

56 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un spray para pintar casi vacío contiene todavía una cantidad residual del propulsor: 0,020 moles de gas nitrógeno. La etiqueta del recipiente advierte claramente: "No Eliminar por Incineración". (*a*) Dar una explicación de esta advertencia y dibujar el diagrama PV del gas si, en realidad, el recipiente está expuesto a una temperatura elevada. (*b*) Suponer que se nos encarga hacer un ensayo al recipiente. El fabricante asegura que puede resistir una presión interna de 6,00 atm antes de romperse. El recipiente está inicialmente a temperatura ambiente y presión atmosférica en el laboratorio de ensayos. Se empieza calentándolo mediante un elemento calefactor que tiene una potencia de salida de 200 W. Recipiente y elemento calefactor están en un horno aislado, y se supone que el 1% del calor liberado por el calefactor es absorbido por el gas del spray. ¿Cuánto tendría que esperar encendido el calefactor antes de que el spray se rompiese?

57 •• Un gas ideal inicialmente a 20 °C y 200 kPa ocupa un volumen de 4 L. Experimenta una expansión isoterma cuasiestática hasta que su presión se reduce a 100 kPa. Calcular (*a*) el trabajo realizado por el gas y (*b*) el calor suministrado al gas durante la expansión. SSM

CAPACIDADES CALORÍFICAS DE GASES Y TEOREMA DE EQUIPARTICIÓN

58 • La capacidad calorífica a volumen constante de cierto gas monoatómico es 49,8 J/K. (*a*) Determinar el número de moles de gas. (*b*) ¿Cuál es la energía interna de este gas a $T = 300$ K? (*c*) ¿Cuál es la capacidad calorífica a presión constante?

59 •• La capacidad calorífica a presión constante de una cierta cantidad de un gas diatómico es 14,4 J/K. (*a*) Hallar el número de moles del gas. (*b*) ¿Cuál es la energía interna del gas a $T = 300$ K? (*c*) ¿Cuál es la capacidad calorífica molar de este gas a volumen constante? (*d*) ¿Cuál es la capacidad calorífica de este gas a volumen constante? SSM

60 •• (*a*) Calcular los calores específicos por unidad de masa del aire a volumen constante y a presión constante. Suponer una temperatura de 300 K y una presión de 105 N/m^2. Considerar asimismo que el aire se compone de un 74% de moléculas de N_2 (peso molecular 28 g/mol) y de un 26% de moléculas de O_2 (peso molecular 32 g/mol), y que ambos componentes son gases ideales. (*b*) Comparar el resultado con el valor de 1,032 J/g · K recogido en el *Handbook of Chemistry and Physics* para la capacidad calorífica a presión constante.

61 •• Un mol de un gas ideal diatómico se calienta a volumen constante desde 300 K a 600 K. (*a*) Determinar el incremento de energía interna, el trabajo realizado y el calor absorbido. (*b*) Determinar estas mismas magnitudes si el gas se calienta de 300 a 600 K a presión constante. Utilizar el primer principio de la termodinámica y los resultados obtenidos en el apartado (*a*) para calcular el trabajo realizado. (*c*) Calcular directamente el trabajo realizado en el apartado (*b*). Obtenerlo por integración de la ecuación $dW = P\,dV$.

62 •• Un gas diatómico está confinado en un recipiente cerrado de volumen V_0 a una presión P_0. El gas se calienta hasta que su presión se triplica. ¿Qué cantidad de calor Q debe transferirse al gas para que su presión se triplique?

63 •• En este problema, 1,00 mol de aire está confinado en un cilindro provisto de un pistón. El aire confinado se mantiene a una presión constante de 1,00 atm e inicialmente está encerrado en un cilindro mediante un pistón a la temperatura de 0 °C. El volumen inicial ocupado por el gas es V_0. Determinar el volumen de gas V_0 después de suministrarle 13 200 J de calor.

64 •• La capacidad calorífica de una determinada cantidad de un gas particular a presión constante es mayor que la correspondiente a volumen constante en 29,1 J/K. (*a*) ¿Cuántos moles de gas se tienen? (*b*) Si el gas es monoatómico, ¿qué valor tienen C_V y C_P? (*c*) ¿Cuáles son los valores de C_V y C_P a temperatura ambiente normal?

65 •• El dióxido de carbono (CO_2) a 1 atm de presión y una temperatura de –78,5 °C sublima directamente desde un estado sólido a uno gaseoso, sin pasar por una fase líquida. ¿Cuál es el cambio que se produce en la capacidad calorífica (a presión constante) por mol de CO_2 cuando tiene lugar la sublimación? Suponer que las moléculas del gas pueden girar pero no vibrar. ¿Es positivo o negativo el cambio en la capacidad calorífica en la sublimación? La molécula de CO_2 aparece representada en la figura 18.22. SSM

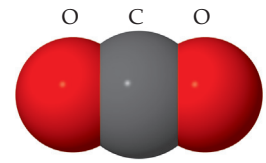


FIGURA 18.22 Problema 65

66 •• Un mol de un gas ideal monoatómico se encuentra inicialmente a 273 K y 1 atm. (*a*) ¿Cuál es su energía interna inicial? (*b*) Determinar su energía interna final y el trabajo realizado por el gas cuando se suministran 500 J de calor a presión constante. (*c*) Determinar las mismas magnitudes cuando los 500 J de calor se suministran a volumen constante.

67 •• Hacer una lista de todos los grados de libertad posibles de una molécula de agua y hacer una estimación de la capacidad calorífica del agua muy por encima de su punto de ebullición. (Ignorar el hecho de que la molécula pudiera disociarse a altas temperaturas.) Reflexionar detenidamente sobre todos los distintos modos de que dispone una molécula de agua para vibrar.

CAPACIDADES CALORÍFICAS DE SÓLIDOS Y LEY DE DULONG-PETIT

68 • La ley de Dulong-Petit se utilizó originalmente para determinar la masa molecular de una sustancia a partir de sus capacidades caloríficas medidas. Sabiendo que el calor específico de un sólido dado es de 0,447 kJ/kg · K, (*a*) calcular su masa molecular. (*b*) ¿De qué elemento se trata?

EXPANSIÓN ADIABÁTICA CUASIESTÁTICA DE UN GAS

69 •• Una muestra de 0,500 mol de un gas ideal monoatómico a una presión de 400 kPa y una temperatura de 300 K se expansiona hasta que la presión ha disminuido a 160 kPa. Determinar la temperatura y volumen finales, el trabajo realizado y el calor absorbido por el gas si la expansión es (*a*) isoterma y (*b*) adiabática. SSM

70 •• Una muestra de 0,500 mol de un gas ideal diatómico a una presión de 400 kPa y una temperatura de 300 K se expansiona hasta que la presión ha disminuido a 160 kPa. Determinar la temperatura y volumen finales, el trabajo realizado y el calor absorbido por el gas si la expansión es (*a*) isoterma y (*b*) adiabática.

71 •• Una muestra de 0,500 mol de gas helio se expande adiabática y cuasiestáticamente desde una presión inicial de 5 atm y una temperatura de 500 K hasta una presión final de 1 atm. Calcular (*a*) la temperatura final, (*b*) el volumen final, (*c*) el trabajo realizado por el gas y (*d*) la variación de energía interna del gas.

PROCESOS CÍCLICOS

72 •• Un mol de gas N_2 se mantiene a 20 °C y 5 atm. Se deja expansionar adiabática y cuasiestáticamente hasta que su presión se iguala a 1 atm. Entonces se calienta a presión constante hasta que su temperatura es de nuevo de 20 °C. Una vez que ha alcanzado la temperatura de 20 °C, se calienta a volumen constante hasta que su presión es de nuevo 5 atm. Se comprime entonces a presión constante hasta volver a su estado original. (*a*) Dibujar un diagrama *PV* mostrando cada etapa del ciclo. (*b*) A partir de este gráfico, determinar el trabajo realizado por el gas en todo el ciclo. (*c*) ¿Cuánto calor fue absorbido o cedido por el gas en el ciclo completo?

73 •• Un mol de un gas ideal diatómico se deja expandir a lo largo de la recta que va de 1 a 2 en el diagrama *PV* de la figura 18.23. A continuación, se comprime isotérmicamente desde 2 hasta 1. Calcular el trabajo total realizado sobre el gas durante este ciclo. SSM

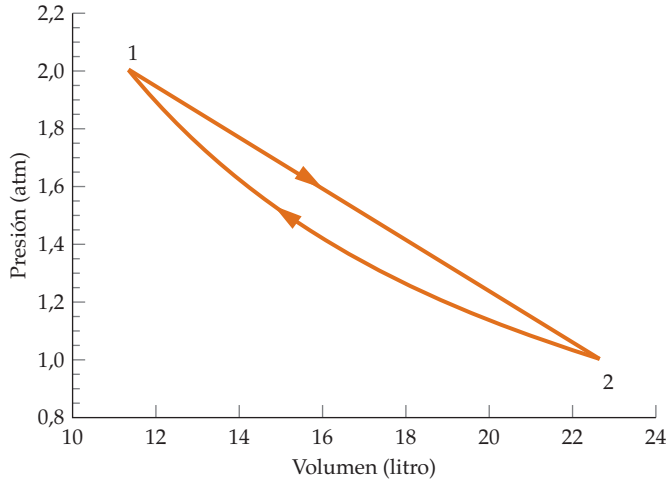


FIGURA 18.23 Problema 73

74 •• Una muestra de 2,00 moles de un gas ideal monoatómico tiene una presión inicial de 2,00 atm y un volumen inicial de 2,00 L. El gas recorre el siguiente ciclo cuasiestático: se expande isotérmicamente hasta un volumen de 4,00 L. A continuación, se calienta a volumen constante hasta que tiene una presión de 2,00 atm. Entonces se enfría a presión constante hasta que vuelve a su estado inicial. (*a*) Representar este ciclo en un diagrama *PV*. (*b*) Hallar la temperatura al final de cada parte del ciclo. (*c*) Calcular el calor absorbido y el trabajo realizado por el gas durante cada parte del ciclo.

75 ••• En el punto D de la figura 18.24, la presión y la temperatura de 2 moles de un gas ideal monoatómico son 2 atm y 360 K. El volumen del gas en el punto B del diagrama *PV* es tres veces mayor que en el punto D y su presión es doble que la del punto C. Las trayectorias AB y CD representan procesos isotermos. El gas realiza un ciclo completo a lo largo de los procesos DABCD. Determinar el trabajo total realizado por el gas y el calor suministrado al gas a lo largo de cada porción del ciclo. SSM

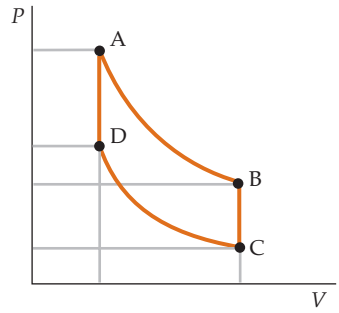


FIGURA 18.24 Problemas 75 y 76

76 ••• En el punto D de la figura 18.24, la presión y la temperatura de 2 moles de un gas ideal diatómico son 2 atm y 360 K. El volumen del gas en el punto B del diagrama *PV* es tres veces mayor que en el punto D y su presión es doble que la del punto C. Las trayectorias AB y CD representan procesos isotermos. El gas realiza un ciclo completo a lo largo de los procesos DABCD. Determinar el trabajo total realizado por el gas y el calor suministrado al gas a lo largo de cada porción del ciclo.

77 ••• Una muestra de n moles de un gas ideal se encuentra inicialmente a la presión P_1, volumen V_1 y temperatura T_h. Experimenta una expansión isotérmica hasta que su presión y volumen son P_2 y V_2. Luego se expansiona adiabáticamente hasta que la temperatura es T_c y la presión y el volumen son P_3 y V_3. A continuación, se comprime isotérmicamente hasta alcanzar la presión P_4 y el volumen V_4, el cual está relacionado con el volumen inicial V_1 por $T_c V_4^{\gamma-1} = T_h V_1^{\gamma-1}$. El gas entonces se comprime adiabáticamente hasta recuperar su estado original. (*a*) Suponiendo que cada una de las etapas es cuasiestática, representar este ciclo en un diagrama *PV*. (Este ciclo se denomina ciclo de Carnot para un gas ideal.) (*b*) Demostrar que el calor absorbido Q_h durante la expansión isotérmica a T_h es $Q_h = nRT_h \ln(V_2/V_1)$. (*c*) Demostrar que el calor cedido Q_c por el gas durante la compresión isotérmica a T_c es $Q_c = nRT_c \ln(V_3/V_4)$. (*d*) Considerando que para una expansión adiabática $TV^{\gamma-1}$ es constante, demostrar que $V_2/V_1 = V_3/V_4$. (*e*) El rendimiento del ciclo de Carnot viene definido por el trabajo neto realizado por el gas, dividido por el calor absorbido Q_h por el gas. Teniendo en cuenta el primer principio de la termodinámica, demostrar que este rendimiento es $1 - Q_c/Q_h$. (*f*) Utilizando los resultados de los apartados previos de este problema, demostrar que $Q_c/Q_h = T_c/T_h$.

PROBLEMAS GENERALES

78 • En el proceso de compresión de un gas ideal diatómico hasta un quinto de su volumen inicial, se realiza un trabajo de 180 kJ sobre el gas. (*a*) Si esta compresión se realiza isotérmicamente a la temperatura ambiente (293 K), ¿cuánto calor libera el gas? (*b*) ¿Cuántos moles de gas hay en esta muestra?

79 • El diagrama *PV* de la figura 18.25 representa procesos realizados por 3 moles de un gas ideal monoatómico. El gas está inicialmente en el punto A. Las trayectorias AD y BC representan procesos isotérmicos. Si el sistema evoluciona hasta el punto C a lo largo de la trayectoria AEC, determinar (*a*) las temperaturas inicial y final, (*b*) el trabajo realizado por el gas y (*c*) el calor absorbido por el gas. SSM

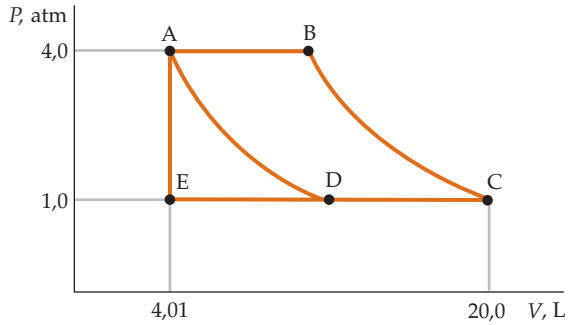


FIGURA 18.25 **Problemas 79, 80, 81 y 82**

80 •• El diagrama *PV* de la figura 18.25 representa procesos realizados por 3 moles de un gas ideal monoatómico. El gas está inicialmente en el punto A. Las trayectorias AD y BC representan procesos isotérmicos. Si el sistema evoluciona hasta el punto C a lo largo de la trayectoria ABC, determinar (*a*) las temperaturas inicial y final, (*b*) el trabajo realizado por el gas y (*c*) el calor absorbido por el gas.

81 •• El diagrama *PV* de la figura 18.25 representa procesos realizados por 3 moles de un gas ideal monoatómico. El gas está inicialmente en el punto A. Las trayectorias AD y BC representan procesos isotérmicos. Si el sistema evoluciona hasta el punto C a lo largo de la trayectoria ADC, determinar (*a*) las temperaturas inicial y final, (*b*) el trabajo realizado por el gas y (*c*) el calor absorbido por el gas.

82 •• Suponer que las trayectorias AD y BC de la figura 18.25 representan procesos adiabáticos. ¿Cuáles son entonces el trabajo realizado por el gas y el calor absorbido al seguir la trayectoria ABC?

83 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Como parte de un experimento de laboratorio, se evalúa el contenido en calorías de varios alimentos. Se supone que cuando se comen esos alimentos, el 100% de la energía liberada por ellos la absorbe nuestro cuerpo. Se quema una patata *chip* de 2,50 g y la llama resultante calienta un pequeño bote de aluminio lleno de agua. Después de quemar la patata, se mide su masa que es de 2,20 g. La masa del bote es 25,0 g, y el volumen del agua contenida en él es 15,0 mL. Si el aumento de temperatura del agua es 12,5 ºC, ¿cuántas kilocalorías (1 kcal = 1 caloría alimenticia) hay en una ración de 150 g de estas patatas? Suponer que el bote de agua captura el 50,0% del calor liberado durante la combustión de la patata *chip*. Nota: *aunque el joule es la unidad SI que se elige en la mayoría de las situaciones que describe la termodinámica, la industria alimentaria expresa habitualmente el consumo de energía durante el metabolismo en términos de la "caloría alimenticia", que es nuestra kilocaloría.* SSM

84 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Los motores diesel funcionan sin bujías, a diferencia de los motores de gasolina. El ciclo que efectúan los motores diesel implica la compresión adiabática del aire en un cilindro, y a continuación la inyección del combustible. Cuando se inyecta el combustible, si la temperatura del aire dentro del cilindro está por encima del punto de ignición, la mezcla combustible-aire se enciende. La mayor parte de los motores diesel tienen razones de compresión que van de 14:1 a 25:1. Para este intervalo de razones de compresión (que son las razones de máximo a mínimo volumen), ¿cuál es el intervalo de temperaturas máximas del aire en el cilindro, suponiendo que el aire entra en el cilindro a 35 ºC? La mayoría de los modernos motores de gasolina tienen razones de compresión del orden de 8:1. Explicar por qué se requiere que el motor diesel disponga de un mejor (más eficaz) sistema de refrigeración que su equivalente de gasolina.

85 •• A temperaturas muy bajas, el calor específico de un metal viene dado por la expresión $c = aT + bT^3$. Para el cobre, $a = 0{,}0108$ J/kg · K^2 y $b = 7{,}62 \times 10^{-4}$ J/kg · K^4. (*a*) ¿Cuál es el calor específico del cobre a 4 K? (*b*) ¿Qué calor es necesario suministrar para calentar el cobre desde 1 a 3 K?

86 •• Determinar el trabajo que hay que realizar a la temperatura y presión estándares para comprimir 30,0 g de CO hasta un quinto de su volumen inicial si el proceso es (*a*) isotermo y (*b*) adiabático.

87 •• Determinar el trabajo que hay que realizar a la temperatura y presión estándares para comprimir 30,0 g de CO_2 hasta un quinto de su volumen inicial si el proceso es (*a*) isotermo y (*b*) adiabático.

88 •• Determinar el trabajo que hay que realizar a la temperatura y presión estándares para comprimir 30,0 g de argón hasta un quinto de su volumen inicial si el proceso es (*a*) isotermo y (*b*) adiabático.

89 •• Un sistema térmicamente aislado está formado por 1 mol de un gas ideal diatómico a 100 K y 2 moles de un sólido a 200 K separados por una pared aislante rígida. Determinar la temperatura de equilibrio del sistema al retirar la pared aislante suponiendo que el sólido cumple la ley de Dulong-Petit. SSM

90 •• Cuando un gas ideal sufre una variación de temperatura a volumen constante, su energía interna varía de acuerdo con la expresión $\Delta E_{int} = C_V \Delta T$. (*a*) Explicar por qué el resultado $\Delta E_{int} = C_V \Delta T$ es válido para un gas ideal incluso cuando cambia el volumen. (*b*) Utilizando esta fórmula, además de el primer principio de la termodinámica, demostrar que para un gas ideal $C_P = C_V + nR$.

91 •• Un cilindro aislado en el que se encuentra un pistón móvil para mantener la presión constante, contiene inicialmente 100 g de hielo a −10 °C. Se suministra calor al sistema a ritmo constante mediante un calentador de 100 W. Dibujar un gráfico que muestre la temperatura del contenido del cilindro en función del tiempo, comenzando en t_i, cuando la temperatura vale −10 °C, y terminando en t_f cuando la temperatura es 110 °C.

92 •• (*a*) En este problema, 2,00 moles de un gas ideal diatómico se expansionan adiabática y cuasiestáticamente. La temperatura inicial del gas es 300 K. El trabajo realizado por el gas durante la expansión es 3,5 kJ. ¿Cuál es la temperatura final del gas? (*b*) Comparar este resultado con el que se obtendría si el gas fuese monoatómico.

93 •• Un cilindro vertical adiabáticamente aislado está dividido en dos partes por medio de un pistón movible de masa *m*. Inicialmente, el pistón se mantiene en reposo. La parte superior se vacía y la parte inferior se llena con 1,00 mol de gas ideal diatómico a la temperatura de 300 K. Cuando se libera el pistón y el gas alcanza el equilibrio, el volumen ocupado por éste se ha reducido a la mitad. Determinar la temperatura final del gas.

94 ••• Según el modelo de Einstein de un sólido cristalino, la energía interna por mol viene dada por $U = (3N_A kT_E)/(e^{T_E/T} - 1)$, donde T_E es una temperatura característica llamada *temperatura de Einstein* y T es la temperatura del sólido en kelvins. Usar esta expresión para demostrar que la capacidad calorífica molar del sólido a volumen constante es

$$c'_V = 3R\left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{e^{T_E/T}}{(e^{T_E/T} - 1)^2}$$

95 ••• (*a*) Utilizar el resultado del problema 94 para demostrar que en el límite $T \gg T_E$, el modelo de Einstein da la misma expresión para el calor específico que la ley de Dulong-Petit. (*b*) Para el diamante, T_E es aproximadamente 1060 K. Integrar numéricamente $dE_{int} = c'_v\, dT$ para hallar el aumento en la energía interna si 1,00 mol de diamante se calienta desde 300 K a 600 K. SSM

96 ••• Utilizar el resultado del modelo de Einstein del problema 94 para determinar la energía interna molar del diamante (T_E = 1060 K) a 300 K y 600 K, y de este modo el aumento de energía interna cuando se calienta el diamante desde 300 K a 600 K. Comparar el resultado con el del problema 95.

97 ••• En una expansión isoterma, un gas ideal a una presión inicial P_0 se expansiona hasta duplicar su volumen inicial V_0. (*a*) Hallar su presión después de la expansión. (*b*) Luego, el gas se comprime adiabática y cuasiestáticamete hasta su volumen original, en cuyo momento su presión vale 1,32 P_0. El gas, ¿es monoatómico, diatómico o poliatómico? (*c*) ¿Cómo varía en estos procesos la energía cinética de traslación del gas?

98 ••• Si se pincha un neumático, el aire del interior se irá escapando poco a poco. Suponer que el área del orificio es A, que el volumen del neumático es V, y que τ, el tiempo que tarda en salir del neumático casi todo el aire, puede expresarse en función de la razón A/V, la temperatura T, la constante de Boltzmann k y la masa inicial m de las moléculas del gas que llena el neumático. (*a*) De acuerdo con estas hipótesis, utilizar el análisis dimensional para hacer una estimación de τ. (*b*) Hacer uso del resultado obtenido en (*a*) para calcular de manera aproximada el tiempo que tardaría en desinflarse un neumático de automóvil que ha sufrido un pinchazo causado por un clavo.

CAPÍTULO 19

LOS SUBMARINISTAS LLEVAN TANQUES DE AIRE QUE LES PERMITEN PERMANECER SUMERGIDOS DURANTE LARGOS PERÍODOS DE TIEMPO. *(Paul Springett/Alamy.)*

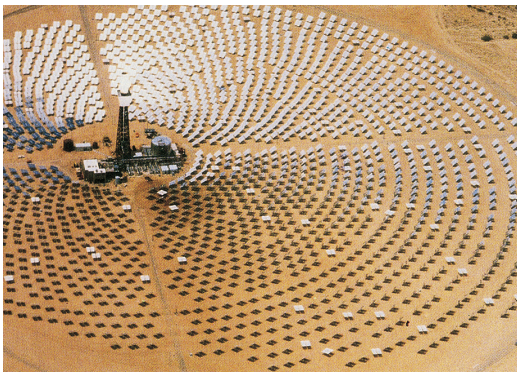
Segundo principio de la termodinámica

19.1 Máquinas térmicas y el segundo principio de la termodinámica
19.2 Refrigeradores y segundo principio de la termodinámica
19.3 La máquina de Carnot
* 19.4 Bombas de calor
19.5 Irreversibilidad, desorden y entropía
19.6 Entropía y disponibilidad de la energía
19.7 Entropía y probabilidad

? La probabilidad de que en un instante dado las moléculas de aire estén en la mitad del tanque opuesta al manguito de conexión es muy muy pequeña. ¿Cómo de pequeña es? (Véase el ejemplo 19.13.)

Con frecuencia, se recomienda que no derrochemos energía. Pero de acuerdo con el primer principio de la termodinámica, la energía se conserva siempre. Entonces, ¿qué significa conservar la energía, si la cantidad total de energía del universo no cambia con independencia de lo que hagamos? El primer principio de la termodinámica no lo explica todo. La energía se conserva siempre, pero algunas formas de energía son más útiles que otras. La posibilidad o imposibilidad de conseguir energía que esté en condiciones de ser utilizada es el punto central del segundo principio de la termodinámica. Científicos e ingenieros están constantemente tratando de mejorar el rendimiento de las máquinas térmicas (dispositivos que transforman el calor en trabajo). En la industria eléctrica, los ingenieros se esfuerzan por lograr rendimientos más altos en la transformación en trabajo útil de la energía térmica liberada por la combustión de carbón, petróleo u otros combustibles fósiles y de la obtenida por la fisión de uranio y plutonio.

En este capítulo, examinamos el segundo principio de la termodinámica y su relación con las máquinas térmicas y los refrigeradores. Así mismo, consideramos una máquina térmica ideal, la máquina de Carnot. La irreversibilidad y la entropía también se analizan en cuanto se relacionan con la disponibilidad de la energía, el desorden y la probabilidad.



La energía solar se dirige directamente hacia el horno solar situado en el centro de esta distribución circular de reflectores en Barstow, California *(Sandia National Laboratory.)*

19.1 MÁQUINAS TÉRMICAS Y EL SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

Es imposible que un sistema pueda extraer energía en forma de calor de una sola fuente térmica y convertirla completamente en trabajo sin que se produzcan cambios netos en el sistema o en el medio que le rodea.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DE KELVIN

Un ejemplo cotidiano de la conversión de trabajo en calor es el movimiento con rozamiento. Por ejemplo, supongamos que empleamos dos minutos en empujar un bloque en cualquier dirección sobre la superficie de una mesa siguiendo un camino cerrado que deja al bloque en su posición inicial. Supongamos también que el sistema bloque-mesa está inicialmente en equilibrio térmico con su entorno. El trabajo que realizamos sobre el sistema se convierte en energía interna del sistema, y esto da como resultado que el sistema bloque-mesa se caliente. En consecuencia, el sistema ya no está en equilibrio con el medio. Sin embargo, el sistema cederá energía en forma de calor al medio hasta que vuelva a estar en equilibrio térmico con él. Como los estados inicial y final del sistema son el mismo, según el primer principio de la termodinámica, la energía transmitida al medio en forma de calor debe ser igual al trabajo que hemos realizado sobre el sistema. El proceso inverso no ocurre nunca, es decir, un bloque y una mesa no se enfriarán nunca espontáneamente para convertir su energía interna en energía cinética que ponga en movimiento el bloque sobre la mesa. Sin embargo, si este sorprendente fenómeno se verificara, no violaría el primer principio de la termodinámica, ni ninguna otra ley física de las que hemos estudiado hasta ahora. Sin embargo, sí violaría el segundo principio de la termodinámica. Existe, pues, una falta de simetría en los papeles que desempeñan el calor y el trabajo que no resulta evidente a partir del primer principio. Esta falta de simetría está relacionada con el hecho de que algunos procesos son *irreversibles*.

Existen muchos otros procesos irreversibles, aparentemente muy diferentes unos de otros, pero todos relacionados con el segundo principio. Por ejemplo, la conducción de calor es un proceso irreversible. Si colocamos un cuerpo caliente en contacto con otro frío, el calor fluirá del cuerpo caliente al cuerpo frío hasta que estén a la misma temperatura. Sin embargo, el proceso inverso no se presenta nunca. Dos cuerpos en contacto a la misma temperatura, permanecen a la misma temperatura. El calor no fluye de uno al otro, haciendo que uno de ellos se enfríe cada vez más mientras que el otro cada vez se calienta más. Este hecho experimental nos ofrece otro enunciado del segundo principio de la termodinámica.

Es imposible un proceso cuyo único resultado sea transferir energía en forma de calor de un objeto a otro más caliente.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DE CLAUSIUS

En este capítulo, demostraremos que los enunciados de Kelvin y de Clausius del segundo principio son equivalentes.

El estudio del rendimiento de las **máquinas térmicas** dio origen a los primeros enunciados claros del segundo principio de la termodinámica. Una máquina térmica es un dispositivo cíclico cuyo propósito es convertir la máxima cantidad posible de calor en trabajo. Todas ellas contienen una **sustancia de trabajo** (agua en la máquina de vapor, aire y vapor de gasolina en los motores de combustión interna) que absorbe de una fuente de alta temperatura una cantidad de calor Q_h, realiza el trabajo W sobre el medio que le rodea y cede el calor Q_c cuando vuelve a su estado inicial, donde Q_h, W y Q_c representan cantidades positivas.

¡ Q_h, W y Q_c representan cantidades y no son nunca negativas.

Las primeras máquinas térmicas fueron máquinas de vapor, inventadas en el siglo XVIII para bombear el agua de las minas de carbón. Hoy en día, las máquinas de vapor se utilizan para generar electricidad. En una máquina de vapor típica se calienta agua a una presión muy elevada (normalmente hasta varios cientos de atmósferas) hasta

que se vaporiza dando vapor de agua a temperatura alta (del orden de 500 °C) (figura 19.1). El vapor se expande contra un pistón (o las palas de una turbina) realizando trabajo, escapa después a una temperatura mucho menor y se enfría aún más en el condensador, donde se le extrae calor para producir su condensación. A continuación, el agua se bombea e introduce de nuevo en la caldera, donde se calienta otra vez.

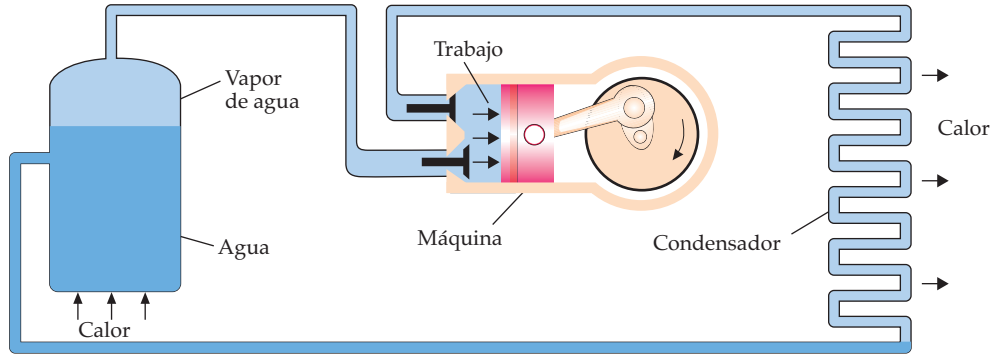


FIGURA 19.1 Esquema de una máquina de vapor. El vapor a alta presión procedente de la caldera realiza trabajo contra el pistón.

La figura 19.2 es un diagrama esquemático de otro tipo de máquina térmica. Es la máquina de combustión interna utilizada por la mayoría de los automóviles. Con la válvula de escape cerrada, una mezcla de vapor de gasolina y aire entra en la cámara de combustión a medida que el pistón se mueve hacia abajo en la fase de admisión. La mezcla se comprime después y explosiona por la acción de una chispa creada en la bujía. Los gases calientes se expansionan contra el pistón, que desciende en la llamada *fase de potencia*, realizando trabajo. Los gases se expulsan a continua-

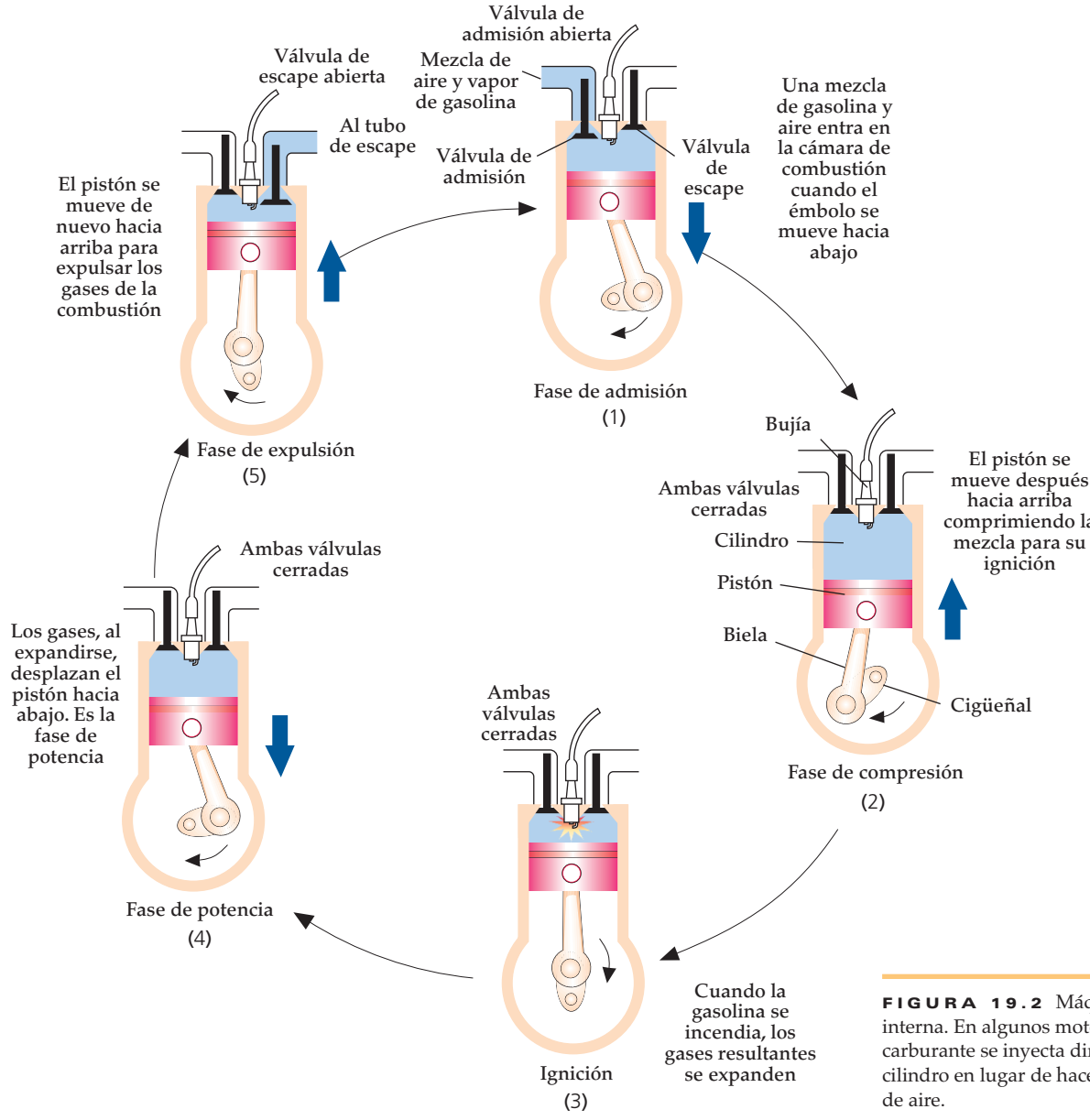


FIGURA 19.2 Máquina de combustión interna. En algunos motores de inyección, el carburante se inyecta directamente en el cilindro en lugar de hacerlo en la corriente de aire.

ción por la válvula de escape y el ciclo se repite. Un modelo idealizado de estos procesos en la máquina de combustión interna constituye el **ciclo de Otto**, que se muestra en la figura 19.3.

La figura 19.4 nos muestra de forma esquemática una máquina o motor térmico. El calor que entra Q_h procede de un foco caliente a temperatura T_h; el calor que se escapa Q_c se cede a un foco térmico a una temperatura inferior T_c. Un foco caliente o frío es un sistema idealizado que tiene una capacidad calorífica tan grande que puede absorber o ceder calor sin una variación apreciable de su temperatura. En la práctica, un combustible fósil que se quema suele actuar como foco de alta temperatura, y la atmósfera del entorno, o un lago, suelen actuar como focos de baja temperatura. La aplicación del primer principio de la termodinámica ($\Delta E_{int} = Q + W$) da

$$W = Q_h - Q_c \qquad 19.1$$

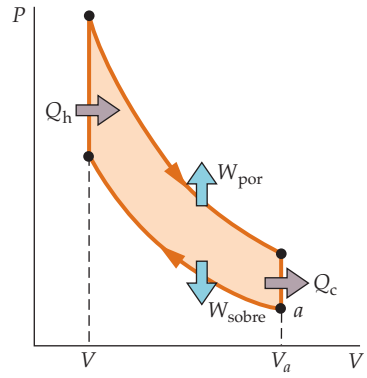


FIGURA 19.3 Ciclo de Otto correspondiente a una máquina de combustión interna. La mezcla de aire-gasolina entra en *a* y se comprime adiabáticamente hasta *b*. Entonces se calienta (por combustión) a volumen constante hasta *c*. La fase de potencia está representada por la expansión adiabática desde *c* a *d*. El enfriamiento a volumen constante desde *d* a *a* representa la expulsión de los gases quemados y la admisión de una nueva mezcla de aire-gasolina.

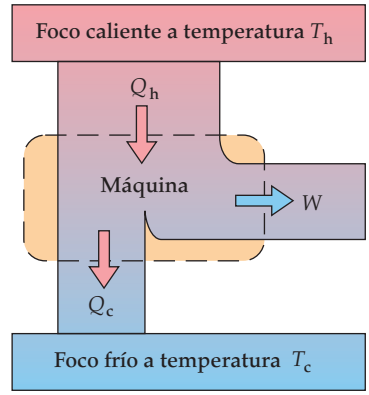


FIGURA 19.4 Representación esquemática de una máquina térmica. La máquina extrae calor Q_h de un foco caliente a temperatura T_h, realiza trabajo W, y elimina calor Q_c a un foco frío a temperatura T_c.

donde W es el trabajo realizado *por* la máquina en un ciclo completo, $Q_h - Q_c$ es la energía total en forma de calor transferida a la máquina durante un ciclo y ΔE_{int} es la variación de la energía interna de la máquina (incluyendo la sustancia de trabajo) también durante un ciclo. Como los estados inicial y final de la máquina en un ciclo completo coinciden, las energías internas inicial y final son iguales. Por lo tanto, $\Delta E_{int} = 0$.

Se define el rendimiento ε como el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido del foco caliente:

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \qquad 19.2$$

DEFINICIÓN: RENDIMIENTO DE UNA MÁQUINA TÉRMICA

Como normalmente el calor Q_h se obtiene quemando carbón, derivados del petróleo o algún otro tipo de combustible que cuestan dinero, las máquinas térmicas han de proyectarse para tener el mayor rendimiento posible. Los rendimientos de las máquinas térmicas tienen valores típicos del orden del 40 por ciento, mientras que los motores de combustión interna pueden alcanzar valores próximos al 50 por ciento. Con un rendimiento del 100% ($\varepsilon = 1$), todo el calor absorbido del foco caliente se convertiría en trabajo y el foco frío no recibiría ninguna cantidad de calor. Sin embargo, *es imposible construir una máquina térmica con un rendimiento del 100%*. Este resultado experimental es el **enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica**, el cual es equivalente al enunciado que se atribuye a Kelvin:

> Es imposible que una máquina térmica funcione cíclicamente sin producir ningún otro efecto que extraer calor de un solo foco realizando una cantidad de trabajo exactamente equivalente.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DE LA MÁQUINA TÉRMICA

! La palabra *cíclicamente* en este enunciado es importante, pues en un proceso no cíclico sí que es posible convertir el calor totalmente en trabajo.

Con el fin de extraer calor del motor y reducir su temperatura, el *dragster* de la imagen dispone de un sistema de escape múltiple. *(© 2002 Robert Briggs.)*

Así ocurre, por ejemplo, cuando un gas ideal experimenta un proceso de expansión isoterma. Sin embargo, después de la expansión, el gas no se encuentra en su estado original. Para que el gas vuelva a su estado original, debe realizarse sobre él un trabajo y una parte de calor se pierde.

Esencialmente, el segundo principio nos dice que para realizar trabajo con la energía absorbida de un foco térmico, hemos de disponer de un foco más frío que absorba la energía que no utiliza la máquina para hacer trabajo. Si esto no fuese cierto, podríamos diseñar un barco que tuviese una máquina térmica propulsada simplemente por la energía en forma de calor extraída del océano. Desgraciadamente, este enorme depósito de energía no resulta utilizable para este uso, a no ser que se encuentre otro foco más frío que absorbiese calor de la máquina. (Teóricamente es posible que una máquina térmica funcione entre la superficie más caliente del agua del océano y el agua más fría a grandes profundidades, pero hasta ahora no ha surgido un proyecto práctico para utilizar esta diferencia de temperaturas.) Para convertir calor a una sola temperatura en energía que realiza trabajo (sin otros cambios en el foco o en la máquina), se ha de utilizar otro foco frío.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo del trabajo realizado por una máquina térmica que opera en un ciclo

PLANTEAMIENTO Una máquina térmica absorbe calor de un foco térmico a alta temperatura, realiza trabajo y cede calor al foco de baja temperatura. La conservación de la energía nos dice que, en cada ciclo, el calor absorbido por la máquina es igual al calor cedido por la máquina más el trabajo realizado. El rendimiento de una máquina térmica se define como el cociente entre trabajo realizado y el calor absorbido por la máquina a lo largo de un ciclo. La sustancia activa de la máquina es un gas ideal para prácticamente todos los cálculos de este texto.

SOLUCIÓN

1. Para un número entero de ciclos, la variación de energía interna es $\Delta E_{\text{int}} = 0$, de modo que $Q_{\text{h}} = W + Q_{\text{c}}$.
2. El rendimiento viene dado por $\varepsilon = W/Q_{\text{h}}$.
3. El trabajo durante una etapa del ciclo es $W_{\text{paso}} = \int_{V_{\text{i}}}^{V_{\text{f}}} P\,dV$, donde $P = nRT/V$.
4. El calor absorbido por el gas durante una etapa viene dado por $C\,\Delta T$, donde C es la capacidad calorífica.

COMPROBACIÓN El trabajo realizado W debe ser igual a $Q_{\text{h}} - Q_{\text{c}}$ si la máquina completa un número entero de ciclos.

Ejemplo 19.1 Rendimiento de una máquina térmica

En cada ciclo, una máquina térmica absorbe 200 J de calor de un foco caliente, realiza trabajo y cede 160 J a un foco frío. ¿Cuál es su rendimiento?

PLANTEAMIENTO Utilizaremos la definición del rendimiento de una máquina térmica $\varepsilon = W/Q_{\text{h}}$ (ecuación 19.2).

SOLUCIÓN

1. El rendimiento es el cociente entre el trabajo realizado y el calor absorbido: $\varepsilon = \dfrac{W}{Q_{\text{h}}}$
2. El calor absorbido y el calor cedido se dan en el enunciado: $Q_{\text{h}} = 200\ \text{J} \quad \text{y} \quad Q_{\text{c}} = 160\ \text{J}$
3. El trabajo realizado se deduce del primer principio: $W = Q_{\text{h}} - Q_{\text{c}} = 200\ \text{J} - 160\ \text{J} = 40\ \text{J}$
4. Reemplazando Q_{h} y W por sus valores en la expresión de ε, se deduce el rendimiento: $\varepsilon = \dfrac{W}{Q_{\text{h}}} = \dfrac{40\ \text{J}}{200\ \text{J}} = 0{,}20 = \boxed{20\%}$

COMPROBACIÓN El rendimiento carece de dimensiones. En este ejemplo, W y Q_h se expresan en joules, de modo que el cociente es adimensional, como era de esperar.

PROBLEMA PRÁCTICO 19.1 Una máquina térmica posee un rendimiento del 35%. (*a*) ¿Cuánto trabajo realiza por ciclo si absorbe 150 J de calor del foco caliente por ciclo? (*b*) ¿Cuánto calor se transfiere al foco de baja temperatura en cada ciclo?

Ejemplo 19.2 El ciclo de Otto

Inténtelo usted mismo

(*a*) Determinar el rendimiento del ciclo de Otto indicado en la figura 19.3. (*b*) Expresar la respuesta en función del cociente de volúmenes $r = V_a/V_b$.

PLANTEAMIENTO (*a*) Para determinar ε, debemos conocer previamente Q_h y Q_c. La transferencia de calor tiene lugar solamente durante los dos procesos a volumen constante, $b - c$ y $d - a$. Conocidos Q_h y Q_c se puede determinar ε en función de las temperaturas T_a, T_b, T_c y T_d. (*b*) Las temperaturas se relacionan con los volúmenes mediante la expresión $TV^{\gamma-1} =$ constante para procesos adiabáticos.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuestas
(*a*) 1. Expresar el rendimiento en función de Q_h y Q_c:	$\varepsilon = 1 - \dfrac{Q_{\text{frío}}}{Q_{\text{caliente}}} = 1 - \dfrac{Q_c}{Q_h}$
2. El calor que se cede tiene lugar a volumen constante de d a a. Expresar Q_c en función de C_v y las temperaturas T_a y T_d:	$Q_c = \lvert Q_{d\to a}\rvert = C_v\lvert T_a - T_d\rvert = C_v(T_d - T_a)$
3. La absorción de calor tiene lugar a volumen constante de b a c. Expresar Q_h en función de C_v y las temperaturas T_c y T_b:	$Q_h = Q_{b\to c} = C_v(T_c - T_b)$
4. Sustituir estos valores de Q_c y Q_h para determinar el rendimiento en función de las temperaturas T_a, T_b, T_c y T_d:	$\varepsilon = \boxed{1 - \dfrac{T_d - T_a}{T_c - T_b}}$
(*b*) 1. Relacionar T_c con T_d mediante las ecuaciones $TV^{\gamma-1} =$ constante y $V_d/V_c = r$:	$T_cV_c^{\gamma-1} = T_dV_d^{\gamma-1}$ $T_c = T_d\dfrac{V_d^{\gamma-1}}{V_c^{\gamma-1}} = T_dr^{\gamma-1}$
2. Relacionar T_b y T_a, como en el paso anterior.	$T_b = T_ar^{\gamma-1}$
3. Mediante estas relaciones eliminar T_c y T_b de ε en (*a*), de modo que ε se exprese en función de r:	$\varepsilon = 1 - \dfrac{T_d - T_a}{T_dr^{\gamma-1} - T_ar^{\gamma-1}} = \boxed{1 - \dfrac{1}{r^{\gamma-1}}}$

COMPROBACIÓN El resultado de la parte (*b*) es un número sin dimensiones, como era de esperar. Además, la expresión para ε está comprendida entre 0 y 1, y se aproxima a 0 cuando r se aproxima a 1, como era también de esperar.

OBSERVACIÓN La razón r (volumen antes de la compresión/volumen después de la compresión) se denomina razón de compresión.

19.2 REFRIGERADORES Y SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

La figura 19.5*a* es una representación esquemática de un **refrigerador**, el cual es esencialmente una máquina térmica que funciona en sentido inverso. El refrigerador extrae calor de su interior (foco frío) y lo cede al medio (foco caliente). La experiencia demuestra que en esta transferencia siempre debe consumirse cierta cantidad de trabajo. Este resultado constituye el enunciado del **refrigerador del segundo principio de la termodinámica**, que es otra manera de expresar el enunciado de Clausius:

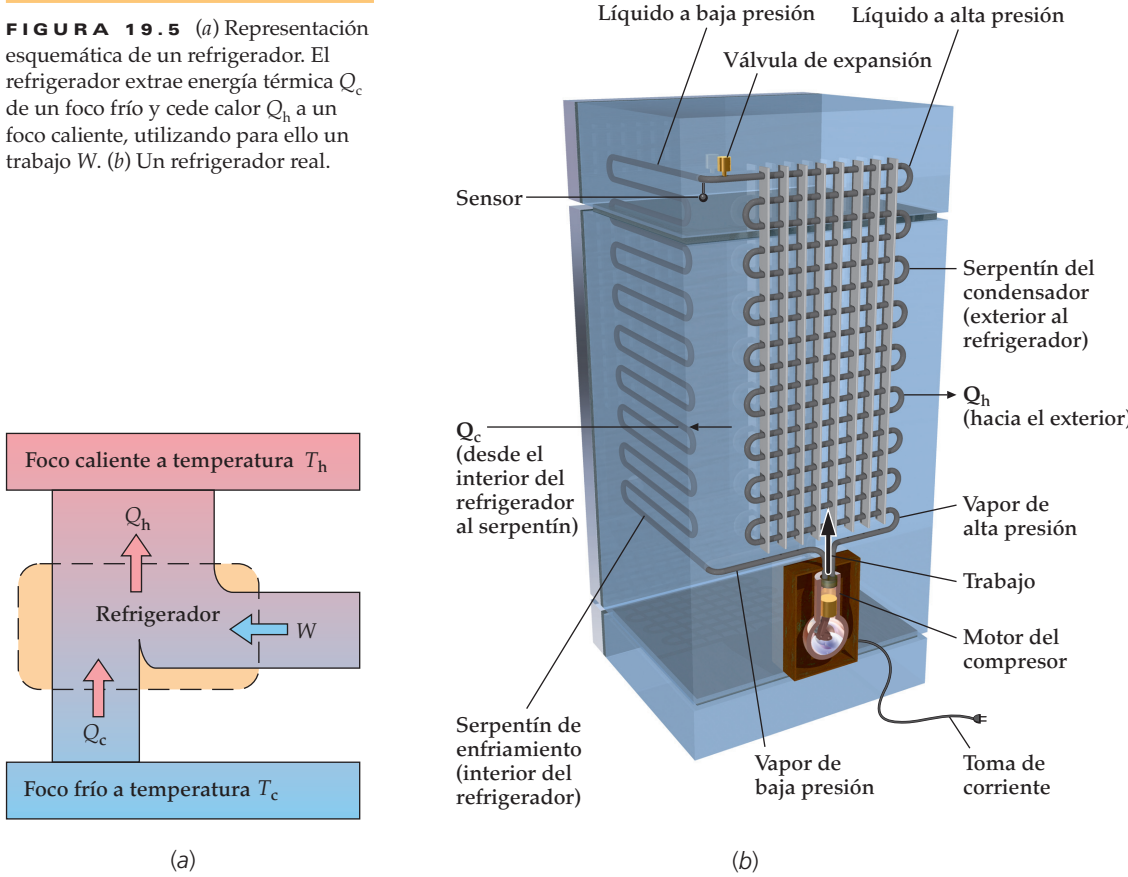


FIGURA 19.5 (*a*) Representación esquemática de un refrigerador. El refrigerador extrae energía térmica Q_c de un foco frío y cede calor Q_h a un foco caliente, utilizando para ello un trabajo W. (*b*) Un refrigerador real.

Es imposible que un refrigerador funcione cíclicamente sin producir *ningún otro efecto* que la transferencia de calor de un objeto frío a otro caliente.

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA: ENUNCIADO DEL REFRIGERADOR

Si esta afirmación no fuese cierta, sería en principio posible enfriar nuestros domicilios en verano con un refrigerador que bombease el calor hacia el exterior sin utilizar electricidad ni ningún otro tipo de energía.

Una medida de la eficiencia de un refrigerador es la razón Q_c/W del calor extraído del foco de baja temperatura y el trabajo realizado sobre el refrigerador. (Este trabajo es igual a la energía eléctrica que procede de la toma de corriente de la pared.) La razón Q_c/W recibe el nombre de **coeficiente de eficiencia** η:

$$\eta = \frac{Q_c}{W} \qquad 19.3$$

DEFINICIÓN: COEFICIENTE DE EFICIENCIA (REFRIGERADOR)

Cuanto mayor es el coeficiente de eficiencia, mejor es el refrigerador. Los refrigeradores ordinarios tienen coeficientes de eficiencia del orden de 5 ó 6. [En los Estados Unidos, el coeficiente de eficiencia de los acondicionadores de aire se denomina razón de eficiencia energética estacional (SEER, del inglés, *seasonal energy efficiency ratio*)]*. En función de este ratio, el enunciado del refrigerador del segundo principio afirma que el coeficiente de eficiencia de un refrigerador no puede ser infinito.

(Anderson Ross/PhotoDisk/Getty.)

* El SEER de un acondicionador de aire es igual al promedio estacional de Q_c/W, con Q_c en BTU y W en watts-hora.

Ejemplo 19.3 Fabricación de cubitos de hielo *Póngalo en su contexto*

Media hora antes de que empiecen a llegar los invitados nos damos cuenta de que hemos olvidado comprar cubitos de hielo para las bebidas. Rápidamente ponemos un litro de agua a 10 °C en la bandeja de los cubitos y la colocamos en el congelador. ¿Tendremos a tiempo el hielo para los invitados? En la etiqueta de especificaciones del refrigerador consta que el aparato tiene un coeficiente de eficiencia de 5,5 y una potencia de 550 W. Se estima que sólo el 10% de la potencia se emplea en enfriar y congelar el del agua.

PLANTEAMIENTO El trabajo es igual a la potencia multiplicada por el tiempo. Como se nos da la potencia, hemos de hallar el trabajo para determinar el tiempo. El trabajo está relacionado con Q_c por la ecuación 19.3. Para obtener el valor de Q_c hemos de calcular cuánto calor se ha de extraer del agua.

SOLUCIÓN

1. El tiempo está relacionado con la potencia disponible y el trabajo requerido: $P = W/\Delta t \Rightarrow \Delta t = W/P$
2. El trabajo está relacionado con el coeficiente de eficiencia y el calor extraído: $\eta = \dfrac{Q_c}{W}$
3. El calor Q_c extraído del interior del refrigerador es igual al calor Q_{enf} extraído del agua para enfriarla más el calor Q_{cong} que se ha de extraer del agua para congelarla: $Q_c = Q_{enf} + Q_{cong}$
4. La liberación de calor necesaria para enfriar 1,00 L de agua (1 kg de masa) 10 °C es: $Q_{enf} = mc\,\Delta T = (1{,}00\text{ kg})[4{,}18\text{ kJ/(kg}\cdot\text{K)}](10{,}0\text{ K}) = 41{,}8\text{ kJ}$
5. El calor necesario para congelar el agua en cubitos de hielo es: $Q_{cong} = mL_f = (1{,}00\text{ kg})(333{,}5\text{ kJ/kg}) = 333{,}5\text{ kJ}$
6. La suma de estos calores nos da Q_c: $Q_c = 41{,}8\text{ kJ} + 333{,}5\text{ kJ} = 375\text{ kJ}$
7. Sustituyendo Q_c en el paso 2, se determina el trabajo W: $W = \dfrac{Q_c}{\eta} = \dfrac{375\text{ kJ}}{5{,}5} = 68{,}2\text{ kJ}$
8. El tiempo t se obtiene utilizando este valor del trabajo W y el de la potencia disponible, 55 W: $\Delta t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{68{,}2\text{ kJ}}{55\text{ J/s}} = 1{,}24\text{ ks} \times \dfrac{1\text{ min}}{60\text{ s}} = 20{,}7\text{ min}$

Los invitados tendrán hielo.

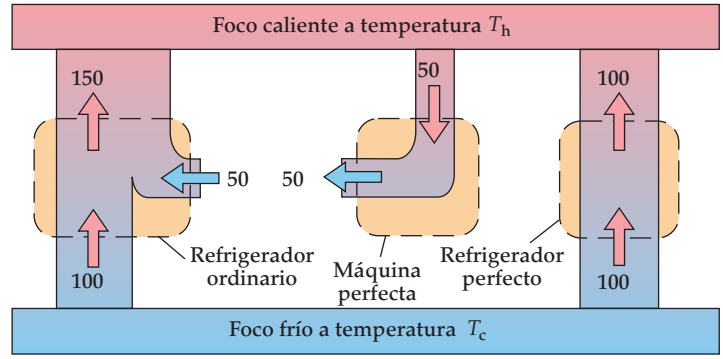
COMPROBACIÓN Veinte minutos es un tiempo corto, pero factible, para congelar un litro de agua.

PROBLEMA PRÁCTICO 19.2 Un refrigerador tiene un coeficiente de eficiencia igual a 4,0. ¿Cuánto calor hay que ceder al foco caliente si se extraen 200 kJ del foco frío?

EQUIVALENCIA ENTRE LOS ENUNCIADOS DE LA MÁQUINA TÉRMICA Y DEL REFRIGERADOR

Aunque los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador (o enunciados de Kelvin y Clausius, respectivamente) del segundo principio de la termodinámica parecen muy diferentes, son en realidad equivalentes. El enunciado de la máquina térmica es, "Es imposible que una máquina térmica funcione cíclicamente sin producir *ningún otro efecto* que extraer calor de un solo foco realizando una cantidad de trabajo exactamente equivalente", mientras que el enunciado del refrigerador establece que "Es imposible que un refrigerador funcione cíclicamente sin producir *ningún otro efecto* que la transferencia de calor de un objeto frío a otro caliente." Puede demostrarse esta equivalencia comprobando que si se supone falso uno cualquiera de ellos, el otro debe ser también falso. Utilizaremos un ejemplo numérico para demostrar que si el enunciado de la máquina térmica es falso, el del refrigerador resulta a su vez falso.

En la figura 19.6*a*, puede verse un refrigerador ordinario que utiliza 50 J de trabajo para extraer 100 J de energía en forma de calor de un foco frío, cediendo 150 J a un foco caliente. Si no fuese cierto el enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica, podríamos disponer de una máquina perfecta que extrajese energía del foco caliente convirtiéndola completamente en trabajo con un rendimiento del 100%. Esta máquina podría utilizarse para extraer 50 J de energía del foco caliente y obtener en consecuencia 50 J de trabajo (figura 19.6*b*). Entonces, si empleamos esta máquina térmica perfecta en unión con el refrigerador ordinario, se podría construir un refrigerador perfecto que transfiriese 100 J de energía en forma de calor del foco frío al foco caliente sin requerir el consumo de trabajo, como se ilustra en la figura 19.6*c*. Así se violaría el enunciado del refrigerador del segundo principio de la termodinámica. Por consiguiente, si el enunciado de la máquina térmica es falso, el del refrigerador debe ser asimismo falso. Análogamente, puede demostrarse que si existiese un refrigerador perfecto, podría utilizarse, junto con una máquina térmica ordinaria, para construir una máquina térmica perfecta. Así pues, si es falso el enunciado del refrigerador, también lo es el de la máquina térmica. Se deduce entonces que si uno cualquiera de los enunciados es verdadero, el otro debe ser igualmente cierto. Por consiguiente, ambos son equivalentes.



(*a*) Refrigerador ordinario que extrae 100 J de un foco frío y cede 150 J a un foco caliente, requiriendo el consumo de 50 J de trabajo.

(*b*) Máquina térmica perfecta que viola el enunciado de la máquina térmica del segundo principio extrayendo 50 J del foco caliente y convirtiéndolos completamente en trabajo.

(*c*) El refrigerador ordinario de (a) y la máquina térmica perfecta de (b) trabajando juntos constituyen un refrigerador perfecto que viola el enunciado del refrigerador del segundo principio transfiriendo 100 J de energía del foco frío al foco caliente sin producir ningún otro efecto.

FIGURA 19.6 Demostración de la equivalencia de los enunciados de la máquina térmica y del refrigerador del segundo principio de la termodinámica.

19.3 LA MÁQUINA DE CARNOT

Hemos visto que, de acuerdo con el segundo principio de la termodinámica, es imposible que una máquina térmica que funciona entre dos focos térmicos tenga un rendimiento del 100%. Entonces, ¿cuál es el rendimiento máximo posible para esta máquina? Esta cuestión fue contestada por un joven ingeniero francés en 1824, Sadi Carnot, antes de que se hubieran formulado ni el primer principio ni el segundo principio de la termodinámica. Carnot dedujo que una máquina reversible es la máquina más eficiente que puede operar entre dos focos térmicos determinados. Este resultado se conoce como el teorema de Carnot:

> Ninguna máquina térmica que funcione entre dos focos térmicos dados puede tener un rendimiento mayor que una máquina reversible que opere entre estos dos focos.
>
> TEOREMA DE CARNOT

Una máquina térmica reversible que funciona cíclicamente entre dos focos térmicos se denomina **máquina de Carnot** y su ciclo es el **ciclo de Carnot**. La figura 19.7 ilustra el teorema de Carnot con un ejemplo numérico.

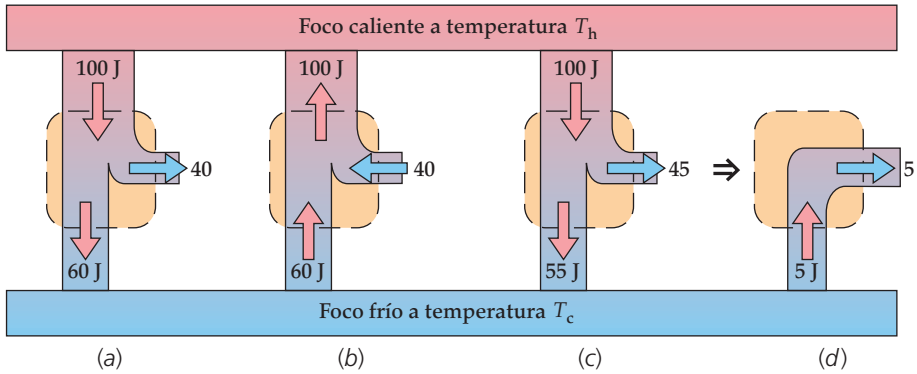


FIGURA 19.7 Demostración del teorema de Carnot. (*a*) Una máquina térmica reversible con un rendimiento del 40% extrae 100 J de un foco caliente, realiza 40 J de trabajo y cede 60 J al foco frío. (*b*) Si la misma máquina funciona al revés, es decir, como un refrigerador, se han de hacer 40 J de trabajo para extraer 60 J del foco frío y ceder 100 J al foco caliente. (*c*) Una hipotética máquina térmica que funciona entre los mismos focos con un rendimiento del 45%, el cual es mayor que el de la máquina reversible (*a*). (*d*) El efecto neto del funcionamiento conjunto de la máquina (*c*) con el refrigerador (*b*) es el mismo que el de una máquina térmica perfecta que extrae 5 J del foco frío y los convierte completamente en trabajo sin ningún otro efecto, violando así el segundo principio de la termodinámica. Por consiguiente, la máquina reversible (*a*) es la máquina de mayor rendimiento que puede operar entre estos dos focos térmicos.

Si no hay ninguna máquina que pueda tener un rendimiento mayor que la máquina de Carnot, se deduce que todas las máquinas reversibles que funcionen entre los dos mismos focos deben tener el mismo rendimiento. Este rendimiento, que se denomina **rendimiento de Carnot**, debe ser independiente de las sustancias de trabajo que empleen las máquinas y depende únicamente de la temperatura de los focos.

Examinemos lo que hace que un proceso sea reversible o irreversible. De acuerdo con el segundo principio, el calor fluye desde objetos calientes hasta objetos fríos y nunca en sentido inverso. Po lo tanto, la conducción de calor de un objeto caliente a uno frío *no* es reversible. Del mismo modo, el rozamiento puede transformar trabajo en calor, pero nunca calor en trabajo. La conversión de trabajo en calor por medio del rozamiento *no* es reversible. El rozamiento y el resto de fuerzas disipativas transforman energía mecánica en energía térmica de manera irreversible. Se presenta un tercer tipo de irreversibilidad cuando un sistema pasa a través de estados de no equilibrio, como, por ejemplo, cuando hay turbulencia en un gas o cuando un gas sufre una explosión. Para que un proceso sea reversible, debe poderse desplazar el sistema hacia el punto inicial en sentido inverso pasando a través de los mismos estados de equilibrio.

A partir de estas consideraciones y de los enunciados del segundo principio de la termodinámica, podemos indicar algunas condiciones que son necesarias para que un proceso sea reversible.

1. La energía mecánica no se transforma en energía térmica por rozamiento, fuerzas viscosas u otras fuerzas disipativas.
2. La transferencia de energía en forma de calor sólo puede ocurrir entre sistemas con una diferencia de temperatura infinitesimal.
3. El proceso debe ser cuasiestático, de modo que el sistema se encuentre siempre en un estado de equilibrio (o infinitesimalmente cerca de un estado de equilibrio).

CONDICIONES DE REVERSIBILIDAD

Todo proceso que viole alguna de las condiciones anteriores es irreversible. La mayoría de los procesos naturales son irreversibles. Para conseguir un proceso reversible, debe tenerse gran cuidado en eliminar el rozamiento y otras fuerzas disipativas y en hacer que el proceso sea cuasiestático. Como esto no puede conseguirse nunca por completo, un proceso reversible es una idealización parecida a la del movimiento sin rozamiento de los problemas de mecánica. Sin embargo, podemos hacer en la práctica que un proceso se aproxime mucho a la reversibilidad.

Ahora estamos en condiciones de comprender las características de un ciclo de Carnot, que es un ciclo reversible entre dos focos solamente. Como toda transferencia de calor debe realizarse isotérmicamente para que el proceso sea reversible, la absorción de calor del foco caliente debe realizarse de forma isoterma. El siguiente paso debe ser una expansión adiabática cuasiestática hasta la temperatura más baja del foco frío. A continuación, se cede calor isotérmicamente al foco frío. Finalmente, se produce una compresión adiabática cuasiestática hasta alcanzar la temperatura más alta del foco caliente. El ciclo de Carnot consta, pues, de los cuatro pasos reversibles siguientes:

1. Una absorción isoterma y cuasiestática de calor de un foco caliente.
2. Una expansión adiabática y cuasiestática hasta una temperatura más baja.
3. Una cesión isoterma y cuasiestática de calor a un foco frío.
4. Una compresión adiabática y cuasiestática hasta el estado original.

PASOS EN UN CICLO DE CARNOT

Para calcular el rendimiento de una máquina de Carnot, elegimos como sustancia de trabajo un material de propiedades conocidas —un gas ideal— y calculamos explícitamente el trabajo realizado sobre ella a lo largo de un ciclo de Carnot (figura 19.8). Como todos los ciclos de Carnot poseen el mismo rendimiento, independientemente de la sustancia de trabajo, nuestro resultado será válido de modo general.

El rendimiento de este ciclo (ecuación 19.2) es

$$\varepsilon = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}$$

El calor Q_h se absorbe durante la expansión isoterma del estado 1 al estado 2. El primer principio de la termodinámica establece que $\Delta E_{int} = Q + W$. Para una expansión isoterma de un gas ideal, $\Delta E_{int} = 0$. Aplicando el primer principio a la expansión isoterma desde el estado 1 al estado 2, se obtiene que Q_h es igual al trabajo realizado por el gas en esa etapa:

$$Q_h = W_{\text{por el gas}} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_h}{V}dV = nRT_h \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_h \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Análogamente, el calor cedido al foco frío es igual al trabajo realizado sobre el gas durante la compresión isoterma a temperatura T_c desde el estado 3 al 4. Este trabajo tiene el mismo valor absoluto que el realizado por el gas si se expande del estado 4 al 3. El calor cedido vale, por lo tanto,

$$Q_c = W_{\text{por el gas}} = nRT_c \ln \frac{V_3}{V_4}$$

El cociente entre estas cantidades de calor es

$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c \ln \dfrac{V_3}{V_4}}{T_h \ln \dfrac{V_2}{V_1}} \qquad 19.4$$

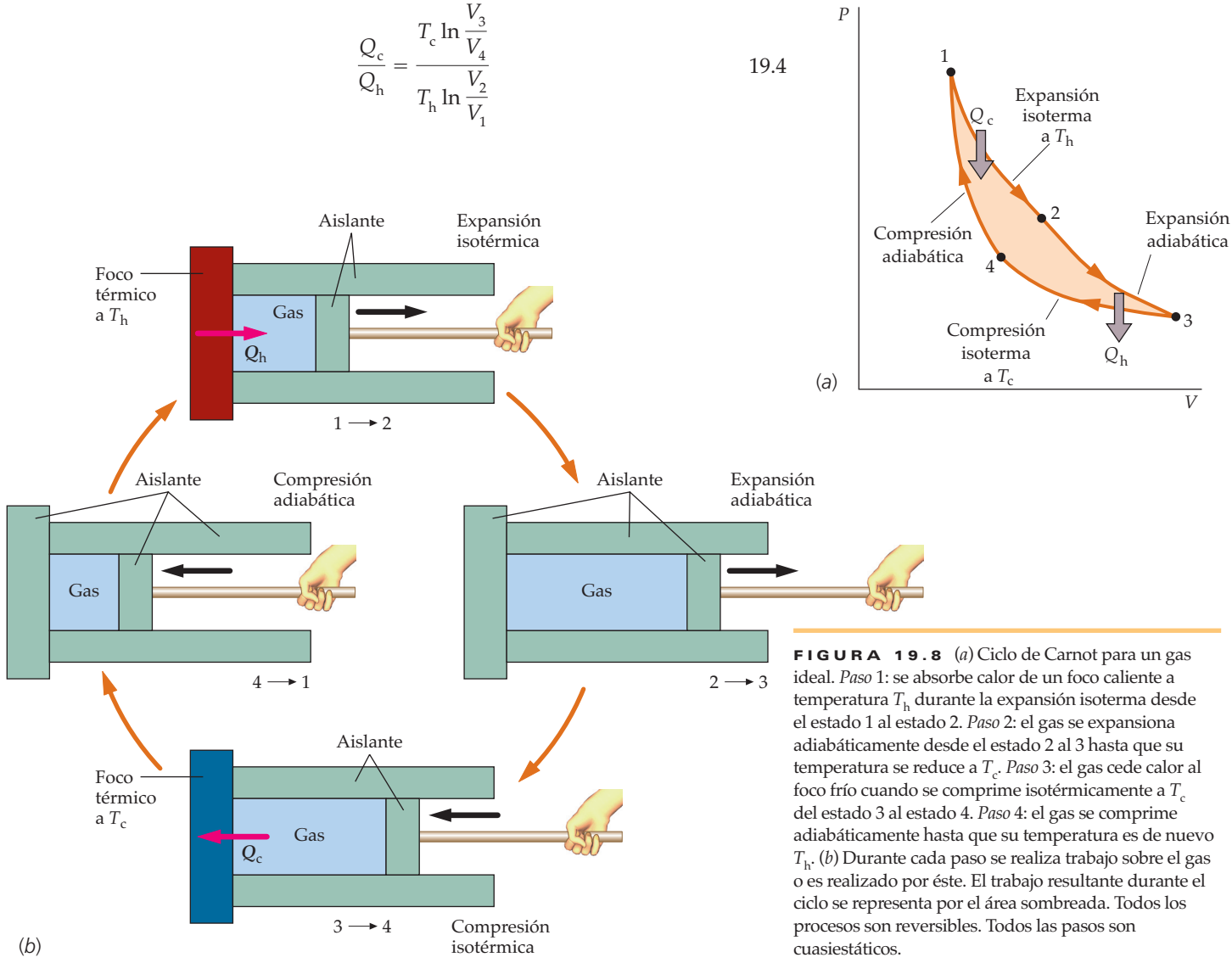


FIGURA 19.8 (*a*) Ciclo de Carnot para un gas ideal. *Paso* 1: se absorbe calor de un foco caliente a temperatura T_h durante la expansión isoterma desde el estado 1 al estado 2. *Paso* 2: el gas se expansiona adiabáticamente desde el estado 2 al 3 hasta que su temperatura se reduce a T_c. *Paso* 3: el gas cede calor al foco frío cuando se comprime isotérmicamente a T_c del estado 3 al estado 4. *Paso* 4: el gas se comprime adiabáticamente hasta que su temperatura es de nuevo T_h. (*b*) Durante cada paso se realiza trabajo sobre el gas o es realizado por éste. El trabajo resultante durante el ciclo se representa por el área sombreada. Todos los procesos son reversibles. Todos las pasos son cuasiestáticos.

Central eléctrica alimentada por carbón en Four Corners, Nuevo México (Estados Unidos). *(Michael Collier/Stock, Boston.)*

Central eléctrica en Wairakei (Nueva Zelanda), que transforma la energía geotérmica en electricidad. *(Jean-Pierre Horlin/The Image Bank.)*

Podemos relacionar las razones V_2/V_1 y V_3/V_4 utilizando la ecuación 18.37 correspondiente a una expansión adiabática cuasiestática. Aplicando esta ecuación a la expansión del estado 2 al 3, se obtiene

$$T_h V_2^{\gamma-1} = T_c V_3^{\gamma-1}$$

Análogamente, en el caso de la compresión adiabática del estado 4 al 1, tenemos

$$T_h V_1^{\gamma-1} = T_c V_4^{\gamma-1}$$

Dividiendo ambas ecuaciones, resulta

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

Así, se tiene

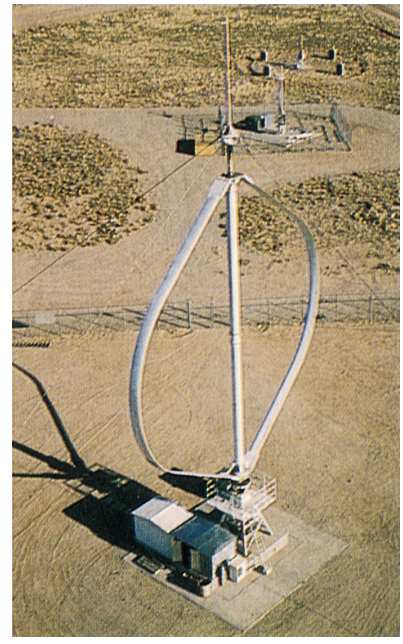
$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c \ln \dfrac{V_2}{V_1}}{T_h \ln \dfrac{V_2}{V_1}} = \frac{T_c}{T_h} \qquad 19.5$$

El rendimiento de Carnot ε_C es, pues

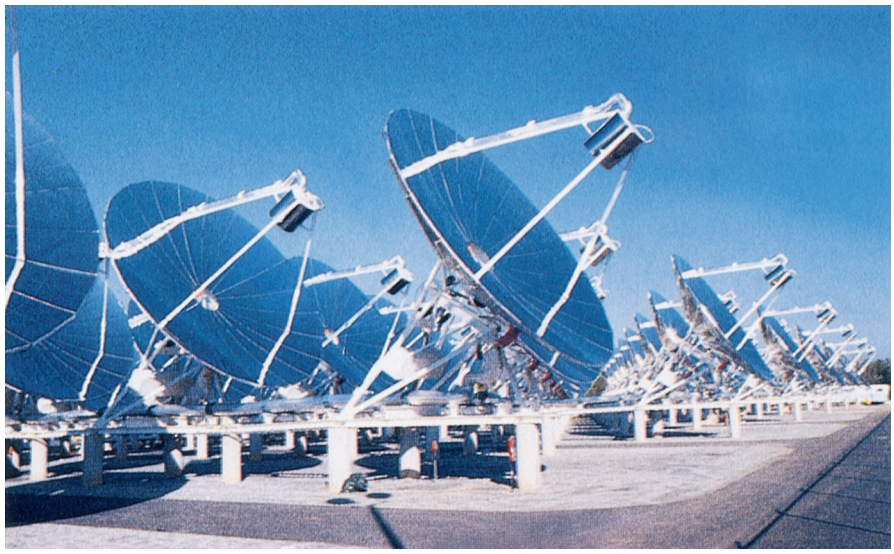
$$\varepsilon_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} \qquad 19.6$$

RENDIMIENTO DE CARNOT

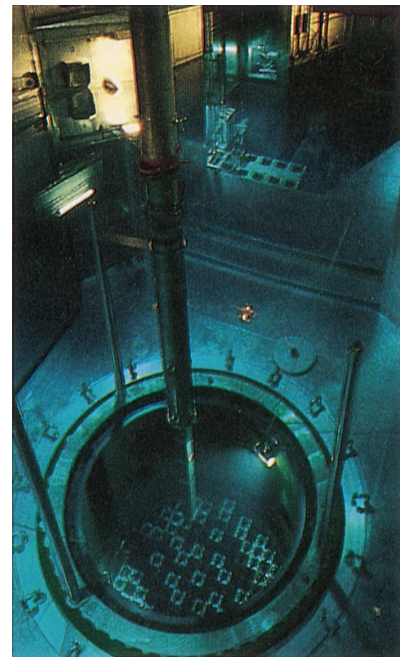
La ecuación 19.6 demuestra que el rendimiento de Carnot es independiente de la sustancia de trabajo de la máquina que se considere; sólo depende de las temperaturas de los dos focos.



Generador eléctrico experimental accionado por el viento en el Sandia National Laboratory (Estados Unidos). El tipo de hélice propulsora está proyectado para una transferencia óptima de la energía del viento a energía mecánica. *(Sandia National Laboratory.)*



La energía solar se concentra y recoge individualmente para producir electricidad mediante estos heliostatos que se están probando en el Sandia National Laboratory (Estados Unidos). *(Sandia National Laboratory.)*



Las barras de control se están insertando en este reactor nuclear en Tihange (Bélgica). *(Peter Miller/The Image Bank.)*

Ejemplo 19.4 Rendimiento de una máquina de vapor

Una máquina de vapor funciona entre un foco térmico a 100 °C = 373 K y un foco frío a 0 °C = 273 K. (*a*) ¿Cuál es el máximo rendimiento posible de esta máquina? (*b*) Si la máquina funciona en sentido inverso como un refrigerador, ¿cuál es su máximo coeficiente de eficiencia?

PLANTEAMIENTO El rendimiento máximo corresponde al ciclo de Carnot dado por la ecuación 19.6. Para determinar el máximo coeficiente de eficiencia, se utiliza la definición de rendimiento ($\varepsilon = W/Q_h$), la definición de η ($\eta = Q_c/W$) y la ecuación 19.5.

SOLUCIÓN

(*a*) El máximo rendimiento es el del ciclo de Carnot:

$$\varepsilon_{máx} = \varepsilon_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{273\ \text{K}}{373\ \text{K}} = 0{,}268 = \boxed{26{,}8\%}$$

(*b*) 1. Escribir la expresión para η si la máquina funciona en sentido inverso en un ciclo:

$$\eta = \frac{Q_c}{W}$$

2. El trabajo es igual a $Q_h - Q_c$ (el calor absorbido del foco caliente menos el calor cedido al foco frío):

$$\eta = \frac{Q_c}{Q_h - Q_c} = \frac{1}{\dfrac{Q_h}{Q_c} - 1}$$

3. Sustituir Q_h/Q_c por T_h/T_c (ecuación 19.5) y despejar el valor de η:

$$\eta_{máx} = \frac{1}{\dfrac{T_h}{T_c} - 1} = \frac{1}{\dfrac{373\ \text{K}}{273\ \text{K}} - 1} = \boxed{2{,}73}$$

COMPROBACIÓN Despejando en el resultado de la parte (*a*) la razón de temperaturas, sustituyéndola en el resultado del paso 3 de la parte (*b*) y reordenando, se obtiene $\eta_{máx} = \varepsilon_C^{-1} - 1$. Si se reemplaza 0,268 (el resultado del paso 3 de la parte (*b*)) por ε_c resulta $\eta_{máx} = 2{,}73$ (el resultado de la parte (*b*)).

OBSERVACIÓN Aunque un rendimiento del 26,8% parece muy bajo, es el máximo posible para toda máquina que opere entre estas temperaturas. Las máquinas reales tienen aún menores rendimientos debido al rozamiento, la conducción térmica y otros procesos irreversibles. De igual modo, los refrigeradores reales tienen coeficientes de eficiencia menores que 2,73. Se puede demostrar que el coeficiente de eficiencia de un refrigerador de Carnot es $T_c/\Delta T$, donde $\Delta T = T_h - T_c$.

El rendimiento de Carnot establece un límite superior de posibles rendimientos y, por lo tanto, es útil conocerlo. Así, hemos calculado en el ejemplo 19.4 que el rendimiento de Carnot es del 26,8%. Esto quiere decir que, por mucho que se reduzca el rozamiento y otras pérdidas irreversibles, el mejor rendimiento obtenido entre focos térmicos a 373 K y 273 K es del 26,8%. Por lo tanto, se ha de reconocer que una máquina que funciona entre esas temperaturas con un rendimiento del 25% es una máquina muy buena.

Para una máquina real, el **trabajo perdido** es el trabajo realizado por una máquina reversible que opera entre las mismas temperaturas menos el trabajo realizado por la máquina real, suponiendo que ambas completan un número entero de ciclos y ambas absorben la misma cantidad de calor del foco caliente. El cociente entre el trabajo realizado por la máquina real y el trabajo realizado por una máquina reversible que opera entre las mismas temperaturas se conoce por el nombre de **rendimiento del segundo principio**.

Ejemplo 19.5 Trabajo perdido por un máquina

Una máquina consume 200 J de un foco caliente a 373 K, realiza 48 J de trabajo y cede 152 J a un foco frío a 273 K. ¿Cuánto trabajo se "pierde" por ciclo debido a la irreversibilidad de la máquina?

PLANTEAMIENTO El trabajo perdido es el trabajo realizado por una máquina reversible que opera entre las mismas temperaturas menos los 18 J de trabajo realizado por la máquina, suponiendo que ambas absorben la misma cantidad de calor del foco caliente.

SOLUCIÓN

1. El trabajo perdido es la cantidad máxima de trabajo que podría realizarse menos el trabajo realmente obtenido: $W_{\text{perdido}} = W_{\text{máx}} - W$
2. La cantidad máxima de trabajo que podría realizarse es el trabajo realizado utilizando una máquina de Carnot: $W_{\text{máx}} = \varepsilon_C Q_h$
3. El trabajo perdido es entonces: $W_{\text{perdido}} = \varepsilon_C Q_h - W$
4. El rendimiento de Carnot puede expresarse en función de las temperaturas: $\varepsilon_C = 1 - \dfrac{T_c}{T_h}$
5. Sustituyendo el valor de ε_C, se obtiene:

$$W_{\text{perdido}} = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)Q_h - W = \left(1 - \frac{273\ \text{K}}{373\ \text{K}}\right)(200\ \text{J}) - 48\ \text{J}$$
$$= 53{,}6\ \text{J} - 48{,}0\ \text{J} = \boxed{5{,}6\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN El rendimiento de Carnot para estas dos temperaturas es del 26,8%. El trabajo producido por la máquina en este ejemplo es 48,0 J, y este valor es el 24% de 200 J. Además, los 5,6 J de trabajo perdido es el 2,4% de 200 J. Como 24% más 2,4% es igual a 26,4%, nuestra respuesta es plausible.

OBSERVACIÓN Los 5,6 J de energía de la respuesta final no se han "perdido" en el universo, ya que la energía total se conserva. Sin embargo, la máquina real cede 5,6 J de energía al foco frío que podrían haberse convertido en trabajo útil si la máquina hubiera sido ideal, es decir, reversible.

Ejemplo 19.6 Pérdida de trabajo entre focos térmicos

Si se transmiten por conducción 200 J de calor de un foco térmico a 373 K a otro a 273 K, ¿qué capacidad de producir trabajo se "pierde" en este proceso?

PLANTEAMIENTO Durante el proceso de conducción de los 200 J no se ha realizado trabajo alguno. Por lo tanto, el trabajo perdido es el 100% del que se habría obtenido por medio de una máquina reversible que operase entre los mismos focos y absorbiera 200 J del foco caliente.

SOLUCIÓN

1. El trabajo perdido es el trabajo realizado por una máquina reversible menos el trabajo realizado por el proceso descrito aquí. El proceso es la transferencia de 200 J de calor desde el foco caliente al foco frío, de modo que el trabajo efectuado es cero:

$$W_{\text{perdido}} = W_{\text{rev}} - W = W_{\text{rev}} - 0$$

2. El trabajo efectuado por una máquina reversible que opera entre los mismos focos con una absorción de 200 J del foco caliente es:

$$W_{\text{rev}} = \varepsilon Q_h = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right) Q_h = \left(1 - \frac{273\ \text{K}}{373\ \text{K}}\right)(200\ \text{J}) = 53{,}6\ \text{J}$$

3. Calcular el trabajo perdido:

$$W_{\text{perdido}} = W_{\text{rev}} = \boxed{53{,}6\ \text{J}}$$

COMPROBACIÓN En el ejemplo 19.4, calculamos que el coeficiente de eficiencia de una máquina reversible que opera entre 273 K y 373 K es 26,8%. Entonces, el resultado del paso 3 es plausible porque 53,6 J es el 26,8% de los 200 J absorbidos del foco.

PROBLEMA PRÁCTICO 19.3 Una máquina reversible opera entre focos térmicos a 500 K y 300 K. (*a*) ¿Cuál es su rendimiento? (*b*) Si en el transcurso de cada ciclo la máquina absorbe 200 kJ de calor del foco caliente, ¿cuánto trabajo realiza en cada ciclo?

PROBLEMA PRÁCTICO 19.4 Una máquina real trabaja entre focos térmicos a 500 K y 300 K. Emplea 500 kJ de calor del foco caliente y realiza 150 kJ de trabajo en cada ciclo. ¿Cuál es su rendimiento?

LA ESCALA TERMODINÁMICA O ABSOLUTA DE TEMPERATURAS

En el capítulo 17, definimos la escala de temperaturas del gas ideal en función de las propiedades de los gases a bajas densidades. Como el rendimiento de Carnot depende sólo de las temperaturas de los dos focos térmicos, puede utilizarse para definir la relación de las temperaturas de los focos, independientemente de las propiedades de cualquier sustancia. *Definiremos* la relación de las temperaturas absolutas de los focos caliente y frío en la forma

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{Q_c}{Q_h} \qquad 19.7$$

DEFINICIÓN DE TEMPERATURA TERMODINÁMICA

donde Q_h es la energía extraída del foco caliente y Q_c la energía cedida al foco frío por una máquina de Carnot que funcione entre los dos focos. Así pues, para determinar la relación de temperaturas entre los dos focos, disponemos una máquina reversible que opera entre ellos y medimos el calor absorbido y cedido por cada uno de los focos durante un ciclo. La **temperatura termodinámica** está completamente determinada por la ecuación 19.7 y por la elección de un punto fijo. Si el punto fijo se define igual a 273,16 K para el punto triple del agua, la escala termodinámica de temperaturas coincide con la escala de temperaturas del gas ideal en el intervalo de temperaturas en el cual puede utilizarse un termómetro de gases. Una temperatura que marque cero en el cero absoluto pertenece a una *escala absoluta de temperaturas*.

* 19.4 BOMBAS DE CALOR

Una **bomba de calor** es un refrigerador con un objetivo diferente. Lo característico de un refrigerador es enfriar un cuerpo o sistema de interés. Sin embargo, el objetivo de una bomba de calor es calentarlos. Por ejemplo, si utilizamos una bomba de calor para calentar una casa, lo que estamos haciendo es extraer calor del aire frío del exterior de la casa para cederlo al aire más cálido del interior. El objetivo es

calentar el interior de la casa. Si se efectúa un trabajo W sobre una bomba de calor para extraer un calor Q_c del foco frío y ceder un calor Q_h al foco caliente, el coeficiente de eficiencia de la bomba de calor se define de la forma

$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W} \qquad 19.8$$

DEFINICIÓN: COEFICIENTE DE EFICIENCIA (BOMBA DE CALOR)

Este coeficiente de eficiencia es distinto del definido para el refrigerador, el cual es Q_c/W (ecuación 19.3). Utilizando la relación $W = Q_h - Q_c$, la expresión 19.8 puede escribirse como

$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{Q_h - Q_c} = \frac{1}{1 - \dfrac{Q_c}{Q_h}} \qquad 19.9$$

Se obtiene el máximo coeficiente de eficacia utilizando una bomba de calor de Carnot. En este caso, Q_c y Q_h están relacionados por la ecuación 19.5. Sustituyendo la fracción Q_c/Q_h por T_c/T_h en la ecuación 19.9, se obtiene para el coeficiente de eficiencia máximo

$$\eta_{BC\ máx} = \frac{1}{1 - \dfrac{T_c}{T_h}} = \frac{T_h}{T_h - T_c} = \frac{T_h}{\Delta T} \qquad 19.10$$

donde ΔT es la diferencia de temperaturas entre los focos caliente y frío. Las bombas de calor y los refrigeradores reales tienen unos coeficientes de eficacia menores que $\eta_{BC\ máx}$ debido a los rozamientos, la conducción del calor y otros procesos irreversibles.

Los coeficientes de eficiencia del refrigerador y de la bomba de calor están relacionados, como puede verse utilizando $Q_h = Q_c + W$ y las ecuaciones 19.3 y 19.8:

$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W} = \frac{Q_c + W}{W} = 1 + \frac{Q_c}{W} = 1 + \eta \qquad 19.11$$

donde η es el coeficiente de eficiencia de un refrigerador.

Ejemplo 19.7 Una bomba de calor ideal

Una bomba de calor ideal se utiliza para bombear calor desde el aire exterior a −5 °C hasta el suministro de aire caliente para el sistema de calefacción de una casa, que está a 40 °C. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear 1 kJ de calor dentro de la casa?

PLANTEAMIENTO Utilizar la ecuación 19.11 con el coeficiente de eficiencia $\eta_{BC\ máx}$ calculado mediante la ecuación 19.10 para $T_c = -5$ °C = 268 K y $\Delta T = 45$ K.

SOLUCIÓN

1. Utilizando la definición de η_{BC} ($\eta_{BC} = Q_h/W$), relacionar el trabajo realizado y el calor cedido:
$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W}$$
2. Relacionar el coeficiente η_{BC} ideal o máximo con las temperaturas (ecuación 19.10):
$$\eta_{BC} = \eta_{BC\ máx} = \frac{T_h}{\Delta T}$$
3. Despejar el trabajo:
$$W = \frac{Q_h}{\eta_{BC}} = Q_h \frac{\Delta T}{T_h} = (1{,}0\ \text{kJ})\frac{45\ \text{K}}{313\ \text{K}}$$
$$W = \boxed{0{,}14\ \text{kJ}}$$

COMPROBACIÓN La expresión del trabajo del paso 3 nos indica que el trabajo tiene las mismas dimensiones que el calor. (La razón $\Delta T/T_h$ es adimensional.)

OBSERVACIÓN El coeficiente es $\eta_{BC\ máx} = T_h/\Delta T = 7{,}0$. Es decir, la energía transferida dentro de la casa en forma de calor es 6,96 veces mayor que el trabajo realizado. (Sólo se necesitan 0,144 kJ de trabajo para bombear 1 kJ de calor al sistema de abastecimiento de aire caliente de la casa.)

19.5 IRREVERSIBILIDAD, DESORDEN Y ENTROPÍA

Existen muchos procesos irreversibles que no pueden describirse por los enunciados de la máquina térmica o del refrigerador del segundo principio; por ejemplo, un vaso de cristal que cae al suelo y se rompe o un globo que revienta. Sin embargo, todos los procesos irreversibles tienen algo en común: el sistema más el medio que lo rodea tiende hacia un estado menos ordenado.

Consideremos una caja de masa despreciable que contiene un gas de masa M a una temperatura T que se está moviendo sobre una mesa sin rozamiento con velocidad v_{cm} (figura 19.9*a*). La energía cinética total del gas tiene dos componentes: la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas del gas, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, y la energía cinética del movimiento de las moléculas con respecto a su centro de masas. La energía del centro de masas es energía mecánica ordenada que puede convertirse completamente en trabajo. (Por ejemplo, si con una cuerda se sujetase un peso a una caja móvil por medio de una polea, esta energía podría utilizarse para levantar el peso.) La otra componente de la energía cinética del gas, la energía del movimiento de sus moléculas respecto al centro de masas, se trata de la energía térmica interna del gas, que está relacionada con su temperatura T, y es una energía aleatoria, no ordenada, que no puede convertirse totalmente en trabajo.

Supongamos ahora que la caja choca contra una pared fija y se detiene (figura 19.9*b*). Esta colisión inelástica es claramente un proceso irreversible. La energía mecánica ordenada del gas se convierte en energía interna aleatoria y la temperatura del gas se incrementa. Éste tendrá la misma energía total, pero ahora toda ella estará asociada al movimiento aleatorio de sus moléculas respecto al centro de masas del sistema, que en esta situación se encuentra en reposo. Así pues, el gas ahora está menos ordenado (o más desordenado) y ha perdido algo de su capacidad para realizar trabajo.

Existe una función termodinámica denominada **entropía** S que es una medida del desorden del sistema. Como la presión P, el volumen V, la temperatura T y la energía interna E_{int}, la entropía S es una función de estado del sistema. Lo mismo que ocurre con la energía interna, lo importante son las variaciones de la entropía. La variación de entropía dS de un sistema cuando pasa de un estado a otro se define por la expresión:

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} \qquad 19.12$$

DEFINICIÓN: CAMBIO DE ENTROPÍA

donde el numerador dQ_{rev} es la energía en forma de calor que debe transferirse al sistema en un proceso reversible para llevarlo del estado inicial al estado final. Si se extrae calor del sistema, dQ_{rev} es negativo y también lo es la variación de entropía del mismo.

El término dQ_{rev} no significa que deba tener lugar una transferencia de calor reversible para que cambie la entropía de un sistema. Realmente existen muchos casos en los que varía la entropía de un sistema aun cuando no exista ninguna transferencia de calor, como por ejemplo en el caso del gas en una caja representado en la figura 19.9. La ecuación 19.12 nos da simplemente un método para *calcular* la diferencia de entropía entre dos estados de un sistema. Como la entropía es una fun-

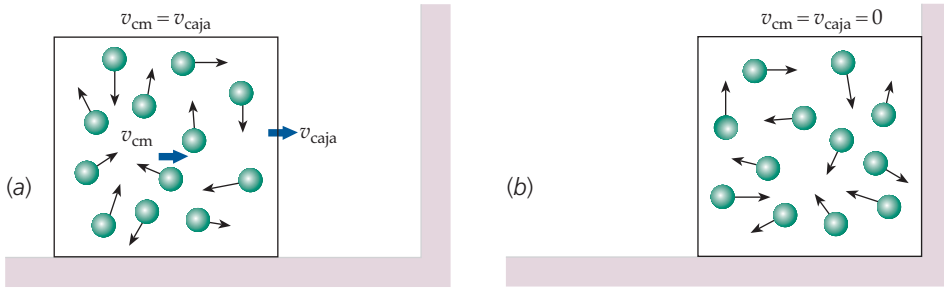


FIGURA 19.9 (*a*) Una caja de masa despreciable contiene un gas. La caja y el centro de masas del gas se desplazan hacia la pared a la misma velocidad. (*b*) Un breve tiempo después la caja sufre una colisión perfectamente inelástica con la pared; entonces, tanto la caja como el centro de masas del gas están en reposo, y el gas posee una temperatura más alta.

ción de estado, la variación de entropía de un sistema cuando pasa de un estado a otro depende únicamente de los estados inicial y final del mismo y no del proceso según el cual se produce el cambio. Es decir, si S_1 es la entropía del sistema en el estado 1 y si S_2 es la entropía del sistema cuando se halla en el estado 2, entonces se calcula la diferencia de entropía $S_2 - S_1$ por medio de la integral $\int_1^2 dQ/T$ para *cualquier* camino reversible (proceso) que lleva al sistema desde el estado 1 al estado 2.

ENTROPÍA DE UN GAS IDEAL

Ilustraremos ahora que dQ_{rev}/T es realmente la diferencial de una función de estado (aunque dQ_{rev} no lo sea). Consideremos un proceso cuasiestático reversible arbitrario en el que un gas ideal absorbe una cantidad de calor dQ_{rev}. De acuerdo con el primer principio, dQ_{rev} se encuentra relacionada con la variación de energía interna dE_{int} del gas y con el trabajo realizado sobre el gas ($dW = -P\,dV$) mediante

$$dE_{int} = dQ_{rev} + dW = dQ_{rev} - P\,dV$$

En el caso de un gas ideal, podemos escribir dE_{int} en función de la capacidad calorífica, $dE_{int} = C_v\,dT$, y reemplazar, a partir de la ecuación de estado, P por nRT/V. Entonces

$$C_v\,dT = dQ_{rev} - nRT\frac{dV}{V} \qquad 19.13$$

La ecuación 19.13 no puede integrarse a menos que sepamos cómo depende T de V y cómo C_v depende de T. Esto significa que dQ_{rev} no es una diferencial exacta de una función de estado Q_{rev}. Pero si dividimos ambos miembros de la ecuación por T, resulta

$$C_v\frac{dT}{T} = \frac{dQ_{rev}}{T} - nR\frac{dV}{V} \qquad 19.14$$

Como C_v depende sólo de T, el primer miembro puede integrarse y el segundo término del segundo miembro también. Por consiguiente, dQ_{rev}/T es la diferencial de una función, la función entropía S.

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T} = C_v\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \qquad 19.15$$

Para simplificar, supondremos que C_v es constante. Integrando la ecuación 19.15 desde el estado 1 hasta el estado 2, resulta

$$\Delta S = \int\frac{dQ_{rev}}{T} = C_v\ln\frac{T_2}{T_1} + nR\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad 19.16$$

CAMBIO DE ENTROPÍA DE UN GAS IDEAL

La ecuación 19.16 nos da el cambio de entropía de un gas ideal que experimenta una expansión reversible desde un estado inicial de volumen V_1 y temperatura T_1 a un estado final de volumen V_2 y temperatura T_2.

CAMBIOS DE ENTROPÍA EN DIVERSOS PROCESOS

ΔS en la expansión isoterma de un gas ideal Cuando un gas ideal experimenta una expansión isoterma, $T_2 = T_1$ y su variación de entropía es

$$\Delta S = \int\frac{dQ_{rev}}{T} = 0 + nR\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad 19.17$$

La variación de entropía del gas es positiva porque V_2 es mayor que V_1. En este proceso, una cantidad de energía Q_{rev} se transfiere en forma de calor desde el foco térmico al gas. Esta cantidad de calor es igual al trabajo realizado por el gas:

$$Q_{rev} = W_{por} = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} \qquad 19.18$$

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Integrales

* Matemáticamente hablando, el factor $1/T$ se denomina factor integrante de la ecuación 19.13.

La variación de entropía del gas es $+Q_{rev}/T$. Como la cantidad de calor que abandona el foco a la temperatura T es la misma, la variación de entropía del foco es $-Q_{rev}/T$. La variación neta de entropía del gas más el foco es cero. Designaremos como "universo" al sistema que se estudia más el medio que le rodea. Este ejemplo ilustra un resultado general:

En un proceso reversible, la variación de entropía del universo es nula.

ΔS en la expansión libre de un gas ideal En la expansión libre de un gas ideal expuesta en la sección 18.4, un gas está inicialmente confinado en un compartimiento de un recinto, el cual está conectado por una válvula con otro compartimiento donde se ha hecho el vacío. Todo el sistema tiene paredes rígidas y está térmicamente aislado del medio, de modo que el calor no puede entrar ni salir, ni puede realizarse ningún tipo de trabajo sobre (o por) el sistema (figura 19.10). Si la válvula se abre, el gas se precipita hacia el recinto vacío y finalmente el gas alcanza el equilibrio térmico consigo mismo. Como no se realiza ningún trabajo y no se transfiere calor, la energía interna final del gas debe ser igual a su energía interna inicial. Si el gas es ideal, su energía interna depende sólo de la temperatura T, de modo que la temperatura final T es igual a la inicial.

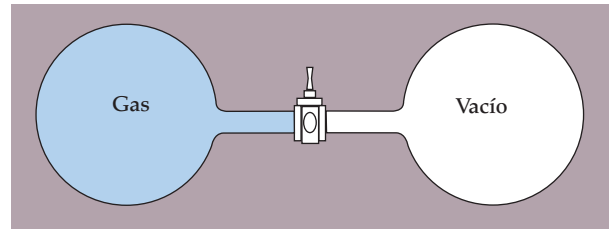


FIGURA 19.10 Expansión libre de un gas. Cuando la válvula se abre, el gas se expande rápidamente hacia la cámara evacuada. Como no se realiza trabajo sobre el gas durante la expansión, como el sistema en su conjunto está térmicamente aislado, y como las capacidades caloríficas de las cámaras y la válvula son despreciables, las energías internas inicial y final del gas son iguales.

A primera vista podríamos pensar que no hay cambio de entropía del gas, ya que no hay transferencia de calor. Este razonamiento es falso porque este proceso no es reversible y, por lo tanto, no podemos utilizar $\int dQ/T$ para hallar la variación de entropía del gas. Sin embargo, los estados inicial y final del gas en la expansión libre son los mismos que los del gas en la expansión isoterma del ejemplo anterior. *Como la variación de entropía del sistema en cualquier proceso depende únicamente de los estados inicial y final del sistema, la variación de entropía en la expansión libre es la misma que en el caso de la expansión isoterma.* Si V_1 es el volumen inicial del gas y V_2 es su volumen final, la variación de entropía experimentada por el gas viene dada por la ecuación 19.17:

$$\Delta S_{gas} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

En este caso, no hay cambio de entropía en el medio y, por lo tanto, la variación de entropía del gas es también la variación de entropía del universo:

$$\Delta S_u = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19.19$$

Obsérvese que, como V_2 es mayor que V_1, la variación de entropía del universo para este proceso irreversible es positiva; es decir, la entropía del universo aumenta. Esto resulta ser también una propiedad general:

En un proceso irreversible, la entropía del universo aumenta.

Si el volumen final en la expansión libre fuese menor que el inicial, la entropía del universo disminuiría, pero esto no ocurre. Un gas no se contrae libremente por sí mismo hasta ocupar un volumen menor.* Esto nos lleva a otro enunciado del segundo principio de la termodinámica:

En cualquier proceso, la entropía del universo nunca disminuye.

* Lo que en realidad sucede, es que la probabilidad de que un gas se contraiga libremente hasta un volumen más pequeño es minúscula (excepto cuando el gas sólo contiene un número extremadamente pequeño de moléculas).

Ejemplo 19.8 Expansión libre de un gas ideal

Determinar la variación de entropía que tiene lugar en la expansión libre de 0,75 moles de un gas ideal de $V_1 = 1{,}5$ L a $V_2 = 3$ L.

PLANTEAMIENTO En la expansión libre de un gas ideal, las temperaturas inicial y final son las mismas. Por lo tanto, la variación de entropía ΔS en este proceso irreversible es equivalente a la que tiene lugar en un proceso isotermo de V_1 a V_2 en forma reversible. Para el proceso isotermo $\Delta E_{int} = 0$, luego $Q = W_{por}$. Por lo tanto, primero calculamos Q y después establecemos que $\Delta S = Q/T$.

SOLUCIÓN

1. La variación de entropía es la misma que tiene lugar en un proceso isotermo de V_1 a V_2:
$$\Delta S = \Delta S_{isotermo} = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ_{rev} = \frac{Q}{T}$$
2. El calor Q que absorbería el gas en la expansión isoterma a la temperatura T es igual al trabajo realizado por el gas durante la expansión:
$$Q = W_{por} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$
3. Sustituir este valor de Q para calcular ΔS:
$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = (0{,}75 \text{ mol})(8{,}31 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}) \ln 2$$
$$= \boxed{4{,}3 \text{ J/K}}$$

COMPROBACIÓN En el paso 3, las unidades son joules por kelvin, ya que los moles quedan anulados. Joules por kelvin son las unidades correctas para los cambios de entropía porque, por definición, $\Delta S = \int dQ/T$.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 19.1

Un organismo vivo consta de materia altamente organizada. ¿Constituye el crecimiento de un organismo vivo una violación del segundo principio de la termodinámica? Es decir, ¿durante el transcurso de este proceso aumenta o disminuye la entropía del universo?

ΔS para procesos a presión constante Cuando una sustancia se calienta desde la temperatura T_1 a la temperatura T_2 a presión constante, el calor absorbido dQ está relacionado con su cambio de temperatura dT por

$$dQ = C_p\, dT$$

Podemos aproximarnos a la conducción del calor reversible si disponemos de un gran número de focos térmicos con temperaturas comprendidas dentro del intervalo de T_1 a T_2 y con valores muy próximos entre sí. Entonces hay que colocar la sustancia, cuya temperatura inicial es T_1, en contacto con el primer foco, a temperatura ligeramente mayor que T_1, y dejar que la sustancia absorba una pequeña cantidad de calor. Como la transferencia de calor es aproximadamente isoterma, el proceso será aproximadamente reversible. Luego, se coloca la sustancia en contacto con el siguiente foco a una temperatura ligeramente superior, y así sucesivamente hasta que se alcance la temperatura final T_2. Cuando el calor dQ se absorbe reversiblemente, la variación de entropía del sistema es

$$dS = \frac{dQ}{T} = C_p \frac{dT}{T}$$

Integrando de T_1 a T_2, obtenemos la variación total de entropía de la sustancia

$$\Delta S = C_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad 19.20$$

Este resultado nos da la variación de entropía de una sustancia que se calienta de T_1 a T_2 por medio de cualquier proceso, reversible o irreversible, siempre que la presión final sea igual a la inicial y C_p sea constante. También nos da el cambio de entropía de una sustancia que se enfría. En este caso, T_2 es menor que T_1 y $\ln(T_2/T_1)$ es negativo, dando lugar a una variación negativa de entropía.

PROBLEMA PRÁCTICO 19.5
Determinar la variación de entropía de 1 kg de agua que se calienta de 0 °C a 100 °C a presión constante.

PROBLEMA PRÁCTICO 19.6
Deducir la ecuación 19.20 directamente a partir de la ecuación 19.16.

Ejemplo 19.9 Cambios de entropía durante una transferencia de calor

Se mezcla 1 kg de agua a la temperatura $T_1 = 30$ °C con 2 kg de agua a $T_2 = 90$ °C en un calorímetro de capacidad calorífica despreciable a una presión constante de 1 atm. (*a*) Determinar la variación de entropía del sistema. (*b*) Hallar la variación de entropía del universo.

PLANTEAMIENTO Cuando se mezclan las dos cantidades de agua, se alcanza una temperatura final de equilibrio T_f, que puede determinarse igualando el calor perdido por una de las partes con el calor ganado por la otra. Para calcular la variación de entropía experimentada por cada una de las cantidades de agua, consideraremos un calentamiento isobárico reversible de la masa de 1 kg de agua de 30 °C a T_f y un enfriamiento isobárico de la masa de 2 kg de 90 °C a T_f utilizando la ecuación 19.20. El cambio de entropía del sistema es la suma de las variaciones de entropía de ambas cantidades. La variación de entropía del universo es la suma de las variaciones de entropía del sistema y de su medio. Para hallar la variación de entropía del medio, se supone que no escapa calor del calorímetro durante el tiempo que tarda el agua en alcanzar su temperatura final.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular T_f asumiendo que el calor perdido es igual al calor ganado:

$$T_f = 70\ ^\circ\text{C} = 343\ \text{K}$$

2. Utilizar el resultado de T_f y la ecuación 19.20 para calcular ΔS_1 y ΔS_2:

$$\Delta S_1 = \int_1^f \frac{dQ_{rev}}{T} = \int_{T_1}^{T_f} \frac{C_p\,dT}{T} = C_p \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} = C_p \ln\frac{T_f}{T_1} = m_1 c_p \ln\frac{T_f}{T_1}$$

$$= (1{,}00\ \text{kg})(4{,}184\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln\frac{343\ \text{K}}{303\ \text{K}} = 0{,}519\ \text{kJ/K}$$

$$\Delta S_2 = (2{,}00\ \text{kg})(4{,}184\ \text{kJ/kg}\cdot\text{K}) \ln\frac{343\ \text{K}}{363\ \text{K}} = -0{,}474\ \text{kJ/K}$$

3. Sumar ΔS_1 y ΔS_2 para hallar la variación total de entropía del sistema:

$$\Delta S_{sistema} = \boxed{+0{,}045\ \text{kJ/K}}$$

(*b*) 1. El calorímetro está aislado, de modo que el medio no cambia:

$$\Delta S_{medio} = 0$$

2. Sumar $\Delta S_{sistema}$ y ΔS_{medio} para obtener la variación de entropía del universo:

$$\Delta S_u = \boxed{+0{,}045\ \text{kJ/K}}$$

COMPROBACIÓN El resultado de la parte (*b*) es un número positivo, como era de esperar. (El proceso es irreversible y la variación de entropía del universo no es nunca negativa.)

ΔS en una colisión perfectamente inelástica Como la energía mecánica se transforma en energía térmica interna en una colisión inelástica, tal proceso es claramente irreversible. La entropía del universo debe, por lo tanto, crecer. A modo de ejemplo, consideremos un bloque de masa m que cae desde una altura h y sufre un choque perfectamente inelástico contra el suelo. Supongamos que el bloque, el suelo y la atmósfera están todos a la temperatura T, que no varía de forma significativa durante el proceso. Si consideramos el bloque, el suelo y la atmósfera como nuestro sistema térmicamente aislado, nada de calor entra o sale del sistema. Su estado ha cambiado porque su energía interna se ha incrementado en una cantidad mgh. Esta variación es la misma que si añadiésemos calor $Q = mgh$ al sistema de temperatura constante T. Para calcular la variación de entropía del sistema, consideremos así un proceso reversible en el que se añada calor $Q_{rev} = mgh$ a temperatura T constante. De acuerdo con la ecuación 19.12, la variación de entropía es entonces

$$\Delta S = \frac{Q_{rev}}{T} = \frac{mgh}{T}$$

Este valor positivo es también la variación de entropía del universo.

ΔS en la conducción del calor de un foco a otro La conducción del calor es también un proceso irreversible y, por lo tanto, la entropía del universo debe crecer. Consideremos el caso simple en que se transfiere un calor Q por conducción

desde un foco caliente a la temperatura T_h a un foco frío a la temperatura T_c. El estado de un foco térmico viene determinado sólo por su temperatura y su energía interna. La variación de entropía de un foco térmico debida a un intercambio de calor es la misma, sea éste reversible o no. Si se añade calor Q en un foco a temperatura T, la entropía del foco aumenta en Q/T. Si se elimina el calor, su entropía disminuye en $-Q/T$. En el caso de la conducción del calor, el foco caliente pierde calor, de manera que su variación de entropía es

$$\Delta S_h = -\frac{Q}{T_h}$$

El foco frío absorbe calor, de modo que su cambio de entropía vale

$$\Delta S_c = +\frac{Q}{T_c}$$

La variación neta de entropía del universo es

$$\Delta S_u = \Delta S_c + \Delta S_h = \frac{Q}{T_c} - \frac{Q}{T_h} \qquad 19.21$$

Obsérvese que como el calor siempre fluye de un foco caliente a un foco frío, la variación de entropía del universo es positiva.

ΔS en un ciclo de Carnot Como un ciclo de Carnot es, por definición, reversible, la variación de entropía del universo después de un ciclo debe ser nula. Este hecho puede demostrarse considerando que el cambio de entropía total de los focos es cero. (Como una máquina de Carnot funciona a lo largo de un ciclo, la variación de entropía de la propia máquina es cero, de modo que la variación de entropía del universo es justamente la suma de las variaciones de entropía de los focos.) El cambio de entropía del foco caliente es $\Delta S_h = -(Q_h/T_h)$, donde Q_h es el calor que éste cede. El cambio de entropía del foco frío es $\Delta S_c = +(Q_c/T_c)$, donde Q_c es el calor que éste absorbe. Estas cantidades de calor vienen relacionadas por la definición de temperatura termodinámica (ecuación 19.7)

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{Q_c}{Q_h} \qquad \left(\text{o} \quad \frac{Q_h}{T_h} = \frac{Q_c}{T_c}\right)$$

El cambio de entropía del universo es, por lo tanto,

$$\Delta S_u = \Delta S_{\text{máquina}} + \Delta S_h + \Delta S_c = 0 - \frac{Q_h}{T_h} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

La variación de entropía del universo es cero, como era de esperar.

Obsérvese que hemos ignorado cualquier cambio de entropía asociado a la energía transferida en forma de trabajo desde la máquina de Carnot a su medio. Si este trabajo se emplea en elevar un peso, o realizar algún otro proceso ordenado, entonces no hay cambio de entropía. Sin embargo, si este trabajo se utiliza para empujar un bloque de un lado a otro de la superficie de una mesa en la que hay rozamiento, entonces existe un aumento adicional de entropía asociado a este trabajo.

Ejemplo 19.10 Cambios de entropía en un ciclo de Carnot

Durante cada ciclo, una máquina de Carnot extrae 100 J de energía de un foco a 400 K, realiza un trabajo y elimina calor en otro foco a 300 K. Calcular la variación de entropía de cada foco en cada ciclo y demostrar que la variación de entropía del universo es cero en el caso de este proceso reversible.

PLANTEAMIENTO Como la máquina trabaja en ciclos, su variación de entropía es cero. Por lo tanto, calcularemos la variación de entropía de cada foco en cada ciclo, y las sumaremos para obtener el cambio de entropía del universo.

SOLUCIÓN

1. El cambio de entropía del universo es igual a la suma de los cambios de entropía de los focos:
$$\Delta S_u = \Delta S_{400} + \Delta S_{300}$$
2. Calcular el cambio de entropía del foco caliente:
$$\Delta S_{400} = -\frac{Q_h}{T_h} = -\frac{100\ \text{J}}{400\ \text{K}} = \boxed{-0{,}250\ \text{J/K}}$$
3. El cambio de entropía del foco frío es Q_c dividido por T_c, donde $Q_c = Q_h - W$:
$$\Delta S_{300} = \frac{Q_c}{T_c} = \frac{Q_h - W}{T_c}$$
4. Utilizaremos $W = \varepsilon_C Q_h$ (ecuación 19.2) para relacionar W con Q_h. El rendimiento es el de Carnot (ecuación 19.6):
$$W = \varepsilon Q_h, \quad \text{donde} \quad \varepsilon = \varepsilon_C = 1 - (T_c/T_h),$$
$$\text{de modo que} \quad W = \left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)Q_h$$
5. Calcular el cambio de entropía del foco frío:
$$\Delta S_{300} = \frac{Q_h - W}{T_c} = \frac{Q_h - Q_h\left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)}{T_c} = \frac{Q_h}{T_h}$$
$$= \frac{100\ \text{J}}{400\ \text{K}} = \boxed{0{,}250\ \text{J/K}}$$
6. Aplicar estos resultados en el paso 1 para determinar el cambio de entropía del universo:
$$\Delta S_u = \Delta S_{400} + \Delta S_{300}$$
$$\Delta S_u = -0{,}250\ \text{J/K} + 0{,}250\ \text{J/K} = \boxed{0{,}000\ \text{J/K}}$$

COMPROBACIÓN El cambio de entropía del universo es positivo, como exige el segundo principio de la termodinámica.

OBSERVACIÓN Supongamos una máquina ordinaria, no reversible, que absorbe 100 J por ciclo del foco caliente. Como su rendimiento debe ser menor que el de una máquina de Carnot, realizaría menos trabajo y cedería más calor al foco frío. El cambio de entropía del foco frío sería mayor que la disminución de entropía del foco caliente, y el cambio de entropía del universo sería positivo.

Ejemplo 19.11 El diagrama *ST* — *Conceptual*

Como la entropía es una función de estado, los procesos termodinámicos pueden representarse en diagramas *ST*, *SV* o *SP*, en lugar de en los diagramas *PV* que hemos utilizado hasta ahora. Hacer un esquema del ciclo de Carnot en un diagrama *ST*.

PLANTEAMIENTO El ciclo de Carnot consta de una expansión isoterma reversible, una expansión adiabática reversible, una compresión isoterma reversible y una compresión adiabática reversible. Durante los procesos isotermos, el calor se absorbe o cede a temperatura constante, de modo que S aumenta o disminuye a T constante. Durante los procesos adiabáticos, la temperatura cambia, pero como $\Delta Q_{rev} = 0$, S es constante.

SOLUCIÓN

1. Durante la expansión isoterma (1-2 en la figura 19.11*a*), el calor se absorbe reversiblemente, de modo que S crece a T constante:
2. Durante la expansión adiabática reversible (2-3 en la figura 19.11*b*), la temperatura disminuye, mientras que S es constante:
3. Durante la compresión isoterma (3-4 en la figura 19.11*c*), el calor se cede reversiblemente y S decrece a T constante:
4. Durante la compresión adiabática reversible (4-1 en la figura 19.11*d*), la temperatura crece, mientras que S es constante:

COMPROBACIÓN El diagrama de S frente a T es una curva cerrada, como era de esperar. Esto es lo esperado para un ciclo completo, porque ambas, S y T, son funciones de estado.

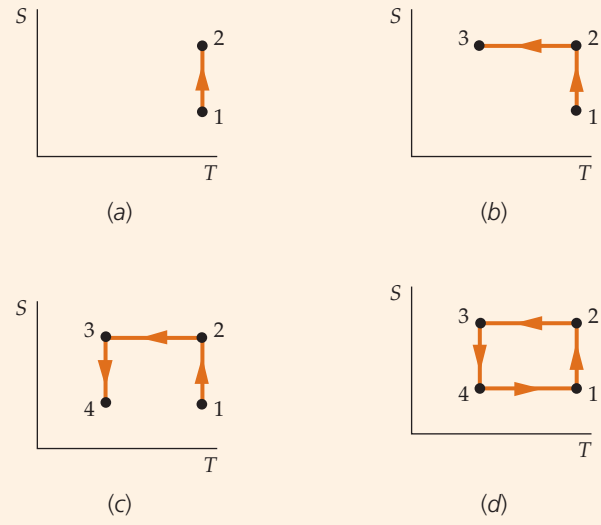


FIGURA 19.11 Diagrama *ST* de un ciclo de Carnot para un gas ideal.

OBSERVACIÓN El ciclo de Carnot es un rectángulo cuando se representa en un diagrama *ST*.

19.6 ENTROPÍA Y DISPONIBILIDAD DE LA ENERGÍA

Cuando tiene lugar un proceso irreversible, la energía se conserva, pero parte de la energía se "desperdicia", en el sentido de que no es útil para realizar trabajo. Consideremos un bloque de masa m que cae al suelo. La variación de entropía del universo originada por este proceso es mgh/T. Cuando el bloque estaba a una altura h, se podría haber utilizado su energía potencial mgh para realizar trabajo útil. Después de la colisión inelástica del bloque con el suelo, esta energía deja de ser utilizable porque se ha transformado en energía interna desordenada del bloque y su medio.

La energía que ha dejado de ser útil es igual a $mgh = T\,\Delta S_u$. Este resultado es general:

> En un proceso irreversible, una cantidad de energía igual a $T\,\Delta S_u$ resulta inútil para la realización de trabajo, siendo T la temperatura del foco más frío disponible.

Para simplificar, llamaremos a la energía que resulta inútil para producir trabajo, "trabajo perdido":

$$W_{\text{perdido}} = T\,\Delta S_u \qquad 19.22$$

Ejemplo 19.12 La caja deslizante reexaminada

Supongamos que la caja estudiada en las figuras 19.9*a* y *b* tiene una masa de 2,4 kg y se desliza con una velocidad $v = 3$ m/s antes de chocar contra la pared fija y detenerse. La temperatura T del bloque, mesa y medio exterior es 293 K y no cambia apreciablemente cuando el bloque se detiene. Determinar la variación de entropía del universo.

PLANTEAMIENTO La energía mecánica inicial del bloque, $\frac{1}{2}Mv^2$, se convierte en energía interna del sistema caja-pared-medio exterior. El cambio de entropía es equivalente a lo que ocurriría si el calor $Q = \frac{1}{2}Mv^2$ se cediera reversiblemente al sistema.

SOLUCIÓN

1. La variación de entropía del universo es Q/T:

$$\Delta S_u = \frac{Q}{T} = \frac{\frac{1}{2}Mv^2}{T} = \frac{\frac{1}{2}(2{,}4\text{ kg})(3{,}0\text{ m/s})^2}{293\text{ K}}$$

$$\Delta S_u = \boxed{37\text{ mJ/K}}$$

COMPROBACIÓN El resultado es mayor que cero, como ocurre siempre en un proceso irreversible.

OBSERVACIÓN La energía se conserva, pero la energía $T\,\Delta S_u = \frac{1}{2}Mv^2$ deja de ser utilizable para realizar trabajo.

En la expansión libre estudiada anteriormente también se perdió la capacidad de realizar trabajo. En ese caso, la variación de entropía del universo era $nR \ln (V_2/V_1)$, de modo que el trabajo perdido era $nRT \ln (V_2/V_1)$. Este valor es la cantidad de trabajo que se podría haber realizado si el gas se hubiese expansionado cuasiestática e isotérmicamente desde V_1 hasta V_2, según indica la ecuación 19.17.

Cuando el calor pasa por conducción de un foco caliente a un foco frío, la variación de entropía del universo viene dada por la ecuación 19.21 y el trabajo perdido es

$$W_{\text{perdido}} = T_c\,\Delta S_u = T_c\left(\frac{Q}{T_c} - \frac{Q}{T_h}\right) = Q\left(1 - \frac{T_c}{T_h}\right)$$

Podemos ver que este trabajo es precisamente el que podría haberse realizado mediante una máquina de Carnot que operase entre dos focos, absorbiendo calor Q del foco frío y realizando un trabajo $W = \varepsilon_C Q$, donde $\varepsilon_C = 1 - T_c/T_h$.

19.7 ENTROPÍA Y PROBABILIDAD

La entropía, que es una medida del desorden de un sistema, está relacionada con la probabilidad. Esencialmente, un estado de orden elevado tiene una probabilidad pequeña, mientras que un estado de orden bajo, tiene una probabilidad alta. Así pues, en un proceso irreversible, el universo se desplaza de un estado de baja probabilidad a otro de probabilidad elevada.

Consideremos una expansión libre en la que un gas se expansiona desde un volumen inicial V_1 a un volumen final $V_2 = 2V_1$. La variación de entropía del universo para este proceso viene dada por la ecuación 19.19:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} = nR \ln 2$$

¿Por qué es irreversible este proceso? ¿Por qué no puede comprimirse el gas por sí mismo volviendo a su volumen original? Como en ello no intervendría ningún cambio de energía, una compresión no violaría el primer principio de la termodinámica. La razón consiste simplemente en que dicha compresión resulta extremadamente *improbable*.

Ejemplo 19.13 La probabilidad de una contracción libre

Supóngase que un gas de sólo 10 moléculas ocupa un cubo. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las moléculas estén en la mitad izquierda del cubo en un instante dado?

PLANTEAMIENTO La probabilidad de que una molécula particular se encuentre en la mitad izquierda del recipiente en un instante dado es $\frac{1}{2}$. Utilizando esta información, ¿podemos calcular la probabilidad de que las 10 moléculas estén en la mitad izquierda en un instante dado?

SOLUCIÓN

1. La probabilidad de que una molécula esté en la mitad izquierda es la misma que la de que esté en la mitad derecha:
   La probabilidad de que cualquier molécula particular esté en la mitad izquierda del recipiente en un instante dado es $\frac{1}{2}$.
2. La probabilidad de que las moléculas 1 y 2 estén ambas en la mitad izquierda (en un instante dado) es la probabilidad de que la molécula 1 esté en la mitad izquierda multiplicada por la probabilidad de que la molécula 2 esté en la mitad izquierda:
   La probabilidad de que cualesquiera dos moléculas estén ambas en la mitad izquierda (en un instante dado) es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
   Las probabilidades son iguales si las moléculas 1 y 2 están ambas en la mitad izquierda, ambas en la mitad derecha, la molécula 1 en la mitad izquierda y la 2 en la derecha o si la molécula 2 está en la mitad izquierda y la 1 en la derecha. La probabilidad para cualquiera de estas opciones es $\frac{1}{4}$:
3. La probabilidad de que las moléculas 1, 2 y 3 estén todas en la mitad izquierda en un tiempo dado es igual a la probabilidad de que las moléculas 1 y 2 estén ambas en la mitad izquierda multiplicada por la probabilidad de que la molécula 3 esté en la mitad izquierda:
   La probabilidad de que cualesquiera tres moléculas estén todas en la mitad izquierda (en un instante dado) es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
4. Continuando con esta línea de razonamiento para determinar la probabilidad de que las 10 moléculas estén en la mitad izquierda conduce a:
   La probabilidad de que las 10 moléculas estén todas en la mitad izquierda (en un instante dado) es: $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}}$

COMPROBACIÓN De manera intuitiva sabemos que la probabilidad de que las 10 moléculas estén todas en el lado izquierdo, en un instante dado, es bastante pequeña. Es la misma probabilidad asociada a la obtención de 10 veces cara en una serie de 10 lanzamientos de una moneda.

Aunque esta probabilidad es muy pequeña, no sería demasiado sorprendente ver que esto ocurriera alguna vez. Por ejemplo, si examinamos el gas una vez por segundo, se podría esperar que se viese esta situación una vez cada 1024 segundos, aproximadamente una vez cada 17 minutos. Si empezásemos el experimento con las 10 moléculas distribuidas al azar y luego nos las encontrásemos todas en la mitad izquierda del volumen original, la entropía del universo habría *disminuido* en $nR \ln 2$. Sin embargo, esta disminución es extraordinariamente pequeña, puesto que el número de moles correspondiente a 10 moléculas es únicamente del orden de 10^{-23}. Aun así, violaría el enunciado de la entropía del segundo principio de la termodinámica, que afirma que la entropía del universo nunca disminuye en cualquier proceso que se realice. Por lo tanto, si deseamos aplicar el segundo principio a sistemas microscópicos, tales como un pequeño número de moléculas, debemos considerarlo más bien como un postulado de *probabilidad*.

Podemos relacionar la probabilidad de que un gas se comprima a sí mismo espontáneamente hacia un volumen más pequeño con la variación de su entropía. Si el volumen original es V_1, la probabilidad p de hallar N moléculas en un volumen menor V_2 es

$$p = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de esta ecuación, se tiene

$$\ln p = N \ln \frac{V_2}{V_1} = nN_A \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19.23$$

donde n es el número de moles y N_A el número Avogadro. La variación de entropía del gas es

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad 19.24$$

Comparando las ecuaciones 19.23 y 19.24, vemos que

$$\Delta S = \frac{R}{N_A} \ln p = k \ln p \qquad 19.25$$

siendo k la constante de Boltzmann.

Puede resultar preocupante descubrir que los procesos irreversibles, como la compresión espontánea de un gas o la conducción espontánea de calor de un cuerpo frío a otro caliente, son únicamente improbables y no imposibles, puesto que, como acabamos de ver, si consideramos un sistema formado por un número muy pequeño de moléculas, existe una probabilidad razonable de que se produzca un proceso de este tipo. Sin embargo, *la termodinámica, por su propia naturaleza, solamente es aplicable a sistemas macroscópicos*, es decir, a sistemas con un número de moléculas grande. Consideremos, por ejemplo, lo que ocurriría si intentásemos medir la presión de un gas formado sólo por 10 moléculas. La presión variaría caprichosamente dependiendo de que cero, una, dos, o más moléculas estuviesen chocando contra la pared del recipiente en el instante en que efectuamos la medida. Las variables macroscópicas de presión y temperatura no son aplicables a un sistema microscópico de sólo 10 moléculas.

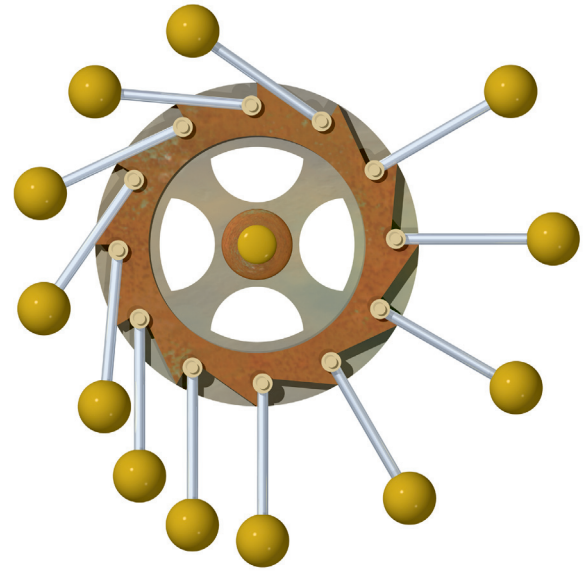
Según se vaya incrementando el número de moléculas del sistema, la probabilidad de que se produzca un proceso irreversible disminuye rapidísimamente. Por ejemplo, si tenemos 50 moléculas en un recipiente, la probabilidad de que todas ellas se concentren en la mitad izquierda del mismo es $(\frac{1}{2})^{50} \approx 10^{-15}$. Es decir, si examinásemos el gas una vez por segundo, podríamos esperar ver las 50 moléculas en dicha mitad alrededor de una vez cada 10^{15} segundos, o sea, ¡una vez cada 36 millones de años! En el caso de 1 mol $= 6 \times 10^{23}$ moléculas, la probabilidad de que todas ellas se encuentren en la mitad izquierda del volumen es extremadamente pequeña, tan pequeña que es esencialmente nula. Así pues, en el caso de sistemas macroscópicos, la probabilidad de que el resultado de un proceso sea una disminución de la entropía del universo, es tan extremadamente pequeña, que la diferencia entre improbable e imposible queda totalmente difuminada.

La perpetua batalla por el movimiento perpetuo

El ser humano sueña con realizar trabajo sin dar nada a cambio. Los motores de movimiento perpetuo que hacen trabajo sin gastar energía, o que son completamente eficientes, están en el centro de estos sueños. Pero el movimiento perpetuo no puede funcionar. Los físicos clasifican estos motores o máquinas de movimiento perpetuo (o simplemente móviles perpetuos) en dos categorías o especies según el principio de la termodinámica que infringen.

Los móviles perpetuos de primera especie violan el primer principio de la termodinámica, ya que pretenden crear energía de la nada o crear más energía que la que ellos gastan. Los primeros intentos conocidos de móviles perpetuos incluían movimientos de rotación y gravedad. Una rueda en equilibrio inestable tenía varillas articuladas que supuestamente originaría en la rueda un movimiento perpetuo de rotación hacia un lado. Otro diseño, preferido por Leonardo da Vinci, incluía una rueda hidráulica que propulsaba un molino y una bomba que elevase el agua a una altura suficiente para impulsar la rueda hidráulica.[1] Ninguno de estos intentos tenía en cuenta la energía necesaria para mover las varillas articuladas en relación con la rueda, ni la energía perdida en hacer girar la propia rueda hidráulica.

Posteriormente, la flotación (empuje ascensional) y el movimiento de rotación formaron parte de los intentos más frecuentes de lograr el movimiento perpetuo.[2] Los diseños de ruedas y cinturones de flotación incluían bolsas de aire, cadenas y manguitos conectados.[3] Ninguno de los diseños de ruedas y cinturones de flotación tenía en cuenta el trabajo necesario para llenar las bolsas de aire, ni para mover los pesos de las partes internas.



La rueda sólo parece estar desequilibrada. Sin embargo, obsérvese que hay más bolas a la izquierda del eje que a la derecha. Un cálculo del centro de masas mostrará que está localizado justo debajo del eje. (Reduciendo el número de bolas a cuatro, este calculo resulta relativamente simple.)

Los móviles perpetuos de segunda especie violan el segundo principio de la termodinámica. Estos motores no pretenden crear energía. Se trata de máquinas térmicas o de vapor con rendimientos imposibles. Una de las máquinas más famosas era el Zeromotor, propuesto por John Gamgee en 1880 para propulsar hélices de barcos.[4] El Zeromotor era un motor de amoníaco expresamente diseñado. Como el amoníaco hierve a una temperatura cercana a 0 ºC, el amoníaco líquido se podría inyectar en un cilindro provisto de un pistón. El amoníaco se expandiría y empujaría al pistón. El acto de empujar el pistón enfriaría el amoníaco lo suficiente para condensarlo, expandirlo de nuevo y completar el ciclo sin absorber o ceder calor. Esto contradice directamente el trabajo de Carnot. Por supuesto, el Zeromotor no funcionó. Ni ninguna otra máquina basada en la violación del segundo principio de la termodinámica. El vapor nunca se condensa, y la máquina térmica nunca termina un solo ciclo completo.

La Academia Francesa de las Ciencias declaró que la búsqueda de la máquina de movimiento perpetuo era una pérdida de tiempo cuando en 1775 sometió a votación no examinar patentes de estas máquinas.[5] En 1856, no se recomendaba la presentación de patentes para máquinas de movimiento perpetuo en las oficinas de patentes de los Estados Unidos o de la Gran Bretaña.[6] En cualquier caso, sigue habiendo gente que pretende lograr trabajo gratis. Todavía es posible ver anuncios recientes de máquinas que crean más energía que la que gastan[7]. También es posible encontrar científicos disgustados por la última patente no desarrollada[8] que pasó inadvertida por la Oficina de Patentes y Marcas Registradas de los Estados Unidos.[9] La perpetua batalla acerca del movimiento perpetuo prosigue con fuerza, pero los físicos son ahora capaces de explicar por qué no es posible.

---

[1] Leonardo3, "Pompe Meccaniche e a Moto Perpetuo", *Codex Atlanticus*, Milan: Leonardo3 srl, 2005.
[2] "Austin's Perpetual Motion", *Scientific American*, Mar. 27, 1847, Vol. 2, No. 27, 209.
[3] Diamond, David, "Gravity-Actuated Fluid Displacement Power Generator", United States Patent 3,934,964, Jan. 27, 1976.
[4] Park, Robert, *Voodoo Science*. Oxford: Oxford University Press, 2000, 129–130.
[5] Ward, James, *Naturalism and Agnosticism, Vol I.* London: Black, 1906.
[6] "Patent Correspondence", *Scientific American*, Sep. 1856, Vol. 20, No. 1, 343.
[7] Wine, Byron, "Energy Information". http://byronw.www1host.com/as of July, 2006.
[8] Voss, David, "'New Physics' Finds a Haven at the Patent Office", *Science*, May 21, 1999, Vol. 284, No. 5418, 1252–1254.
[9] Collins, G. P., "There's No Stopping Them", *Scientific American*, Oct. 22, 2002, 41.

Resumen

El segundo principio de la termodinámica es una ley fundamental de la naturaleza.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Rendimiento de una máquina térmica	Si una máquina térmica extrae calor Q_h de un foco caliente, realiza un trabajo W y cede calor Q_c a un foco frío, el rendimiento es $$\varepsilon = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \quad (19.2)$$
2. Coeficiente de eficiencia de un refrigerador	$$\eta = \frac{Q_c}{W} \quad (19.3)$$
3. Coeficiente de eficiencia de una bomba de calor	$$\eta_{BC} = \frac{Q_h}{W} \quad (19.8)$$
4. Enunciados equivalentes del segundo principio de la termodinámica	
Enunciado de Kelvin	Ningún sistema puede extraer energía en forma de calor de un solo foco y convertirla completamente en trabajo sin que se produzcan cambios en el sistema o en el medio.
Enunciado de la máquina térmica	Es imposible que una máquina térmica que trabaja cíclicamente extraiga calor de un foco y lo transforme completamente en trabajo sin que se produzca *ningún otro efecto*.
Enunciado de Clausius	Es imposible un proceso cuyo único resultado final sea transferir energía en forma de calor de un objeto frío a otro más caliente.
Enunciado del refrigerador	Es imposible para un refrigerador, que opera cíclicamente, producir *sólo el efecto* de extraer calor de un cuerpo frío y devolver la misma cantidad de calor a otro caliente.
Enunciado de la entropía	La entropía del universo (sistema más medio) nunca puede decrecer.
5. Condiciones de un proceso reversible	1. La energía mecánica no se transforma en calor por rozamiento, fuerzas viscosas u otras fuerzas disipativas. 2. La transferencia de energía en forma de calor sólo puede tener lugar entre objetos cuyas temperaturas difieran en una cantidad infinitesimal. 3. El proceso debe ser cuasiestático, de modo que el sistema siempre esté en equilibrio (o infinitesimalmente próximo a un estado de equilibrio).
6. Máquina de Carnot	Una máquina de Carnot es una máquina reversible que opera entre dos focos, siguiendo un ciclo formado por:
Ciclo de Carnot	1. Una expansión isoterma cuasiestática que absorbe calor a la temperatura T_h. 2. Una expansión adiabática cuasiestática hasta una temperatura más baja. 3. Una compresión isoterma cuasiestática que cede calor a la temperatura T_c. 4. Una compresión adiabática cuasiestática que lleva el sistema al estado original.
Rendimiento de Carnot	$$\varepsilon_C = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (19.6)$$
7. Temperatura termodinámica	El cociente entre las temperaturas termodinámicas de dos focos viene definido por el cociente entre los calores cedido y absorbido por una máquina de Carnot entre dichos focos: $$\frac{T_c}{T_h} = \frac{Q_c}{Q_h} \quad (19.7)$$ Además, el punto triple del agua tiene una temperatura de 273,16 K.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
8. Entropía	La entropía es una medida del desorden de un sistema. La diferencia de entropía entre dos estados próximos viene dada por $$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad (19.12)$$ donde dQ_{rev} es el calor cedido al sistema en un proceso reversible que conecte dichos estados. La variación de entropía de un sistema puede ser positiva o negativa.
Entropía y pérdida de la capacidad de realizar trabajo	Durante un proceso irreversible, la entropía del universo S_u aumenta y una cierta cantidad de energía $$W_{\text{perdido}} = T\,\Delta S_u \quad (19.22)$$ resulta inutilizable para realizar trabajo.
Entropía y probabilidad	La entropía está relacionada con la probabilidad. Un sistema altamente ordenado tiene baja probabilidad y baja entropía. Un sistema aislado evoluciona hacia un estado de alta probabilidad, orden bajo y elevada entropía.

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

19.1 No. El desarrollo de un organismo vivo se hace a expensas de un gran aumento del desorden en otro lugar. Gran parte de este desorden puede tener su origen en el Sol, donde las reacciones nucleares generan un crecimiento en el desorden, y por tanto un aumento de entropía.

Respuestas a los problemas prácticos

19.1 (*a*) 52,5 J, (*b*) 97,5 J

19.2 250 kJ

19.3 (*a*) 40%, (*b*) 80 kJ

19.4 30%

19.5 $\Delta S = 1{,}31$ kJ/K

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Los motores de gasolina de los modernos automóviles tienen rendimientos de alrededor del 25%. ¿Aproximadamente qué porcentaje del calor de combustión no se usa para producir trabajo sino como calor cedido? (*a*) 25%, (*b*) 50%, (*c*) 75%, (*d*) 100%, (*e*) No se puede saber con los datos suministrados.

2 • Si una máquina térmica produce 100 kJ de trabajo por ciclo y cede 400 kJ de calor, ¿cuál es su rendimiento? (*a*) 20%, (*b*) 25%, (*c*) 80%, (*d*) 400%, (*e*) No se puede saber con los datos suministrados.

3 • Si una máquina térmica absorbe 600 kJ de calor por ciclo y cede 480 kJ de calor por ciclo, ¿cuál es su rendimiento? (*a*) 20%, (*b*) 80%, (*c*) 100%, (*d*) No se puede saber con los datos suministrados.

4 • Explicar lo que distingue a un refrigerador de una bomba de calor.

5 • El coeficiente de eficiencia de un acondicionador de aire es matemáticamente idéntico al de un refrigerador, es decir, $\eta_{AA} = \eta_{ref} = Q_c/W$. Sin embargo, el coeficiente de eficiencia de una bomba de calor se define de manera diferente, $\eta_{BC} = Q_h/W$. Explicar con claridad por qué los dos coeficientes de eficiencia se definen de manera diferente. Sugerencia: *pensar en el fin último de los tres dispositivos.* SSM

6 • Explicar por qué con sólo abrir el refrigerador no podemos refrescar nuestra cocina en un día caluroso. ¿Por qué se refresca una habitación cuando ponemos en marcha el acondicionador de aire y no cuando abrimos la puerta del refrigerador?

7 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** ¿Por qué las centrales térmicas se diseñan de modo que la temperatura del vapor de agua utilizado sea la máxima posible?

8 • Para aumentar el rendimiento de una máquina de Carnot, (*a*) ¿se disminuiría la temperatura del foco caliente?, (*b*) ¿se aumentaría la temperatura del foco frío?, (*c*) ¿se aumentaría la temperatura del foco caliente?, (*d*) ¿se modificaría la razón de volumen máximo a volumen mínimo?

9 •• Explicar por qué es verdadero el siguiente enunciado: "Para aumentar el rendimiento de una máquina de Carnot, la diferencia entre las dos temperaturas debe ser lo mayor posible; pero para aumentar el rendimiento de un *refrigerador* que describe un ciclo de Carnot, la diferencia entre las dos temperaturas debe ser lo menor posible." SSM

10 •• Una máquina de Carnot opera entre una temperatura de 27 °C en el foco frío y otra de 127 °C en el foco caliente. Su rendimiento es (*a*) 21%, (*b*) 25%, (*c*) 75%, (*d*) 79%.

11 •• La máquina de Carnot del problema 10 funciona en sentido inverso como un refrigerador. Su coeficiente de eficiencia es (*a*) 0,33, (*b*) 1,3, (*c*) 3,0, (*d*) 4,7.

12 •• En un día húmedo, el vapor de agua se condensa sobre una superficie fría. Durante la condensación, la entropía del agua (*a*) crece, (*b*) permanece constante, (*c*) disminuye, (*d*) puede disminuir o permanecer invariable. Explique su respuesta.

13 •• Un gas ideal efectúa un proceso reversible desde un estado inicial, P_i, V_i, T_i, a un estado final P_f, V_f, T_f. Dos trayectorias posibles son (A) una expansión isoterma, seguida de una compresión adiabática y (B) una compresión adiabática, seguida de una expansión isotérmica. Para estas dos trayectorias, (*a*) $\Delta E_{\text{int A}} > \Delta E_{\text{int B}}$, (*b*) $\Delta S_A > \Delta S_B$, (*c*) $\Delta S_A < \Delta S_B$, (*d*) ninguna de las anteriores es una respuesta correcta.

14 •• La figura 19.12 muestra un ciclo termodinámico en un diagrama *ST*. Identificar este ciclo y representarlo en un diagrama *PV*.

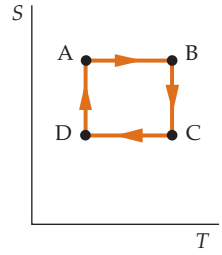


FIGURA 19.12 Problemas 14 y 72

15 •• La figura 19.13 muestra un ciclo termodinámico en un diagrama *SV*. Identificar el tipo de máquina representado por este diagrama.

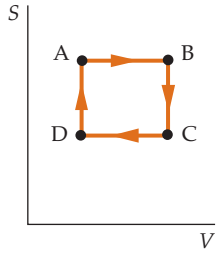


FIGURA 19.13 Problema 15

16 •• Representar un diagrama *ST* del ciclo de Otto. (El ciclo de Otto se trata en la sección 19.1.)

17 •• Representar un diagrama *SV* del ciclo de Carnot para un gas ideal. SSM

18 •• Representar un diagrama *SV* del ciclo de Otto. (El ciclo de Otto se trata en la sección 19.1.)

19 •• La figura 19.14 muestra un ciclo termodinámico para un gas ideal en un diagrama *SP*. Representar el ciclo en un diagrama *PV*.

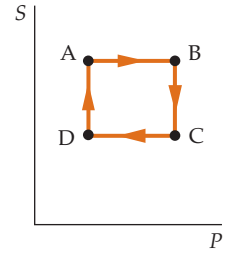


FIGURA 19.14 Problema 19

20 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Una tarde, la madre de uno de sus amigos entró en su habitación y la encontró hecha un desastre. Ella preguntó a su hijo acerca de cómo llegó a ese estado y él respondió, "Bueno, el destino natural de cualquier sistema cerrado es degenerar hacia niveles de entropía cada vez más grandes. Eso es todo, mamá." Ella respondió con un duro". Sin embargo, podrías limpiar mejor tu habitación." El chico replicó, "Pero eso no se puede hacer. Se violaría el segundo principio de la termodinámica." Analice la respuesta de su amigo. ¿Es correcto lo que le dijo su madre por no hacer la limpieza de su habitación o es de verdad imposible limpiar la habitación?

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

21 • Haga una estimación del cambio que experimenta su frigorífico cuando lo desplaza desde su cocina hasta un nuevo emplazamiento en el sótano que está 8 °C más frío que su cocina.

22 •• Haga una estimación de la probabilidad de que todas las moléculas que hay en su dormitorio estén localizadas en el armario (abierto) que representa alrededor del 10% del volumen total de la habitación.

23 •• Hacer una estimación del rendimiento máximo de un motor de automóvil con una razón de compresión de 8:1. Suponer que el motor efectúa un ciclo de Otto y que $\gamma = 1{,}4$. (El ciclo de Otto se analiza en la sección 19.1.) SSM

24 •• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Durante el verano usted está trabajando como vendedor de electrodomésticos. Un día, su profesora de física entra en su tienda para comprar un nuevo refrigerador. Como desea adquirir el refrigerador de mayor rendimiento posible, le pregunta por los rendimientos de los modelos disponibles. Ella decide volver al día siguiente para comprar el refrigerador más eficiente. Para hacer la venta, usted debe suministrarle los siguientes datos: (*a*) el más alto coeficiente de eficiencia de un refrigerador doméstico, y (*b*) la más alta tasa de eliminación de calor del interior del refrigerador si éste consume 600 W de potencia eléctrica.

25 •• La temperatura media de la superficie del Sol es de unos 5400 K, y la temperatura media de la Tierra es aproximadamente 290 K. La constante solar (la intensidad de luz solar que llega a la órbita terrestre) es de alrededor de 1,37 kW/m^2. (*a*) Calcular la potencia total de luz solar que llega a la Tierra. (*b*) Calcular la tasa neta del aumento de entropía que experimenta nuestro planeta debida a esta radiación solar. SSM

26 ••• Una caja de 1,0 L contiene N moléculas de un gas ideal y las posiciones de las moléculas se observan 100 veces por segundo. Calcular el tiempo medio que tardarían todas las moléculas en ocupar

sólo una mitad de la caja si en ella hay (*a*) 10 moléculas, (*b*) 100 moléculas, (*c*) 1000 moléculas y (*d*) 1 mol de moléculas. (*e*) Los vacíos más altos producidos hasta la fecha corresponden a presiones de unos 10^{-12} torr. Si una cámara de vacío típica tiene el mismo volumen que la caja, ¿cuánto tendrá que esperar un físico antes de que todas las moléculas del gas de la cámara de vacío ocupen sólo una de sus mitades? Compárese ese tiempo con la edad del universo, que es de unos 10^{10} años.

MÁQUINAS TÉRMICAS Y REFRIGERADORES

27 • Una máquina térmica con el 20% de rendimiento realiza un trabajo de 100 J en cada ciclo. (*a*) ¿Cuánto calor absorbe del foco caliente en cada ciclo? (*b*) ¿Cuánto calor devuelve al foco frío en cada ciclo? SSM

28 • Una máquina térmica absorbe 400 J de calor y realiza un trabajo de 120 J en cada ciclo. (*a*) ¿Cuál es el rendimiento de la máquina? (*b*) ¿Cuánto calor se cede al foco frío en cada ciclo?

29 • Una máquina térmica absorbe 100 J de calor del foco caliente y cede 60 J de calor al foco frío en cada ciclo. (*a*) ¿Cuál es su rendimiento? (*b*) Si recorre un ciclo en 0,5 s, ¿cuál es la potencia de la máquina?

30 • Un refrigerador absorbe 5 kJ de calor de un foco frío y cede 8 kJ a un foco caliente. (*a*) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia del refrigerador? (*b*) El refrigerador es reversible y funciona como una máquina térmica entre los mismos dos focos. ¿Cuál es su rendimiento?

31 •• La sustancia activa de una máquina térmica es 1,0 mol de un gas ideal. El ciclo empieza a $P_1 = 1$ atm y $V_1 = 24{,}6$ L. El gas se calienta a volumen constante hasta $P_2 = 2$ atm. Luego, se expande a presión constante hasta $V_2 = 49{,}2$ L. Entonces, el gas se enfría a volumen constante hasta que su presión vuelve a ser de 1 atm. Luego, se comprime a presión constante hasta que alcanza de nuevo su estado original. Todas las etapas son reversibles y cuasiestáticas. (*a*) Dibujar un diagrama *PV* del ciclo. Calcular el trabajo realizado, el calor añadido y la variación de energía interna para cada etapa del ciclo. (*b*) Hallar el rendimiento del ciclo. SSM

32 •• Una máquina que utiliza 1 mol de un gas ideal diatómico, efectúa un ciclo que consta de tres pasos: (1) una expansión adiabática desde un volumen de 10 L hasta una presión final de 1 atm y un volumen de 20 L, (2) una compresión a presión constante hasta su volumen original de 10 L, y (3) un calentamiento a volumen constante hasta su presión original. Calcular el rendimiento de este ciclo.

33 •• Una máquina que utiliza 1 mol de un gas ideal inicialmente a $V_1 = 24{,}6$ L y $T = 400$ K funciona en un ciclo que consta de 4 pasos: (1) expansión isotérmica a $T = 400$ K hasta dos veces su volumen inicial, (2) enfriamiento a volumen constante hasta $T = 300$ K, (3) compresión isotérmica hasta su volumen original, y (4) calentamiento a volumen constante hasta su temperatura original de 400 K. Supóngase que $C_v = 21$ J/K. Dibujar el ciclo en un diagrama *PV* y calcular su rendimiento.

34 •• Un mol de un gas ideal monoatómico con un volumen inicial $V_1 = 25{,}0$ L sigue el ciclo indicado en la figura 19.15. Todos los procesos son cuasiestáticos. Hallar (*a*) la temperatura de cada estado del ciclo, (*b*) el flujo de calor de cada parte del ciclo y (*c*) el rendimiento del ciclo.

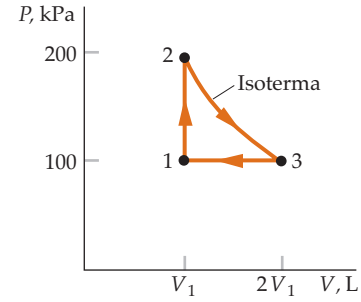


FIGURA 19.15 Problema 34

35 •• Un gas ideal diatómico sigue el ciclo indicado en la figura 19.16. La temperatura del estado 1 es 200 K. Hallar (*a*) las temperaturas de los otros tres estados del ciclo y (*b*) el rendimiento del ciclo.

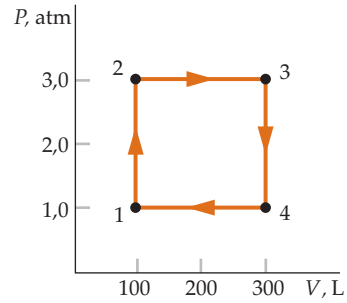


FIGURA 19.16 Problema 35

36 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Recientemente, un viejo diseño de máquina térmica, conocido como la *máquina de Stirling*, ha sido promocionado como un medio de producir potencia a partir de la energía solar. El ciclo de la máquina de Stirling es el siguiente: (1) compresión isoterma del gas que actúa como sustancia activa, (2) calentamiento del gas a volumen constante, (3) expansión isoterma del gas y (4) enfriamiento del gas a volumen constante. (*a*) Dibujar los diagramas *PV* y *ST* del ciclo de Stirling. (*b*) Hallar el cambio de entropía del gas en cada proceso del ciclo y demostrar que la suma de estos cambios es igual a cero.

37 ••• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** "Hasta donde alcanza nuestro conocimiento, la Naturaleza no ha desarrollado nunca una máquina térmica" —Steven Vogel, *Life´s Devices*, Princeton University Press (1988). (*a*) Determinar el rendimiento de una máquina térmica que opera entre la temperatura corporal (98,6 °F) y una temperatura al aire libre típica (70 °F), y comparar el resultado con el rendimiento del cuerpo humano para convertir energía química en trabajo (aproximadamente el 20%). ¿Supone ello una contradicción del segundo principio de la termodinámica? (*b*) A partir del resultado de (*a*) y de un conocimiento general de las condiciones que han de darse para que existan animales de sangre caliente, explicar por qué estos animales no han desarrollado máquinas térmicas para incrementar su energía interna.

38 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El *ciclo diesel* indicado en la figura 19.17 es una aproximación al comportamiento de un motor diesel. El proceso *ab* es una compresión adiabática, el proceso *bc* es una expansión a presión constante, el proceso *cd* es una expansión adiabática y el proceso *da* es un enfriamiento a volumen constante. Hallar el rendimiento de este ciclo en función de los volúmenes V_a, V_b y V_c.

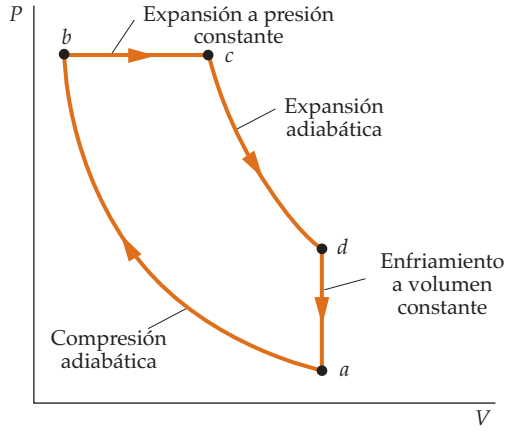


FIGURA 19.17 Problema 38

SEGUNDO PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA

39 •• Un cierto refrigerador extrae 500 J de calor de un foco frío y cede 800 J a un foco caliente. Suponer que el enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica es falso y demostrar cómo una máquina perfecta que trabaje con este refrigerador puede violar el enunciado del refrigerador del segundo principio de la termodinámica. SSM

40 •• Si dos curvas adiabáticas que representan procesos adiabáticos cuasiestáticos se cortasen en un diagrama *PV*, se podría completar un ciclo mediante un proceso isotermo entre ambas curvas adiabáticas, como se ve en la figura 19.18. Demostrar que este ciclo violaría el segundo principio de la termodinámica.

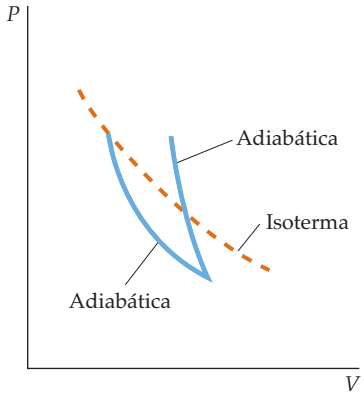


FIGURA 19.18 Problema 40

CICLOS DE CARNOT

41 • Una máquina de Carnot funciona entre dos focos térmicos a temperaturas T_h = 300 K y T_c = 200 K. (*a*) ¿Cuál es su rendimiento? (*b*) Si en cada ciclo absorbe 100 J del foco caliente, ¿cuánto trabajo produce? (*c*) ¿Cuánto calor cede en cada ciclo? (*d*) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia de esta máquina cuando funciona como refrigerador entre los mismos focos? SSM

42 • Un motor extrae 250 J de calor por ciclo de un foco a 300 K y elimina 200 J de calor por ciclo en otro foco a 200 K. (*a*) ¿Cuál es su rendimiento? (*b*) ¿Qué cantidad de trabajo podría haberse obtenido si el motor hubiese sido reversible?

43 •• Una máquina reversible que funciona entre dos focos a temperaturas T_h y T_c tiene un rendimiento del 30 por ciento. Cuando opera como una máquina térmica cede 140 J de calor por ciclo al foco frío. Una segunda máquina que funciona entre estos dos focos también cede 140 J por ciclo al foco frío. Demuéstrese que si la segunda máquina tiene un rendimiento mayor del 30 por ciento, las dos máquinas funcionando juntas violarían el enunciado de la máquina térmica del segundo principio de la termodinámica.

44 •• Una máquina reversible opera entre dos focos a temperaturas T_h y T_c, y tiene un rendimiento del 20 por ciento. Cuando funciona como máquina térmica realiza 100 J de trabajo en cada ciclo. Una segunda máquina que funciona entre estos dos focos realiza también un trabajo de 100 J en cada ciclo. Demuéstrese que si el rendimiento de la segunda máquina fuese mayor del 20 por ciento, las dos máquinas funcionando juntas violarían el enunciado del refrigerador del segundo principio.

45 •• Una máquina de Carnot funciona entre dos focos térmicos como refrigerador. En cada ciclo, se absorben 100 J de calor del foco frío y se ceden 150 J de calor al foco caliente. (*a*) ¿Cuál es el rendimiento de una máquina de Carnot cuando funciona como máquina térmica entre estos dos focos? (*b*) Demuéstrese que ninguna otra máquina que funciona como refrigerador entre estos focos puede tener un coeficiente de eficiencia mayor que 2.

46 •• Una máquina de Carnot opera entre dos focos térmicos a temperaturas T_h = 300 K y T_c = 77 K. (*a*) ¿Cuál es su rendimiento? (*b*) Si absorbe 100 J de calor del foco caliente durante cada ciclo, ¿cuánto trabajo realiza? (*c*) ¿Cuánto calor cede al foco frío durante cada ciclo? (*d*) ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia de la máquina cuando funciona como refrigerador entre estos dos focos?

47 •• En el ciclo que se muestra en la figura 19.19, 1,00 mol de un gas ideal diatómico se encuentra inicialmente a una presión de 1,00 atm y una temperatura de 0 °C. El gas se calienta a volumen constante hasta T_2 = 150 °C y luego se expansiona adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser de 1 atm. Luego, se comprime a presión constante hasta su estado original. Calcular (*a*) la temperatura T_3 después de la expansión adiabática, (*b*) el calor absorbido o cedido por el sistema durante cada proceso, (*c*) el rendimiento de este ciclo y (*d*) el rendimiento de un ciclo de Carnot que opere entre las temperaturas extremas del ciclo. SSM

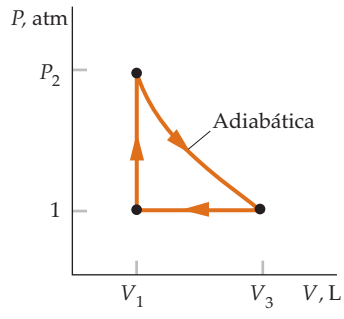


FIGURA 19.19 Problema 47

48 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Considere que usted forma parte de un equipo que está concluyendo un proyecto de ingeniería mecánica. Su equipo construye una máquina de vapor que toma vapor sobrecalentado a 270 °C y descarga de su cilindro vapor condensado a 50 °C. Su equipo ha medido el rendimiento de la máquina que es del 30 por ciento. (*a*) Compárese este rendimiento con el mejor rendimiento posible para su máquina. (*b*) Si la potencia de salida útil de la máquina es de 200 kW, ¿cuánto calor cede la máquina a los alrededores en una hora?

*BOMBAS DE CALOR

49 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un ingeniero está diseñando una bomba de calor que es capaz de suministrar calor a una casa a una potencia de 20 kW. La casa está ubicada en un lugar donde, en enero, la temperatura exterior media es de −10 °C y la interior de la fuente de aire caliente para el ventilador de calefacción es 40 °C. (*a*) ¿Cuál es el máximo posible coeficiente de eficiencia de una bomba de calor de Carnot que funciona entre estas temperaturas? (*b*) ¿Cuál debe ser la potencia mínima del motor que se necesita para hacer funcionar la bomba? (*c*) En realidad, el coeficiente de eficiencia de la bomba de calor será sólo el 60% del valor ideal. ¿Cuál es la potencia mínima del motor eléctrico cuando el coeficiente de eficiencia es el 60% del valor ideal? SSM

50 • Un refrigerador tiene una potencia de 370 W. (*a*) ¿Cuál es la máxima cantidad de calor que puede absorber en 1 min si la temperatura interior del mismo es 0 °C y libera calor en una habitación a 20 °C? (*b*) Si el coeficiente de eficiencia del refrigerador es el 70% del correspondiente a un refrigerador reversible, ¿cuánto calor puede absorber del interior en 1 minuto en esas condiciones?

51 •• Un refrigerador posee 370 W de potencia. (*a*) ¿Cuál es la máxima cantidad de calor que puede absorber en 1 min si la temperatura en el interior es de 0 ºC y si se cede el calor a una habitación a 35 ºC? (*b*) Si el coeficiente de eficiencia del refrigerador es el 70% del de una bomba reversible, ¿cuánto calor puede absorberse del interior en 1 min? ¿Es el coeficiente de eficiencia del refrigerador mayor cuando la temperatura de la habitación es 35 ºC o 20 ºC? Dar una explicación.

52 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Se está instalando una bomba de calor cuyo coeficiente de eficiencia es la mitad del de una bomba de calor reversible. Se planea usar la bomba en noches frías de invierno para elevar la temperatura del aire en un dormitorio. Las dimensiones del dormitorio son 5,00 m × 3,50 m × 2,50 m. La temperatura del aire aumentaría de 63 ºF a 68 ºF. La temperatura exterior es 35 ºF y la temperatura del aire caliente en la habitación es 112 ºF. Si el consumo de energía eléctrica es 750 W, ¿cuánto se ha de esperar para que el aire de la habitación se caliente si el calor específico del aire es 1,005 kJ/(kg · ºC)? Supóngase que se dispone de gruesas cortinas en las ventanas y de buen aislamiento en la paredes de modo que se pueden despreciar las pérdidas de calor a través de ventanas, paredes, techos y suelos. Supóngase también que la capacidad calorífica del suelo, techo, paredes y muebles es despreciable.

CAMBIOS DE ENTROPÍA

53 • Involuntariamente dejamos una olla de agua hirviendo sobre la placa caliente de una cocina. Volvemos justo a tiempo de ver la última gota convertida en vapor. Inicialmente la olla tenía 1 L de agua hirviendo. ¿Cuál es el cambio de entropía del agua asociada al cambio de estado líquido-vapor? SSM

54 • ¿Cuál es la variación de entropía experimentada por 1 mol de agua líquida a 0 °C cuando se congela?

55 •• Estudiar la congelación de 50 g de agua colocados en el congelador de un refrigerador. Suponer que las paredes del congelador se mantienen a −10 ºC. El agua, inicialmente líquida a 0 ºC, se congela en hielo y se enfría hasta −10 ºC. Demostrar que aun cuando la entropía del hielo disminuye, la entropía neta del universo aumenta.

56 • En este problema, 2,00 moles de un gas ideal a 400 K se expansionan cuasiestática e isotérmicamente desde un volumen inicial de 40 L hasta un volumen final de 80 L. (*a*) ¿Cuál es la variación de entropía del gas? (*b*) ¿Cuál es la variación de entropía del universo para este proceso?

57 •• Un sistema completa un ciclo que consta de seis procesos cuasiestáticos, durante los cuales el trabajo total realizado por el sistema es 100 J. A lo largo del proceso 1 el sistema absorbe 300 J de calor de un foco térmico a 300 K, durante el proceso 3 el sistema absorbe 200 J de calor de un foco a 400 K y durante el proceso 5 absorbe calor de un foco a temperatura T_3. (Durante los procesos 2, 4 y 6, el sistema experimenta procesos adiabáticos en los que la temperatura varía desde la temperatura de un foco a la del siguiente.) (*a*) ¿Cuál es el cambio de entropía del sistema en el ciclo completo? (*b*) Si el ciclo es reversible, ¿cuál es la temperatura T_3? SSM

58 •• En este problema, 2,00 moles de un gas ideal están inicialmente a una temperatura de 400 K y ocupan un volumen de 40,0 L. El gas experimenta una expansión adiabática libre hasta el doble de su volumen inicial. ¿Cuáles son (*a*) el cambio de entropía del gas, y (*b*) el cambio de entropía del universo?

59 •• Un bloque de 200 kg de hielo a 0 °C se introduce en un lago extenso. La temperatura del lago es algo mayor de 0 °C y el hielo se funde muy lentamente. (*a*) ¿Cuál es la variación de entropía del hielo? (*b*) ¿Cuál es la variación de entropía del lago? (*c*) ¿Cuál es la variación de entropía del universo (lago más hielo)?

60 •• Un trozo de 100 g de hielo a 0 °C se ha colocado en un calorímetro aislado de capacidad calorífica despreciable que contiene 100 g de agua a 100 ºC. (*a*) ¿Cuál es la temperatura final del agua una vez establecido el equilibrio térmico? (*b*) Hallar el cambio de entropía del universo para este proceso.

61 •• Se introduce un bloque de 1,00 kg de cobre a 100 °C en el interior de un calorímetro de capacidad calorífica despreciable que contiene 4,00 L de agua líquida a 0 °C. Calcular la variación de entropía (*a*) del bloque de cobre, (*b*) del agua, y (*c*) del universo. SSM

62 •• Calcular la variación de entropía del universo si se deja caer un trozo de 2,00 kg de plomo a 100 °C en un lago a 10 °C.

ENTROPÍA Y TRABAJO PERDIDO

63 •• Un foco térmico a 300 K absorbe 500 J de calor de un segundo foco a 400 K. (*a*) ¿Cuál es el cambio en la entropía del universo? (*b*) ¿Cuánto trabajo se pierde durante el proceso? SSM

64 •• En este problema, 1,00 mol de un gas ideal a 300 K sufre una expansión adiabática libre desde $V_1 = 12{,}3$ L a $V_2 = 24{,}6$ L. Luego, se comprime isotérmica y cuasiestáticamente, volviendo a su estado original. (*a*) ¿Cuál es la variación de entropía del universo en el ciclo completo? (*b*) ¿Cuánto trabajo se desperdicia en este ciclo? (*c*) Demostrar que este trabajo perdido es $T\,\Delta S_u$.

PROBLEMAS GENERALES

65 • Una máquina térmica con una producción de 200 W tiene un rendimiento del 30 por ciento. Trabaja a 10 ciclos/s. (*a*) ¿Cuánto trabajo se realiza en cada ciclo? (*b*) ¿Cuánto calor se absorbe del foco caliente y cuánto se cede al foco frío en cada ciclo?

66 • En cada ciclo, una máquina térmica absorbe 150 J de un foco a 100 °C y cede 125 J a un foco a 20 °C. (*a*) ¿Cuál es el rendimiento de esta máquina? (*b*) ¿Cuál es la razón entre su rendimiento y el de una máquina de Carnot que funcionara entre los mismos focos? (Este cociente se denomina *rendimiento del segundo principio*.)

67 • En cada ciclo, una máquina absorbe 200 kJ de calor de un foco caliente a 500 K y cede calor en un foco frío a 200 K. Su rendimiento es el 85% del de una máquina de Carnot que opera entre los mismos focos. (*a*) ¿Cuál es el rendimiento de esta máquina? (*b*) ¿Cuánto trabajo realiza en cada ciclo? (*c*) ¿Cuánto calor se cede al foco frío en cada ciclo? SSM

68 • Hacer una estimación del cambio de entropía del universo asociado con el salto de un nadador olímpico que se lanza al agua desde una plataforma de 10 m.

69 • Para mantener la temperatura de 20 °C dentro de una casa, el consumo de potencia de los calentadores eléctricos es de 30,0 kW por día cuando la temperatura exterior es de −7 °C. ¿Cuál es la variación de entropía por unidad de tiempo experimentada por el universo, motivada por este proceso de calefacción?

70 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** La central nuclear de Calvin Cliffs, situada en Hobbes River, produce 1 GW de potencia. En esta central circula sodio líquido entre el núcleo del reactor y un intercambiador de calor localizado en el vapor sobrecalentado que impulsa la turbina. El calor es absorbido por el sodio líquido del núcleo y es cedido por el sodio líquido (para cederlo al vapor sobrecalentado) en el intercambiador de calor. La temperatura del vapor sobrecalentado es de 500 K. El calor de desecho se vierte en el río que pasa por allí a una temperatura de 25 °C. (*a*) ¿Cuál es el máximo rendimiento que puede alcanzar esta central? (*b*) ¿Cuánto calor se vierte cada segundo en el río? (*c*) ¿Cuánto calor debe producirse para suministrar 1 GW de potencia? (*d*) Suponer que para preservar la única fauna del río se han aprobado nuevas leyes medioambientales. Por este motivo, la central no está autorizada a calentar el río por encima de 0,5 °C. ¿Cuál es la tasa mínima de flujo (en litro/segundo) que debe tener el río Hobbes?

71 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Un inventor se pone en contacto con usted para informarle de su nuevo invento. Se trata de una novedosa máquina térmica que emplea vapor de agua como sustancia activa. Él sostiene que el vapor de agua absorbe calor a 100 °C, realiza trabajo a una tasa de 125 W y cede calor al aire a una tasa de sólo 25 W, cuando la temperatura de aire es de 25 °C. (*a*) Explicar al inventor por qué sus datos no pueden ser correctos. (*b*) Después de un análisis cuidadoso de los datos del folleto explicativo, llega usted a la conclusión de que el inventor ha cometido un error en la medida del valor del calor cedido. ¿Cuál es la tasa mínima de eliminación del calor que podría llevarle a creer en su invento?

72 •• El ciclo representado en la figura 19.12 (junto al problema 19.14) corresponde a 1 mol de un gas ideal monoatómico. Las temperaturas de los puntos A y B son 300 y 750 K, respectivamente. ¿Cuál es el rendimiento termodinámico del proceso cíclico ABCDA?

73 •• (*a*) ¿Cuál de estos dos procesos desperdicia más trabajo utilizable? (1) Un bloque que se mueve con 500 J de energía cinética y se detiene por rozamiento cuando la temperatura del medio es de 300 K o (2) Un foco térmico a 400 K cede 1 kJ de calor a otro foco a 300 K? Explique su respuesta. *Sugerencia: ¿Qué parte de 1 kJ de calor podría convertirse en trabajo mediante un proceso cíclico ideal?* (*b*) Calcular la variación de entropía del universo en cada caso. SSM

74 •• El helio, que es un gas monoatómico, está inicialmente a una presión de 16 atm, un volumen de 1,0 L y una temperatura de 600 K. Se expansiona cuasiestática e isotérmicamente hasta que su volumen es de 4,0 L y luego se comprime cuasiestáticamente a presión constante hasta que su volumen y temperatura son tales que una compresión cuasiestática y adiabática devuelve el gas a su estado original. (*a*) Dibujar el ciclo en un diagrama *PV*. (*b*) Calcular el volumen y la temperatura después de la compresión isobárica. (*c*) Calcular el trabajo realizado durante cada proceso del ciclo. (*d*) Determinar el rendimiento del ciclo.

75 •• Una máquina térmica que realiza trabajo para hinchar un globo a una presión de 1,00 atm extrae 4,00 kJ de un foco caliente a 120 °C. El volumen del globo aumenta en 4,00 L, y el calor es cedido a un foco frío a la temperatura T_c, siendo $T_c < 120$ °C. Si el rendimiento de la máquina térmica es del 50 por ciento del correspondiente a un ciclo de Carnot que funcionase entre los mismos focos, calcular la temperatura T_c. SSM

76 •• Demostrar que el coeficiente de eficiencia de un refrigerador de Carnot que trabaje entre dos focos a temperaturas T_h y T_c está relacionado con el rendimiento de una máquina de Carnot mediante $\eta = T_c/(\varepsilon_C T_h)$.

77 •• Un congelador tiene una temperatura $T_c = -23$ °C. El aire de la cocina tiene una temperatura $T_h = +27$ °C. Como el aislamiento térmico no es perfecto, cierta cantidad de calor se escapa a través de las paredes del congelador, equivalente a una potencia de 50 W. Determinar la potencia del motor necesaria para mantener la temperatura del congelador.

78 •• En una máquina térmica, dos moles de un gas diatómico describen el ciclo ABCA que se muestra en el diagrama *PV* de la figura 19.20. (El diagrama *PV* no está dibujado a escala.) En A, la presión es de 5 atm y la temperatura 600 K. El volumen en B es doble que en A. El segmento BC es una expansión adiabática y el segmento CA una compresión isoterma. (*a*) ¿Cuál es el volumen del gas en A? (*b*) ¿Cuáles son el volumen y la temperatura del gas en B? (*c*) ¿Cuál es la temperatura del gas en C? (*d*) ¿Cuál es el volumen del gas en C? (*e*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas en cada una de las tres etapas del ciclo? (*f*) ¿Cuánto calor absorbe o cede el gas en cada etapa del ciclo?

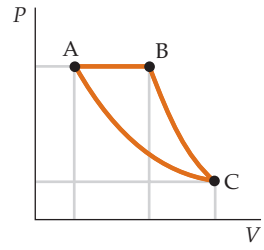


FIGURA 19.20 Problemas 78 y 80

79 •• En una máquina térmica, 2,00 moles de un gas diatómico describen el ciclo ABCDA que se muestra en el diagrama *PV* de la figura 19.21. (El diagrama *PV* no está dibujado a escala.) El segmento AB representa una expansión isotérmica, y el segmento BC una expansión adiabática. En A, la presión es de 5 atm y la temperatura de 600 K. El volumen en B es doble que en A. La presión en D es de 1 atm. (*a*) ¿Cuál es la presión en B? (*b*) ¿Cuál es la temperatura en C? (*c*) Determinar el trabajo realizado por el gas en un ciclo. SSM

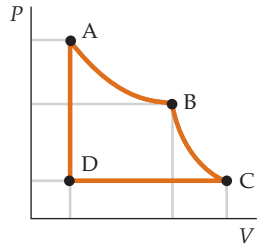


FIGURA 19.21 Problemas 79 y 81

80 •• En una máquina térmica, 2,00 moles de un gas monoatómico describen el ciclo ABCA de la figura 19.20. (El diagrama *PV* no está dibujado a escala.) En A, la presión y la temperatura son 5,00 atm y 600 K. El volumen en B es doble del volumen en A. El segmento BC es una expansión adiabática y el segmento CA es una compresión isoterma. (*a*) ¿Cuál es el volumen del gas en A? (*b*) ¿Cuáles son el volumen y la temperatura en B? (*c*) ¿Cuál es la temperatura del gas en C? (*d*) ¿Cuál es el volumen del gas en C? (*e*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas en cada uno de los tres segmentos del ciclo? (*f*) ¿Cuánto calor absorbe el gas en cada segmento del ciclo?

81 •• En una máquina térmica, 2,00 moles de un gas monoatómico describen el ciclo ABCDA de la figura 19.21. (El diagrama *PV* no está dibujado a escala.) El segmento AB representa una expansión isoterma y el segmento BC es una expansión adiabática. La presión y temperatura en A son 5,00 atm y 600 K. El volumen en B es doble del volumen en A. La presión en D es 1,00 atm. (*a*) ¿Cuál es la presión en B? (*b*) ¿Cuál es la temperatura en C? (*c*) Hallar el trabajo total realizado por el gas en un ciclo.

82 •• Comparar el rendimiento de un ciclo de Otto con el de un ciclo de Carnot que opera entre las mismas temperaturas máxima y mínima. (El ciclo Otto se trata en la sección 19.1.)

83 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un ciclo práctico común, utilizado a menudo en refrigeración, es el ciclo de Brayton, que está formado por (1) una compresión adiabática, (2) una expansión isobárica, (3) una expansión adiabática y (4) una compresión isobárica hasta el estado inicial. Se supone que el sistema inicia la compresión adiabática a temperatura T_1, y alcanza las temperaturas T_2, T_3 y T_4 después de cada etapa del ciclo. (*a*) Dibujar este ciclo en un diagrama *PV*. (*b*) Demostrar que el rendimiento del ciclo completo viene dado por $\varepsilon = 1 - (T_4 - T_1)/(T_3 - T_2)$. (*c*) Demostrar que este rendimiento puede escribirse como $\varepsilon = 1 - r^{(1-\gamma)/\gamma}$, donde r es la razón de presiones P_a/P_b (la razón entre las presiones máxima y mínima del ciclo). SSM

84 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Suponer que la máquina que describe un ciclo de Brayton (ver problema 83) funciona en sentido inverso, como un refrigerador de cocina. En este caso, el ciclo se inicia a temperatura T_1 y se expande a presión constante hasta que su temperatura es T_4. Entonces, el gas se comprime adiabáticamente hasta que su temperatura es T_3. Y a continuación se comprime a presión constante hasta que su temperatura es T_2. Por último, se expande adiabáticamente hasta que vuelve a su estado inicial de temperatura T_1. (*a*) Dibujar este ciclo en un diagrama *PV*. (*b*) Demostrar que el coeficiente de eficiencia es

$$\eta_B = \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2 - T_4 + T_1)}$$

(*c*) Suponer que "el refrigerador de ciclo Brayton" funciona como sigue. El cilindro que contiene el refrigerante (un gas monoatómico) tiene un volumen y una presión iniciales de 60 mL y 1 atm. Después de la expansión a presión constante, el volumen y la temperatura son 75 mL y −25 °C. La razón de presiones $r = P_a/P_b$ del ciclo es 5,0. ¿Cuál es el coeficiente de eficiencia del refrigerador? (*d*) Para absorber el calor del interior del refrigerador con una potencia de 120 W, ¿cuál es la tasa a la que la energía eléctrica debe suministrarse al motor de este refrigerador? (*e*) Suponiendo que el motor del refrigerador funciona de hecho sólo 4,0 horas al día, ¿cuanto aumenta mensualmente la factura de la electricidad? Suponer 15 céntimos por kWh de energía eléctrica y 30 días por mes.

85 •• Utilizando $\Delta S = C_v \ln(T_2/T_1) - nR \ln(V_2/V_1)$ (ecuación 19.16), que corresponde a la variación de entropía de un gas ideal, demostrar explícitamente que la variación de entropía es nula para una expansión adiabática y cuasiestática desde el estado (V_1, T_1) al estado (V_2, T_2).

86 ••• (*a*) Demostrar que si no fuese cierto el enunciado del refrigerador del segundo principio de la termodinámica, la entropía del universo podría disminuir. (*b*) Demostrar que si no fuese cierto el enunciado de la máquina térmica, también podría disminuir la entropía del universo. (*c*) Un enunciado alternativo del segundo principio es que la entropía del universo no puede disminuir. Demostrar que este enunciado es equivalente a los dos enunciados mencionados anteriormente.

87 ••• Supongamos que se conectan en "serie" dos máquinas térmicas de forma que el calor cedido por la primera se utiliza como calor absorbido por la segunda, como se indica en la figura 19.22. Los rendimientos de las máquinas son ε_1 y ε_2, respectivamente. Demostrar que el rendimiento neto de la combinación viene dado por $\varepsilon_{neto} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_2$.

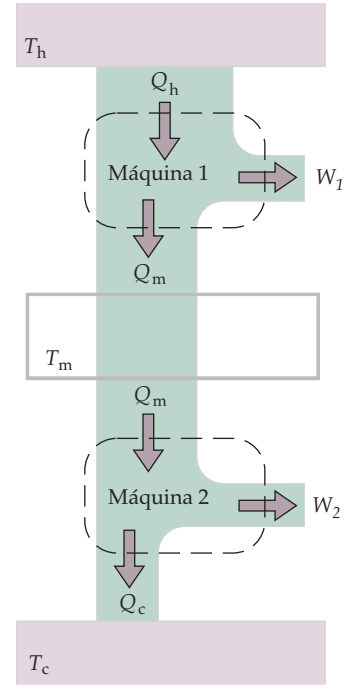


FIGURA 19.22 Problemas 87 y 88

88 ••• Supóngase que dos máquinas térmicas están conectadas en serie, de tal manera que el calor cedido por la primera máquina se utiliza como calor absorbido por la segunda, como se muestra en la figura 19.22. Supongamos que cada una de las máquinas es una máquina térmica ideal reversible. La máquina 1 funciona entre las temperaturas T_h y T_m, y la 2 entre T_m y T_c, siendo $T_h > T_m > T_c$. Demostrar que el rendimiento neto de la combinación de ambas máquinas viene dado por $\varepsilon_{neto} = 1 - (T_c/T_h)$. (Obsérvese que este resultado significa que dos máquinas térmicas reversibles en "serie" son equivalentes a una sola máquina reversible que funcione entre el foco más caliente y el más frío.)

89 ••• El matemático y filósofo inglés Bertrand Russell (1872-1970) dijo una vez que si a un millón de monos les hubiesen dado un millón de máquinas de escribir sobre las que teclear al azar durante un millón de años, esos simios habrían escrito todas las obras de Shakespeare. Limitémonos al siguiente fragmento de este autor (*Julio César* III:ii)

¡Amigos romanos, compatriotas, prestadme atención!
¡Vengo a inhumar a César, no a ensalzarle!
¡El mal que hacen los hombres perdura sobre su memoria!
¡Frecuentemente el bien queda sepultado con sus huesos"
¡Sea así con César!
El noble Bruto os ha dicho que César era ambicioso.
Si lo fue, era la suya una falta grave,
y gravemente la ha pagado…

¡Incluso este pequeño fragmento necesitaría mucho más de un millón de años para ser escrito! En términos aproximados determinar en qué factor se equivocó Russell. Hacer las suposiciones razonables que uno desee. (Se puede incluso suponer que los monos son inmortales.) SSM

CAPÍTULO 20

El oleoducto de Alaska transporta petróleo a través de una tubería de acero de 1300 km de longitud y 1,22 m de diámetro. La trayectoria en zigzag permite la dilatación térmica así como el movimiento debido a la actividad sísmica. El oleoducto fue diseñado para soportar temperaturas que van de -53 °C hasta 63 °C. (La temperatura del oleoducto era de −53 °C al inicio del transporte de petróleo.) *(Karen Kasmauski/CORBIS.)*

Propiedades y procesos térmicos

20.1 Dilatación térmica
20.2 Ecuación de Van der Waals e isotermas líquido-vapor
20.3 Diagramas de fase
20.4 Transferencia de calor

? ¿Cuál sería el cambio de longitud experimentado por una tubería de 220 m si la temperatura subiera de −51 °C hasta 63 °C? (Véase el ejemplo 20.2.)

Cuando un cuerpo absorbe calor, pueden ocurrir diversos cambios en sus propiedades físicas. Por ejemplo, su temperatura puede aumentar, al mismo tiempo que se expansiona o se contrae, o bien, el cuerpo se puede licuar o vaporizar, y durante ese proceso su temperatura permanece constante.

Científicos e ingenieros industriales tienen que resolver los problemas generados por los cambios que la temperatura produce en los materiales. Los ingenieros civiles que diseñan puentes y carreteras incluyen juntas de dilatación que permiten los pequeños cambios de longitud de las carreteras causados por los cambios de temperatura. Otros ingenieros diseñan productos que protegen los cuerpos de los cambios extremos de temperatura. Ciertos materiales se emplean para mantener caliente el agua de los calentadores, el interior de un horno, y las turbinas de los barcos, así como proteger a los pasajeros y objetos de un coche del calor que desprende su motor.

En este capítulo, analizaremos algunas de las propiedades térmicas de la materia y algunos procesos importantes en los que hay transferencia de calor.

20.1 DILATACIÓN TÉRMICA

Cuando aumenta la temperatura de un cuerpo, normalmente éste se dilata. Consideremos una varilla larga de longitud L a una temperatura T. Cuando la temperatura de un cuerpo sólido varía en ΔT, el cambio de longitud ΔL es proporcional a ΔT y a la longitud inicial L:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \, \Delta T \qquad 20.1$$

donde α se denomina **coeficiente de dilatación lineal**, que es igual al cociente entre la variación relativa de longitud y la variación de temperatura:

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta T} \qquad 20.2$$

Sus unidades en el SI son el recíproco del kelvin (1/K), que es equivalente al recíproco de grado Celsius (1/°C). El coeficiente de dilatación lineal puede variar significativamente con la temperatura. La ecuación 20.2 da el valor medio de α en todo el intervalo de temperaturas ΔT a presión constante. Se halla el coeficiente de dilatación lineal a una temperatura determinada T tomando el límite cuando ΔT tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta L/L}{\Delta T} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dT} \qquad 20.3$$

DEFINICIÓN: COEFICIENTE DE DILATACIÓN TÉRMICA LINEAL

En la mayoría de los casos, se logra suficiente exactitud utilizando el valor medio de α en un intervalo amplio de temperatura.

Para un líquido o un sólido, el **coeficiente de dilatación de volumen** β se define como el cociente entre la variación relativa de volumen y la variación de temperatura (a presión constante):

$$\beta = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta V/V}{\Delta T} = \frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \qquad 20.4$$

DEFINICIÓN: COEFICIENTE DE DILATACIÓN DE VOLUMEN

Tanto α como β pueden variar con la presión y la temperatura; sin embargo, las variaciones con la presión son prácticamente despreciables. En la tabla 20.1, se dan los valores medios de α y β para diversas sustancias.

Para un material determinado, $\beta = 3\alpha$. En efecto, consideremos una caja de dimensiones L_1, L_2 y L_3. Su volumen a una temperatura T es

$$V = L_1 L_2 L_3$$

La variación del volumen respecto a la temperatura es

$$\frac{\partial V}{\partial T} = L_1 L_2 \frac{\partial L_3}{\partial T} + L_1 \frac{\partial L_2}{\partial T} L_3 + \frac{\partial L_1}{\partial T} L_2 L_3$$

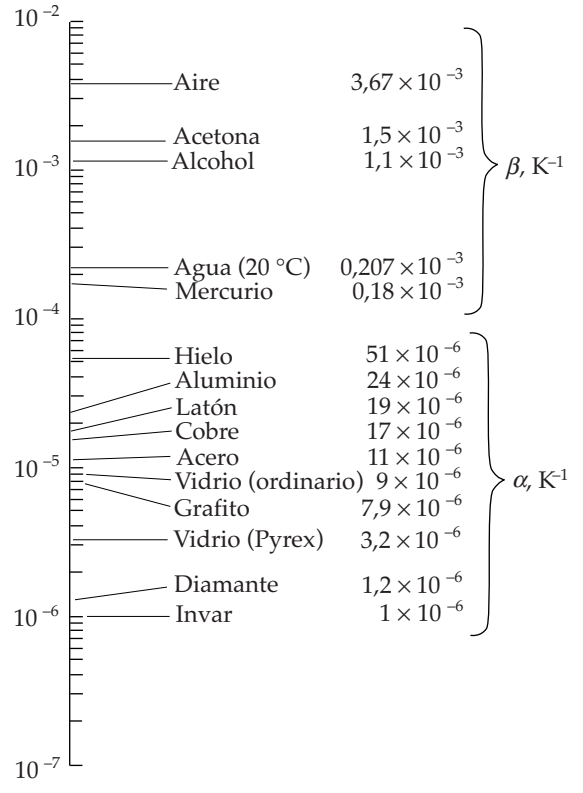
Dividiendo cada miembro de la ecuación por el volumen, se tiene

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{1}{L_3}\frac{\partial L_3}{\partial T} + \frac{1}{L_2}\frac{\partial L_2}{\partial T} + \frac{1}{L_1}\frac{\partial L_1}{\partial T}$$

Como cada término del segundo miembro es igual a α, tendremos

$$\beta = 3\alpha \qquad 20.5$$

Tabla 20.1 Valores aproximados de los coeficientes de dilatación térmica para varias sustancias



En la deducción de la ecuación 20.5, hemos supuesto que el coeficiente de expansión lineal es independiente de la dirección. (Esta hipótesis es aproximadamente válida para muchos materiales y será utilizada en los cálculos de este libro.) De igual modo, se puede demostrar que el coeficiente de dilatación superficial es igual al doble del coeficiente lineal.

Ejemplo 20.1 ¿Los agujeros se dilatan? *Conceptual*

Supongamos que tenemos un objeto de acero con un agujero circular. Si la temperatura del objeto aumenta, el metal se dilata. ¿El diámetro del agujero aumenta o disminuye?

PLANTEAMIENTO El aumento de tamaño de cualquier parte del objeto para un aumento determinado de temperatura es proporcional al tamaño original de dicha parte (de acuerdo con la ecuación 20.2). Consideremos como objeto una regla de acero que tiene un agujero de 1 cm de diámetro centrado en la marca de 3,5 cm.

SOLUCIÓN

1. Consideremos como objeto una regla de acero que tiene un agujero de 1 cm de diámetro centrado en la marca de 3,5 cm: Si una regla tiene un agujero de 1 cm de diámetro centrado en la marca de 3,5 cm, el borde del agujero tocará tanto la marca de 3 cm por la izquierda como la de 4 cm por la derecha.
2. Cuando la temperatura de la regla aumenta una determinada cantidad, ésta se dilata uniformemente: La distancia entre las marcas de 3 cm y 4 cm aumentará.
3. El borde del agujero seguirá tocando las marcas de 3 y 4 cm cuando se dilate la regla: Si la distancia entre las marcas de 3 cm y 4 cm aumenta, entonces el diámetro del agujero aumentará.

COMPROBACIÓN Si el agujero sobre la regla fuese realizado con una perforadora, el material obtenido sería un disco de acero de 1 cm de diámetro. Si la temperatura del disco se aumenta la misma cantidad que la de la regla, el disco debe caber perfectamente en el agujero.

OBSERVACIÓN En la figura 20.1, se muestra un aparato que sirve para demostrar que el agujero se dilata cuando se calienta.

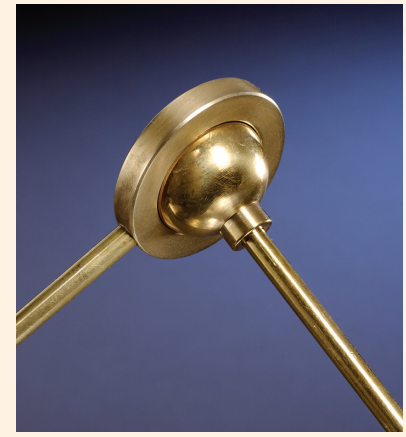
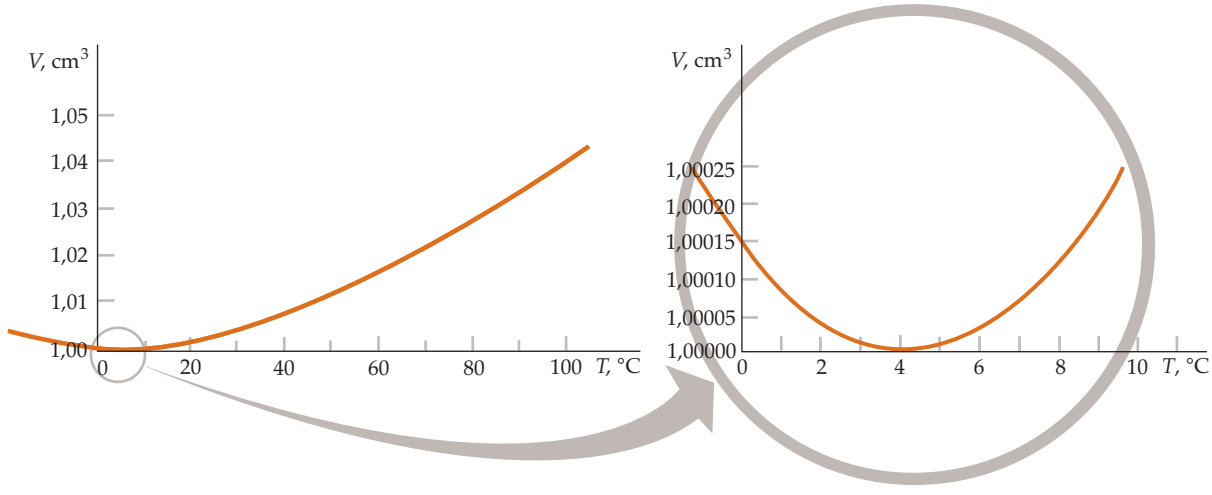


FIGURA 20.1 Cuando la bola y el anillo están a temperatura ambiente, la bola es demasiado grande como para pasar a través del anillo. El anillo se dilata cuando se calienta, y la bola, que está a temperatura ambiente, ya puede entrar por el agujero. *(Richard Megna/Fundamental Photographs.)*

Aunque la mayor parte de los materiales se dilatan cuando se calientan, el comportamiento del agua a las temperaturas comprendidas entre 0 y 4 °C es una excepción importante. En la figura 20.2, se muestra el volumen ocupado por 1 g de agua en función de la temperatura. El volumen es mínimo, y por lo tanto la densidad es máxima, a 4 °C. Por lo tanto, cuando se calienta agua que está por debajo de los 4 °C, se contrae en lugar de dilatarse y viceversa. Esta propiedad tiene importantes consecuencias ecológicas en

FIGURA 20.2 Volumen de un gramo de agua a la presión atmosférica en función de la temperatura. El volumen mínimo se da a 4 °C y corresponde a la máxima densidad. A temperaturas por debajo de 0 °C, la curva representada es la del agua sobreenfriada. (Agua sobreenfriada es el agua que se enfría por debajo del punto de congelación normal sin que solidifique.)



los lagos. A temperaturas superiores a los 4 °C, cuando se produce un enfriamiento de las aguas del lago, el agua se hace más densa y se hunde hacia el fondo del lago; pero para temperaturas inferiores a 4 °C, el agua se hace menos densa y asciende a la superficie. Como consecuencia de ello, el hielo se forma primero en la superficie del lago. El agua también se dilata cuando se congela. Como el hielo es menos denso que el agua, permanece en la superficie, actuando como un aislante térmico para el agua que se encuentra por debajo. Si el agua helada redujera su volumen cuando se congela, como lo hacen la mayoría de las sustancias, el hielo se hundiría hacia el fondo, dando lugar a que nuevas capas de agua pudiesen helarse en la superficie. En tal caso, en invierno, los lagos quedarían helados por completo, desde el fondo hasta la superficie.

Ejemplo 20.2 Una dilatación

Un tramo rectilíneo de 220 m del oleoducto de Alaska estaba a −51 °C antes de que por él circulara petróleo a una temperatura máxima de 63 °C. El oleoducto está envuelto con un aislante, de forma que el acero del conducto y el petróleo tienen la misma temperatura. (*a*) ¿Cuánto se dilata el tramo cuando la temperatura pasa de −51 °C a 63 °C? (*b*) El tramo de oleoducto que va sobre la superficie terrestre tiene 676 km de longitud. Si la temperatura del tramo aumenta de −51 °C a 63 °C, ¿cuánto se dilatará?

PLANTEAMIENTO Utilizar $\alpha = 11 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$ de la tabla 20.1 y calcular ΔL a partir de la ecuación 20.1.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. El cambio de longitud debido a un cambio de temperatura es el producto de α, L y ΔT:

$$\Delta L = \alpha L\, \Delta T$$

2. El cambio de temperatura es de 114 K (que es equivalente a un cambio de temperatura de 114 °C:

$$\Delta T = \frac{5\ \text{K}}{9°\text{F}}(205°\text{F}) = 114\ \text{K}$$

3. Calculamos el cambio de longitud:

$$\Delta L = \alpha L\, \Delta T = (11 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1})(220\ \text{m})(114\ \text{K})$$
$$= \boxed{0{,}28\ \text{m}.}$$

(*b*) El cambio de longitud es proporcional a la longitud. Utilizamos esto para calcular el cambio de longitud del tramo de 676 km:

$$\frac{\Delta L_2}{L_2} = \frac{\Delta L_1}{L_1} \Rightarrow \Delta L_2 = \frac{L_2}{L_1}\Delta L_1$$
$$\Delta L_2 = \frac{(676\ \text{km})(1000\ \text{m/km})(0{,}28\ \text{m})}{220\ \text{m}} = 860\ \text{m} \approx \boxed{0{,}9\ \text{km}}$$

COMPROBACIÓN El cambio de longitud de 0,9 km es ligeramente superior a la décima parte del 1% de 676 km, lo que resulta razonable al tratarse de un cambio de temperatura y de una longitud tan grande.

OBSERVACIÓN Los extremos de los tramos de oleoducto que van por vía terrestre no se mueven con los cambios de temperatura porque la trayectoria en zigzag (figura 20.3) hace que el movimiento sea lateral y que se "absorba la dilatación".

FIGURA 20.3 La trayectoria en zigzag del oleoducto permite la dilatación térmica. *(Paul A. Souders/CORBIS.)*

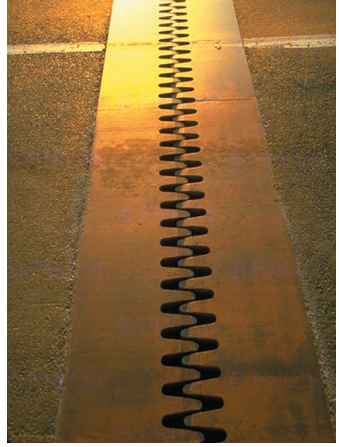


FIGURA 20.4 Las juntas de dilatación, como esta, permiten que los puentes se dilaten con los aumentos de temperatura. *(Frank Siteman/Stock Boston, Inc./PictureQuest.)*

Podemos calcular las tensiones que se producirían en un puente de acero de 1000 m de longitud, sin juntas de dilatación (figura 20.4), utilizando el módulo de Young (ecuación 12.1):

$$Y = \frac{\text{tensión}}{\text{deformación}} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

Por lo tanto,

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} = Y\alpha\,\Delta T$$

Para $\Delta T = 30\text{ K}$, $\Delta L/L = \alpha\,\Delta T = (11 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1})(30\text{ K}) = 3{,}3 \times 10^{-4} = 0{,}33\text{ m}/1000\text{ m}$. Utilizando $Y = 2 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ (tabla 12.1), resulta

$$\frac{F}{A} = Y\frac{\Delta L}{L} = (2{,}0 \times 10^{11}\text{ N/m}^2)\frac{0{,}33\text{ m}}{1000\text{ m}} = 6{,}6 \times 10^{7}\text{ N/m}^2$$

Esta tensión es aproximadamente igual a un tercio de la tensión de rotura del acero sometido a compresión. Una tensión de este orden curvaría el puente y quedaría permanentemente deformado.

Ejemplo 20.3 Un frasco completamente lleno

Un frasco de vidrio Pyrex de 1 L se llena hasta el borde con agua a 10 °C. Si la temperatura aumenta hasta 30 °C, ¿qué cantidad de agua se derramará del frasco?

PLANTEAMIENTO Tanto el frasco de vidrio como el agua se dilatan cuando se calientan, pero la dilatación del agua es superior a la del frasco y, por lo tanto, se derrama cierta cantidad. Esta cantidad puede determinarse calculando las variaciones de volumen para $\Delta T = 20\text{ K}$, utilizando $\Delta V_a = \beta_a V\,\Delta T$, siendo $\beta_a = 0{,}207 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}$ para el agua (véase la tabla 20.1) y $\Delta V_v = \beta_v V\,\Delta T = 3\alpha V\,\Delta T$, siendo $\alpha = 3{,}25 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1}$ para el vidrio Pyrex, donde $V_i = 1\text{ L}$. La diferencia entre estos dos volúmenes es el volumen de agua derramada.

SOLUCIÓN

1. El volumen de agua derramada, V_d, es la diferencia entre los cambios de volumen del agua y del vidrio:
$$V_d = \Delta V_a - \Delta V_v$$
2. Determinar el incremento de volumen del agua:
$$\Delta V_a = \beta_a V_i\,\Delta T$$
3. Determinar el incremento de volumen del frasco de vidrio:
$$\Delta V_v = \beta_v V_i\,\Delta T = 3\alpha_{\text{Pyrex}} V_i\,\Delta T$$
4. Restando, se obtiene la cantidad de agua derramada:
$$\begin{aligned} V_d &= \Delta V_a - \Delta V_v = \beta_a V_i\,\Delta T - \beta_v V_i\,\Delta T \\ &= (\beta_a - \beta_v)V_i\,\Delta T = (\beta_a - 3\alpha_{\text{Pyrex}})V_i\,\Delta T \\ &= [0{,}207 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1} - 3(3{,}25 \times 10^{-6}\text{ K}^{-1})](1{,}000\text{ L})(20\text{ K}) \\ &= 3{,}95 \times 10^{-3}\text{ L} = \boxed{4{,}0\text{ mL}} \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN El derrame de 4 mL representa sólo un 0,4% del volumen inicial de 1 L. Parece razonable que esta pequeña cantidad sea el resultado de un aumento de temperatura de 20 K.

OBSERVACIÓN El frasco se dilata, haciendo que aumente su espacio interior, como si fuera un frasco sólido de vidrio Pyrex.

Ejemplo 20.4 Rotura del cobre *Póngalo en su contexto*

Se calienta una barra de cobre a 300 °C y se la sujeta fuertemente entre dos puntos fijos, de forma que no pueda contraerse. Si la tensión de rotura límite del cobre es de 230 MN/m², ¿cuál será la temperatura a la que se romperá la barra si se somete a un enfriamiento?

PLANTEAMIENTO Cuando la barra se enfría, la variación de longitud ΔL que tendría lugar si pudiera contraerse es compensada por un alargamiento igual producido por la tensión de tracción de la barra. Esta tensión F/A está relacionada con el alargamiento ΔL por medio de $Y = (F/A)/(\Delta L/L)$, siendo el módulo de Young del cobre $Y = 110\ \text{GN/m}^2$ (tabla 12.1). El máximo alargamiento permisible tiene lugar cuando F/A vale 230 MN/m². Así determinamos el cambio de temperatura que produciría esta contracción máxima.

SOLUCIÓN

1. Calcular la variación de longitud ΔL_1 que se produciría si la barra puede contraerse cuando se enfría:
$$\Delta L_1 = \alpha L\,\Delta T$$

2. Una tensión de tracción F/A alarga la barra en ΔL_2:
$$Y = \frac{F/A}{\Delta L_2/L} \quad \text{de modo que} \quad \Delta L_2 = L\frac{F/A}{Y}$$

3. Sustituir los resultados de los pasos 1 y 2 en $\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$ y despejar ΔT:
$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$
$$\alpha L\,\Delta T + L\frac{F/A}{Y} = 0$$
$$\text{de donde} \quad \Delta T = -\frac{F/A}{\alpha Y} = -\frac{230 \times 10^6\ \text{N/m}^2}{(17 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1})(110 \times 10^9\ \text{N/m}^2)}$$
$$= -123\ \text{K} = -123\ ^\circ\text{C}$$

4. Sumar este resultado a la temperatura original para determinar la temperatura final a la cual se rompe la barra:
$$T_f = T_1 + \Delta T = 300\ ^\circ\text{C} - 123\ ^\circ\text{C} = 177\ ^\circ\text{C} = \boxed{180\ ^\circ\text{C}}$$

COMPROBACIÓN Si se observa una instalación de agua realizada con tubo de cobre, se puede ver cómo los tubos no están sujetos de forma rígida. Además, el calentador o caldera calienta el agua hasta una temperatura máxima de 60 °C, mientras que el agua fría tiene una temperatura mínima de 0 °C. Por ello, no nos debe sorprender que la dilatación o contracción de las tuberías de agua de nuestra casa puedan desprenderlas de sus sujeciones si los cambios de temperatura son mucho mayores que estos para los que fueron diseñadas.

20.2 ECUACIÓN DE VAN DER WAALS E ISOTERMAS LÍQUIDO-VAPOR

Aunque la mayoría de los gases se comportan como un gas ideal a las presiones ordinarias, su comportamiento se desvía del ideal a presiones suficientemente altas o temperaturas suficientemente bajas, es decir, cuando la densidad del gas es elevada y las moléculas, por término medio, no están muy alejadas. Existe una ecuación de estado denominada **ecuación de Van der Waals** que describe el comportamiento de muchos gases reales en un amplio margen de presiones con más exactitud que la ecuación de estado del gas ideal ($PV = nRT$). La ecuación de Van der Waals para n moles de gas es

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT \qquad 20.6$$

ECUACIÓN DE ESTADO DE VAN DER WAALS

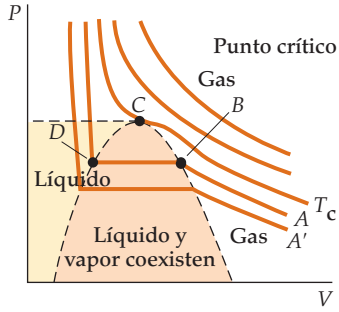


FIGURA 20.5 Isotermas en un diagrama *PV* correspondientes a una sustancia real. En el caso de temperaturas por encima de la temperatura crítica T_c, la sustancia permanece gaseosa a todas las presiones. Fuera de la región donde líquido y vapor coexisten, estas curvas quedan bien descritas mediante la ecuación de Van der Waals. La presión correspondiente a las partes horizontales de las curvas en la región sombreada es la presión de vapor, que es aquella en que el vapor y el líquido están en equilibrio. En la región sombreada de amarillo, a la izquierda de la región sombreada en rosa, la sustancia es un líquido y es casi incompresible.

En esta ecuación, aparece la constante b porque las moléculas del gas no son partículas puntuales sino que tienen tamaño finito; por consiguiente, se reduce el volumen libre disponible para que se muevan las moléculas. El valor de b es el volumen de un mol de moléculas del gas. El término an^2/V^2 se debe a la atracción que las moléculas del gas ejercen entre sí. Cuando una molécula se acerca a la pared del recipiente, se ve frenada por la atracción de las moléculas que la rodean con una fuerza que es proporcional a su densidad n/V. Como el número de moléculas que chocan contra la pared en un tiempo determinado es también proporcional a la densidad de las moléculas, la disminución de la presión debida a la atracción de las moléculas es proporcional al cuadrado de la densidad y, por lo tanto, a n^2/V^2. La constante a depende del tipo de gas siendo pequeña en el caso de los gases inertes, que sufren interacciones químicas débiles. Los términos bn y an^2/V^2 son ambos despreciables cuando el volumen V es grande, es decir, a densidades bajas. Así pues, en estos casos, la ecuación de Van der Waals tiende a la ley de los gases ideales, mientras que a densidades altas proporciona una descripción mucho mejor del comportamiento de los gases reales.

En la figura 20.5, se muestran las curvas isotermas en un gráfico de P en función de V para una sustancia real a varias temperaturas. Fuera de la región en que coexisten líquido y vapor, estas curvas se describen muy bien por la ecuación de Van der Waals y pueden utilizarse para determinar las constantes a y b. Por ejemplo, los valores de estas constantes que dan el mejor ajuste a las curvas experimentales para el nitrógeno son $a = 1{,}370\ \text{L}^2\,\text{atm/mol}^2$ y $b = 38{,}7\ \text{mL/mol}$. Este volumen de 38,7 mL por mol es aproximadamente el 0,2% del volumen de 22,4 L que ocupa 1 mol de gas ideal en condiciones estándar. Como la masa molar del nitrógeno es 28,02 g/mol, si 1 mol de moléculas de nitrógeno estuviese empaquetado en un volumen de 38,7 mL, su densidad sería

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{28{,}0\ \text{g}}{38{,}7\ \text{mL}} = 0{,}724\ \text{g/mL} = 0{,}724\ \text{kg/L}$$

valor comparable a la densidad del nitrógeno líquido, que es 0,80 kg/L.

El valor de la constante b puede utilizarse para hacer una estimación del tamaño de la molécula. Como el volumen de 1 mol (N_A moléculas) de nitrógeno es 39,1 cm^3, el volumen de una sola molécula es

$$V = \frac{b}{N_A} = \frac{38{,}7\ \text{cm}^3/\text{mol}}{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol}} = 6{,}43 \times 10^{-23}\ \text{cm}^3/\text{molécula}$$

Si suponemos que cada molécula ocupa un cubo de arista d, se tiene

$$d^3 = 6{,}43 \times 10^{-23}\ \text{cm}^3$$

o bien

$$d = 4{,}0 \times 10^{-8}\ \text{cm} = 0{,}4\ \text{nm}$$

que es un valor estimado razonable para el "diámetro" de una molécula de nitrógeno.

Los valores de las constantes a y b que proporcionan el mejor ajuste a las curvas experimentales se dan en la tabla 20.2.

Tabla 20.2 Coeficientes a y b de Van der Waals para diferentes gases

	a ($\text{L}^2 \cdot \text{atm/mol}^2$)	b (mL/mol)
He	0,0346	23,80
Ne	0,211	17,1
Ar	1,34	32,2
Kr	2,32	39,8
Xe	4,19	51,0
H_2	0,244	26,6
N_2	1,370	38,70
O_2	1,382	31,86
H_2O	5,46	30,5
CO_2	3,59	42,7

Ejemplo 20.5 Helio a alta densidad

Un tanque de 20 L contiene 300 moles de helio a 400 atm de presión. (*a*) ¿Cuál es el valor de an^2/V^2 y que fracción de la presión representa? (*b*) ¿Cuál es el valor de *bn* y qué fracción del volumen representa? (*c*) ¿Cuánto vale la temperatura del helio?

PLANTEAMIENTO Para calcular la temperatura, utilizamos la ecuación de Van der Waals (ecuación 20.6). Los valores de los coeficientes *a* y *b* para el helio se dan en la tabla 20.2.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular an^2/V^2 y compararlo con 400 atm:

$$\frac{an^2}{V^2} = \frac{(0{,}0346\ \text{L}^2\cdot\text{atm/mol}^2)(300\ \text{mol})^2}{(20{,}0\ \text{L})^2}$$

$$= 7{,}785\ \text{atm} = \boxed{7{,}79\ \text{atm}}$$

(7,785 atm es un 2% de 400 atm)

(*b*) Calcular *bn* y compararlo con 20 L:

$$bn = (0{,}0238\ \text{L/mol})(300\ \text{mol}) = \boxed{7{,}14\ \text{L}}$$

(7,14 L es un 36% de 20 L)

(*c*) 1. De la ecuación de Van der Waals podemos despejar la temperatura:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$$

2. Obtenemos los valores de los coeficientes *a* y *b* de la tabla 20.2:

$$a = 0{,}0346\ \text{L}^2\cdot\text{atm/mol}^2$$
$$b = 0{,}0238\ \text{L/mol}$$

3. Introducimos los valores y calculamos la temperatura. Con la presión en atmósferas el volumen en litros, utilizamos $R = 0{,}082057\ \text{L}\cdot\text{atm/(mol}\cdot\text{K)}$:

$$T = \frac{\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn)}{nR} = \frac{\left(400 + \frac{0{,}0346 \times 300^2}{20{,}0^2}\right)(20{,}0 - 0{,}0238 \times 300)}{300 \times 0{,}082057}$$

$$= \boxed{213\ \text{K}}$$

COMPROBACIÓN El 2% de corrección del término de presión en la ecuación de Van der Waals es muy inferior al 36% de corrección del volumen. Esto es lógico. El término de corrección de la presión resulta especialmente pequeño para el caso del helio porque los átomos de helio se atraen mutuamente de forma más débil que la mayoría del resto de átomos.

A temperaturas por debajo de T_c, la ecuación de Van der Waals describe aquellas porciones de las isotermas que son exteriores a la región sombreada de la figura 20.5, pero no las porciones interiores a la misma. Supongamos que tenemos un gas a una temperatura inferior a T_c que inicialmente tiene una presión baja y un volumen grande. Manteniendo la temperatura constante (isoterma *A* en la figura) empezamos a comprimir el gas. Al principio, la presión va creciendo, pero cuando alcanzamos el punto *B* sobre la línea a trazos, la presión deja de aumentar y el gas empieza

Nube formada tras un avión cuando se rompe la barrera del sonido. Conforme el avión se mueve por el aire, se forma tras él una región de baja presión. Cuando la presión de esta parcela de aire cae por debajo de la presión de vapor del vapor de agua, el vapor de agua del aire se condensa y forma la nube. La variedad de condiciones atmosféricas hace que este fenómeno tenga lugar cuando los aviones viajan a diferentes velocidades. *(U.S. Department of Defense/Photo Researchers, Inc.)*

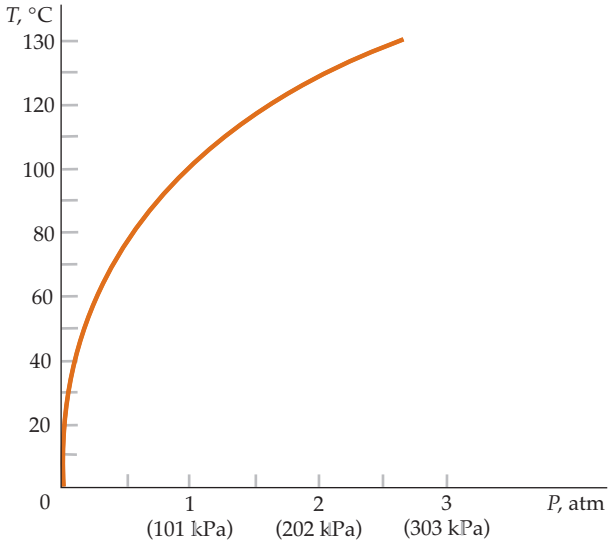


FIGURA 20.6 Presión de vapor del agua en función de la temperatura de ebullición.

a condensarse a presión constante. A lo largo de la línea horizontal *BD* de la figura, el gas y el líquido están en equilibrio. Si continuamos comprimiendo el gas, cada vez se condensa más gas hasta que se alcanza el punto *D* sobre la línea a trazos, en donde tenemos sólo líquido. Luego, si intentamos comprimir aún más la sustancia, la presión aumenta rápidamente, porque un líquido es casi incompresible.

Consideremos ahora que introducimos un líquido, por ejemplo agua, en un recipiente donde previamente se ha hecho el vacío que luego se cierra. Cuando parte del agua se evapora, las moléculas de vapor de agua llenan el espacio vacío del recipiente. Algunas de estas moléculas chocan contra la superficie del líquido y de nuevo toman la forma líquida en un proceso llamado *condensación*. Inicialmente, la velocidad de evaporación es mayor que la de condensación, pero finalmente se alcanza un equilibrio. La presión a la que un líquido se encuentra en equilibrio con su propio vapor, a una determinada temperatura, se denomina **presión de vapor**. Cuando existe este equilibrio y se calienta ligeramente el recipiente, el líquido hierve, se evapora una parte mayor de éste y se acaba restableciendo de nuevo el equilibrio, esta vez a una presión de vapor más alta. Podemos ver en la figura 20.5 que la presión de vapor de un gas depende de su temperatura. Si hubiésemos empezado a comprimir el gas a una temperatura inferior, como la correspondiente a la isoterma *A*′ de la misma figura, la presión de vapor también hubiese sido menor y correspondería a la línea horizontal de presión constante que indica *A*′. La temperatura de una sustancia cuya presión de vapor es 1 atm es el **punto de ebullición normal** de dicha sustancia. Por ejemplo, la presión de vapor del agua es 1 atm a la temperatura de 373 K = 100 °C, de modo que esta temperatura es el punto de ebullición normal del agua. En altitudes elevadas, como en la cima de una montaña, la presión es inferior a 1 atm y entonces el agua hierve a una temperatura menor que 373 K. La figura 20.6 muestra las presiones de vapor del agua a varias temperaturas.

A temperaturas por encima de la temperatura crítica T_c, los gases no condensan, sea cualquiera la presión a que se encuentren sometidos. La temperatura crítica para el vapor de agua es 647 K = 374 °C. El punto en el que la isoterma crítica corta la curva a trazos en la figura 20.5 (punto C) se denomina **punto crítico**.

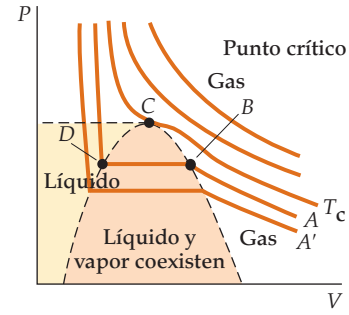


FIGURA 20.5 (*repetida*)
Isotermas en el diagrama *PV* de una sustancia.

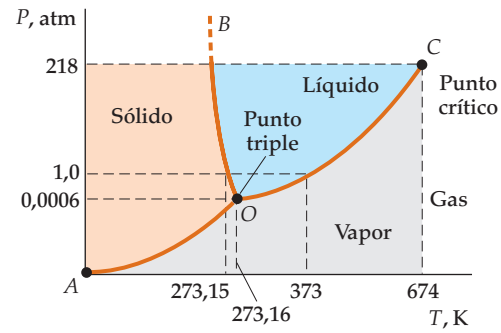


FIGURA 20.7 Diagrama de fases correspondiente al agua. Las escalas de presión y de temperatura no son lineales sino que se han reducido para mostrar todos los puntos interesantes. La curva *OC* es la curva de presión de vapor en función de la temperatura. La curva *OB* es la de fusión, y la *OA*, la de sublimación.

20.3 DIAGRAMAS DE FASE

En la figura 20.7, se representa la presión en función de la temperatura a volumen constante en el caso del agua. Dicha representación recibe el nombre de **diagrama de fases**. La parte del diagrama comprendida entre los puntos *O* y *C* muestra la presión del vapor en función de la temperatura. Al continuar calen-

tando el recipiente, disminuye la densidad del líquido y aumenta la del vapor. En el punto *C* del diagrama, ambas densidades son iguales. El punto *C* es el *punto crítico*. En este punto y por encima de él, no existe distinción entre el líquido y el gas. En la tabla 20.3, se dan las temperaturas críticas de diversas sustancias. A temperaturas mayores que la crítica, un gas no se licúa por mucho que se aumente la presión.

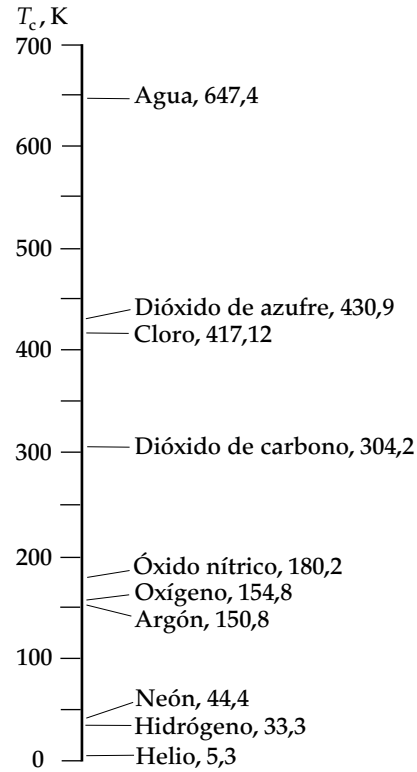
Si ahora enfriamos nuestro recipiente, parte del vapor se condensa en líquido recorriendo en sentido inverso la curva *OC* en la figura 20.7 hasta que la sustancia alcanza el punto *O*. En este punto, el líquido empieza a solidificar. El punto *O* es el **punto triple**, en el que pueden coexistir en equilibrio las fases sólida, líquida y de vapor de una sustancia. Cada sustancia tiene un punto triple único, con una temperatura y presión específicas. La temperatura del punto triple del agua es 273,16 K = 0,01 °C y la presión del punto triple vale 4,58 mmHg.

El líquido no puede existir a temperaturas y presiones por debajo del punto triple. La curva *OA* del diagrama de fases de la figura 20.7 es el lugar geométrico de las presiones y temperaturas en donde coexisten en equilibrio el sólido y el vapor. El paso directo de sólido a vapor se denomina **sublimación**. Se puede observar este fenómeno si se colocan cubos de hielo en el congelador de una nevera (especialmente si es del tipo que elimina automáticamente la escarcha que se forma). Los cubos de hielo desaparecen finalmente debido a la sublimación. Como la presión atmosférica está muy por encima de la presión del punto triple del agua, nunca se establece el equilibrio entre el hielo y el vapor de agua. La temperatura y presión del punto triple del dióxido de carbono (CO_2) son 216,55 K y 3880 mmHg (5,1 atm), lo cual significa que el CO_2 líquido sólo puede existir a presiones por encima de 5,1 atm. Por lo tanto, a las presiones ordinarias, el dióxido de carbono líquido no puede existir a ninguna temperatura. Cuando el dióxido de carbono sólido se "funde", se sublima directamente a CO_2 gaseoso sin pasar por la fase líquida; de aquí el nombre de "hielo seco".

La curva *OB* en la figura 20.7 es la curva de fusión que separa la fase sólida y líquida. En el caso de una sustancia como el agua cuya temperatura de fusión disminuye al aumentar la presión, la curva *OB* se dirige hacia la izquierda a partir del punto triple, como se ve en esta figura. En casi todas las demás sustancias, la temperatura de fusión aumenta cuando crece la presión. En estos casos, la línea *OB* se curva hacia la derecha desde el punto triple.

Para que una molécula escape de la superficie de un líquido, es decir, se evapore, se necesita energía para romper las atracciones intermoleculares de la superficie del líquido. Por lo tanto, la vaporización es un proceso en el que se enfría el líquido que queda atrás. Si se hace hervir agua de la forma usual, calentándola, el efecto de enfriamiento mantiene constante la temperatura del líquido en su punto de ebullición. Esta es la razón por la que puede utilizarse el punto de ebullición de una sustancia para calibrar termómetros. Sin embargo, también puede hacerse hervir el agua, sin añadirle calor, extrayendo el aire que hay encima, haciendo descender así la presión aplicada. La energía necesaria para la vaporización se extrae, entonces, del propio líquido que queda detrás. Como resultado, el líquido se irá enfriando, incluso hasta el punto en que llegará a formarse hielo en la parte superior del agua hirviendo.

Tabla 20.3 Temperaturas críticas T_c para diversas sustancias



20.4 TRANSFERENCIA DE CALOR

Calor es la transferencia de energía de un lugar a otro y puede realizarse mediante tres procesos distintos: conducción, convección y radiación.

En la **conducción**, la energía se transmite como consecuencia de las interacciones entre átomos o moléculas, aunque no exista un transporte de los propios átomos o moléculas. Por ejemplo, si se calienta uno de los extremos de una barra sólida, los átomos del extremo calentado vibran con mayor energía que los del extremo frío. La interacción entre los átomos más energéticos y los menos energéticos hace que esta energía se transfiera a lo largo de la barra.*

* Si el sólido es un metal, la transferencia de calor se ve facilitada por los electrones libres que se mueven a lo largo del mismo.

En la **convección**, el calor se transfiere mediante un transporte directo de materia. Por ejemplo, el aire caliente próximo al suelo se expansiona, su densidad disminuye, y la fuerza ascensional que actúa sobre él debida al medio que lo rodea hace que suba. Por lo tanto, la energía térmica del aire caliente se transfiere hacia arriba junto con las moléculas de aire caliente.

En la **radiación**, el calor se transfiere a través del espacio en forma de ondas electromagnéticas que se mueven a la velocidad de la luz. Las ondas infrarrojas, la luz visible, las ondas de radio, las ondas de televisión y los rayos X son todas ellas formas de radiación electromagnética y difieren entre sí únicamente por sus longitudes de onda o frecuencias.

En todos los mecanismos de transmisión de calor, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura que existe entre el cuerpo y el medio que le rodea. Este hecho se conoce con el nombre de **ley del enfriamiento de Newton**.

En muchas situaciones reales, los tres mecanismos de transferencia del calor se presentan simultáneamente, aunque alguno de ellos puede predominar sobre los otros. Por ejemplo, las estufas ordinarias transfieren calor por radiación y por convección. Si el elemento calefactor es cuarzo, el principal mecanismo de transferencia del calor es la radiación. Si el elemento calefactor es un metal (que no irradia tan eficazmente como el cuarzo), el principal mecanismo de transferencia del calor es la convección y el aire calentado se eleva para ser reemplazado por aire más frío. Con frecuencia, estos calentadores incluyen un ventilador para acelerar el proceso de convección.

CONDUCCIÓN

En la figura 20.8*a*, se muestra una barra sólida de sección transversal A. Si mantenemos uno de los extremos de la barra a una temperatura elevada y el otro extremo a una temperatura baja, la energía térmica se conduce de forma continua a lo largo de la barra desde el extremo caliente al extremo más frío. En el estado estacionario, la temperatura varía linealmente desde el extremo caliente al extremo frío. La tasa de variación de la temperatura dT/dx a lo largo de la barra se conoce con el nombre de **gradiente de temperatura**.*

Sea dT la diferencia de temperatura entre los extremos de un pequeño segmento de longitud dx (figura 20.8*b*). Si llamamos dQ a la cantidad de calor que se transmite a través de la sección transversal de un segmento de la barra en un cierto intervalo de tiempo Δt, la tasa de conducción de calor dQ/dT se denomina **corriente térmica** I. Experimentalmente, se ha comprobado que la corriente térmica es proporcional al gradiente de temperatura y al área de la sección recta A:

$$I = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad 20.7$$

DEFINICIÓN: CORRIENTE TÉRMICA

La constante de proporcionalidad k, llamada *coeficiente de conductividad térmica* o simplemente *conductividad térmica*, depende de la composición de la barra.† El calor

> **!** El calor es la transferencia de energía de una región de temperatura elevada a otra de menor temperatura, de forma que el flujo de calor o corriente térmica va en la dirección hacia donde la temperatura es menor.

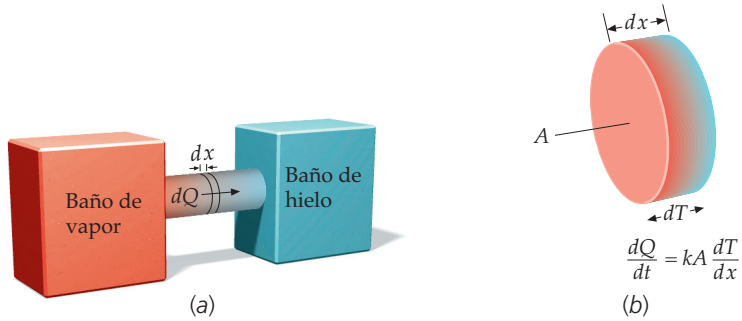
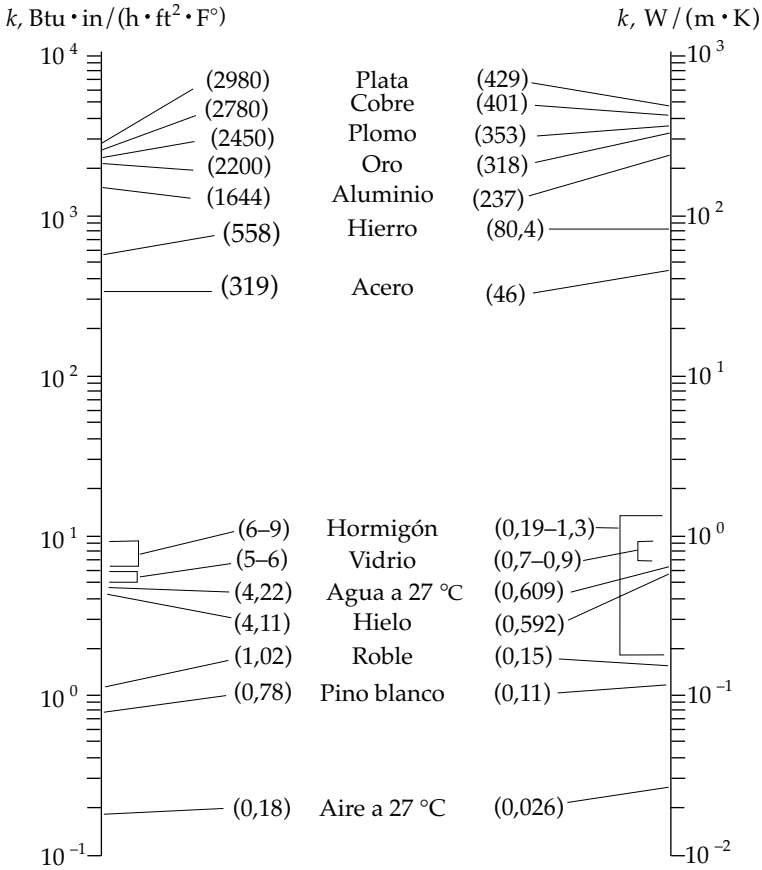


FIGURA 20.8 (*a*) Barra conductora aislada con sus extremos a dos temperaturas diferentes. (*b*) Segmento de la barra de longitud dx. La tasa a la que se conduce la energía térmica a lo largo de esta porción es proporcional al área de su sección recta y a la diferencia de temperaturas dT, y es inversamente proporcional al espesor del segmento.

* En realidad, el gradiente de temperatura es un vector. Este vector va en la dirección en que el cambio de temperatura es máximo y su módulo es la tasa de cambio de la temperatura con la distancia en esa dirección.

† No confundir la conductividad térmica con la constante de Boltzmann, que también se designa con la letra k.

Tabla 20.4 Conductividades térmicas *k* para diversos materiales



se transfiere en la dirección hacia donde la temperatura es menor. Es decir, si la temperatura aumenta con x, entonces el calor viaja en la dirección negativa del eje x. En unidades del SI, la corriente térmica se expresa en watts (joules por segundo) y la conductividad térmica tiene unidades de W/(m · K).* En los EE.UU., la corriente térmica se expresa habitualmente en Btu por hora, el área en pies cuadrados, la longitud (o el espesor) en pulgadas y la temperatura en grados Fahrenheit. La conductividad térmica se expresa entonces en Btu · in/(h · ft² · F°). La tabla 20.4 da las conductividades térmicas de diversos materiales.

Si en la ecuación 20.7 despejamos el incremento de temperatura, resulta

$$|\Delta T| = I\frac{|\Delta x|}{kA} \qquad 20.8$$

es decir,

$$\Delta T = IR \qquad 20.9$$

CAMBIO DE TEMPERATURA EN FUNCIÓN DE LA CORRIENTE TÉRMICA

donde ΔT es la *caída de temperatura* en la dirección de la corriente térmica y $|\Delta x|/(kA)$ es la **resistencia térmica** R:

$$R = \frac{|\Delta x|}{kA} \qquad 20.10$$

DEFINICIÓN: RESISTENCIA TÉRMICA

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 20.1

En una habitación fría, una mesa metálica parece más fría al tacto que una mesa de madera, aunque ambas estén a la misma temperatura. ¿Por qué?

* En algunas tablas, la energía térmica se expresa en calorías o kilocalorías y el espesor del conductor en centímetros.

PROBLEMA PRÁCTICO 20.1
Determinar la resistencia térmica de una chapa de aluminio de 15 cm^2 de área y 2 cm de espesor.

PROBLEMA PRÁCTICO 20.2
¿Qué espesor de plata se necesitaría para que su resistencia térmica fuera equivalente a la de un espesor de 1 cm de aire de igual sección recta?

En muchos problemas prácticos, interesa el flujo de calor que se propaga a través de dos o más conductores (o aislantes) colocados en serie. Por ejemplo, supongamos que queremos conocer el efecto que se produce si se introduce un material aislante de un cierto espesor y conductividad térmica en el espacio comprendido entre dos paneles de yeso. En la figura 20.9, se muestran dos planchas de igual área transversal, pero de diferente material y diferente espesor. Llamamos T_1 a la temperatura en el lado caliente, T_2 a la temperatura de la interfaz entre las planchas, y T_3 a la temperatura en el lado frío. En condiciones de flujo de calor estacionario, la corriente térmica I que atraviese cada plancha debe ser la misma. Esto es una consecuencia del principio de conservación de la energía; para un flujo estacionario, el ritmo con el que la energía entra en una región debe ser igual al ritmo de salida.

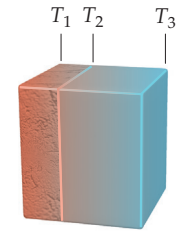


FIGURA 20.9 Dos láminas térmicas conductoras de materiales diferentes puestas en serie. La resistencia térmica equivalente de las láminas en serie es la suma de sus resistencias térmicas individuales. La corriente térmica es la misma a través de ambas láminas.

Si llamamos R_1 y R_2 a las resistencias térmicas de las dos planchas, aplicando la ecuación 20.9 para cada plancha, se cumple

$$T_1 - T_2 = IR_1$$

y

$$T_2 - T_3 = IR_2$$

Sumando ambas expresiones

$$\Delta T = T_1 - T_3 = I(R_1 + R_2) = IR_{eq}$$

o sea

$$I = \frac{\Delta T}{R_{eq}} \qquad 20.11$$

donde R_{eq} es la **resistencia equivalente**. Así, para las resistencias térmicas en serie, la resistencia equivalente es la suma de las resistencias individuales:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots \qquad 20.12$$

RESISTENCIAS TÉRMICAS EN SERIE

Este resultado puede aplicarse a cualquier número de resistencias en serie. En el capítulo 25, encontraremos esta misma fórmula aplicada a resistencias eléctricas en serie.

Este termograma de una casa muestra que la energía térmica está siendo irradiada al medio exterior. *(Alfred Pasieka/Photo Researchers, Inc.)*

Para calcular la cantidad de calor que sale de una habitación por conducción en un tiempo determinado, es necesario saber cuánto calor sale por las paredes, las ventanas, el suelo y el techo. En este tipo de problema, en el que hay varios caminos para el flujo de calor, se dice que las resistencias están en **paralelo**. La diferencia de temperaturas es la misma para cada camino, pero la corriente térmica es diferente. La corriente térmica total es la suma de las corrientes térmicas a través de cada uno de los caminos en paralelo, que son, de hecho, independientes:

$$I_{\text{total}} = I_1 + I_2 + \cdots = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2} + \cdots = \Delta T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots\right)$$

o sea

$$I_{\text{total}} = \frac{\Delta T}{R_{\text{eq}}} \qquad 20.13$$

donde la resistencia equivalente viene dada por

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots \qquad 20.14$$

RESISTENCIAS TÉRMICAS EN PARALELO

Encontraremos esta ecuación de nuevo en el capítulo 25 cuando estudiemos la conducción eléctrica a través de resistencias en paralelo. Obsérvese que tanto para resistencias en serie (ecuación 20.11) como para resistencias en paralelo (ecuación 20.13) I es proporcional a ΔT, en concordancia con la ley del enfriamiento de Newton.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de la corriente térmica

PLANTEAMIENTO Determinar si el conjunto de cuerpos para los cuales se desea calcular la corriente térmica forma una asociación en serie o en paralelo.

SOLUCIÓN

1. Utilizando $R = |\Delta x|/(kA)$ (ecuación 20.10), calcular la resistencia térmica de cada cuerpo.
2. Si los cuerpos están asociados en serie, utilizar $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \cdots$ (ecuación 20.12) para calcular su resistencia equivalente.
3. Si los cuerpos están asociados en paralelo, utilizar $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots$ (ecuación 20.14) para calcular su resistencia equivalente.
4. Utilizando $\Delta T = I_{\text{total}} R_{\text{eq}}$ (ecuación 20.9), calcular la corriente térmica total.

COMPROBACIÓN Para las asociaciones en paralelo, asegurarse de que la resistencia equivalente es inferior a la menor de las resistencias de los cuerpos asociados. Para las resistencias en serie, asegurarse de que la resistencia equivalente es mayor que la mayor de las resistencias de los cuerpos asociados.

Ejemplo 20.6 Dos barras metálicas en serie

Dos barras metálicas aisladas, cada una de longitud 5 cm y sección transversal rectangular de lados 2 cm y 3 cm, están encajadas entre dos paredes, una mantenida a 100 °C y la otra a 0 °C (figura 20.10). Las barras son de plomo y plata. Determinar (*a*) la corriente térmica total a través de las barras y (*b*) la temperatura en la interfaz.

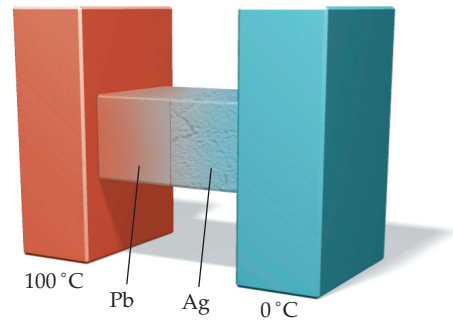


FIGURA 20.10 Dos bloques conductores de calor de materiales diferentes dispuestos en paralelo.

PLANTEAMIENTO Las barras son resistencias térmicas en serie. (*a*) Hallar la corriente térmica total a partir de $I = R_{eq}/\Delta T$, donde la resistencia equivalente R_{eq} es la suma de las resistencias individuales. Utilizando la ecuación 20.10 y las conductividades térmicas dadas en la tabla 20.4, se pueden determinar las resistencias individuales. (*b*) Determinar la temperatura de la interfaz aplicando $\Delta T = IR_1$ a la primera barra solamente y deduciendo ΔT en función del valor de I obtenido en (*a*).

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Utilizar $\Delta T = IR$ (ecuación 20.13) para relacionar la corriente térmica con la diferencia de temperaturas:

$$I = \frac{\Delta T}{R}$$

2. Utilizando $R = |\Delta x|/(kA)$ (ecuación 20.10), expresar cada resistencia en función de las conductividades térmicas individuales y de los parámetros geométricos:

$$R_{Pb} = \frac{|\Delta x_{Pb}|}{k_{Pb}A_{Pb}} \qquad R_{Ag} = \frac{|\Delta x_{Ag}|}{k_{Ag}A_{Ag}}$$

$$R_{Pb} = \frac{0{,}050\ \text{m}}{353\ \text{W/(m}\cdot\text{K)} \times (0{,}020\ \text{m} \times 0{,}030\ \text{m})} = 0{,}236\ \text{K/W}$$

$$R_{Ag} = \frac{0{,}050\ \text{m}}{429\ \text{W/(m}\cdot\text{K)} \times (0{,}020\ \text{m} \times 0{,}030\ \text{m})} = 0{,}194\ \text{K/W}$$

3. Hallar R_{eq} utilizando la fórmula para la asociación en serie:

$$R_{eq} = R_{Pb} + R_{Ag} = 0{,}236\ \text{K/W} + 0{,}194\ \text{K/W} = 0{,}430\ \text{K/W}$$

4. Utilizar $\Delta T = IR$ (ecuación 20.13) para hallar la corriente térmica:

$$I = \frac{\Delta T}{R_{eq}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}430\ \text{K/W}} = 232\ \text{W} = \boxed{0{,}23\ \text{W}}$$

(*b*) 1. Calcular la diferencia de temperatura entre los extremos de la barra de plomo utilizando la corriente y la resistencia térmica determinada en (*a*):

$$\Delta T_{Pb} = IR_{Pb} = 232\ \text{W} \times 0{,}236\ \text{K/W} = 54{,}9\ \text{K} = 54{,}9\ ^\circ\text{C}$$

2. Utilizar el resultado del paso anterior para determinar la temperatura en la interfaz:

$$T_{if} = 100\ ^\circ\text{C} - \Delta T_{Pb} = \boxed{45\ ^\circ\text{C}}$$

COMPROBACIÓN Comprobemos el resultado del apartado (*b*) calculando el incremento de temperatura a través de la barra de plata. Esto es, $\Delta T_{Ag} = IR_{Ag} = 232\ \text{W} \times 0{,}194\ \text{K/W} = 92\ ^\circ\text{C}$ que coincide con el resultado del apartado (*b*). Obsérvese que la resistencia equivalente (255 K/W) es mayor que cualquiera de las resistencias individuales (2,36 K/W y 0,194 K/W).

Ejemplo 20.7 Dos barras metálicas en paralelo

Las barras metálicas del ejemplo 20.6 se disponen ahora como muestra la figura 20.11. Determinar (*a*) la corriente térmica en cada barra, (*b*) la corriente térmica total y (*c*) la resistencia térmica equivalente del sistema formado por las dos barras.

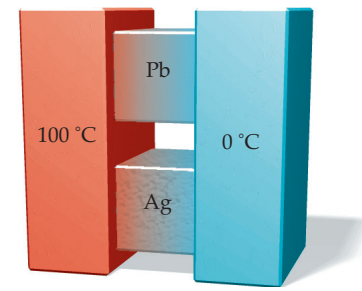


FIGURA 20.11

PLANTEAMIENTO La corriente en cada barra se determina utilizando $I = \Delta T/R$, siendo R la resistencia térmica de la barra deducida en el ejemplo 20.6. La corriente total es la suma de las corrientes. La resistencia equivalente puede determinarse a partir de la ecuación 20.14 o a partir de $I_{total} = \Delta T/R_{eq}$.

SOLUCIÓN

(*a*) Calcular la energía térmica de cada barra:

$$I_{Pb} = \frac{\Delta T}{R_{Pb}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}236\ \text{K/W}} = \boxed{0{,}42\ \text{kW}}$$

$$I_{Ag} = \frac{\Delta T}{R_{Ag}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}194\ \text{K/W}} = \boxed{0{,}52\ \text{kW}}$$

(*b*) Sumar estos resultados para deducir la corriente total:

$$I_{total} = I_{Pb} + I_{Ag} = 0{,}42\ \text{kW} + 0{,}52\ \text{kW} = \boxed{0{,}94\ \text{kW}}$$

(*c*) 1. Utilizar la ecuación 20.14 para calcular la resistencia equivalente de las dos barras en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{Pb}} + \frac{1}{R_{Ag}} = \frac{1}{0{,}236\ \text{K/W}} + \frac{1}{0{,}194\ \text{K/W}}$$

de este modo, $R_{eq} = \boxed{0{,}11\ \text{K/W}}$

2. Comprobar el resultado, utilizando $I_{total} = \Delta T / R_{eq}$:

$$I_{total} = \frac{\Delta T}{R_{eq}}$$

$$R_{eq} = \frac{\Delta T}{I_{total}} = \frac{100\ \text{K}}{0{,}94\ \text{kW}} = \boxed{0{,}11\ \text{K/W}}$$

COMPROBACIÓN La diferencia de temperaturas de 100 K es la misma en cada una de las dos barras al estar asociadas en paralelo, de forma que la corriente térmica que pasa por cada una es mayor que la que pasaba en cada una de las barras del ejemplo 20.6 en el que las barras estaban asociadas en serie y cuya diferencia de temperaturas era inferior a 100 K. Además, en el ejemplo 20.7, la corriente térmica total es igual a la suma de las corrientes térmicas de cada una de las barras, mientras que en el ejemplo 20.6 la corriente térmica total es igual a la corriente en cada barra. Entonces, resulta plausible que la corriente total (0,94 kW) con las barras en paralelo sea superior al cuadruple de la corriente total (232 W) con las barras en serie.

OBSERVACIÓN La resistencia equivalente es menor que cualquiera de las resistencias individuales. Este es el caso de las resistencias en paralelo.

En la industria relacionada con la construcción, la resistencia térmica por pie cuadrado de sección transversal de un material recibe el nombre de **factor *R***, al que designaremos por R_f. Consideremos una lámina de 32 pie^2 de material aislante de espesor Δx y factor $R_f = 7{,}2$. Es decir, cada pie cuadrado (figura 20.12) presenta una resistencia térmica de 7,2 F^o/(Btu/h). Los 32 pies cuadrados están en paralelo, de modo que la resistencia neta R_{neta} se calcula utilizando la ecuación 20.14, dando

$$\frac{1}{R_{neta}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots = \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_f} + \cdots = \frac{32}{R_f} \qquad \text{de donde} \qquad R_{total} = \frac{R_f}{32}$$

Así, la resistencia térmica total R expresada en F^o/(Btu/h) es igual al factor R dividido por el área A dada en pies cuadrados. Esto es

$$R_{neta} = \frac{R_f}{A}$$

Como la resistencia total R_{total} está relacionada con la conductividad por medio de $R_{neta} = |\Delta x|/(kA)$ (ecuación 20.10), se puede expresar el factor R mediante

$$R_f = R_{neta} A = \frac{|\Delta x|}{k} \qquad 20.15$$

DEFINICIÓN: FACTOR *R*

donde $|\Delta x|$ es el espesor expresado en pulgadas y k es la conductividad en Btu · in/(h · ft^2 · F^o). La tabla 20.5 recoge factores R para distintos materiales. En función del factor R, la ecuación 20.9 para la corriente térmica es

$$\Delta T = I R_{neta} = \frac{I}{A} R_f \qquad 20.16$$

Para planchas de material aislante de igual área en serie, R_f se reemplaza por el factor R equivalente, $R_{f\,eq}$

$$R_{f\,eq} = R_{f1} + R_{f2} + \cdots$$

FIGURA 20.12 Para un espesor de 1 pulgada de este material, $R_f = 7{,}2$. (*Gentileza de Eugene Mosca.*)

Tabla 20.5 Factores R, $\Delta x/k$ para diferentes materiales de construcción

Material	Espesor, in	R_f, h · ft² · F°/Btu
Construcción con planchas		
Yeso o planchas de yeso	0,375	0,32
Contrachapado (Douglas)	0,5	0,62
Contrachapado o paneles de madera	0,75	0,93
Conglomerado, densidad media	1,0	1,06
Materiales de acabado de suelo		
Alfombra y materiales de fibra	1,0	2,08
Azulejo		0,5
Madera (noble)	0,75	0,68
Aislamiento del tejado	1,0	2,8
Tejado		
Asfalto en rollos para terrazas		0,15
Tejas planas de asfalto		0,44
Ventanas		
Panel simple		0,9
Panel doble		1,8

Si las planchas están situadas en paralelo, se calcula la corriente térmica a través de cada plancha y se suman para obtener la corriente total.

Ejemplo 20.8 Pérdida de calor a través de un tejado *Póngalo en su contexto*

Estamos ayudando a la familia de un amigo a poner nuevos módulos de asfalto en el tejado de su cabaña de invierno. El tejado, de 60 pie × 20 pie, está hecho de tableros de pino de una pulgada de espesor cubiertos con tejas planas de asfalto. Hay sitio para 8 pulgadas de aislamiento y la familia se está preguntando qué diferencia habría en la factura de energía si instalaran el aislamiento de dos pulgadas. Sabiendo que estamos estudiando física, nos piden nuestra opinión.

PLANTEAMIENTO Para valorar la situación, hemos de calcular el factor R de cada capa del tejado. Como las capas están en serie, el factor R equivalente es precisamente la suma de dos factores R individuales. El objetivo es calcular el factor R equivalente del tejado con y sin aislamiento. Los factores R de las tejas de asfalto y del aislamiento del tejado se pueden encontrar en la tabla 20.5. El factor R del tablón de pino se calcula a partir de su conductividad térmica, que aparece en la tabla 20.4. Obsérvese que las tejas se colocan solapadas, de modo que en el tejado hay dos capas de asfalto.

SOLUCIÓN

1. El factor R equivalente es la suma de los factores R individuales:
$$R_{f\,eq} = R_{f\,pino} + R_{f\,asf} + R_{f\,ais}$$
2. El factor R de la doble capa de tejas es el doble del factor R de una capa:
$$R_{f\,asf} = 2(0{,}44\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}) = 0{,}88\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}$$
3. El factor R para el aislamiento del techo de 2 pulgadas es el doble del de 1 pulgada:
$$R_{f\,ais} = 2(2{,}8\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}) = 5{,}6\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}$$
4. El factor R para la madera de pino de 1 pulgada de espesor se obtiene a partir de la conductividad:
$$R_{f\,p} = \frac{\Delta x_p}{k_p} = \frac{1{,}0\ \text{in}}{0{,}78\ \text{Btu} \cdot \text{in}/(\text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F})} = 1.28\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}$$
5. El factor R equivalente sin aislamiento es:
$$R'_{f\,eq} = R_{f\,pino} + R_{f\,asf} = 1{,}28\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu} + 0{,}88\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}$$
$$= 2{,}16\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu} = 2{,}2\ \text{h} \cdot \text{pie}^2 \cdot {}^\circ\text{F/Btu}$$

6. El factor R equivalente con aislamiento es:

$$R_{f\,eq} = R_{f\,pino} + R_{f\,asf} + R_{f\,ais} = R'_{f\,eq} + R_{f\,ais}$$
$$= 2{,}16\ \text{h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu} + 5{,}6\ \text{h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$
$$= 7{,}76\ \text{h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}$$

7. Una comparación de los dos factores R equivalentes es su cociente:

$$\frac{R'_{f\,eq}}{R_{f\,eq}} = \frac{2{,}16}{7{,}76} = 0{,}28$$

8. Al añadir el aislamiento, la tasa de pérdida de calor se reduce en un 72%. ¿Es el 72% una pérdida de calor grande o pequeño? Utilizando la ecuación 20.16 calculamos la corriente térmica I' a través de todo el tejado:

$$\Delta T = IR_{neta} = \frac{I}{A}R_f$$
$$I' = \frac{A}{R'_{f\,eq}}\Delta T = \frac{(60\ \text{pie})(20\ \text{pie})}{2{,}16\ \text{h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F/Btu}}\Delta T = [556\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}]\Delta T$$
$$= [5{,}6\times 10^2\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}]\Delta T$$

9. Para completar el cálculo, suponemos que la temperatura dentro de la cabaña se mantiene a 70 ºF y que en el exterior durante el invierno es unos 40 ºF más fría:

$$I' = [556\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}]\Delta T$$
$$= [556\ (\text{Btu/h})/{}^\circ\text{F}](40\ {}^\circ\text{F}) = 22\,200\ \text{Btu/h}$$
y $I = 0{,}28I' = 0{,}28(22\,200\ \text{Btu/h}) = 6200\ \text{Btu/h}$

de manera que la reducción debida al aislamiento es

$$I' - I = 22\,200\ \text{Btu/h} - 6200\ \text{Btu/h} = 16\times 10^3\ \text{Btu/h}$$

10. La instalación de 2 pulgadas de aislamiento reduce las pérdidas de calor a través del tejado en 16000 Btu/h. La cabaña se calienta con propano y el contenido energético del propano es de 92000 Btu/gal. Aislando el tejado, el consumo se reduce en aproximadamente 4,2 galones de propano cada 24 horas de uso:

Como el propano cuesta unos 3 $/gal, el ahorro por día se eleva a 12,60 $, o sea 376 $ por mes. La familia de nuestro amigo está impresionada por el ahorro potencial (y por la utilidad de nuestros conocimientos de física) y está decidida a instalar las 2 pulgadas de aislamiento.

COMPROBACIÓN No debe sorprendernos que la instalación de aislamiento produzca un ahorro económico.

OBSERVACIÓN Esta valoración de los costes no incluye el precio de comprar e instalar el aislante.

PROBLEMA PRÁCTICO 20.3 ¿Cuánto ahorro adicional podrá obtenerse añadiendo más aislamiento al tejado?

La conductividad térmica del aire es muy pequeña en comparación con las de los materiales sólidos, de modo que el aire es un aislante muy bueno. Sin embargo, cuando existe un espacio con aire relativamente grande —como sucede, por ejemplo, entre los dos cristales de una doble ventana— el rendimiento aislante del aire se ve muy reducido debido a la convección. Siempre que existe una diferencia de temperatura entre las diferentes partes de un espacio lleno de aire, las corrientes de convección actúan rápidamente para igualar las temperaturas, de modo que la conductividad efectiva se ve muy aumentada. En el caso de ventanas de doble panel, el espaciado óptimo debe tener de 1 a 2 cm. Si el espacio con aire es más ancho, se reduce en la práctica la resistencia térmica de una ventana de doble panel debido a la convección.

Se saca mayor provecho de las propiedades aislantes del aire si se logra mantener el aire en pequeños paquetes separados entre sí, de forma que la convección no pueda tener lugar. Esta es la razón de las excelentes propiedades aislantes del plumón de ganso y del poliestireno.

Si se toca la parte interior de la superficie del cristal de una ventana cuando hace frío en el exterior, se observa que la superficie se encuentra considerablemente más fría que el interior de la habitación. La resistencia térmica de una ventana se debe principalmente a la existencia de finas capas de aire aislante, que se adhieren a ambos lados de la superficie del cristal. El espesor del cristal no influye prácticamente en el valor de la resistencia térmica total. La película de aire contribuye generalmente con un factor R de aproximadamente 0,45 por cada lado de la superficie; por lo tanto, el factor R de una ventana de N hojas es aproximadamente igual a $0{,}9N$. Cuando la velocidad del viento es grande, la capa de aire exterior disminuye considerablemente, por lo que el factor R para la ventana se hace más pequeño.

CONVECCIÓN

La convección es la transferencia de calor que se realiza mediante el movimiento del propio medio. Es el responsable de las grandes corrientes oceánicas, así como de la circulación global de la atmósfera. En el caso más simple, la convección surge cuando un fluido (gas o líquido) se calienta por debajo. El fluido, al calentarse, se expansiona y se eleva, mientras que el fluido más frío se hunde. La descripción matemática de la convección es muy compleja, ya que el flujo depende de la diferencia de temperatura en las distintas partes del fluido, y esta diferencia de temperatura se ve afectada por el propio flujo.

Aproximadamente, el calor transmitido por convección desde un cuerpo a sus alrededores es proporcional al área del cuerpo y a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el fluido en el que se encuentre inmerso. Este calor transmitido se puede expresar mediante una ecuación y definir un coeficiente de convección, pero el ánalisis de los complejos problemas relacionados con la convección no es objeto de este libro.

RADIACIÓN

Todos los cuerpos emiten y absorben radiación electromagnética. Cuando un cuerpo está en equilibrio térmico con su medio, emite y absorbe energía al mismo ritmo. La energía térmica irradiada por un cuerpo por unidad de tiempo es proporcional al área del cuerpo y a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. Este resultado, obtenido empíricamente por Josef Stefan en 1879 y deducido teóricamente por Ludwig Boltzmann unos cinco años después, recibe el nombre de **ley de Stefan-Boltzmann** y se expresa en la forma:

$$P_r = e\sigma AT^4 \qquad 20.17$$

LEY DE STEFAN-BOLTZMANN

donde P_r es la potencia radiada en watts, A el área, y σ una constante universal que recibe el nombre de constante de Stefan-Boltzmann, cuyo valor es

$$\sigma = 5{,}6703 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)} \qquad 20.18$$

y e es la **emisividad** de la superficie radiante, una magnitud adimensional que varía de 0 a 1 y que depende de la composición de la superficie del objeto.

Cuando la radiación incide sobre un objeto opaco, parte de la radiación se refleja y parte se absorbe. Los objetos de colores claros reflejan la mayor parte de la radiación visible, mientras que los objetos oscuros absorben su mayor parte. El ritmo con que absorbe radiación un cuerpo viene dado por

$$P_a = e\sigma AT_0^4 \qquad 20.19$$

donde T_0 es la temperatura de la fuente de radiación.

Supongamos que un cuerpo a temperatura T está rodeado por un medio a temperatura T_0. Si un cuerpo emite más radiación que la que absorbe, se enfría, mientras que el medio se calienta. Si el cuerpo absorbe energía radiante a un ritmo mayor del que la emite, entonces el cuerpo se calienta y el medio se enfría. Podemos expresar la potencia neta radiada por un cuerpo a la temperatura T situado en un medio de temperatura T_0 como

$$P_{neta} = e\sigma A(T^4 - T_0^4) \qquad 20.20$$

Cuando un cuerpo está en equilibrio con su medio, $T = T_0$; entonces, el cuerpo emite y absorbe radiación al mismo ritmo.

Un cuerpo que absorbe toda la radiación que incide sobre él posee una emisividad igual a 1 y recibe el nombre de **cuerpo negro**. Un cuerpo negro también es un emisor de radiación ideal. El concepto de cuerpo negro ideal es importante, puesto que las características de la radiación emitida por tal cuerpo pueden calcularse teóricamente. Un material como el terciopelo negro posee unas propiedades próximas a las del cuerpo negro ideal, pero la mejor forma práctica de obtener un cuerpo negro ideal es practicar un pequeño orificio que conduzca a una cavidad (figura 20.13), por ejemplo, el orificio de una cerradura de una puerta cerrada. La radiación que incide sobre el orificio posee una pequeña probabilidad de ser reflejada de nuevo al exterior por lo que la mayor parte es absorbida por las paredes de la cavidad. De esta ma-

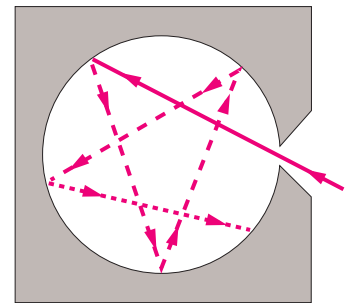


FIGURA 20.13 Un pequeño orificio en una cavidad constituye la mejor aproximación a un cuerpo negro ideal. La radiación que entra en la misma tiene una probabilidad muy pequeña de salir de la cavidad por lo que la mayor parte es absorbida. La radiación emitida a través del orificio (no mostrada en la figura) es, por lo tanto, característica de la temperatura de las paredes de la cavidad.

nera, la radiación emitida a través del orificio es característica de la temperatura de las paredes de la cavidad.

La radiación emitida por un cuerpo a temperaturas inferiores a 600 °C no es visible para el ojo humano. La radiación emitida por cuerpos que están a temperatura ambiente se concentra en longitudes de onda mucho mayores que la correspondientes a la luz visible. A medida que aumenta la temperatura del cuerpo, crece la cantidad de energía que emite y se extiende a frecuencias cada vez mayores (y longitudes de onda cada vez más cortas). Cuando un cuerpo se encuentra a 600-700 ºC, emite radiación en la zona del espectro visible de forma que brilla con un color rojo oscuro; a temperaturas más elevadas, el cuerpo adquiere una tonalidad roja brillante o incluso un color "blanco". En la figura 20.14, se muestra la potencia radiada por un cuerpo negro en función de la longitud de onda para diferentes temperaturas. La longitud de onda para la cual la potencia es un máximo varía inversamente con la temperatura. Este resultado se conoce con el nombre de ley del desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T} \qquad 20.21$$

LEY DEL DESPLAZAMIENTO DE WIEN

Esta ley se utiliza para determinar las temperaturas de las estrellas analizando su radiación. También se puede utilizar para representar las variaciones de temperatura en diferentes regiones de la superficie de un objeto, lo que constituye una **termografía**. Las termografías pueden emplearse para detectar el cáncer porque los tejidos cancerosos tienen una temperatura ligeramente superior a los tejidos sanos de su alrededor.

Las curvas de distribución espectral del cuerpo negro indicadas en la figura 20.14 desempeñaron un papel importante en la historia de la física. Las discrepancias existentes entre los cálculos teóricos realizados a partir de estas curvas, utilizando la termodinámica clásica, y las medidas experimentales de la distribución espectral fueron las que condujeron a Max Planck a desarrollar las primeras ideas acerca de la cuantización de la energía en 1900.

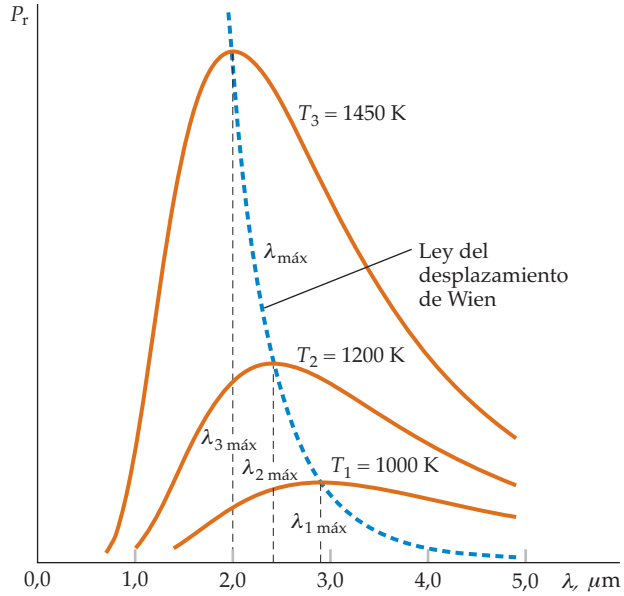
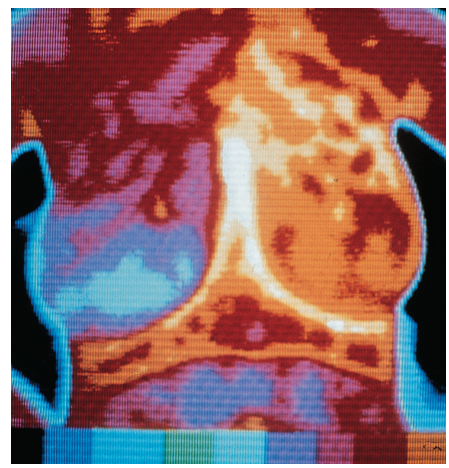


FIGURA 20.14 Potencia radiada en función de la longitud de onda correspondiente a la radiación emitida por un cuerpo negro. La temperatura de la superficie radiante se indica en la figura. La longitud de onda $\lambda_{máx}$ a la cual se emite la máxima potencia varía inversamente con la temperatura T de la superficie del cuerpo negro.



Termografía utilizada para detectar un tumor canceroso. *(Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.)*

Ejemplo 20.9 Radiación procedente del Sol

(*a*) La radiación emitida por la superficie del Sol presenta su máxima potencia a una longitud de onda de unos 500 nm. Suponiendo que el Sol sea un cuerpo negro emisor de radiación, ¿cuál es la temperatura de su superficie? (*b*) Calcular $\lambda_{máx}$ de un cuerpo negro a la temperatura ambiente, $T = 300$ K.

PLANTEAMIENTO La temperatura de la superficie y la longitud de onda de emisión a máxima potencia están relacionadas por $\lambda_{máx} = 2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}/T$ (ecuación 20.21).

SOLUCIÓN

(*a*) Podemos calcular T a partir de $\lambda_{máx}$ utilizando la ley del desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{T} \quad \text{de donde}$$

$$T = \frac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{\lambda_{máx}} = \frac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{500 \text{ nm}} = \boxed{5800 \text{ K}}$$

(*b*) Aplicar la ley del desplazamiento de Wien para $T = 300$ K:

$$\lambda_{máx} = \frac{2{,}898 \text{ mm} \cdot \text{K}}{300 \text{ K}} = 9{,}66 \times 10^{-6} \text{ m} = \boxed{9{,}66 \ \mu\text{m}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del apartado (*b*) para $\lambda_{máx}$ resulta ser 19 veces mayor que 500 nm (el valor de $\lambda_{máx}$ para el Sol), y el resultado del apartado (*a*) de 5800 K para la temperatura de la superficie del Sol es 19 veces mayor que 300 K, que es la temperatura de la superficie del cuerpo del apartado (*b*). La ley de Wien dice que $\lambda_{máx}$ es inversamente proporcional a la temperatura del emisor, por lo que el resultado es correcto.

OBSERVACIÓN La longitud de onda máxima para la radiación solar está en el espectro visible. El espectro de la radiación procedente del Sol coincide bastante bien con la del cuerpo negro, de forma que el Sol puede considerarse como un cuerpo negro.

Para $T = 300$ K, el espectro del cuerpo negro tiene el pico en el infrarrojo, a longitudes de onda muy superiores a las que son visibles para el ojo humano. Hay superficies que no son negras a nuestros ojos y que pueden actuar como cuerpos negros para la radiación y absorción del infrarrojo. Así, se ha determinado experimentalmente que la piel de los seres humanos de todas las razas es negra para la radiación infrarroja; por lo tanto, la emisividad de la piel es 1,00 para su propio proceso de radiación.

Ejemplo 20.10 Radiación procedente del cuerpo humano *Inténtelo usted mismo*

Calcular la pérdida neta de energía radiante de una persona desnuda en una habitación a 20 °C suponiendo que la persona se comporta como un cuerpo negro, con una superficie de área igual a 1,4 m^2 y temperatura superficial de 33 °C = 306 K. (La temperatura superficial del cuerpo humano es ligeramente inferior que su temperatura interna, 37 °C, debido a la resistencia térmica de la piel.)

PLANTEAMIENTO Utilizar $P_{neta} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$, con $e = 1$, $T = 306$ K y $T_0 = 293$ K, para determinar la diferencia entre las potencias emitidas y absorbidas.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos	Respuesta
Utilizar $P_{neta} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$, con $e = 1$, $T = 306$ K, y $T_0 = 293$ K.	$P_{neta} = 111$ W = 0,11 kW

COMPROBACIÓN Un ritmo de 0,11 kW es equivalente a 2300 kcal/día, valor que coincide en orden de magnitud con el valor real.

OBSERVACIÓN Esta gran pérdida de energía es aproximadamente igual al ritmo metabólico basal de 120 W. El hombre se protege de esta gran pérdida de energía mediante el uso de ropas, que, debido a su baja conductividad térmica, poseen una temperatura exterior mucho más baja que la piel, por lo que las pérdidas térmicas por radiación son mucho menores.

Cuando la temperatura T de un cuerpo no difiere demasiado de la de su medio, T_0, el cuerpo radiante obedece la ley del enfriamiento de Newton. Esto puede deducirse escribiendo la ecuación 20.20 en la forma

$$P_{neta} = e\sigma A(T^4 - T_0^4) = e\sigma A(T^2 + T_0^2)(T^2 - T_0^2)$$
$$= e\sigma A(T^2 + T_0^2)(T + T_0)(T - T_0)$$

Cuando la diferencia $T - T_0$ es pequeña, puede reemplazarse T_0 por T en las dos sumas con un cambio pequeño en el resultado. Así, resulta

$$P_{neta} \approx e\sigma A(T_0^2 + T_0^2)(T_0 + T_0)(T - T_0) = 4e\sigma A T_0^3 \Delta T$$

La potencia neta irradiada es, aproximadamente, proporcional a la diferencia de temperatura, de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton. Este resultado también puede obtenerse utilizando la aproximación diferencial:

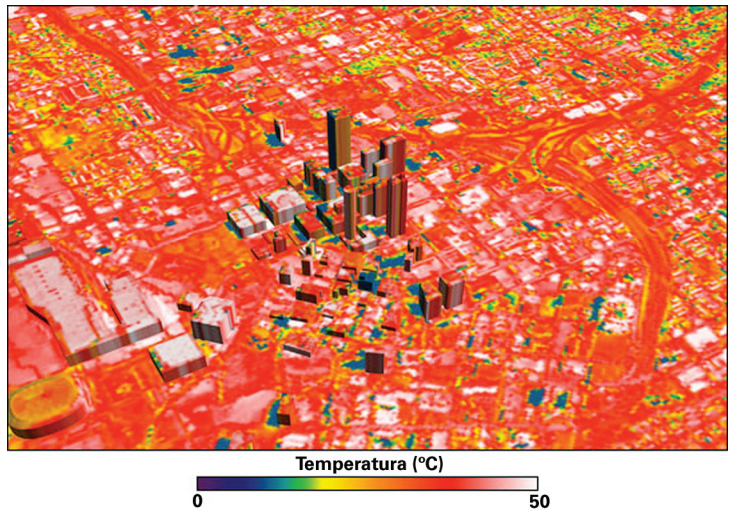
$$\Delta P_r \approx \left.\frac{dP_r}{dT}\right|_{T=T_0} (T - T_0)$$

donde $P_r = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$. Para una pequeña diferencia de temperaturas $T - T_0$, se tiene

$$\Delta P_r = e\sigma A\, 4T^3\Big|_{T=T_0} (T - T_0) = 4e\sigma A T_0^3 \Delta T$$

Temas de actualidad en Física

Islas urbanas de calor: noches cálidas en la ciudad



Los lados de los edificios de este termograma de Atlanta (Georgia) que no están colocados hacia el Sol presentan color azul oscuro o negro. Esto se debe a que estos lados son más fríos que los que reciben directamente la luz solar. Las zonas con temperaturas más elevadas aparecen de color blanco. *(NASA/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio.)*

En 1820, Luke Howard publicó los registros de la temperatura de Londres y sus alrededores durante varios años. Sus registros mostraron que Londres era más cálido que sus suburbios y áreas rurales y que esta diferencia era más pronunciada por la noche. Observó que Londres estaba 2,1 °C más caliente que las áreas rurales de su entorno[1]. En 2004, las observaciones mostraron que Phonenix podía estar hasta 10 °C más caliente que sus alrededores[2]. Londres y Phoenix son islas urbanas de calor (UHI, *urban heat island*). En general, las ciudades con calles pavimentadas y muchos edificios son más cálidas que sus periferias.

Un factor importante para la formación de UHI es la falta de árboles y otras plantas. Durante el día, las plantas enfrían su entorno a causa del agua que liberan, que tiene un alto calor latente. En las áreas rurales e incluso en las zonas ajardinadas de las ciudades, se utiliza gran parte de la energía en evaporar el agua expulsada por las plantas y muy poca para aumentar la temperatura superficial[3]. Además, las plantas reflejan gran parte de la radiación infrarroja (calor) de la radiación solar, mientras que el asfalto, acero, vidrio, hormigón y aluminio absorben y retienen la radiación infrarroja. Otro factor es la geometría de las ciudades. Los cañones urbanos, formados por altos edificios en ambos lados de una calle, reflejan la radiación infrarroja hacia otras superficies más absorbentes de la ciudad[4]. Las áreas abiertas permiten la emisión del calor mediante radiación del suelo y estructuras cercanas.

Además del calor radiado, el agua de lluvia que circula por las áreas urbanas se calienta por conducción. En agosto del 2001, una tormenta de lluvia en Cedar Rapids (Iowa) hizo aumentar la temperatura de un arroyo en 10,5 °C en una hora, lo que causó la muerte de muchos peces.[5] La lluvia que cayó era más fría que la del arroyo, pero la mayor parte del agua que entraba en el arroyo procedía de corrientes de agua que se calentaron al circular por los pavimentos calientes de la ciudad. Similares repentinos ascensos de temperatura se han observado también en corrientes de lluvia que circulan por ciudades de Minnesota, Wisconsin, Oregon[6] y California[7].

En 1996, para respaldar a los juegos olímpicos de Atlanta, se hizo una gran inversión para efectuar medidas meteorológicas especiales en Georgia.[8] Los datos revelaron que la convección generada por las UHI modificaba los patrones meteorológicos de la zona y, como consecuencia, se registraban mayores precipitaciones en las áreas de la ciudad situadas en la dirección preferente del viento[9]. También se registraban mayores precipitaciones en las áreas situadas en la dirección del viento a una distancia de hasta 64 km del centro de las ciudades de Dallas, San Antonio[10] y Saint Louis[11]. Los cambios en la convección causados por las UHI son complejos, pero los efectos de las precipitaciones son mensurables.

Los urbanistas están desarrollando formas de enfriar las UHI[12]. El ayuntamiento de Chicago tiene un "techo verde" con plantas y pasillos reflectantes. La temperatura del tejado ajardinado se monitoriza y compara con la del tejado negro asfaltado del edificio Cook Country. La temperatura del tejado del Ayuntamiento puede ser de unos 33 °C menor que la de los tejados negros asfaltados.[13] Muchas ciudades promueven la plantación de árboles[14] y otras apoyan utilizar superficies reflectantes[15], pavimentos permeables y el uso de tejados verdes[16]. Las islas urbanas de calor están siendo tratadas por las tecnologías del frío.

---

1 Howard, Luke, *The Climate of London, Deduced from Meteorological Observations Made in the Metropolis and Various Places around It*, 2nd ed. London: Harvey and Darton, 1833.
2 Fast, J. D, Torcolini, J. C., and Redman, R., "Pseudovertical Temperature Profiles and the Urban Heat Island Measured by a Temperature Dataloger Network in Phoenix, Arizona", *Journal of Applied Meteorology*, Jan. 2005, Vol. 44, No. 1, 3–13.
3 Souch, C., and Grimmond, S., "Applied Climatology: Urban Climate", *Progress in Physical Geography*, Feb. 2006, Vol. 30, No. 2, 270–279.
4 Kusaka, H., and Kimura, F., "Thermal Effects of Urban Canyon Structure on the Nocturnal Heat Island: Numerical Experiment Using a Mesoscale Model Coupled with an Urban Canopy Model", *Journal of Applied Meteorology*, Dec. 2004, Vol. 43, No. 12, 1899–1910.
5 Boshart, R., "Urban Trout Stream Still in Works—DNR Targeting McLoud Run in C. R., Despite Recent Fish Kill," *The Gazette*, Aug. 9, 2001, B1+.
6 Frazer, Lance, "Paving Paradise: The Perils of Impervious Surfaces", *Environmental Health Perspective*, Jul. 2005, Vol. 113, No. 7, 456–462.
7 Fowler, B., and Rasmus, J., "Seaside Solution", *Civil Engineering*, Dec. 2005, 44–49.
8 Skindrud, Erik, "Georgia on Their Minds", *Science News*, Jul. 13, 1996. http://www.sciencenews.org/pages/sn_arch/7_13_96/bob1.htm
9 Dixon, P. G., and Mote, T. L., "Patterns and Causes of Atlanta's Urban Heat Island-Initiated Precipitation", *Journal of Applied Meteorology*, Sept. 2003, Vol. 42, No. 9, 1273–1284.
10 Shepard, J., Pierce, H., and Negri, A., "Rainfall Modification by Major Urban Areas: Observations from Spaceborne Rain Radar on the TRMM Satellite", *Journal of Applied Meteorology*, Jul. 2002, Vol. 41, No. 7, 689–701.
11 "Urban-related Weather Anomalies", *Science News*, Mar. 5, 1977, Vol. 111, No. 10, 152.
12 Wade, B., "Putting the Freeze on Heat Islands", *American City & County*, Feb. 2000, 30–40.
13 "Monitoring the Rooftop Garden's Benefits", City of Chicago Department of Environment. http://chicagorooftops.notlong.com
14 Duncan, H., "Trees, Please: More Cities Enacting Tree Ordinances, but Enforcement Is the Age-Old Problema", *Macon Telegraph*, July 6, 2006, A1.
15 "NASA Assesses Strategies to 'Turn Off the Heat' in New York City", *Engineered Systems*, April 2006, 79–80.
16 Hoffman, L., "Green Roof Storm Water Modeling", *BioCycle*, Feb. 2006, 38–40.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Dilatación térmica		
Coeficiente de dilatación lineal	$\alpha = \dfrac{\Delta L/L}{\Delta T}$	20.2
Coeficiente de dilatación cúbica	$\beta = \dfrac{\Delta V/V}{\Delta T} = 3\alpha$	20.4, 20.5
2. Ecuación de estado de Van der Waals	La ecuación de estado de Van der Waals describe el comportamiento de los gases reales en un amplio intervalo de temperaturas y presiones, teniendo en cuenta el espacio ocupado por las propias moléculas del gas y la atracción intermolecular: $\left(P + \dfrac{an^2}{v^2}\right)(V - bn) = nRT$	20.6
3. Presión de vapor	La presión de vapor es la presión a la cual las fases líquida y gaseosa de una sustancia están en equilibrio a una temperatura dada. El líquido hierve a esa temperatura para la cual la presión externa es igual a la presión de vapor.	
4. Punto triple	El punto triple define la única temperatura y presión a la cual las fases gas, líquido y sólido de una sustancia pueden coexistir en equilibrio. A temperaturas y presiones por debajo del punto triple, la fase líquida de una sustancia no puede existir.	
5. Transferencia de calor	Los tres mecanismos de transferencia de la energía térmica son conducción, convección y radiación.	
Ley del enfriamiento de Newton	En todos los mecanismos de transferencia de calor, si la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio es pequeña, la velocidad de enfriamiento del cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperaturas.	
6. Conducción térmica		
Corriente térmica	La tasa de transferencia de calor por conducción viene dada por $I = \dfrac{dQ}{dt} = -kA\dfrac{dT}{dx}$ donde I es la corriente térmica, k el coeficiente de conductividad térmica y dT/dx el gradiente de temperatura.	20.7
Resistencia térmica	$\Delta T = IR$ donde ΔT es el cambio de temperatura en la dirección de la corriente térmica y R es la resistencia térmica: $R = \dfrac{\lvert\Delta x\rvert}{kA}$	20.9, 20.10
Resistencia equivalente:		
Serie	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \cdots$	20.12
Paralelo	$\dfrac{1}{R_{eq}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots$	20.14
Factor R	El factor R es la resistencia térmica expresada en in · pie^2 · °F/(Btu/h) de un pie cuadrado de una plancha de material $R_f = R_{neta}A = \dfrac{\lvert\Delta x\rvert}{k}$	20.15
7. Radiación térmica		
Potencia radiante	$P_r = e\sigma AT^4$ donde $\sigma = 5{,}6703 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$ es la constante de Stefan–Boltzmann y e la emisividad, un número entre 0 y 1 que depende de la composición de la superficie del cuerpo. Los materiales que son buenos absorbentes también son buenos emisores de calor por radiación.	20.17

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Potencia radiante neta de un cuerpo a temperatura T hacia su medio circundante a temperatura T_0	$P_{\text{neta}} = e\sigma A(T^4 - T_0^4)$	20.20
Cuerpo negro	Un cuerpo negro posee una emisividad igual a 1. Es un emisor de radiación perfecto y absorbe toda la radiación que incide sobre él.	
Ley de Wien	El espectro de potencia de energía electromagnética irradiada por un cuerpo negro tiene un máximo a una longitud de onda, $\lambda_{\text{máx}}$, que varía inversamente con la temperatura absoluta del cuerpo: $\lambda_{\text{máx}} = \dfrac{2{,}898\ \text{mm} \cdot \text{K}}{T}$	20.21

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

20.1 La madera es un mal conductor del calor mientras que el metal es buen conductor. Cuando los dedos tocan la mesa metálica, el metal transporta muy rápido el calor de los dedos y los dedos se enfrían a un ritmo mayor que si se toca la mesa de madera.

Respuestas a los problemas prácticos

20.1 0,0563 K/W = 56,3 mK/W

20.2 Δx = (1 cm)(429)/(0,026) = 16 500 cm = 165 m

20.3 La corriente térmica es de 6200 Btu/h con un aislante de 2 pulgadas de grosor. Por tanto, el ahorro adicional máximo será de 6200 Btu/h, con lo que se ahorrarían 146 $ adicionales por mes.

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • ¿Por qué el nivel del mercurio comienza decreciendo ligeramente cuando un termómetro se introduce en agua caliente?

2 • Una lámina grande de metal tiene un orificio recortado en su centro. Al calentar la lámina, el área del orificio (*a*) no cambia, (*b*) siempre crece, (*c*) siempre disminuye, (*d*) crece si el orificio no está en el centro exacto de la lámina, (*e*) decrece sólo si el orificio está en el centro exacto de la lámina.

3 • ¿Por qué es mala idea colocar dentro del congelador una botella de vidrio cerrada llena de agua para hacer hielo? SSM

4 • Las ventanas del laboratorio de física se dejan abiertas durante la noche, cuando la temperatura del exterior es tan baja que empieza a helar. Se dejaron una regla de acero y otra de madera en la repisa de la ventana y cuando el profesor llegó ambas estaban muy frías. El coeficiente de dilatación lineal de la madera es de $5 \times 10^6\ \text{K}^{-1}$. ¿Cuál de las dos reglas deberá utilizar el profesor si quiere realizar medidas lo más precisas posible? Explicar la respuesta.

5 • **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Las tiras bimetálicas se utilizan en los termostatos e interruptores eléctricos. La tira bimetálica está formada por un par de finas tiras de metales con diferentes valores del coeficiente de dilatación lineal que están soldadas una sobre la otra para formar un única tira más gruesa. Supongamos que una es de acero y la otra de cobre y que forman un arco de circunferencia en el que la tira de acero va por fuera. Al disminuir la temperatura, ¿la tira bimetálica se estirará o se curvará aún más?

6 • El metal A tiene un coeficiente de dilatación lineal que es el triple del del metal B. ¿Cómo están relacionados sus coeficiente de dilatación volumétricos β? (*a*) $\beta_A = \beta_B$. (*b*) $\beta_A = 3\beta_B$. (*c*) $\beta_A = 6\beta_B$. (*d*) $\beta_A = 9\beta_B$. (*e*) No se puede saber a partir de los datos dados.

7 • La cima del Monte Rainier está a 14 410 pies sobre el nivel del mar. Los montañeros dicen que no se puede cocer un huevo en la cima. Esta afirmación es cierta porque (*a*) la temperatura del aire es demasiado baja como para que hierva el agua, (*b*) la presión del aire es demasiado baja como para que el combustible pueda prender, (*c*) la temperatura de ebullición del agua no es lo suficientemente alta como para cocer un huevo, (*d*) el contenido de oxígeno es muy bajo como para poder iniciarse la combustión, (*e*) los huevos siempre se rompen en las mochilas de los montañeros.

8 • ¿Qué gases de la tabla 20.3 no pueden licuarse incrementando la presión a 20 °C? Explicar la respuesta.

9 •• El diagrama de fases de la figura 20.15 puede ser utilizado para obtener información sobre cómo cambian los puntos de ebullición y de fusión del agua con la altitud. (*a*) Explicar cómo puede obtenerse esta información. (*b*) ¿Cómo puede influir esta información en los procedimientos culinarios en las montañas? SSM

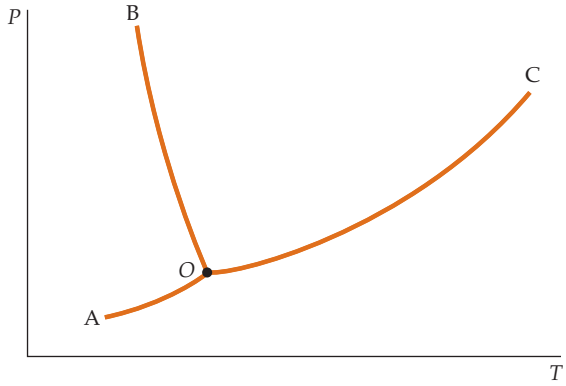


FIGURA 20.15 Problema 9

10 •• Traza el diagrama de fases del dióxido de carbono utilizando la información dada en la sección 20.3.

11 •• Explicar por qué el dióxido de carbono en Marte se encuentra en estado sólido en las regiones polares, aunque la presión atmosférica en la superficie de Marte es sólo un 1% de la presión atmosférica en la superficie terrestre.

12 •• Explicar por qué dejando bajar la temperatura de una casa por la noche durante el invierno se puede ahorrar en los costes de calefacción. ¿Por qué el coste del combustible consumido para volver a calentar la casa por la mañana no iguala al ahorro obtenido al enfriarla?

13 •• Dos cilindros de materiales distintos, A y B, tienen iguales longitudes; sus diámetros se encuentran en la relación $d_A = 2d_B$. Cuando se mantiene la misma diferencia de temperatura entre los extremos de los cilindros, ambos conducen el mismo calor por unidad de tiempo. Entonces, sus conductividades térmicas se relacionan por la igualdad: (*a*) $k_A = k_B/4$, (*b*) $k_A = k_B/2$, (*c*) $k_A = k_B$, (*d*) $k_A = 2k_B$, (*e*) $k_A = 4k_B$. SSM

14 •• Dos cilindros sólidos fabricados con materiales A y B tienen el mismo diámetro y sus longitudes son tales que $L_A = 2L_B$. Cuando se mantiene la misma diferencia de temperatura entre los extremos de ambos cilindros, circula el calor al mismo ritmo. Sus conductividades térmicas están relacionadas mediante la ecuación: (*a*) $k_A = k_B/4$, (*b*) $k_A = k_B/2$, (*c*) $k_A = k_B$, (*d*) $k_A = 2k_B$, (*e*) $k_A = 4k_B$.

15 •• Si tocamos la parte interior de una ventana de un solo vidrio durante un día muy frío, notamos que está fría aunque la temperatura del interior de la habitación sea confortable. Suponiendo que la temperatura del interior es de 20 ºC y que la del exterior es de 5 ºC, construir una gráfica de la temperatura en función de la posición, empezando desde el interior de la habitación a una distancia de 5 m de la ventana hasta una distancia de 5 m del lado exterior de la ventana. Explicar los mecanismos de transferencia de calor que tienen lugar a lo largo del trayecto.

16 •• Durante la renovación de los aislamientos de muchos hogares en California, se observó que las cámaras de aire de las paredes, de 3,5 pulgadas de ancho, estaban llenas de aire (no tenían aislante). Si se rellenan las cámaras con algún material aislante, se reducen las pérdidas de calor aunque el material sea mejor conductor térmico que el aire. Explicar el motivo.

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

17 •• Usted utiliza un olla para hervir agua y preparar un plato de pasta. La receta dice que se necesitan por lo menos 4 L de agua. Al llenar la olla con 4 L de agua a temperatura ambiente observa que la olla se llena hasta el borde. Cuando se caliente al agua hasta su ebullición, ¿qué sucederá, se derramará agua debido a la dilatación del acero de la olla o no? Explicar la respuesta. En caso de que se derrame agua, ¿qué cantidad de agua se derramará? SSM

18 •• El helio líquido se almacena en recipientes dotados de un "superaislamiento" de 7 cm de espesor formado por un gran número de capas que consisten en láminas muy delgadas de mylar aluminizado. La velocidad de evaporación del líquido en un recipiente de 200 L es aproximadamente de 0,7 L por día. Suponer que el recipiente es esférico y la temperatura externa de 20 °C. El peso específico del helio líquido es 0,125 Kg/L y su calor latente de vaporización, 21 kJ/kg. Efectuar una estimación de la conductividad térmica del "superaislamiento".

19 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Estimar la conductividad térmica de la piel humana. SSM

20 •• Usted está de visita en Finlandia y se reúne con unos amigos finlandeses para tomar parte en un ejercicio tradicional de sauna que consiste en salir de la sauna llevando sólo la ropa de la sauna y correr por el exterior en mitad del invierno finés. Estimar el ritmo inicial de pérdida de calor. Comparar el valor inicial del ritmo de pérdida de calor con el ritmo metabólico humano típico en condiciones normales. Explicar la diferencia.

21 •• Calcular el ritmo de conducción de calor a través de una puerta de madera de 2 pulgadas de espesor durante un día del frío invierno en Minnesota. Incluir el pomo metálico de la puerta. ¿Cuál es el cociente entre el ritmo de pérdida de calor a través del pomo y el total que se pierde? ¿Cuál es el valor total del factor R de la puerta incluyendo el pomo? La conductividad térmica del pomo es 85 W/(m · K).

22 •• Hacer una estimación de la emisividad efectiva de la Tierra a partir de la siguiente información: la constante solar (la intensidad de radiación incidente sobre la Tierra procedente del Sol) es 1370 W/m^2, el 70% de esta luz es absorbida por la Tierra y la temperatura media de la superficie de nuestro planeta es 288 K. (Suponer que el área efectiva que está absorbiendo la luz es πR^2, donde R es el radio de la Tierra, mientras que el área de emisión del cuerpo negro es $4\pi R^2$.)

23 •• Los agujeros negros en órbita alrededor de una estrella estándar se detectan desde la Tierra debido al calentamiento por rozamiento del gas que se precipita dentro del agujero negro, el cual puede alcanzar temperaturas por encima de 10^6 K. Suponiendo que ese gas puede considerarse como un cuerpo negro, hacer una estimación de $\lambda_{máx}$ para utilizarla en la detección astronómica de un agujero negro. (Observación: esta longitud de onda corresponde a la región de los rayos X del espectro electromagnético.)

24 ••• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA, PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Su cabaña situada en el norte de Michigan tiene unas paredes exteriores de pino de un grosor de unos 20 cm. Usted decide acabar el interior de las paredes con un material decorativo y que a la vez sea aislante. Adquiere un material cuyo factor R es de 31. Además, decide recubrir ese material con una capa de yeso de 1 pulgada de grosor. Suponiendo que la transferencia de calor se realiza por conducción, estimar el ritmo de esta transferencia de calor a través de las paredes durante una fría noche de invierno, antes y después de la reforma.

25 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Usted se encarga de transportar un hígado para un trasplante desde New York hasta Los Angeles. El hígado se mantiene frío en un recipiente donde se ha colocado 1 kg de hielo. Es crucial que su temperatura nunca sea superior a 5 °C. Si el viaje de una ciudad a la otra dura 7 horas, calcular el valor del factor R que deben tener las paredes del recipiente. SSM

DILATACIÓN TÉRMICA

26 •• Una persona ha heredado el reloj de su abuelo que fue calibrado cuando la temperatura de la habitación era de 20 °C. Suponer que el péndulo consiste en un alambre fino de masa despreciable y una bola compacta en su extremo. (*a*) Durante un día caluroso, cuando la temperatura es de 30 °C, ¿el reloj va más rápido o más lento? Explicar la respuesta. (*b*) ¿Cuánto se atrasa o adelanta el reloj durante ese día?

27 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Una abrazadera de cobre debe ajustar fuertemente alrededor de una barra de acero cuyo diámetro es 6,0000 cm a 20 °C. El diámetro interior de la abrazadera de cobre a esa temperatura es de 5,9800 cm. ¿A qué temperatura debe calentarse la abrazadera para que ajuste perfectamente sobre la barra de acero, suponiendo que ésta permanece a 20 °C? SSM

28 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Se tiene una abrazadera de cobre y una barra de acero. A 20 °C, la abrazadera tiene una diámetro interior de 5,98 cm y la barra de acero un diámetro de 6 cm. Se calienta la abrazadera de cobre. Cuando su diámetro interior llega a los 6 cm se ajusta a la barra y se cierra. La abrazadera ajustó fuertemente sobre la barra cuando se enfrió de nuevo a temperatura ambiente. Unos años más tarde, para separar la abrazadera, usted calienta tanto la abrazadera como la barra hasta que se pueden separar. ¿Qué temperatura deberá alcanzar la abrazadera para poderla separar de la barra?

29 •• Un recipiente se llena hasta el borde con 1,4 L de mercurio a 20 °C. Cuando la temperatura del recipiente y del mercurio se eleva a 60 °C, se derraman 7,5 mL de mercurio por el borde del recipiente. Determinar el coeficiente de dilatación lineal del recipiente.

30 •• Un coche tiene su depósito de gasolina de acero y 60 L de capacidad completamente lleno cuando la temperatura es 10 °C. Teniendo en cuenta la dilatación del depósito, sabiendo que está fabricado de acero, ¿cuánta gasolina se derramará si se aparca el coche al sol y su temperatura se eleva hasta 25 °C?

31 ••• ¿Cuál es la tensión de tracción de la abrazadera de cobre del problema 27 cuando su temperatura vuelve a ser 20 °C?

ECUACIÓN DE VAN DER WAALS, ISOTERMAS LÍQUIDO-VAPOR Y DIAGRAMAS DE FASE

32 • (*a*) Calcular el volumen de 1 mol de vapor a 100 °C y 1 atm de presión suponiendo que se comporta como un gas ideal. (*b*) Calcular la temperatura a la que un mol de vapor a 1 atm de presión ocupará el volumen obtenido en (*a*) si el vapor obedece la ecuación de Van der Waals, siendo $a = 0{,}55\ \text{Pa} \cdot \text{m}^6/\text{mol}^2$ y $b = 30\ \text{cm}^3/\text{mol}$.

33 •• Usando la figura 20.16, determinar (*a*) la temperatura a la cual hierve el agua en lo alto de un monte si la presión atmosférica es de 70 kPa, (*b*) la temperatura a la que hervirá el agua en un recipiente donde la presión se ha reducido a 0,5 atm y (*c*) la presión a la cual hervirá el agua a 115 °C. SSM

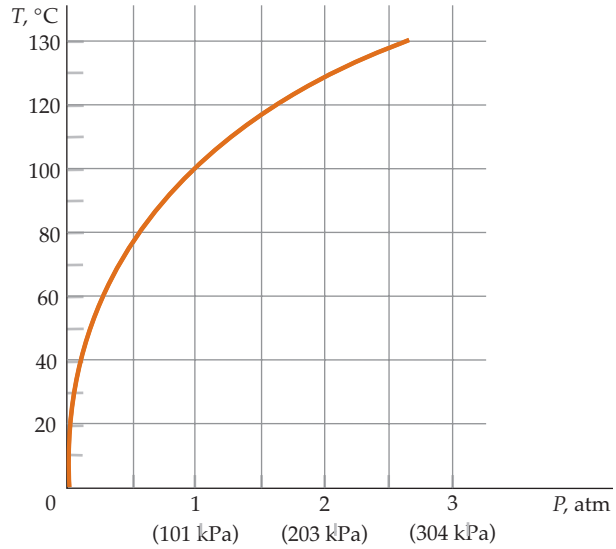


FIGURA 20.16 Problema 33

34 •• Las constantes de Van der Waals para el helio son $a = 0{,}03412\ \text{L}^2 \cdot \text{atm}/\text{mol}^2$ y $b = 0{,}0237\ \text{L}/\text{mol}$. Utilizar estos datos para hallar el volumen en centímetros cúbicos ocupado por un átomo de helio y hacer una estimación del radio del átomo.

CONDUCCIÓN

35 • Una lámina aislante de 20 × 30 pies posee un factor R igual a 11. ¿Cuál es el ritmo de conducción de calor a través del aislante si la temperatura en un lado es de 68 °F y en el otro de 30 °F? SSM

36 •• Dos cubos metálicos con aristas de 3 cm, uno de cobre (Cu) y otro de aluminio (Al), se disponen como se muestra en la figura 20.17. Determinar (*a*) la resistencia térmica de cada cubo, (*b*) la resistencia térmica del sistema de los dos cubos, (*c*) la corriente térmica I y (*d*) la temperatura en la interfaz de los dos cubos.

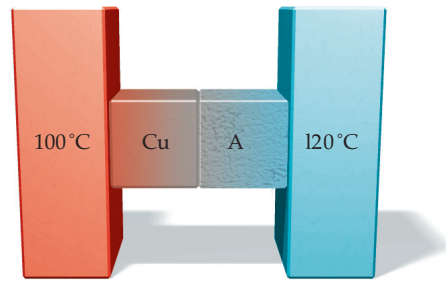


FIGURA 20.17 Problema 36

37 •• Los cubos del problema 36 se disponen ahora en paralelo, como indica la figura 20.18. Determinar (*a*) la corriente térmica que circula por cada cubo de un extremo al otro, (*b*) la corriente térmica total y (*c*) la resistencia térmica equivalente del sistema de los dos cubos.

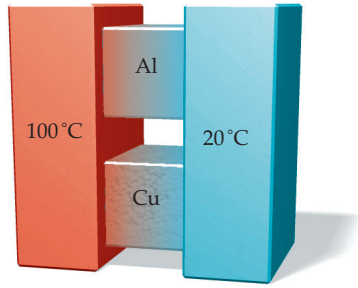


FIGURA 20.18 Problema 37

38 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** El coste del aire acondicionado de una casa es proporcional a la tasa a la que fluye el calor de la casa e inversamente proporcional al coeficiente de eficiencia del acondicionador. Designamos ΔT a la diferencia de temperatura entre la casa y el medio exterior. Suponiendo que la tasa a la que fluye el calor de la casa es proporcional a ΔT y que el acondicionador de aire funciona como una máquina ideal, demostrar que el coste del aire acondicionado es proporcional a $(\Delta T)^2$ dividido por la temperatura del interior de la casa.

39 •• Una corteza esférica de conductividad térmica k tiene un radio interior r_1 y un radio exterior r_2 (figura 20.19). La parte interior de la corteza se mantiene a la temperatura T_1 y la exterior a la temperatura T_2, siendo $T_1 < T_2$. Demostrar que la corriente térmica a través de la corteza viene dada por la expresión:

$$I = -\frac{4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1}(T_2 - T_1)$$

donde I es positivo si el calor se transfiere en la dirección $+r$. Se sugiere seguir el siguiente procedimiento: (1) obtener una expresión para la I que circula a través de una corteza fina de radio r y grosor dr cuando la diferencia de temperaturas entre los dos lados de la corteza es dT; (2) explicar por qué la corriente térmica es la misma para cualquier corteza fina; (3) expresar I en función del área $A = 4\pi r^2$, el espesor dr y la diferencia de temperaturas entre el interior y el exterior; y (4) separar variables (despejar dT en función de r y dr) e integrar.

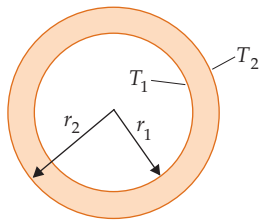


FIGURA 20.19 Problema 39

RADIACIÓN

40 • **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Calcular $\lambda_{máx}$ (la longitud de onda para la cual la potencia emitida es máxima) para un cuerpo humano que emita calor radiante como un cuerpo negro, suponiendo que la superficie de la piel está a la temperatura de 33 °C.

41 • El universo está lleno de radiación que se cree que procede del *big bang*. Si el universo se considera como un cuerpo negro con temperatura 2,3 K, ¿cuál será la $\lambda_{máx}$ (longitud de onda a la cual la potencia de la radiación es máxima)? SSM

42 • ¿Cuál es el rango de temperaturas de la superficie de una estrella para las cuales $\lambda_{máx}$ (longitud de onda a la cual la potencia de la radiación es máxima) está en el rango del visible?

43 • Los cables de calefacción de una estufa eléctrica de 1 kW se encuentran al rojo vivo a una temperatura de 900 °C. Suponiendo que el 100% del calor emitido es debido a la radiación y que los cables actúan como radiadores ideales (cuerpo negro), ¿cuál es el área efectiva de la superficie radiante? (Suponer que la temperatura ambiente es de 20 °C.)

44 •• Se cuelga una esfera de cobre ennegrecido de 4,0 cm de diámetro dentro de un recipiente sometido al vacío en donde la temperatura de las paredes es de 20 °C. Si la esfera se encuentra inicialmente a la temperatura de 0 °C, calcular la variación de temperatura con el tiempo si se supone que el único proceso de transmisión del calor que tiene lugar es el de radiación. (Suponer que la esfera es un cuerpo negro.)

45 •• La temperatura superficial del filamento de una lámpara incandescente es de 1300 °C. ¿Cuál será su temperatura si se duplica la potencia eléctrica suministrada? *Sugerencia: demostrar que puede despreciarse la temperatura del medio exterior.*

46 •• Se dispone de helio líquido almacenado a su temperatura de ebullición (4,2 K) en un recipiente esférico; este recipiente está separado de una capa aislante que se mantiene a la temperatura del nitrógeno líquido (77 K) mediante un espacio sometido al vacío. Si el diámetro del recipiente es de 30 cm y se encuentra ennegrecido por su parte exterior de manera que se comporta como un cuerpo negro, ¿cuánto helio se evaporará por hora?

PROBLEMAS GENERALES

47 • Se coloca una cinta de acero alrededor del ecuador terrestre cuando su temperatura media es 0 °C. ¿Cual será la holgura entre la cinta y el suelo (suponiéndolo uniforme) si la temperatura se eleva a 30 °C? (Despreciar la dilatación terrestre.)

48 •• Demostrar que la variación de densidad experimentada por un material isótropo debida a un incremento de temperatura ΔT viene dada por $\Delta\rho = -\beta\rho\,\Delta T$.

49 •• La constante solar es la potencia por unidad de superficie que se recibe desde el Sol en la Tierra sobre una superficie perpendicular a los rayos solares a la distancia media Sol-Tierra. Su valor en el límite superior de la atmósfera terrestre es, aproximadamente, de 1,37 kW/m^2. Calcular la temperatura efectiva de la superficie del Sol si éste irradia como si se tratase de un cuerpo negro. (El radio del Sol es $6{,}96 \times 10^8$ m.) SSM

50 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Para determinar el valor R de un material aislante que viene en láminas de 0,5 pulgadas de espesor, construimos con él una caja cúbica de 12 pulgadas de lado y situamos un termómetro y un calentador de 100 W en su interior. Una vez alcanzado el equilibrio, la temperatura interior de la caja es de 90 °C y la exterior de 20 °C. Determinar el valor R de este material.

51 • (*a*) A partir de la definición de β, coeficiente de dilatación de volumen (a presión constante), demostrar que $\beta = 1/T$ en el caso de un gas ideal. (*b*) El valor determinado experimentalmente para β del gas N_2 es 0,003673 K^{-1} a 0 °C. ¿En qué tanto por ciento difiere esta medida para β del valor obtenido suponiendo que el N_2 es un gas ideal?

52 •• Una barra de longitud L_A, fabricada de un material A, se coloca junto a otra barra de longitud L_B, fabricada de un material B. Las barras permanecen en equilibrio térmico. (*a*) Demostrar que aunque las longitudes de las barras cambien debido a variaciones de la temperatura ambiental, la diferencia de longitudes permanece constante si las longitudes de las barras verifican la relación $L_A/L_B = \alpha_A/\alpha_B$ donde α_A y α_B son los coeficientes de dilatación lineales de ambas barras. (*b*) Si el material B es acero, el material A es latón y $L_A = 250$ cm a 0 ºC, ¿cuánto vale L_B?

53 •• Por término medio, la temperatura de la corteza terrestre se incrementa 1,0 °C por cada 30 m de profundidad. La conductividad térmica media de la corteza terrestre es 0,74 J/m · s · K. ¿Cuál es la pérdida de calor que experimenta la Tierra cada segundo debida a la conducción desde su núcleo? Comparar esta pérdida de calor con la potencia media recibida del Sol. SSM

54 •• Una olla cuyo fondo es de cobre y que contiene 0,8 L de agua hirviendo se seca en 10 minutos. Suponiendo que todo el calor se transmite a través del fondo plano de cobre de 15 cm de diámetro y 3,0 mm de espesor, calcular la temperatura en la parte exterior del fondo de cobre cuando todavía queda algo de agua en la olla.

55 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un tanque de agua caliente de forma cilíndrica y fabricado de acero tiene un diámetro interior de 0,55 m y una altura interior de 1,2 m. El tanque está rodeado por una capa aislante de 5 cm de espesor de lana de vidrio cuya conductividad térmica es 0,035 W/m · K. El aislante está recubierto, a su vez, de una fina lámina de acero. Las láminas de acero interior y exterior del tanque tienen conductividades térmicas muy superiores a la de la lana de vidrio. ¿Qué potencia debe suministrarse al tanque para mantener la temperatura del agua a 75 °C cuando la temperatura externa es de 1 °C?

56 •• El diámetro de una barra viene dado por $d = d_0(1 + ax)$, siendo a una constante y x la distancia a un extremo. Si la conductividad térmica del material es k, ¿cuál es la resistencia térmica de la barra si su longitud es L?

57 ••• Un disco sólido de radio r y masa m está girando en un espacio sin rozamiento con velocidad angular ω_1 a la temperatura T_1. La temperatura del disco cambia entonces a T_2. Expresar la velocidad angular ω_2, la energía cinética de rotación E_2 y el momento angular L_2 en función de sus valores respectivos a la temperatura T_1 y del coeficiente de dilatación lineal α del disco.

58 ••• **HOJA DE CÁLCULO** Utilizando los resultados del problema 22, escribir un programa de **hoja de cálculo** para hacer una gráfica de la temperatura de la Tierra en función de la emisividad. ¿Cuánto ha de variar la emisividad para que la temperatura media se eleve 1 K? Esto se podría considerar como un modelo del efecto del aumento de concentraciones de gases como el metano y el CO_2 en la atmósfera terrestre (efecto invernadero).

59 ••• Un pequeño estanque tiene una capa de hielo de 1 cm de espesor flotando sobre él. (*a*) Si la temperatura del aire es −10 °C, hallar la velocidad en centímetros por hora con que aumenta el espesor del hielo por su parte inferior. La densidad del hielo es de 0,917 g/cm^3. (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará en formarse una capa de hielo de 20 cm de espesor? SSM

60 ••• Un cubo de cobre ennegrecido de 1 cm de arista se calienta a una temperatura de 300 ºC y, a continuación, se coloca en una cámara de vacío cuyas paredes están a una temperatura de 0 ºC. En la cámara de vacío, el cubo se enfría emitiendo radiación. (*a*) Demostrar que la temperatura absoluta del cubo obedece la ecuación diferencial: $(dT/dt) = -(e\sigma A/C)(T^4 - T_0^4)$, en la que C es la capacidad calorífica del cubo, A es el área de su superficie, e la emisividad y T_0 la temperatura de la cámara de vacío. (*b*) Utilizando el método de Euler, resolver numéricamente la ecuación diferencial para obtener $T(t)$ y representarla gráficamente. Suponer $e = 1$. (El método de Euler se trata en la sección 5.4 del capítulo 5.) ¿Cuánto tardaría el cubo en enfriarse hasta una temperatura de 15 ºC? SSM

CAPÍTULO R

A BORDO DEL TRANSBORDADOR ESPACIAL ORBITER, LOS ASTRONAUTAS DESCANSAN EN LITERAS Y NO REQUIEREN COLCHONES BLANDOS. DUERMEN ATADOS A ELLAS CON CORREAS Y ASÍ NO VAN FLOTANDO POR LA CABINA. CUANDO EL TRANSBORDADOR RECORRE SU ÓRBITA MÁS CERCANA A LA TIERRA, DA UNA VUELTA COMPLETA CADA 90 MINUTOS A UNA VELOCIDAD DE UNOS 7 km/s, LO QUE REPRESENTA UNA PEQUEÑA FRACCIÓN DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ, $3{,}0 \times 10^5$ km/s. *(NASA.)*

Relatividad especial

R.1 El principio de relatividad y la constancia de la velocidad de la luz

R.2 Barras en movimiento

R.3 Relojes en movimiento

R.4 Más sobre barras en movimiento

R.5 Relojes lejanos y simultaneidad

R.6 Momento relativista, masa y energía

? Si un astronauta en una nave espacial que viaja a una velocidad de $0{,}6c$ respecto a la Tierra duerme una siesta de una hora, ¿dura también una hora dicha siesta para un observador terrestre? (Véase el ejemplo R.1.)

La teoría de la relatividad consta de dos teorías bien diferenciadas: la teoría especial y la teoría general. La teoría especial, desarrollada por Einstein y otros autores en 1905, se ocupa de la comparación de medidas hechas desde distintos sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidades constantes los unos respecto a los otros. Sus consecuencias, que pueden deducirse con un mínimo de matemáticas, son aplicables a una gran variedad de situaciones que se dan tanto en física como en ingeniería. Una aplicación de la teoría especial puede verse en el desarrollo del GPS (*Global Positioning System*), dispositivo capaz de darnos las coordenadas de nuestra posición (longitud, latitud y altitud) con una precisión de pocos metros. El sistema consiste en una constelación de 24 satélites, cada uno provisto de un reloj atómico y de una emisora que emite señales horarias que pueden ser captadas por cualquier receptor GPS con el que esté en visión directa. Las diferencias en los tiempos de recepción de las señales procedentes de distintos satélites, junto con el conocimiento de la posición de cada uno de ellos, permiten calcular al receptor cuales son sus coordenadas de posición. Según la teoría especial, cuanto mayor sea la velocidad con la que vemos pasar un reloj, tanto más lentamente veremos avanzar sus manecillas (sección R.3). Los satélites orbitan a unos 3,9 km/s y el retraso que a esta velocidad experimentan los

relojes no es despreciable. Por ello, en el diseño del GPS se tiene en cuenta el retraso de los relojes en órbita. (Además, de acuerdo con la teoría general, un reloj se adelanta al estar sometido a un potencial gravitatorio mayor (sección 39.8). El diseño también tiene en cuenta el adelanto de los relojes que están a mayor altitud.) El GPS funciona correctamente sólo si se tienen en cuenta estos efectos de la teoría especial y general de la relatividad sobre los ritmos distintos que observamos en los distintos relojes.

En este capítulo, nos centramos en la teoría especial de la relatividad (llamada también relatividad especial o restringida). Veremos cómo dicha teoría desafía nuestra experiencia cotidiana acerca del tiempo y las distancias, cuando describamos la ralentización de los relojes en movimiento, el acortamiento de las barras móviles, la relatividad de la simultaneidad de sucesos alejados, la relatividad del momento lineal y la relación entre masa y energía.

R.1 EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD Y LA CONSTANCIA DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

El principio de relatividad puede enunciarse así:

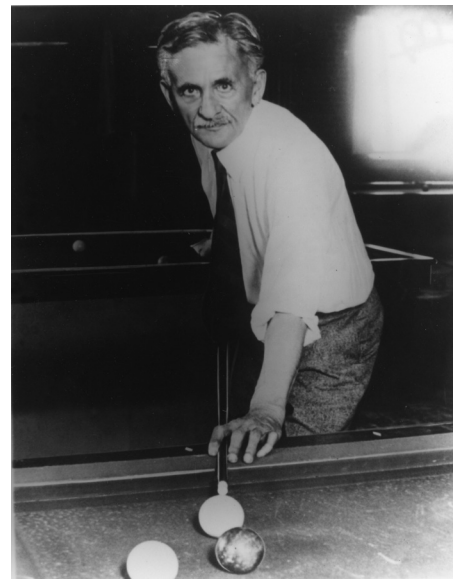
> Es imposible diseñar un experimento que establezca si uno se halla en reposo o en movimiento uniforme.
>
> POSTULADO I, EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Movimiento uniforme es el que se realiza a velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial. Por ejemplo, supongamos que estamos sentados en un avión que viaja a una velocidad uniforme muy elevada respecto a la superficie terrestre. Si soltamos un tenedor, éste caerá hacia el suelo del avión de manera exactamente igual a como lo haría si el avión se encontrara aparcado en la pista. Cuando el avión está volando, podemos considerar que nosotros mismos y el avión estamos conjuntamente en reposo y que es la superficie de la Tierra que tenemos debajo la que se mueve. No hay nada que permita discernir si somos nosotros y el avión los que nos movemos y la superficie terrestre está en reposo, o viceversa.

Todo sistema de referencia en el que una partícula sobre la que no actúa fuerza alguna se mueve con velocidad constante es, por definición, un sistema de referencia inercial.* La superficie de la Tierra es un sistema de referencia inercial, en buena aproximación. El avión también lo es, siempre y cuando viaje a velocidad constante respecto a la superficie terrestre. Mientras permanezcamos sentados (o quietos y en pie) en el avión, tanto podemos considerar que somos nosotros mismos y el avión los que estamos en reposo y la superficie terrestre se mueve, como que nos movemos nosotros con el avión y que la superficie terrestre está en reposo.

Durante el siglo XIX, fue ampliamente aceptada la existencia de un sistema de referencia que podía considerarse en reposo. Se pensaba que este sistema de referencia era el del *éter*, el medio que rellenaba todo el espacio y a través del cual se suponía que se propagaba la luz. (Se creía entonces que las ondas luminosas necesitaban de un medio a través del cual propagarse, tal y como hoy creemos que pasa con el sonido, que requiere del aire o de otro medio material para su propagación.) El éter se consideraba el mejor sistema de referencia, "en reposo".

En 1887, Albert Michelson y Edward Morley realizaron una serie de medidas cuidadosamente diseñadas para determinar la velocidad orbital de la Tierra respecto al éter. Este trabajo de medición suponía un gran reto dado que la velocidad



Albert Michelson.
(AIP Emilio Segre Visual Archives.)

Edward Morley.
(AIP Emilio Segre Visual Archives.)

* En los capítulos 2 y 4, se amplía el estudio de sistemas de referencia.

orbital de la Tierra es un poco inferior a una diezmilésima parte de la velocidad de la luz en el vacío. Con gran sorpresa para la inmensa mayoría, las medidas siempre indicaban que la velocidad relativa entre Tierra y éter era nula. Albert Einstein formuló entonces una teoría consistente con estas medidas. Su explicación fue que la luz era capaz de propagarse en el espacio vacío y que el éter era un concepto innecesario y que no existía. Además, Einstein postuló:

> La velocidad de la luz es independiente de la velocidad de la fuente emisora.
>
> POSTULADO II

Por *velocidad de la luz* entendemos la velocidad con la que la luz se propaga a través del espacio vacío.

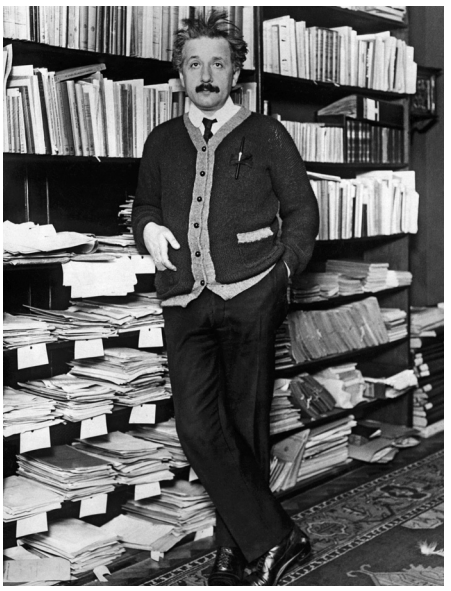
Una consecuencia del Postulado II y del principio de relatividad (Postulado I) es que todos los observadores inerciales miden el mismo valor para la velocidad de la luz. (Un observador inercial es aquel que permanece en reposo en un sistema de referencia inercial.) Para comprobar que todos los observadores inerciales determinan el mismo valor de la velocidad de la luz, consideremos los observadores inerciales A y B, que se mueven uno con relación al otro. El principio de relatividad afirma que es imposible diseñar un experimento para establecer si un observador inercial está en reposo o moviéndose uniformemente. Si el observador A midiera un valor para la velocidad de la luz distinto del medido por el observador B, entonces, dichos observadores A y B no podrían considerarse ambos en reposo: una conclusión que contradice claramente el principio de relatividad. Así pues, una consecuencia conjunta del principio de relatividad y del Postulado II (que la velocidad de la luz es independiente de la velocidad de la fuente emisora) es la **constancia de la velocidad de la luz**:

> La velocidad de la luz c es la misma en cualquier sistema de referencia inercial.
>
> CONSTANCIA DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Además, cualquier móvil (y no sólo la luz) que viaje a velocidad c respecto a un sistema de referencia inercial, viaja también a la misma velocidad c respecto a cualquier otro sistema de referencia inercial.

Supongamos que estamos en el patio de nuestra casa y que Luis viaja en una nave espacial que se aleja de nosotros a la mitad de la velocidad de la luz ($\frac{1}{2}c$) (figura R.1). Enfocamos una linterna en la dirección de Luis y la encendemos. La luz sale de la linterna, viajando a velocidad c (relativa a la linterna), y pasa cerca de Alicia, que se encuentra en la azotea de la casa de al lado. Alicia mide la velocidad de la luz y determina el valor c. Al cabo de unos minutos, la luz alcanza a Luis y su nave. Al igual que Alicia, Luis mide también la velocidad de la luz y determina el mismo valor c. Esto le sorprende, porque Luis esperaba que la luz que viajaba tras él lo hacía, no a velocidad c, sino más bien a $\frac{1}{2}c$ (después de todo, Luis se mueve a velocidad $\frac{1}{2}c$ respecto a la fuente luminosa, la linterna que tenemos en el patio). Al igual que muchos, Luis considera contraria a la intuición esta constancia de la velocidad de la luz. Esto le crea un dilema, ¿ha de confiar en sus aparatos de medida o ha de confiar en su intuición? Resulta que es la intuición de Luis, y no sus instrumentos, lo que habrá que reajustar. Luis debe cambiar tanto sus conceptos de espacio como de tiempo.

Supongamos que en lugar de apuntar con un haz de luz lo hacemos en la misma dirección con un emisor de partículas que viajan, unas tras otras, a altísima velocidad, entendiendo como tal una velocidad muy cercana a la de la luz c. (Una partícula como un electrón o un protón no puede viajar a la velocidad de la luz, pero puede hacerlo a velocidades extremadamente cercanas a ésta.) Si Alicia mide que las partículas que pasan por su lado viajan a la velocidad de $0{,}9999c$ (relativa a ella), ¿qué velocidad medirá Luis para las partículas que pasan junto a él? La intuición de Luis le dice que, dado que él se aleja del foco emisor de partículas, éstas



Albert Einstein.
(Underwood & Underwood/Corbis.)

FIGURA R.1

pasarán por su lado más lentamente, a una velocidad de 0,4999*c*. Pero no es así. Cuando Luis mide la velocidad de las partículas (relativa a sí mismo), obtiene un valor muy cercano a 0,9999*c*. (De hecho, su velocidad es 0,9997*c*.)*

Solemos pensar que las distancias entre ciudades son invariables. Pero esto tampoco es así. Según cierto mapa de carreteras, entre Baltimore y Philadelphia hay 160 km. Sin embargo, si viajáramos de Baltimore a Philadelphia a una velocidad cercana a la velocidad de la luz, la distancia entre estas dos ciudades sería más corta de lo que es si viajamos a 100 km/h. Para quien conduzca a 100 km/h, la distancia entre Baltimore y Philadelphia es muy cercana a 160 km. Pero para alguien que viajara a una velocidad de 0,866*c* (relativa a la superficie terrestre), la distancia sería de sólo 80 km, y para quien viajara a 0,9999*c*, la distancia sería solamente de 2,2 km.

La máxima velocidad respecto a la Tierra que ha alcanzado jamás un ser humano (se alcanzó durante la misión Apolo a la Luna) es solamente de unos 10 km/s = $3{,}3 \times 10^{-5}c$. Frente a la velocidad de la luz, esta velocidad es tan pequeña que para alguien que viaje a esa velocidad de Baltimore a Philadelphia, la distancia entre estas ciudades se acortaría en menos del diámetro de un cabello humano. En las tres secciones siguientes, se exponen los razonamientos que nos llevan a estas conclusiones.

R.2 BARRAS EN MOVIMIENTO

Vamos a comprobar que si una barra se mueve en la dirección perpendicular a su propia longitud, esta longitud no cambia. Lo hacemos mostrando que cualquier aumento o disminución de la longitud estaría en contradicción con el principio de relatividad. Puede parecer intrascendente comprobar que una barra no cambia su longitud. Lo hacemos, sin embargo, porque una de las consecuencias inmediatas de ello será que los relojes en movimiento ralentizan su marcha y atrasan respecto a un reloj inmóvil.

Supongamos que disponemos de dos reglas idénticas de un metro, regla A y regla B. Comprobamos que las reglas son idénticas colocándolas una junto a otra en un sistema de referencia en que ambas estén en reposo y las examinamos visualmente. Damos después la regla B a Berta que se la lleva en su nave espacial. Durante el viaje, Berta se asegura de mantener su regla B formando un ángulo recto con la velocidad que tiene la nave respecto a la Tierra. La regla A se queda en la Tierra con nosotros. Mientras dura el viaje, ¿es la regla B más corta que la A?

Para responder a esta pregunta vamos a realizar mentalmente un experimento. Fijamos dos rotuladores a la regla A, uno en la marca de los 20 cm y el otro en la de los 80 cm. Entonces, Berta ejecuta una pasada rasante con su nave manteniendo su regla B asomada a una ventanilla y formando un ángulo recto con la velocidad de la nave. Durante esta pasada, sostenemos nuestra regla A manteniéndola paralela a la regla B. Cuando las dos reglas se cruzan quedan trazadas dos señales en la regla B (figura R.2). Berta aterriza con su regla B, las dos reglas se vuelven a colocar una al lado de la otra (figura R.3) y se compara la distancia entre las dos señales de la regla B con la distancia entre los dos rotuladores fijados a la regla A. Supongamos que una regla que se mueve perpendicularmente a su dirección fuera más corta que una regla idéntica en reposo. En este caso, la distancia entre rotuladores sería inferior a la distancia entre señales (figura R.3) —una evidencia clara de que durante el vuelo la regla móvil (regla B) era más corta que la regla en reposo. Sin embargo, de acuerdo con el principio de relatividad, es igualmente válido pensar que era la regla B la que estaba en reposo y la regla A la que se movía. Desde este punto de vista, la anterior comparación (figura R.3) demostraría que la regla en movimiento (ahora, la regla A) era más larga que la que quedó en reposo. Por lo tanto, nuestra suposición de que una regla que se mueve perpendicularmente a su longitud es más corta que otra regla idéntica en reposo, lleva a una contradicción y debe ser rechazada. La suposición de que una regla que se mueve perpendicularmente a su longitud es más larga

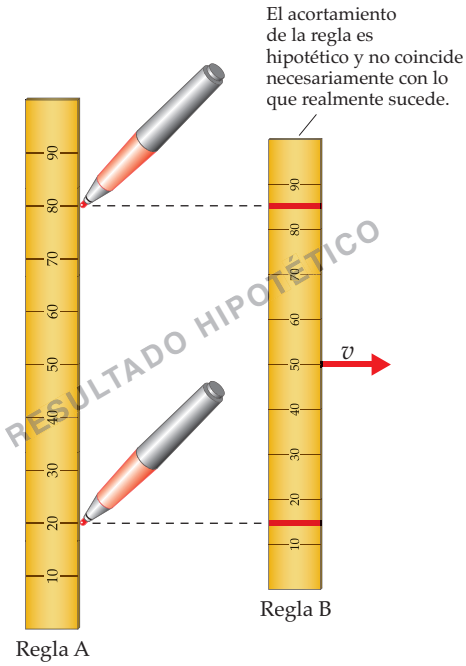


FIGURA R.2 Si la regla en movimiento se acortara, los rotuladores fijados a la regla A trazarían señales como éstas sobre la regla B al pasar junto a ella.

FIGURA R.3 Si la distancia entre señales fuera mayor que la distancia entre rotuladores, esto demostraría que, cuando se hicieron las señales, la regla B era más corta que la regla A.

* La velocidad relativa en relatividad especial se estudia en el capítulo 39.

que otra regla idéntica en reposo lleva también a contradicción, como veríamos usando un razonamiento análogo. Concluimos, por lo tanto, que:

> Una regla que se mueve con velocidad perpendicular a la propia regla tiene la misma longitud que otra regla idéntica en reposo.

Esta conclusión se ha alcanzado sin hacer referencia alguna al material con el que se construyó la regla. La conclusión, por lo tanto, no refleja una propiedad de las reglas. Refleja, en cambio, una propiedad del espacio.

El sistema de referencia en el que la regla está en reposo recibe el nombre de **sistema propio** o **sistema en reposo** de la regla, y la longitud de la regla en su sistema propio se denomina **longitud propia** o **longitud en reposo**.

R.3 RELOJES EN MOVIMIENTO

Los relojes sirven para medir tiempos. En este apartado, vamos a demostrar que los relojes en movimiento que observamos se atrasan respecto a nuestros propios relojes. Así pues, si una nave espacial muy rápida pasa frente a nosotros, observaremos que cada uno de los relojes de la nave avanza más lentamente que nuestros propios relojes. Sin embargo, la gente de la nave puede considerar que son ellos quienes están en reposo y nosotros quienes nos movemos, y observarían que son nuestros relojes los que avanzan más lentamente que los suyos. Examinemos cómo estas dos observaciones son consistentes con la constancia de la velocidad de la luz y el principio de relatividad.

Construimos un reloj, llamémosle *reloj de luz*, usando una barra de longitud propia L_0 y dos espejos (figura R.4). Los dos espejos están frente a frente y un flash de luz va y viene reflejándose en ellos. Cada vez que el flash se refleja en un espejo, digamos el superior, consideramos que el reloj hace "tic", y al regresar y reflejarse en el inferior hace "tac", completando así un "tictac". Entre dos tac sucesivos el flash de luz viaja una distancia $2L_0$ en el sistema de referencia propio del reloj. Por lo tanto, el tiempo entre tac y tac, T_0, está relacionado con L_0 por

$$2L_0 = cT_0 \qquad \text{R.1}$$

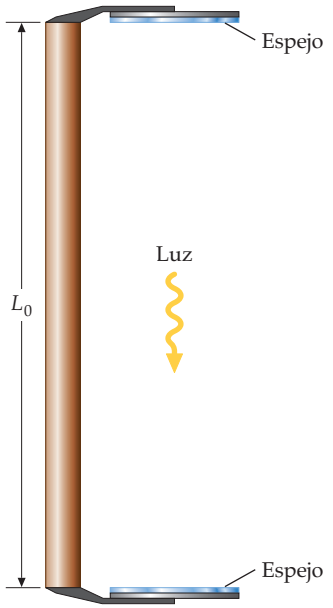


FIGURA R.4 El reloj de luz completa un "tictac" cada vez que el flash se refleja en el espejo inferior.

A continuación, consideramos el tiempo T entre tac y tac del mismo reloj de luz, pero esta vez lo observamos desde un sistema de referencia en el que el reloj se mueve con velocidad v perpendicular a la barra (figura R.5). En este sistema de referencia, entre tac y tac, el reloj recorre una distancia vT y el flash de luz lo hace una distancia cT. La distancia que recorre el flash de luz al viajar desde el espejo inferior al superior es $\sqrt{L_0^2 + (\frac{1}{2}vT)^2}$. Y es también la misma distancia que recorre desde el espejo superior al inferior. Por lo tanto,

$$2\sqrt{L_0^2 + (\tfrac{1}{2}vT)^2} = cT \qquad \text{R.2}$$

Ya que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema de referencia inercial, hemos usado el mismo símbolo c para la velocidad de la luz en las ecuaciones R.1 y R.2. Despejando L_0 en la ecuación R.1 y sustituyendo el resultado en la ecuación R.2, obtenemos

$$\sqrt{(\tfrac{1}{2}cT_0)^2 + (\tfrac{1}{2}vT)^2} = \tfrac{1}{2}cT \qquad \text{R.3}$$

Despejando T, nos da

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \text{R.3}$$

DILATACIÓN DEL TIEMPO

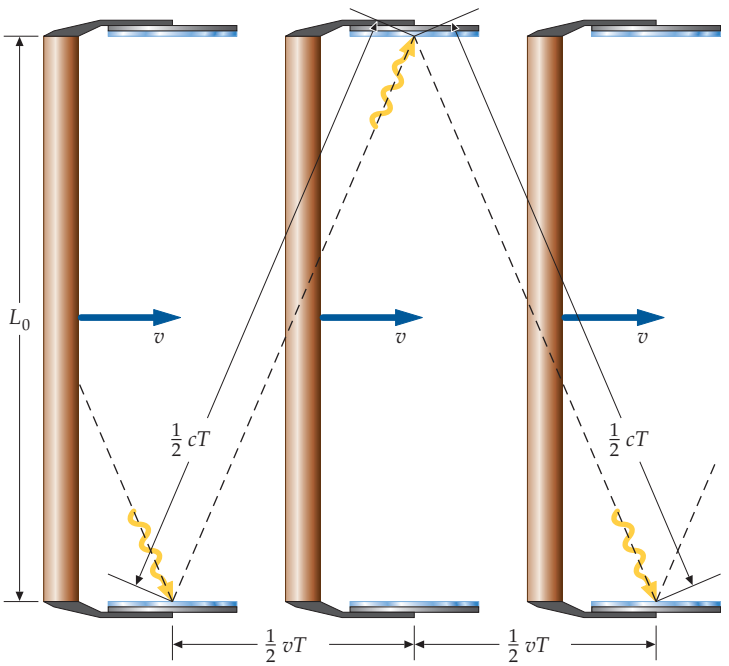


FIGURA R.5 El reloj de luz se mueve con velocidad v.

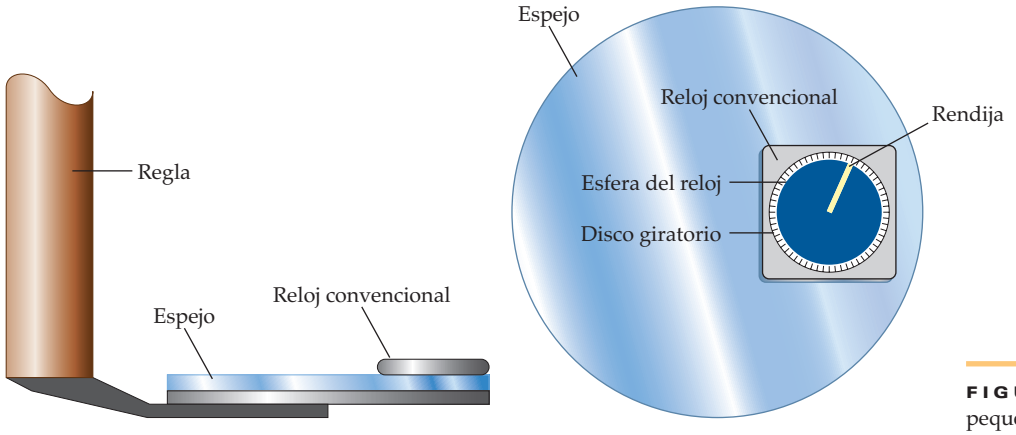


FIGURA R.6 Hemos colocado un pequeño reloj convencional en el espejo inferior del reloj de luz.

De acuerdo con esta ecuación R.3, el tiempo entre tac y tac en el sistema de referencia en el cual el reloj se mueve con velocidad v es mayor que el tiempo entre tac y tac en el sistema de referencia propio del reloj.

Esto nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Atrasan también otros relojes al moverse con velocidad v de acuerdo con la ecuación R.3 o es esta ecuación válida sólo para relojes de luz? Para responder esta pregunta, fijamos un reloj convencional (con un mecanismo convencional de relojería) al espejo inferior del reloj de luz (figura R.6). Al reloj convencional le hemos suprimido la manecilla horaria y el minutero. En lugar de la manecilla que señala los segundos, el segundero, tiene un disco opaco con una estrecha rendija a lo largo de un radio que va girando y marca así el paso del tiempo. La esfera del reloj dispone de 60 señales (llamémoslas señales de tac) distribuidas uniformemente a lo largo de su perímetro, una para cada segundo. El reloj hace tac cada vez que la rendija pasa por encima de una señal de tac. Ajustamos la longitud L_0 de la barra del reloj de luz, de tal manera que el intervalo de tiempo entre tac y tac de ambos relojes sea el mismo en el sistema de referencia propio de los relojes. A continuación, sincronizamos los relojes, de modo que cada tac del reloj de luz se produzca simultáneamente con el tac del reloj convencional. Finalmente, nos preguntamos: "Si el tac de un reloj y el del otro ocurren simultáneamente en el sistema de referencia propio de los relojes, ¿ocurrirán simultáneamente también en un sistema de referencia en el que los relojes se muevan a velocidad v?"

La respuesta es afirmativa. Para comprender el porqué, consideremos el experimento siguiente. En el sistema de referencia de los relojes, hagamos que el intervalo entre tac y tac de ambos relojes sea de un segundo. Coloquemos una película sensible a la luz en la esfera del reloj convencional, detrás del disco opaco giratorio. Cada vez que el flash de luz sea reflejado por el espejo inferior, queda impresionada la estrecha franja de la película fotosensible que se encuentra justo debajo de la rendija. Estas franjas impresionadas apuntarán radialmente a cada una de las señales de tac, como muestra la figura R.7, y todos los observadores deberán estar de acuerdo con lo que así queda permanentemente registrado.

En el sistema de referencia A, en el que ambos relojes se mueven, el flash de luz impresiona la película fotosensible que hay detrás de la rendija cada vez que dicho flash es reflejado por el espejo inferior. Puesto que el reloj de luz está en movimiento, el intervalo de tiempo entre reflexiones es superior a 1 s, de acuerdo con la ecuación R.3. Cuando una observadora del sistema de referencia A vea que las franjas impresionadas en la película quedan alineadas con las señales de tac, quedará convencida de que, observados desde su sistema de referencia A, los relojes convencionales atrasan exactamente de la misma manera en que atrasa el reloj de luz, es decir, de acuerdo con la ecuación R.3. Por lo tanto, llegamos a la conclusión de que, observados desde el sistema A, todos los relojes móviles avanzan más despacio, exactamente de la misma manera en que lo hace un reloj de luz. Por este motivo, concluimos que es el tiempo en sí el que se observa pasar más lentamente, un fenómeno que conocemos como **dilatación temporal**.

A algo que ocurre en un instante específico de tiempo y en un lugar específico del espacio lo llamamos **suceso espacio-temporal** o, simplemente, **suceso**. Cada reflexión

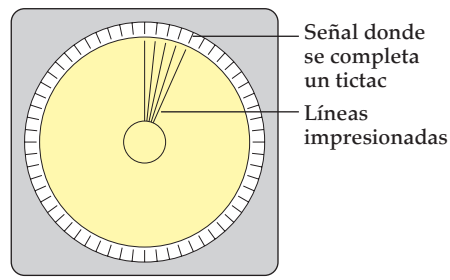


FIGURA R.7 La luz que incide en el reloj convencional y atraviesa la rendija impresiona la película fotosensible que hay detrás de la rendija.

del flash de luz en el espejo inferior es, pues, un suceso espacio-temporal. Si a una de estas reflexiones la llamamos suceso 1 y a la siguiente suceso 2, al tiempo transcurrido entre los sucesos 1 y 2 en un sistema de referencia en el que los dos sucesos ocurran en el mismo punto del espacio se le llamará **intervalo de tiempo propio** T_0 entre los dos sucesos. Sea T el intervalo de tiempo entre los dos sucesos en un sistema de referencia en el que se produzcan en puntos distintos. La ecuación R.3 relaciona el tiempo T entre estos sucesos con el tiempo propio T_0 entre los mismos sucesos.

Cada vez que un flash de luz se refleja en el espejo inferior, la rendija del reloj convencional (el segundero) apunta directamente hacia una señal de tac. En el sistema propio de los dos relojes, estos dos sucesos (la llegada del flash de luz y el paso de la rendija por encima de la señal) ocurren al mismo tiempo y en el mismo punto. Dos sucesos cualesquiera, que ocurren al mismo tiempo y en el mismo punto en un sistema de referencia, ocurrirán también al mismo tiempo y en el mismo punto en todos los sistemas de referencia. Esto se debe a que estos sucesos pueden tener consecuencias permanentes o indelebles, como impresionar franjas en películas fotosensibles que se alinean con las señales de tac de la esfera del reloj. No podemos tener las franjas alineadas con las señales en un sistema de referencia y no alineadas en otro sistema de referencia. Después de todo, sólo hay una esfera y un conjunto de señales. Esta conclusión puede generalizarse en un principio, el llamado principio de **invariancia de coincidencias**:

> Si dos sucesos ocurren en el mismo instante y en el mismo punto en un sistema de referencia, también ocurren en el mismo instante y en el mismo punto en cualquier otro sistema de referencia.
>
> PRINCIPIO DE INVARIANCIA DE COINCIDENCIAS

Podemos visualizar mejor este principio considerando dos automóviles pasando por un cruce al mismo tiempo. Los dos sucesos son: (1) el automóvil A pasa por el cruce y (2) el automóvil B pasa por el cruce. Si estos dos sucesos ocurren simultáneamente en un sistema de referencia, deben también hacerlo simultáneamente en cualquier otro sistema de referencia. O queda abollado un parachoques, o no lo queda. Es decir, si los automóviles chocan, es indiscutible que se encontraban en el cruce al mismo tiempo. Las evidencias que quedan indican que los observadores de cualquier sistema de referencia deben estar de acuerdo en este hecho. Llamamos **coincidencia espacio-temporal** a todo par de sucesos que ocurran en el mismo instante y en el mismo punto del espacio.

Ejemplo R.1 La siesta de los astronautas *Póngalo en su contexto*

Está usted trabajando en un centro de control espacial y se comunica regularmente con los astronautas de una nave espacial que viaja a $v = 0{,}600c$ respecto a la Tierra. Los astronautas cortan la comunicación con el centro de control espacial diciendo que van a dormir una siesta de 1,00 h y volverán a llamar después. ¿Cuánto durará esta siesta para los observadores de la Tierra?

PLANTEAMIENTO El reloj S de la nave marca t_0 cuando empieza la siesta (una coincidencia espacio-temporal) y marca t_0 + 1,00 h cuando termina (otra coincidencia espacio-temporal). Los observadores que están en la nave están de acuerdo en que la siesta ha durado 1,00 h, ya que el reloj S está en reposo y no atrasa. En el sistema de referencia de la nave, los dos sucesos (el inicio y el final de la siesta) tienen lugar en el mismo punto y, por ello, el intervalo de tiempo entre los sucesos es también su intervalo de tiempo propio. Los observadores terrestres están de acuerdo en que el reloj S de la nave marca t_0 cuando empieza la siesta y marca t_0 + 1,00 h cuando termina. Sin embargo, también están de acuerdo en que la siesta ha durado más de 1,00 h, porque este reloj S se mueve a velocidad v y, por lo tanto, atrasa al ser observado desde la Tierra. En el sistema de referencia de la Tierra, la nave se mueve y, por ello, la siesta empieza y termina en puntos distintos del espacio. Por lo tanto, en el sistema de referencia de la Tierra, el intervalo de tiempo entre los sucesos no es su intervalo de tiempo propio.

SOLUCIÓN

1. El suceso 1 es el inicio de la siesta y el suceso 2 su fin. El reloj S de la nave indica que ha pasado 1,00 h entre estos dos sucesos. Determinar el intervalo de tiempo propio T_0 entre estos sucesos:

$$T_0 = 1{,}00 \text{ h}$$

2. Calcular el intervalo temporal T entre los sucesos 1 y 2 para los observadores terrestres:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{1{,}00 \text{ h}}{\sqrt{1 - \dfrac{(0{,}600c)^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1{,}00 \text{ h}}{\sqrt{1 - 0{,}360}} = \frac{1{,}00 \text{ h}}{\sqrt{0{,}640}} = \frac{1{,}00 \text{ h}}{0{,}800} = \boxed{1{,}25 \text{ h}}$$

COMPROBACIÓN La duración de la siesta resulta más larga al ser observada desde el sistema de referencia de la Tierra, lo que concuerda con la ecuación R.3.

OBSERVACIÓN Puede prescindirse del reloj S, ya que los propios astronautas pueden servir también como relojes. Hay que darse cuenta de que el tiempo propio que pasa entre el inicio y el fin de la siesta es 1,00 h y que, por lo tanto, el tiempo T que pasa entre los mismos sucesos en un sistema de referencia en el que el reloj (los astronautas) se mueve con velocidad v viene dado por la ecuación R.3.

EJERCICIO PRÁCTICO R.1 Los piones* cargados tienen una vida media de 26 ns (1 ns = 1×10^{-9} s) (medida cuando los piones están en reposo). ¿Cuál sería la vida media si se midiera la de piones que viajan a $0{,}995c$?

EJERCICIO PRÁCTICO R.2 Un haz de piones (véase el ejercicio práctico R.1) pasa por el punto P a la velocidad de $0{,}995c$. ¿A qué distancia del punto P la intensidad del haz de piones se ha reducido un factor $e = 2{,}72$?

R.4 MÁS SOBRE BARRAS EN MOVIMIENTO

En la sección R.2, se comparaba la longitud de una barra en reposo con la de otra barra idéntica que se movía perpendicularmente a sí misma y se deducía que ambas longitudes debían ser iguales. Pero el procedimiento usado para realizar dicha comparación sólo funciona si la velocidad de la barra es perpendicular a su propia longitud. Aplicaremos ahora un procedimiento distinto para comparar la longitud de una barra en reposo con la que tiene al observarla moviéndose con una velocidad paralela a su propia longitud.

La figura R.8 muestra un reloj de luz en su sistema de referencia propio. Este reloj completa un tictac cada vez que el flash de luz se refleja en el espejo de la izquierda. En su sistema de referencia propio, la longitud del reloj es L_0 y el intervalo entre un tac y el siguiente es $T_0 = 2L_0/c$ (ecuación R.1). Para determinar la longitud del reloj en un sistema de referencia en el que se mueve hacia la derecha con velocidad v, consideramos esta secuencia de tres sucesos:

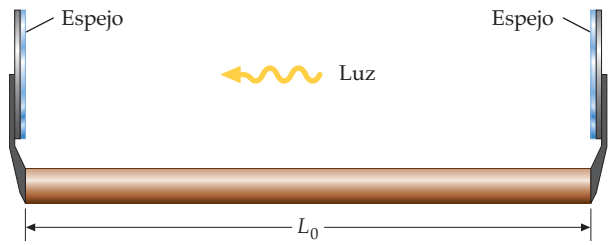


FIGURA R.8

Suceso 0 El flash de luz se refleja en el espejo de la izquierda, tac.
Suceso 1 El flash de luz se refleja en el espejo de la derecha, tic.
Suceso 2 El flash de luz se refleja en el espejo de la izquierda, tac.

En la figura R.9, se muestran las posiciones del reloj en los tres instantes de tiempo correspondientes a los tres sucesos y en el sistema de referencia en el que el reloj se mueve con velocidad v hacia la derecha. (Para poder visualizarlo sin solapamiento, el reloj se ha dibujado más abajo para los instantes posteriores.) En este sistema de referencia, los sucesos 0, 1 y 2 ocurren en los instantes t'_0, t'_1 y t'_2, respectivamente. Entre los sucesos 0 y 1, el reloj se mueve una distancia $v(t'_1 - t'_0)$ y el flash de luz una distancia $c(t'_1 - t'_0)$. Por lo tanto,

$$c(t'_1 - t'_0) = L + v(t'_1 - t'_0) \qquad \text{R.4}$$

* Un pión cargado (abreviatura de mesón pi) es una partícula subatómica. El concepto de vida media se analiza en la sección 40.2.

Entre los sucesos 1 y 2, el reloj se mueve una distancia $v(t'_2 - t'_1)$ y el flash de luz una distancia $c(t'_2 - t'_1)$. Por lo tanto,

$$c(t'_2 - t'_1) = L - v(t'_2 - t'_1) \qquad \text{R.5}$$

Despejando t'_1 en la ecuación R.4, sustituyendo este resultado en la ecuación R.5 y despejando $t'_2 - t'_0$, se obtiene

$$t'_2 - t'_0 = \frac{2L/c}{1 - (v^2/c^2)} \qquad \text{R.6}$$

El intervalo temporal $t'_2 - t'_0$ está relacionado con el intervalo temporal $t_2 - t_0$ entre los sucesos 0 y 2 (ecuación R.3) por

$$t'_2 - t'_0 = \frac{t_2 - t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \text{R.7}$$

donde $t_2 - t_0 = 2L_0/c$ (ecuación R.1). Sustituyendo $t_2 - t_0$ por $2L_0/c$, nos da

$$t'_2 - t'_0 = \frac{2L_0/c}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \text{R.8}$$

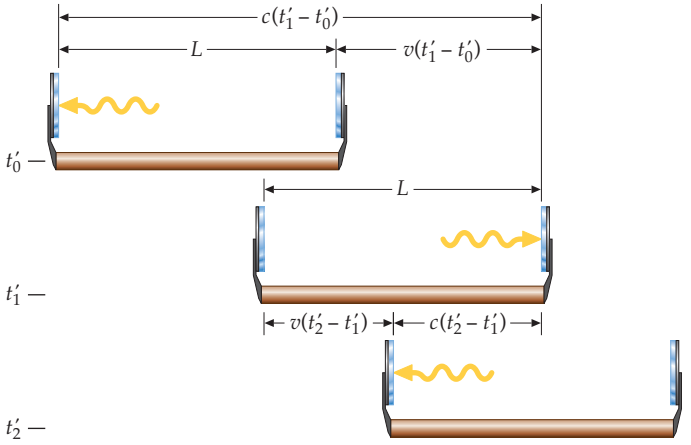


FIGURA R.9 La figura muestra, en tres instantes sucesivos, t_0, t_1 y t_2, un reloj de luz que se mueve hacia la derecha con velocidad v.

Igualando los términos de la derecha de las ecuaciones R.6 y R.8, y despejando L, obtenemos

$$L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)} \qquad \text{R.9}$$

CONTRACCIÓN DE LONGITUDES

Se ha llegado a este resultado sin hacer referencia alguna a las propiedades de la barra. Así pues, la ecuación R.9 refleja la naturaleza del espacio y del tiempo, y no la naturaleza de las barras.

Ejemplo R.2 Longitud de un vagón de tren

Alicia viaja en tren a una velocidad de 0,80c respecto a una estación en la que no se detiene. Mide la longitud del vagón en el que viaja obteniendo un valor de 40 m. Emilio se halla en el andén de la estación al pasar el tren. Mide el tiempo que tarda el vagón en pasar frente a él y multiplica este tiempo por 0,80c para determinar la longitud del vagón. ¿Cuál resultará ser esta longitud según el cálculo de Emilio?

PLANTEAMIENTO El vagón está en reposo respecto a Alicia; así pues, 40 m es la longitud propia de dicho vagón.

SOLUCIÓN

En el sistema de referencia de Emilio el vagón tiene una velocidad de 0,8c. Basta aplicar la ecuación R.9 para determinar la longitud del vagón en el sistema de Emilio:

$$L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 40\text{ m}\sqrt{1 - 0{,}80^2} = \boxed{24\text{ m}}$$

COMPROBACIÓN Como era de esperar, el vagón resulta más corto al observarlo en movimiento.

R.5 RELOJES LEJANOS Y SIMULTANEIDAD

Hemos establecido tres normas de utilidad: (1) que la longitud de una barra que se mueve perpendicularmente a sí misma coincide con su longitud en reposo; (2) que el tiempo T entre tac y tac de un reloj en movimiento es mayor que el tiempo T_0 entre tac y tac del mismo reloj visto por un observador que se mueve con él, siendo $T = T_0/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$; y (3) que la longitud L de una barra que se mueve paralelamente a sí misma es menor que su longitud en reposo L_0, siendo $L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Pero para poder analizar los sucesos desde la perspectiva de

observadores en sistemas de referencia que se mueven a diferentes velocidades, necesitamos una relación más, la que se refiere a lo que marcan relojes ubicados en distintos puntos del espacio.

Los relojes A y B (figura R.10*a*) se hallan en reposo relativo uno respecto del otro y, en su propio sistema de referencia, la distancia entre relojes es L_0. Para sincronizar estos relojes disponemos de una lámpara de flashes en el reloj A y una película fotosensible en el B. Programamos el reloj A para que emita un flash cuando su segundero pase por el cero. Igual que en el caso del reloj convencional de la sección R.3, el segundero del reloj B es una rendija estrecha y radial practicada en un disco opaco y giratorio. Detrás de él se coloca una película fotosensible. Al llegar el flash al reloj B, se impresiona la estrecha área de la película que está detrás de la rendija. Queda así registrado de manera duradera lo que marca el reloj B cuando le llega el flash. Llamemos t_1 a este instante de tiempo. En el sistema en reposo de ambos relojes, la luz tarda un tiempo L_0/c en propagarse desde el reloj A al B. Por lo tanto, cuando la luz llega al reloj B, el reloj A marca L_0/c y el reloj B marca t_1. Para sincronizar los dos relojes, atrasamos el reloj A en $\Delta t = t_1 - L_0/c$.

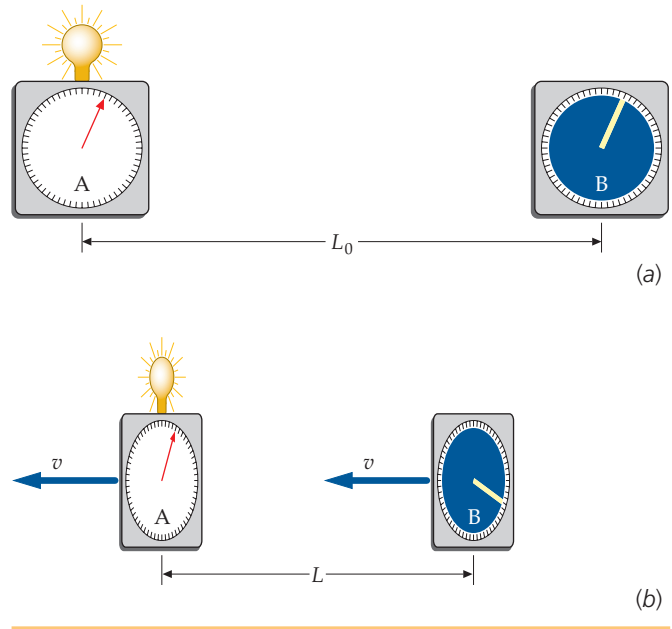


FIGURA R.10 (*a*) Los relojes están sincronizados en el sistema de referencia en que se hallan en reposo. (*b*) ¿Están los relojes también sincronizados en un sistema de referencia en el que se mueven con velocidad v paralela a la línea que los une?

Una vez que tenemos los relojes sincronizados en su sistema en reposo (sistema 1), vamos a averiguar si también están sincronizados en un sistema de referencia (sistema 2) en el que los relojes se mueven con velocidad v paralela a la línea que les une, como se muestra en la figura (R.10*b*). Reprogramamos el reloj A para que emita un flash al marcar cero. Estos dos sucesos (el reloj A marca cero y se dispara el flash) son coincidencias espacio-temporales y sabemos, pues, que ocurren simultáneamente en cualquier sistema de referencia. También son coincidencias espacio-temporales la llegada de la luz al reloj B y que este reloj marque L_0/c, con lo que estos sucesos serán simultáneos en cualquier sistema de referencia.

En el sistema 2, la distancia L entre los relojes viene dada por

$$L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

y el reloj B se dirige hacia el flash. En este sistema, la luz que va del reloj A al B recorre una distancia $L - vt$, donde t es el tiempo que tarda en recorrerla. El tiempo t, la distancia L y la velocidad v están relacionados por

$$ct = L - vt$$

Despejando el tiempo, se obtiene $t = L/(c + v)$.

El ritmo con el que se observa que avanzan los relojes móviles es más lento; por lo tanto, el tiempo que éstos han avanzado mientras en el sistema 2 pasaba un tiempo t no es el mismo t sino $t\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$, donde $t = L/(c + v)$. Este avance es igual a

$$\frac{L}{c+v}\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \frac{L_0\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{c+v}\sqrt{1-(v^2/c^2)}$$
$$= \frac{L_0}{(c+v)}\frac{(c+v)(c-v)}{c^2} = \frac{L_0}{c} - \frac{vL_0}{c^2}$$

Así pues, cuando la luz llega al reloj B, éste marca L_0/c y el reloj A marca $L_0/c - vL_0/c^2$. Por lo tanto, en el sistema 2, el reloj B va adelantado respecto al reloj A en vL_0/c^2:

> Si dos relojes se han sincronizado en el sistema de referencia en el que ambos se hallan en reposo, en un sistema en el que se mueven con velocidad v paralela a la línea que los une, el reloj situado detrás va adelantado en un tiempo vL_0/c^2 respecto al reloj que va por delante.
>
> RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD

En este caso, L_0 es la distancia entre relojes en su sistema en reposo. Y también se cumple que si dos relojes se han sincronizado en su sistema en reposo, están igual-

mente sincronizados en cualquier sistema que se mueva con velocidad v perpendicular a la línea que los une. (Por la simple razón de que no puede establecerse un criterio para decidir qué reloj va por delante.)

APLICACIÓN DE LAS REGLAS

Ejemplo R.3 Un tren en un túnel

Un tren ultrarrápido está a punto de entrar en un túnel que atraviesa un monte. La longitud propia del túnel es de 1,2 km. La longitud del tren en el sistema de referencia del monte es también de 1,2 km, pero su longitud propia es de 2,0 km. El reloj A está fijo en la boca de entrada del túnel y el reloj B lo está en la boca de salida. En el sistema de referencia del monte, ambos relojes marcan las cero horas cuando la parte delantera del tren entra en el túnel. (*a*) En el sistema de referencia del monte, ¿a qué velocidad viaja el tren y qué marcan los relojes en el instante en el que la parte delantera del tren sale del túnel (figura R.11*a*)? (*b*) En el sistema de referencia del tren, ¿cuál es la longitud del túnel?, ¿qué marcan los dos relojes en el instante en el que la parte delantera del tren entra en el túnel (figura R.11*b*)? y ¿qué marcan los dos relojes en el instante en el que la parte delantera del tren sale del túnel? (*c*) Para un pasajero del tren, ¿cuánto tarda la parte delantera del tren en recorrer el túnel?

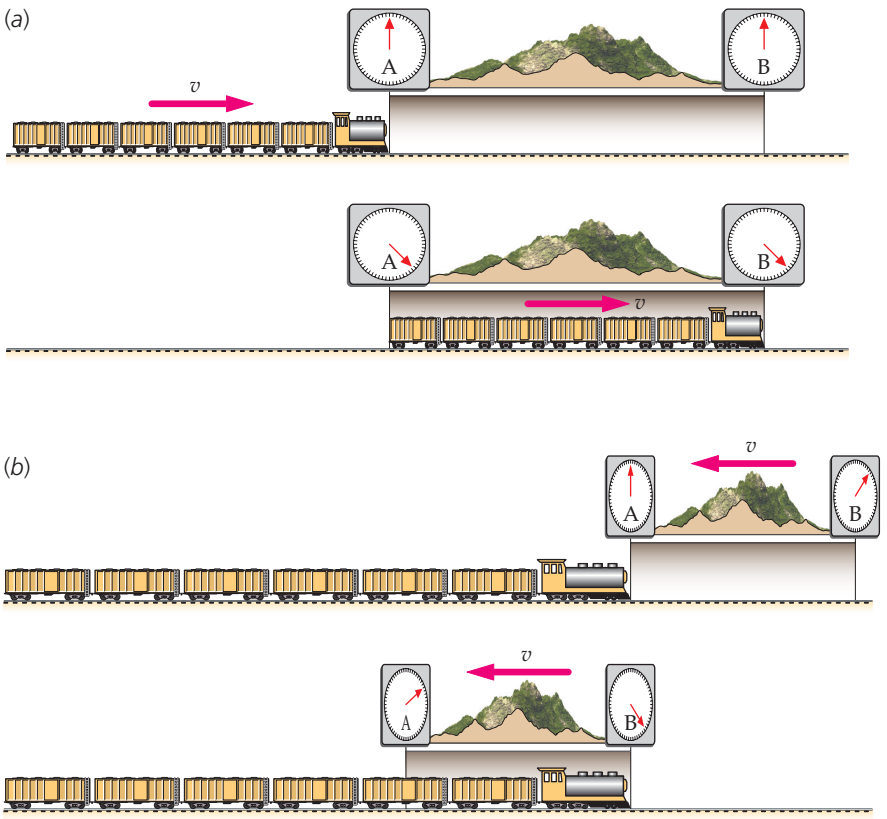


FIGURA R.11 (*a*) En el sistema de referencia del monte, el tren se dirige hacia el túnel a gran velocidad. Los relojes están sincronizados en este sistema. (*b*) En el sistema de referencia del tren, el túnel (o el monte) es el que se acerca a gran velocidad. El reloj B va adelantado respecto al reloj A en este sistema de referencia.

PLANTEAMIENTO La velocidad y la longitud del tren están relacionadas por la fórmula de la contracción de las longitudes. Algunas de las lecturas de los relojes desde ambos sistema de referencia pueden igualarse, ya que son pares de sucesos que constituyen coincidencias espacio-temporales. Las otras lecturas pueden relacionarse a través de la relatividad de la simultaneidad.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Usando la fórmula de la contracción de las longitudes, despejamos la velocidad del tren:

$$L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

$$1{,}2\text{ km} = 2{,}0\text{ km}\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

por tanto, $v = 0{,}80c = 0{,}80(3{,}00 \times 10^8\text{ m/s}) = \boxed{2{,}4 \times 10^8\text{ m/s}}$

2. La longitud del túnel es su longitud propia, y los relojes, inmóviles, no atrasan. Ambos relojes marcan el tiempo t que tarda la parte delantera del tren en recorrer el túnel:

$$L_{\text{túnel }0} = vt$$

por tanto, $t = \dfrac{L_{\text{túnel }0}}{v} = \dfrac{1{,}2 \times 10^3\text{ m}}{2{,}4 \times 10^8\text{ m/s}} = 5{,}0 \times 10^{-6}\text{ s} = \boxed{5{,}0\ \mu\text{s}}$

3. Los dos relojes están sincronizados; así pues, cuando la parte delantera del tren sale del túnel ambos marcan 5 μs:

Lectura del reloj A = Lectura del reloj B = $\boxed{5{,}0\ \mu\text{s}}$

(*b*) 1. En este sistema de referencia, el monte se mueve a 0,8c. Usando la fórmula de la contracción de las longitudes, despejamos la longitud del túnel:

$$L_{\text{túnel}} = L_{\text{túnel }0}\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = 1{,}2\text{ km}\sqrt{1 - \frac{(0{,}80c)^2}{c^2}}$$

$$= 1{,}2\text{ km}\sqrt{1 - 0{,}80^2} = \boxed{0{,}72\text{ km} = 720\text{ m}}$$

2. La entrada de la parte delantera del tren en el túnel y que el reloj A marque cero son coincidencias espacio-temporales:

El reloj A marca cero.

3. Los dos relojes, con el reloj B por detrás, se mueven hacia el tren, por lo que el reloj B irá adelantado en vL_0/c^2 respecto al reloj A. Al entrar el tren en el túnel, el reloj A marca cero y el reloj B marca vL_0/c^2:

$$\text{Lectura del reloj B} = \frac{vL_{\text{túnel }0}}{c^2} = \frac{0{,}80L_{\text{túnel }0}}{c}$$
$$= \frac{0{,}80(1{,}2 \times 10^3 \text{ m})}{3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s}} = \boxed{3{,}2\ \mu\text{s}}$$

4. La salida del túnel de la parte delantera del tren y que el reloj B marque 5 μs son coincidencias espacio-temporales:

$$\text{Lectura del reloj B} = \boxed{5{,}0\ \mu\text{s}}$$

5. El reloj B va por detrás, por lo que el reloj A marcará un tiempo inferior en vL_0/c^2 al que marque el reloj B:

$$\text{Lectura del reloj A} = \text{Lectura del reloj B} - \frac{vL_{\text{túnel }0}}{c^2}$$
$$= 5{,}0\ \mu\text{s} - 3{,}2\ \mu\text{s} = \boxed{1{,}8\ \mu\text{s}}$$

(c) Para un observador en el sistema de referencia del tren, el monte se desplaza a 0,8c y la longitud del túnel es de 720 m:

$$L_{\text{túnel}} = vt$$
$$\text{por tanto,}\quad t = \frac{L_{\text{túnel}}}{v} = \frac{L_{\text{túnel}}}{0{,}80c} = \frac{720 \text{ m}}{2{,}4 \times 10^8 \text{ m/s}} = \boxed{3{,}0\ \mu\text{s}}$$

COMPROBACIÓN El resultado de 3,0 μs del apartado (*c*) es inferior al resultado del segundo paso del apartado (*a*), 5,0 μs. Era de esperar, ya que la longitud del tren era de 1,2 km en el apartado (*a*) y solamente de 720 m en el apartado (*c*).

OBSERVACIÓN En el sistema de referencia del tren, el tren es más largo que el túnel y, por lo tanto, en ningún instante el tren está por completo dentro del túnel.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL R.1

El suceso 1 es la entrada de la cabecera del tren en el túnel y el suceso 2 es la salida de la cabecera del tren del túnel. (*a*) ¿En qué sistema de referencia estos dos sucesos ocurren en el mismo sitio? (*b*) ¿Cuál es el intervalo de tiempo propio entre los sucesos 1 y 2?

A menudo conviene expresar las medidas de grandes distancias en años-luz, siendo un año-luz la distancia recorrida por un móvil al viajar durante un año a la velocidad de la luz. Esto es,

$$1 \text{ año-luz} = 1\ c \cdot \text{año}$$

donde 1 $c \cdot$ año = c (1 año). Esta notación es particularmente útil cuando las distancias deban dividirse por velocidades. Por ejemplo, el tiempo T que una partícula que viaja a $v = 0{,}1c$ tarda en recorrer una distancia de $L = 25$ años-luz es

$$T = \frac{L}{v} = \frac{25\ c \cdot \text{año}}{0{,}10c} = 250 \text{ año}$$

pudiéndose eliminar c.

EJERCICIO PRÁCTICO R.3

En el sistema de referencia de la Tierra, la luz necesita 8,3 minutos para llegar desde el Sol a la Tierra, por lo que la distancia entre Tierra y Sol es de 8,3 min-luz. ¿Cuántos minutos tardará una partícula que viaja a $v = 0{,}10c$ en ir desde el Sol a la Tierra?

R.6 MOMENTO RELATIVISTA, MASA Y ENERGÍA

MOMENTO Y MASA

Al igual que en física clásica, el momento y la energía también se conservan en relatividad especial. Las leyes de conservación del momento y la energía son esenciales para analizar las colisiones que se producen a altísimas velocidades en los laboratorios de física de altas energías. Sin embargo, las ecuaciones clásicas de conservación de momento y energía no son las adecuadas para el análisis de estas colisiones a velocidades tan elevadas. Presentamos aquí las fórmulas relativistas

correctas de estas leyes de conservación. El momento de una partícula que se mueve a velocidad v viene dado por

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \qquad \text{R.10}$$

MOMENTO RELATIVISTA

donde m es la masa de la partícula.* La relatividad del momento se analizará con más detalle en el capítulo 39.

ENERGÍA

En mecánica relativista, al igual que en mecánica clásica, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual al ritmo de cambio del momento de la partícula con el tiempo. Concretamente y para movimientos unidimensionales, tenemos

$$F_{\text{neta}} = \frac{dp}{dt} \qquad \text{R.11}$$

Queremos hallar una expresión para la energía cinética. Para ello, multiplicaremos ambos miembros de la ecuación R.11 por el desplazamiento $d\ell$. Nos da

$$F_{\text{neta}}\, d\ell = \frac{dp}{dt}\, d\ell \qquad \text{R.12}$$

donde identificamos el primer miembro como el trabajo y el segundo como el cambio en la energía cinética dK. Sustituyendo $d\ell$ por $v\, dt$ en el segundo miembro, llegamos a

$$dK = \frac{dp}{dt}\, v\, dt = v\, dp$$

Integrando ambos miembros, obtenemos

$$K = \int_0^{p_f} v\, dp \qquad \text{R.13}$$

Para calcular esta integral, comenzamos cambiando la variable de integración de p a v. Usando la ecuación R.10 y la regla de derivación de cocientes, tenemos

$$dp = d\left(\frac{v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\right)$$

$$= \frac{[1 - (v^2/c^2)]^{1/2} dv - v\,\frac{1}{2}[1 - (v^2/c^2)]^{-1/2}\left(-\frac{2v dv}{c^2}\right)}{1 - (v^2/c^2)} = \frac{dv}{[1 - (v^2/c^2)]^{3/2}}$$

Sustituyendo dp por esta expresión en la ecuación R.13, nos da

$$K = \int_0^{p_f} v dp = m\int_0^{v_f} \frac{v dv}{[1 - (v^2/c^2)]^{3/2}} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v_f^2/c_2)}} - 1\right)$$

y, por lo tanto,

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - mc^2 \qquad \text{R.14}$$

(En esta expresión, hemos podido suprimir el subíndice f porque aparece una única velocidad, v_f.)

---

* A veces, la ecuación R.10 se escribe $p = m_r v$; se llama *masa relativista* a $m_r = m/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. En el sistema de referencia donde la partícula está en reposo, $v = 0$ y $m_r = m$. (En ocasiones, esta masa m se denomina masa en reposo para distinguirla de la masa relativista.)

Definiendo la **energía relativista total** E mediante $mc^2/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$, la ecuación R.14 puede escribirse así

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \qquad \text{R.15}$$

donde mc^2, llamada **energía en reposo** E_0, es la energía que la partícula posee cuando está en reposo.

Multiplicando ambos miembros de la ecuación R.10 por c y dividiendo después la ecuación resultante por la ecuación R.15, obtenemos

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} \qquad \text{R.16}$$

que puede ser útil al intentar despejar la velocidad v. Eliminando v entre las ecuaciones R.10 y R.16, y despejando E^2, resulta

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad \text{R.17}$$

La relación entre masa m y energía E se analiza brevemente en la sección 4 del capítulo 7.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Expansión binomial

Ejemplo R.4 Momento y energía

Un protón tiene una energía cinética de 1100 MeV y una masa de 938 MeV/c^2. ¿Cuál es su momento? ¿Cuál su velocidad?

PLANTEAMIENTO Las ecuaciones R.15 y R.17 relacionan el momento con la energía total, la energía cinética y la masa. La ecuación R.16 relaciona la velocidad con el momento y la energía total.

SOLUCIÓN

1. La ecuación R.17 relaciona el momento con la energía total, y la ecuación R.15 relaciona la energía cinética con la energía total:
$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$
$$E = K + mc^2$$

2. Eliminar E usando las dos ecuaciones anteriores y despejar p^2c^2:
$$(K + mc^2)^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$
por lo tanto, $p^2c^2 = (K + mc^2)^2 - m^2c^4$

3. Calcular el valor de p^2c^2:
$$p^2c^2 = (1100\ \text{MeV} + 938\ \text{MeV})^2 - (938\ \text{MeV})^2 = 3{,}27 \times 10^6\ (\text{MeV})^2$$

4. Despejar p:
$$p = \sqrt{3{,}27 \times 10^6}\ \text{MeV}/c = 1{,}81 \times 10^3\ \text{MeV}/c = \boxed{1{,}8 \times 10^3\ \text{MeV}/c}$$

5. Usar la ecuación R.16 para hallar la velocidad:
$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{K + mc^2} = \frac{1{,}81 \times 10^3\ \text{MeV}}{1100\ \text{MeV} + 938\ \text{MeV}} = 0{,}888$$
por lo tanto, $\boxed{v = 0{,}888c = 0{,}89c}$

COMPROBACIÓN Como era de esperar, la velocidad está entre cero y c. Además, la energía cinética es mayor que la energía en reposo (938 MeV) por lo que cabe esperar una velocidad poco menor que c.

Ejemplo R.5 Partículas en colisión *Conceptual*

Dos partículas idénticas se mueven en sentidos opuestos. Cada partícula tiene una masa m y una energía total igual al doble de su energía en reposo. Chocan frontalmente de manera totalmente inelástica, formando entonces una única partícula de masa M. Hallar M.

PLANTEAMIENTO La velocidad de la partícula de masa M se determina por conservación del momento. La masa M se determina por conservación de la energía.

SOLUCIÓN

1. Las dos partículas iniciales tienen la misma masa, m, y la misma energía total, E, y, por tanto, tienen también la misma velocidad. Viajan en sentidos opuestos de modo que el momento de una es igual y opuesto al de la otra. El momento total del sistema formado por las dos partículas es nulo:

   La *conservación del momento* nos dice que el momento de la partícula final de masa M es nulo y su velocidad es cero.

2. La partícula de masa M está en reposo, de manera que su energía total es su energía en reposo Mc^2. Cada partícula inicial aporta una energía total igual a $2mc^2$ (el doble de su energía en reposo mc^2). La *conservación de la energía* nos dice que la energía total inicial es igual a la final:

   $$E_f = E_i$$
   $$Mc^2 = 2mc^2 + 2mc^2$$
   $$\therefore \boxed{M = 4m}$$

COMPROBACIÓN La energía cinética de las dos partículas de masa m se ha transformado en energía en reposo de la partícula de masa M. Ya que la energía cinética de cada partícula de masa m era igual a su energía en reposo, la masa de la partícula final es $4m$.

! No crea que la masa se conserva en una colisión inelástica. No lo hace. La masa es proporcional a la energía en reposo. Si hay energía cinética que se transforma en energía en reposo, entonces la masa crece.

Resumen

1. El principio de relatividad es una *ley fundamental de la física*.

2. Que la velocidad de la luz en el vacío sea independiente de la velocidad del foco luminoso es una *ley fundamental de la física*.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Postulados de la relatividad especial	
Postulado I: Principio de relatividad	Es imposible diseñar un experimento que establezca si uno está en reposo o moviéndose uniformemente, entendiendo que moverse uniformemente significa moverse a velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial.
Postulado II	La velocidad de la luz es independiente de la velocidad de su foco emisor.
Constancia de la velocidad de la luz	Como consecuencia, la velocidad de la luz es la misma respecto a cualquier sistema de referencia inercial.
2. Barras en movimiento	La longitud de una barra que se mueve perpendicularmente a sí misma es igual a su longitud propia. La longitud L de una barra que observamos moverse paralelamente a sí misma con velocidad v es más corta que su longitud propia L_0 de acuerdo con la ecuación $$L = L_0\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$ R.9 La longitud propia de una barra, L_0, es la que se mide en el sistema en que la barra está en reposo.
3. Relojes en movimiento	
Dilatación temporal	El tiempo T que observamos que tarda en completar un tictac un reloj que se mueve a velocidad v es más largo que el tiempo propio T_0 que tarda en completarlo el mismo reloj de acuerdo con $$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$ R.3 El tiempo propio que tarda un reloj en completar un tictac, T_0, es el que transcurre en el sistema en que el reloj está en reposo.
Relatividad de la simultaneidad	Si sincronizamos dos relojes en su sistema en reposo, en un sistema en el que se mueven con velocidad v paralela a la línea que une ambos relojes, el reloj de atrás va adelantado en vL_0/c^2 respecto al reloj delantero, siendo L_0 la distancia entre relojes en su sistema en reposo. Si dos relojes están sincronizados en su sistema en reposo, lo están también en otro sistema en el que se mueven a velocidad v perpendicular a la línea que une los relojes.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
4. Coincidencias espacio-temporales	Si dos sucesos ocurren en el mismo instante y en el mismo sitio en un sistema de referencia, también ocurren los dos en el mismo instante y en el mismo sitio en cualquier otro sistema de referencia.	
5. Momento, masa y energía		
Momento	El momento de una partícula viene dado por $$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$	R.10
Energía cinética	$$K = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 1\right)mc^2$$	R.14
Masa y energía	La energía relativista total de una partícula es igual a su energía en reposo más su energía cinética. $$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$ donde mc^2 es la energía en reposo E_0.	R.15
Momento y energía	$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E}$ y $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$	R.16, R.17

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

R.1 (*a*) El sistema de referencia del tren, ya que ambos sucesos ocurren en su parte delantera, (*b*) 3,0 μs

Respuestas a los problemas prácticos

R.1 260 ns

R.2 78 m

R.3 (8,3 $c \cdot$ min)/0,10c = (8,3 min)/0,10 = 83 min

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados
- SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Se encuentra usted parado en una esquina frente a la cual pasa un amigo en automóvil. Ambos llevan relojes de pulsera. Los dos anotan en qué instantes el automóvil pasa por dos cruces distintos y de ahí deducen los intervalos de tiempo que hay entre estos dos sucesos. ¿Quién de los dos ha determinado el intervalo de tiempo propio? Razone su respuesta.

2 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Supongamos que el amigo que pasa en coche en el problema 1 mide que la longitud de la puerta del coche es de 90 cm. Usted también la mide mientras el coche está pasando. (*a*) ¿Mide alguno de los dos la longitud propia de la puerta? Explicar la respuesta. (*b*) ¿Qué relación habrá entre una medida y la otra? (1) El valor medido por usted será menor. (2) El valor medido por usted será mayor. (3) Los valores serán iguales. (4) Las medidas no pueden compararse porque el resultado depende de la velocidad del coche.

3 • Si el suceso A ocurre en un lugar distinto del suceso B en cierto sistema de referencia, ¿es posible que exista un segundo sistema de referencia en el que los dos sucesos ocurran en el mismo lugar? En caso afirmativo, dar un ejemplo. En caso negativo, explicar el porqué. SSM

4 • Si el suceso A ocurre antes que el suceso B en un sistema de referencia, ¿es posible que exista un sistema de referencia en el que el suceso B ocurra antes que el A? En caso afirmativo, dar un ejemplo. En caso negativo, explicar el porqué.

5 • Dos sucesos son simultáneos en un sistema en el que además ocurren en el mismo punto del espacio. ¿Son simultáneos en cualquier sistema de referencia? SSM

6 • Dos observadores inerciales se hallan en movimiento relativo. ¿En qué circunstancias podrán estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos sucesos distintos?

7 • La energía total de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $v << c$ vale, aproximadamente, (*a*) $mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$, (*b*) mv^2, (*c*) cmv, (*d*) $\frac{1}{2}mc^2$.

8 • Verdadero o falso:

(*a*) La velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencia.
(*b*) El tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto entre dos sucesos.
(*c*) Podemos determinar un movimiento absoluto por medio de la contracción de longitudes.
(*d*) El año-luz es una unidad de distancia.
(*e*) Para que dos sucesos puedan ser una coincidencia espacio-temporal, deben ocurrir en el mismo sitio.
(*f*) Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema de referencia, no pueden ser simultáneos en ningún otro sistema de referencia.

9 •• (*a*) Comprobar que pv tiene dimensiones de energía. (*b*) La ecuación R.17 admite una interpretación geométrica en términos del teorema de Pitágoras. Dibujar la figura de un triángulo que ilustre dicha interpretación.

10 •• Una bola de plastilina de masa m_1 choca y se adhiere a una segunda bola de plastilina de masa m_2 que se encontraba inicialmente en reposo. La masa conjunta de plastilina, ¿cabe espera que sea (*a*) mayor, (*b*) menor, (*c*) igual a $m_1 + m_2$? Justificar la respuesta.

11 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Hay muchos núcleos atómicos que son inestables; por ejemplo, el ^{14}C, un isótopo del carbono, tiene un periodo de semidesintegración de 5700 años. (En la sección 2 del capítulo 40, se define el periodo de semidesintegración de una partícula inestable como el tiempo que debe transcurrir para que el número de partículas que contiene inicialmente una muestra se reduzca a la mitad.) Dicha inestabilidad se usa frecuentemente en arqueología para datar piezas antiguas. Los núcleos inestables se desintegran en varios productos de desintegración que son emitidos con energías cinéticas no despreciables. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (*a*) La masa del núcleo inestable es mayor que la suma de las masas de los productos de desintegración? (*b*) La masa del núcleo inestable es menor que la suma de las masas de los productos de desintegración? (*c*) La masa del núcleo inestable es igual a la suma de las masas de los productos de desintegración? Justifique su elección. SSM

12 •• **APLICACIÓN BIOLÓGICA** Las imágenes médicas obtenidas por PET (*Positron Emission Tomography*) son frecuentes en la actualidad. Los positrones son partículas elementales con la misma masa que el electrón y con la misma carga eléctrica aunque de signo opuesto, es decir, positiva. Hay núcleos radiactivos que pueden introducirse en el cuerpo del paciente y que emiten positrones. Podemos suponer que uno de estos positrones es emitido con poca energía cinética, se mueve lentamente y choca con un electrón que tiene la misma velocidad en sentido opuesto. Al chocar se aniquilarán y en su lugar aparecerán dos cuantos de luz (fotones). Debemos diseñar detectores que midan la energía de estos fotones. (*a*) Justificar porque esperamos que los dos fotones sean emitidos en la misma dirección y sentidos opuestos. (*b*) En términos de la masa del electrón m, ¿cuál será la energía de cada fotón? (1) Menor que mc^2. (2) Mayor que mc^2. (3) Igual a mc^2. Justificar la respuesta.

APROXIMACIONES Y ESTIMACIONES

13 •• En 1975, un avión que llevaba un reloj atómico a bordo voló durante 15 h en un trayecto de ida y vuelta a 140 m/s como parte de un experimento de dilatación temporal. El tiempo de este reloj se comparó con el de otro reloj atómico que había permanecido en tierra. ¿Cuál fue la diferencia entre el tiempo indicado por el reloj del avión y por el del reloj que quedó en tierra? (Ignórese la rotación diurna de la Tierra y todo efecto que las aceleraciones del avión puedan tener sobre el reloj atómico que transporta. Supóngase, además, que el avión viajó siempre a velocidad constante.) SSM

14 •• (*a*) Formulando las hipótesis necesarias y buscando las distancias a ciertas estrellas, hallar la velocidad que debería tener una nave espacial para que pudiera ir y volver de la estrella más cercana (exceptuando el Sol) de manera que para los pasajeros de la nave transcurrieran 1,0 años terrestres. Se supone que la velocidad de la nave es constante tanto en la ida como en la vuelta y que podemos ignorar los efectos debidos a despegues y paradas. (*b*) ¿Cuánto tiempo transcurriría en la Tierra durante este viaje de ida y vuelta? Se incluyen 2,0 años terrestres dedicados a una exploración a baja velocidad de los planetas cercanos a la estrella.

15 •• (*a*) Comparar la energía cinética de un coche en movimiento con su energía en reposo. (*b*) Comparar la energía total de un coche en movimiento con su energía en reposo. (*c*) Hacer una estimación del error que se comete al calcular la energía cinética de un coche en movimiento con la expresión no relativista respecto al cálculo con la fórmula relativista correcta. *Sugerencia: puede ser de utilidad la expansión binomial.*

CONTRACCIÓN DE LONGITUDES Y DILATACIÓN DE TIEMPOS

16 • La vida media propia de los piones cargados (unas partículas subatómicas) es de $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. (Los piones neutros tienen una vida media mucho más corta. Véase el capítulo 41.) Un haz de piones va a velocidad $0{,}85c$ respecto a un laboratorio. (*a*) ¿Cuál sería la vida media que mediríamos desde el laboratorio? (*b*) ¿A qué distancia llegarán, en promedio, antes de desintegrarse? (*c*) ¿Cuál sería la respuesta al apartado (*b*) si ignoráramos la dilatación temporal?

17 • Desde el sistema de referencia del pión del problema 16, ¿qué distancia recorre el laboratorio durante una típica vida media de $2{,}6 \times 10^{-8}$ s? SSM

18 • La vida media propia de una partícula subnuclear llamada muón es de 2,20 μs. Los muones de un haz se mueven a una velocidad de $0{,}999c$ respecto a un laboratorio. (*a*) ¿Cuál sería la vida media que mediríamos desde el laboratorio? (*b*) ¿A qué distancia llegarán, en promedio, antes de desintegrarse?

19 • Desde el sistema de referencia del muón del problema 18, ¿qué distancia recorre el laboratorio durante una típica vida media de 2,20 μs?

20 • **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Ha sido usted destinado a regular el tráfico en una remota región del espacio. Al final de una jornada tranquila, pasa una nave espacial y mide usted su longitud mediante un aparato láser que le indica 85,0 m. Abre su catálogo e identifica la nave como una CCCNX-22, que tiene una longitud propia de 100 m. En su parte telefónico, ¿qué velocidad deberá atribuir a esta nave?

21 • Una nave espacial viaja desde la Tierra hacia una estrella que está a 95 años-luz a la velocidad de $2{,}2 \times 10^8$ m/s. ¿Cuánto tarda en alcanzarla (*a*) si lo medimos desde la Tierra y (*b*) si lo mide un pasajero de la nave? SSM

22 • La vida media de un haz de partículas subnucleares llamadas piones que se mueven a gran velocidad es de $7{,}5 \times 10^{-8}$ s (véase el problema 16 para más detalles sobre estas partículas). Su vida media cuando están en reposo es de $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. ¿A qué velocidad se mueven los piones del haz?

23 • Una regla de un metro se mueve respecto a usted con una velocidad de $0{,}80c$ paralela a la propia regla. (*a*) Si mide su longitud, ¿qué valor hallará? (*b*) ¿Cuánto tiempo tarda la regla en pasar frente a usted?

24 • El periodo de semidesintegración es el tiempo que debe transcurrir para que una cantidad inicial de partículas inestables se reduzca a la mitad (véase el capítulo 40, sección 2). El periodo de semidesintegración de unas partículas subnucleares cargadas llamadas piones en su sistema en reposo es de $1{,}8 \times 10^{-8}$ s (véase el problema 16 para más detalles sobre estas partículas). Un acelerador produce piones que salen a una velocidad de $0{,}998c$. ¿A qué distancia del acelerador llegarán estas partículas antes de que se hayan desintegrado la mitad de ellas?

25 •• Un amigo suyo, que tiene la misma edad que usted, viaja hacia la estrella Alfa Centauri, que se encuentra a 4,0 años-luz, y regresa inmediatamente. Le dice que su viaje ha durado 6,0 años. ¿A qué velocidad ha viajado? SSM

26 •• Dos naves espaciales se cruzan en direcciones opuestas. Una pasajera de la nave A, que sabe que su nave mide 100 m de largo, observa que la nave B se mueve a una velocidad de $0{,}92c$ relativa a A y que la longitud de B es de 36 m. ¿Cuáles son las longitudes de las dos naves medidas por los pasajeros de la nave B?

27 •• Los reactores supersónicos alcanzan velocidades máximas cercanas a $3 \times 10^{-6}c$. (*a*) ¿En qué porcentaje se contrae la longitud de un reactor que se mueve a esta velocidad? (*b*) Si para usted pasa 1 año = $3{,}15 \times 10^7$ s, ¿cuánto tiempo habrá pasado según el reloj del piloto? ¿Cuántos minutos se habrá atrasado en un año el reloj del piloto respecto al suyo? Supóngase que el piloto viaja todo el año con la misma velocidad y que usted sigue en tierra y podemos ignorar los movimientos de nuestro planeta.

28 •• La vida media de un muón (véanse los problemas 18 y 19 para más detalles sobre los muones) es de $\tau = 2{,}20\ \mu$s. Considerar un muón, que ha sido creado en la alta atmósfera, a 8,00 km del suelo, hacia el que se dirige a la velocidad de $0{,}980c$. (*a*) ¿Con qué probabilidad alcanzará la superficie de la Tierra el muón sin desintegrarse? La probabilidad de que desde un sistema de referencia se observe la desintegración de un muón en un intervalo de tiempo Δt, viene dada por $P = 1 - e^{-\Delta t/\tau}$. (*b*) Calcular la probabilidad desde el punto de vista de un observador que se moviera con el muón. Comprobar que la respuesta coincide con la que daría un observador desde la Tierra.

29 •• Una nave espacial se dirige a la Nube de Magallanes a una velocidad constante de $0{,}800c$. Cuando supera el cinturón de Kuiper, cuya frontera exterior está a 50,0 UA de la Tierra (Nota: 1 UA = 150 000 000 km; representa la distancia media entre la Tierra y el Sol; UA = Unidad Astronómica), el comandante manda un mensaje al centro de control de Houston, Tejas, diciendo que está bien. Al cabo de 15 minutos, según el reloj del comandante, éste se da cuenta de que ha cometido un error tipográfico y manda la correspondiente corrección. ¿Cuánto tiempo transcurre en Houston entre la recepción del mensaje inicial y la del segundo mensaje?

RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD

Los problemas que van del 30 al 34 se refieren a la siguiente situación: María trabaja en una gran plataforma espacial. Sitúa el reloj A en el punto A y el reloj B en el punto B, que dista 100 minutos-luz de A (figura R.12). También sitúa un emisor de flashes en el punto medio entre A y B. Jamal, que trabaja en otra plataforma, está junto al reloj C. Cada uno de estos relojes está parado marcando cero, pero se pondrá inmediatamente en marcha al llegarle el flash. La plataforma de María se mueve con velocidad $0{,}600c$ respecto a la de Jamal. Al ir avanzando la plataforma de María, el reloj B, luego el emisor de flashes y, finalmente, el reloj A pasan justo por encima del reloj C, del que se alejarán definitivamente. El emisor de flashes se dispara justo al pasar por encima del reloj C, que se pone inmediatamente en marcha a partir de cero.

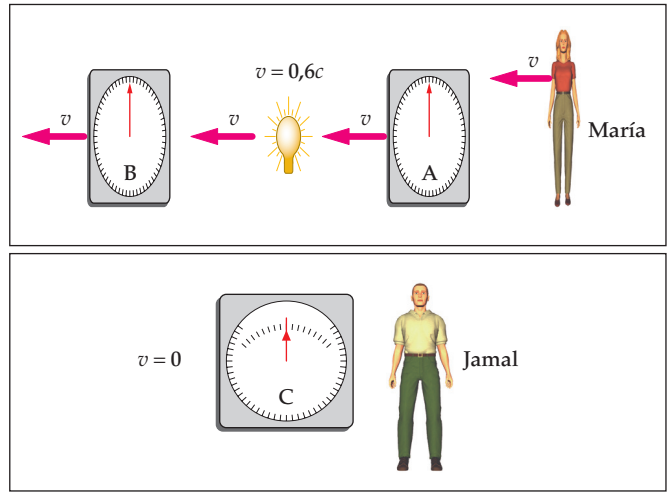


FIGURA R.12 Problemas 30–34

30 •• Según Jamal, (*a*) ¿qué distancia hay entre el emisor de flashes y el reloj A?, (*b*) ¿qué distancia recorre el flash hasta alcanzar el reloj A? y (*c*) ¿qué distancia recorre el reloj A mientras el flash se dirige desde el emisor hasta dicho reloj?

31 •• Según Jamal, ¿cuánto tiempo tarda el flash en llegar hasta el reloj A, y qué marca el reloj C cuando el flash llega al reloj A?

32 •• Demostrar que cuando el flash alcanza al reloj B, el cual se aleja del reloj C a $0{,}600c$ de velocidad, este reloj C marca 100 min.

33 •• Según Jamal, entre la llegada del flash al reloj A y la llegada del flash al reloj B de los problemas 31 y 32, el reloj C pasa de marcar 25 min a marcar 100 min. Siempre según Jamal, ¿cuánto tiempo habrá pasado en el reloj A durante este intervalo de 75 min?

34 •• El tiempo que ha pasado en el reloj A del problema 33 indica la distancia a la que el reloj B va por delante del reloj A según Jamal. Comparar este resultado con vL_0/c^2, donde $v = 0{,}600c$.

35 •• En el sistema de referencia inercial *S*, el suceso B ocurre 2,00 μs después y a 1,50 km de distancia del suceso A. ¿A qué velocidad, paralela a la línea que une ambos sucesos, debe moverse un observador para que dichos sucesos ocurran simultáneamente? Para un observador suficientemente veloz, ¿podría el suceso B ocurrir antes que el suceso A? SSM

36 •• A lo largo de una gran plataforma plana se ha trazado un eje OX. Un petardo explota en el punto $x_1 = 480$ m de dicho eje y un segundo petardo explota 5,00 μs más tarde en el punto $x_2 = 1200$ m del mismo eje. En el sistema de referencia de un tren que viaja a lo largo del eje OX con una velocidad v relativa a la plataforma, estas dos explosiones ocurren en el mismo punto del espacio. ¿Qué intervalo de tiempo separaba dichas explosiones en el sistema de referencia del tren?

37 •• Marcos y Beatriz son dos hermanos gemelos que forman un dúo de jazz tocando el trombón y el saxofón. A sus 30 años, Beatriz recibe una propuesta irresistible para ir a tocar a una estrella a 15 años-luz de distancia. Para celebrarlo, compra un nuevo vehículo para este viaje, un *coupé* espacial *deluxe* que puede ir a $0{,}99c$. Cada gemelo se compromete a seguir ensayando diligentemente para poder seguir tocando juntos al volver. Sin embargo, Beatriz tiene tanto éxito en su gira que la prolonga hasta un total de 10 años antes de iniciar su regreso al lado de Marcos. Una vez se han reunido, (*a*) ¿cuántos años ha ensayado Beatriz?, (*b*) ¿cuántos años ha ensayado Marcos?

38 •• Al y Bert son hermanos gemelos. El primero viaja a $0{,}600c$ hasta Alfa Centauri (que está a 4,00 años-luz de la Tierra, medidos desde el sistema de referencia de la Tierra) y regresa inmediatamente. Cada gemelo envía al otro una señal de luz cada 0,0100 años, medidos en el propio sistema de referencia. (*a*) ¿Con qué frecuencia recibe Bert las señales de Al mientras éste se aleja? (*b*) ¿Cuántas señales recibe Bert a este ritmo? (*c*) ¿Cuántas señales recibe Bert en total antes del regreso de Al? (*d*) ¿Con qué frecuencia recibe Al las señales de Bert mientras se están distanciando? (*e*) ¿Cuántas señales recibe Al a este ritmo? (*f*) ¿Cuántas señales recibe Al en total? (*g*) ¿Qué gemelo es más joven al final del viaje y cuál es entonces su diferencia en edad?

ENERGÍA Y MOMENTO RELATIVISTAS

39 • Determinar la razón entre la energía total y la energía en reposo de una partícula de masa m que se mueve con velocidad (*a*) $0{,}100c$, (*b*) $0{,}500c$, (*c*) $0{,}800c$ y (*d*) $0{,}990c$.

40 • Un protón (energía en reposo, 938 MeV) tiene 1400 MeV de energía total. (*a*) ¿Cuál es su velocidad? (*b*) ¿Cuál es su momento?

41 • ¿Cuánta energía se necesita para acelerar una partícula de masa m desde el reposo hasta (*a*) $0{,}500c$, (*b*) $0{,}900c$ y (*c*) $0{,}990c$? Expresar las respuestas en múltiplos de la energía en reposo mc^2. SSM

42 • Si la energía cinética de una partícula es igual a su energía en reposo, ¿qué error se comete al usar $p = mv$ como momento? Si comparamos los valores del momento que se obtienen a partir de la expresión no relativista y de la correcta expresión relativista, ¿cuál resulta siempre mayor?

43 • ¿Cuál es la energía total de un protón cuyo momento es $3mc$?

44 •• **HOJA DE CÁLCULO, ESTIMACIÓN** Usando una hoja de cálculo o una calculadora de gráficos, representar gráficamente la energía cinética de una partícula de energía en reposo 100 MeV para velocidades v de 0 a c. Representar también $\frac{1}{2}mv^2$ y comparar las dos curvas. Usando estas gráficas, dar una estimación de la velocidad a partir de la cual la segunda expresión ya no es una buena aproximación a la energía cinética. Sugerimos que la energía se exprese en MeV y la velocidad en la forma adimensional v/c.

45 •• (*a*) Demostrar que la velocidad v de una partícula de masa m y energía total E es $v/c = [1 - ((mc^2)^2/E^2)]^{1/2}$, y que, cuando la energía E es mucho mayor que mc^2, es válida la aproximación $(v/c) \approx 1 - ((mc^2)/2E^2)$. Hallar la velocidad de un electrón de energía cinética (*b*) 0,510 MeV y (*c*) 10,0 MeV. SSM

46 •• Usar la expansión binomial y la ecuación R.17 para demostrar que cuando $pc \ll mc^2$, la energía total es, aproximadamente, $E \approx mc^2 + (p^2/2m)$.

47 •• Deducir la ecuación $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ (ecuación R.17) eliminando v de las ecuaciones R.10 y R.16.

48 •• La energía en reposo de un protón es de unos 938 MeV. Si su energía es también de 938 MeV, determinar (*a*) su momento y (*b*) su velocidad.

49 •• ¿Qué error porcentual se comete al usar $\frac{1}{2}mv^2$ como energía cinética de una partícula si su velocidad es (*a*) $0{,}10c$ y (*b*) $0{,}90c$?

PROBLEMAS GENERALES

50 • Una nave espacial sale de la Tierra hacia Alfa Centauri, que dista 4 años-luz en el sistema de referencia de la Tierra. La nave viaja a $0{,}75c$. ¿Cuánto tarda en llegar ahí según (*a*) un observador de la Tierra y (*b*) un pasajero de la nave?

51 • La energía total de una partícula de masa m es tres veces mayor que su energía en reposo. (*a*) Hallar v/c de dicha partícula. (*b*) Demostrar que su momento viene dado por $p = \sqrt{8}mc$.

52 • Una nave espacial pasa por delante de la Tierra con una velocidad relativa a la misma de $0{,}70c$. Cinco minutos después de que la nave haya pasado rozando la Tierra se le envía un mensaje desde el centro de control de Houston, Tejas. (Ignórese todo efecto debido a la rotación terrestre.) (*a*) ¿Cuánto tardará el mensaje en llegar a la nave? (*b*) Cinco minutos después de recibirse el mensaje a bordo de la nave, mandan el mensaje de respuesta a Houston. ¿Cuánto tiempo pasa en Houston entre el instante en que han enviado el mensaje y el instante en que han recibido su respuesta?

53 •• Unas partículas elementales llamadas muones pueden detectarse en la superficie de la Tierra llegando a una velocidad de $0{,}99995c$. Uno de sus compañeros sostiene que estos muones se han originado en el Sol. Hágale ver que está equivocado. (La vida media del muón es de 2,20 μs.) SSM

54 •• (*a*) Desde el sistema de referencia propio de los muones de la radiación cósmica que se acercan verticalmente a la Tierra con una velocidad de $0{,}99c$, ¿cuál sería la altura del monte Everest? Considerar que dicha altura es de 8846 m para un observador en el sistema de referencia de la Tierra. (*b*) ¿Cuánto tiempo tarda un muón en recorrer la altura de la montaña si lo medimos desde el sistema de referencia del muón? (*c*) ¿Cuánto tiempo tarda un muón en recorrer la altura de la montaña si lo medimos desde el sistema de referencia de la Tierra?

55 ••• Un núcleo atómico de oro tiene un radio de $3{,}00 \times 10^{-14}$ m y una masa de 197 u (energía en reposo de una unidad de masa atómica es de 932 MeV). En experimentos realizados en el Brookhaven National Laboratory es frecuente acelerar estos núcleos a energías cinéticas de $3{,}35 \times 10^4$ GeV. (*a*) Su velocidad, ¿cuánto está por debajo de la de la luz? (*b*) A estas energías, ¿cuánto tiempo necesitan para recorrer 100 m en el sistema de referencia del laboratorio?

56 ••• **APPROXIMACIÓN** Considerar un haz de neutrones procedente de un reactor nuclear. Las energías cinéticas de estos neutrones alcanzan los 1,00 MeV. La energía en reposo de un neutrón es de 939 MeV. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de los neutrones de 1,00 MeV? Dar la respuesta en términos de v/c. (*b*) Si la vida media de estos neutrones es de 15,0 minutos (medida desde el sistema de referencia del laboratorio), ¿cuál es

el alcance de un haz de estos neutrones? (Consideramos que se mueven en el vacío y sin interaccionar con material alguno.) Hacer una estimación del alcance del haz calculando el que corresponde a cinco vidas medias. Después de estas cinco vidas medias, solamente queda una fracción e^{-5} o 0,007 (el 0,7%) de los neutrones iniciales. (*c*) Comparar el alcance de este haz con el de un haz de neutrones "térmicos", es decir, neutrones cuya energía cinética se ha moderado a unos 0,025 eV. Dar la respuesta en tanto por ciento. Esto es, ¿qué porcentaje del alcance de los neutrones de 1,00 MeV alcanzan también los neutrones térmicos? (Nota: seguimos suponiendo que estamos en el vacío; en realidad, estos neutrones interactúan rápidamente con la materia (aire, agua...) por lo que su alcance real es muy inferior.)

57 ••• **PÓNGALO EN SU CONTEXTO** Juanita y Javier intentan colocar una escalera de 15 pies de longitud en un cobertizo que tiene sendas puertas en sus extremos situadas a 10 pies de distancia la una de la otra. Recordando sus clases de física, Juanita propone abrir la puerta delantera y que Javier, cargado con la escalera, corra hacia esa puerta a gran velocidad para que la longitud de la escalera se contraiga hasta caber dentro del cobertizo. En el instante en que la parte posterior de la escalera cruce la puerta, Juanita la cerrará inmediatamente. (*a*) ¿A qué velocidad mínima debe correr Javier con la escalera para que ésta quepa por completo en el cobertizo? Expresarla como una fracción de la velocidad de la luz. (*b*) Al correr hacia el cobertizo a 0,866*c*, Javier se da cuenta de que, en su propio sistema de referencia, es el cobertizo y no la escalera el que se ha acortado. ¿Cuál es la longitud del cobertizo en este sistema de referencia? (*c*) En el sistema de referencia de la escalera, ¿existe algún instante en que los extremos de la escalera estén simultáneamente dentro del cobertizo? Averiguarlo desde el punto de vista de la simultaneidad relativista.

VOLUMEN 1

Respuestas de los problemas impares del final de los capítulos

Las soluciones a los problemas se han calculado tomando $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ a menos que se especifique lo contrario. Las diferencias en la última cifra significativa pueden ser debidas al redondeo de los datos y no son importantes.

Capítulo 1

1 (*c*)

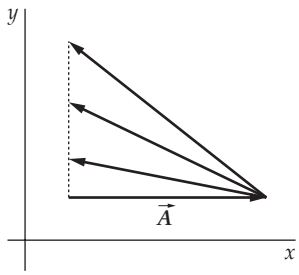
3 (*c*)

5 $1{,}609 \times 10^5$ cm/mi

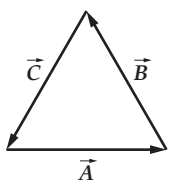
7 (*e*)

9 Falso

11



13



15 $2{,}0 \times 10^{27}$ moléculas

17 (*a*) $\approx 3 \times 10^{10}$ pañales, (*b*) $\approx 2 \times 10^7\ \text{m}^3$, (*c*) $\approx 2{,}1\ \text{km}^2$

19 (*a*) 50 MB, (*b*) 7×10^2 novelas

21 (*a*) 40×10^{-6} W, (*b*) 4×10^{-9} s, (*c*) 3×10^6 W, (*d*) 25×10^3 m

23 (*a*) C_1 se da en m; C_2 se da en m/s, (*b*) C_1 se da en m/s^2 (*c*) C_1 se da en m/s^2 (*d*) C_1 se da en m; C_2 se da en s^{-1} (*e*) C_1 se da en m/s; C_2 se da en s^{-1}

25 (*a*) $4{,}00 \times 10^7$ m, (*b*) $6{,}37 \times 10^6$ m, (*c*) $2{,}49 \times 10^4$ mi, $3{,}96 \times 10^3$ mi

27 210 cm

29 1,280 km

31 (*a*) 36,00 km/h · s, (*b*) 10,00 m/s^2, (*c*) 88 ft/s, (*d*) 27 m/s

33 (*a*) $1{,}3 \times 10^4$ lb (*b*) 4 cajas

35 (*a*) m/s^2, (*b*) s, (*c*) m

37 T^{-1}

39 (*a*) M/T^2, (*b*) $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$

43 M/L^3

45 (*a*) 30000, (*b*) 0,0062, (*c*) 0,000004, (*d*) 217000

47 (*a*) $1{,}14 \times 10^5$, (*b*) $2{,}25 \times 10^{-8}$, (*c*) $8{,}27 \times 10^3$, (*d*) $6{,}27 \times 10^2$

49 $3{,}6 \times 10^6$

51 (*a*) $25{,}8\ \text{mm}^2$, (*b*) $30{,}1\ \text{mm}^2$

53 (*a*) $A_x = 5{,}0$ m, $A_y = 8{,}7$ m, (*b*) $v_x = -19$ m/s, $v_y = -16$ m/s, (*c*) $F_x = 35$ lb, $F_y = 20$ lb

55 Se puede ir o bien 87 m hacia el norte o 87 m hacia el sur. La dirección del trayecto debería ser o bien 60° hacia el noreste o bien 60° hacia el sureste, respectivamente.

57 (*a*) $40\hat{\boldsymbol{\imath}} - 50\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, (*b*) −51°

59 $-0{,}59\hat{\boldsymbol{\imath}} - 0{,}81\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $0{,}92\hat{\boldsymbol{\imath}} - 0{,}38\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, $-0{,}51\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0{,}86\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

61 $\approx 3{,}3 \times 10^3$ mi/h, $\approx 5{,}3 \times 10^3$ km/h, $\approx 1{,}5 \times 10^3$ m/s

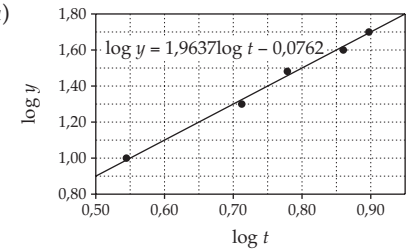
63 31,7 años

65 $2{,}0 \times 10^{23}$

67 (*a*) $1{,}4 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$, (*b*) $2{,}2 \times 10^2$ m

69 (*a*) $4{,}848 \times 10^{-6}$ parsec, (*b*) $3{,}086 \times 10^{16}$ m, (*c*) $9{,}461 \times 10^{15}$ m, (*d*) $6{,}324 \times 10^4$ UA, (*e*) 3,262 años-luz

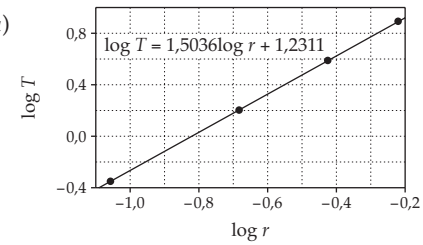
71 (*a*)



(*c*) $B = 0{,}84\ \text{m/s}^2$, $C = 2{,}0$, (*d*) 1,1 s, (*e*) $1{,}7\ \text{m/s}^2$

73 $55{,}4 \times 10^3$ toneladas. El resultado es coherente con el dato de 50 000 toneladas del enunciado, aunque en realidad su peso es más próximo a 55 000 toneladas.

75 (*a*)



$n = 1{,}50$, $C = 17{,}0\ \text{años/(Gm)}^{3/2}$
$T = [17{,}0\ \text{años/(Gm)}^{3/2}]r^{1{,}50}$, (*b*) $r = 0{,}510$ Gm

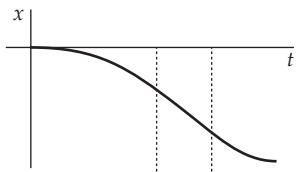
77 (*a*) $\vec{F}_{\text{Paul}} = (35\text{ lb})\hat{i} + (35\text{ lb})\hat{j}$ $\vec{F}_{\text{Johnny}} = (-53\text{ lb})\hat{i} + (-37{,}3\text{ lb})\hat{j}$
(*b*) $\vec{F}_{\text{Connie}} = (18\text{ lb})\hat{i} + (1{,}9\text{ lb})\hat{j}$, $F_{\text{Connie}} = 18\text{ lb}$, $\theta = 6{,}1°$ noroeste

Capítulo 2

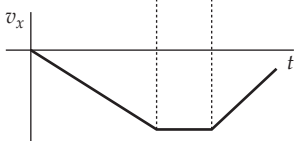
1 Cero

3 $v_{\text{m 1.ª mitad}} = 2H/T$, $v_{\text{m 2.ª mitad}} = -2H/T$

5 (*a*) El módulo de su velocidad aumentó desde cero, permaneció constante durante un tiempo y luego decreció.
(*b*)



(*c*)



7 Verdadero

9 Falso. Si fuera cierto, cada vez que las velocidades inicial y final fuesen cero, la velocidad media sería cero.

11 (*a*)

13 (*a*) *b*, (*b*) *c*, (*c*) *d*, (*d*) *e*

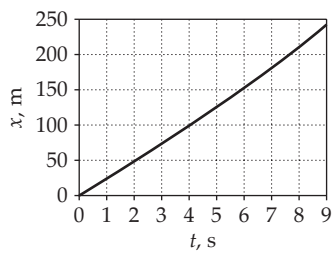
15 (*a*) B, D y E, (*b*) A y D, (*c*) C

17 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero

19 (*a*) 0, (*b*) $-g$, (*c*) El módulo de su aceleración es mayor que g mientras la bola está en contacto con el techo.

21 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadero

23 (*a*) *c*
(*b*)



25 El B adelanta al A.

27 (*c*)

29 (*a*) Sí, cuando las curvas se cortan, (*b*) Sí, cuando las pendientes de las curvas tienen signos opuestos, (*c*) Sí, cuando las curvas tienen la misma pendiente, (*d*) Los dos coches están más alejados uno del otro cuando las dos curvas están más separadas entre sí en la dirección del eje *x*.

31 $v_{\text{J}} = \frac{1}{2}v_{\text{máx}}$

33 (*a*) *d*, (*b*) *b*, (*c*) Ninguno, (*d*) *c* y *d*

35 (*a*) *a*, *f*, e *i*, (*b*) *c* y *d*, (*c*) *a*, *d*, *e*, *f*, *h*, e *i*, (*d*) *b*, *c*, y *g*, (*e*) *a* e *i*, *d* y *h*, *f* e *i*

37 $-1{,}2 \times 10^3\text{ m/s}^2$

39 4,03 m/s²

41 (*a*) 1,7 km ≈ 1 mi, (*b*) Si la inexactitud en la estimación del tiempo es inferior a 1 s (±20%), la inexactitud en la distancia será de un 20% de 1,7 km, es decir, aproximadamente unos 300 m.

43 (*a*) 0,28 km/min, (*b*) −0,083 km/min, (*c*) 0 (*d*) 0,13 km/min

45 (*a*) 2,2 h, (*b*) $(t_{\text{supersónico}}/t_{\text{subsónico}}) \approx 0{,}45$

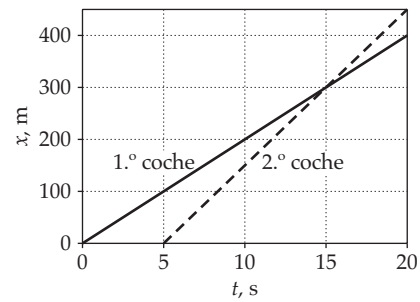
47 (*a*) 4,3 años, (*b*) $4{,}3 \times 10^6$ años. Puesto que $4{,}3 \times 10^6$ años $\gg$ 1000 años, Gregor no tendrá que pagar.

49 23,5 m/s

51 (*a*) 0, (*b*) 0,3 m/s, (*c*) −2 m/s, (*d*) 1 m/s

53 $v_{\text{m}} = 122$ km/h. $v_{\text{numérico m}} = 1{,}04v_{\text{m}}$. El módulo de la velocidad media sería igual a una tercera parte de la suma de los tres módulos de las velocidades si se mantuvieran durante un mismo tiempo en lugar de mantenerse durante una misma distancia.

55 (*a*)



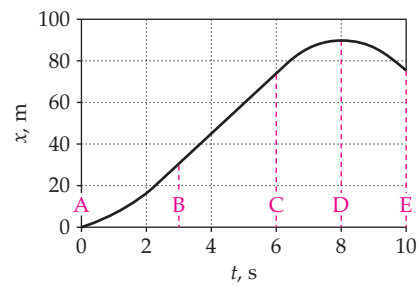
(*b*) 15 s, (*c*) 300 m, (*d*) 100 m

57 15 m/s

59 −2,0 m/s²

61 (*a*) 2,0 m/s, (*b*) $\Delta x = (2t - 5)\Delta t + (\Delta t)^2$, (*c*) $v(t) = 2t - 5$

63 (*a*) $a_{\text{m AB}} = 3{,}3\text{ m/s}^2$, $a_{\text{m BC}} = 0$, $a_{\text{m CE}} = -7{,}5\text{ m/s}^2$, (*b*) 75 m
(*c*)



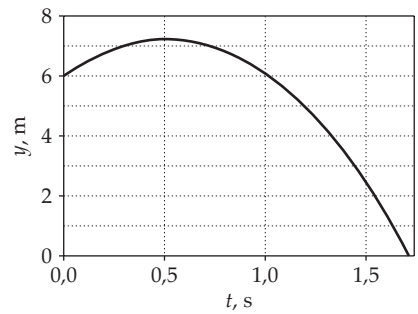
(*d*) En el punto D, $t = 8$ s, la gráfica corta el eje de tiempo, luego $v = 0$.

65 (*a*) 80 m/s, (*b*) 0,40 km, (*c*) 40 m/s

67 16 m/s²

69 (*a*) 4,1 s, (*b*) 20 m, (*c*) 0,99 s y 3,1 s

71 (*a*)



(*b*) 7,3 m, (*c*) 1,7 s, (*d*) 12 m/s

73 44 m

75 68 m/s

77 (*a*) 666 m, (*b*) 14 m/s

79 (*a*) El cohete no llega a la altura. Para ello se debería aumentar la aceleración o la duración de la aceleración, (*b*) 138 s, (*c*) 610 m/s

81 40 cm/s, $-6{,}9\ \text{cm/s}^2$

83 (*a*) 19 km/h, (*b*) 0,60

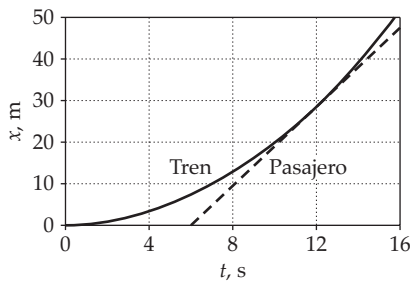
85 11 m

87 28 m

89 (*a*) 2,4 m, (*b*) 1,4 s

93 (*a*) 2,1 d, (*b*) 5,8 años

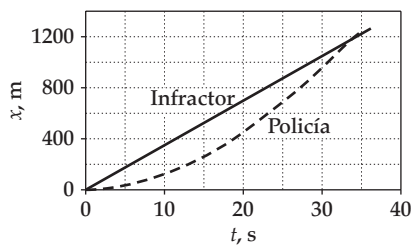
95 4,8 m/s



97 $h/3$

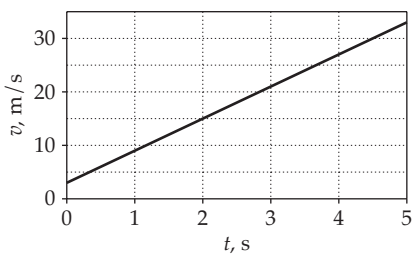
99 (*a*) 35 s, (*b*) 1,2 km

(*c*)



101 (*a*) $2L/3$, (*b*) $\frac{2}{3}t_{\text{fin}}$, (*c*) $\sqrt{4aL/3}$

103 (*a*)



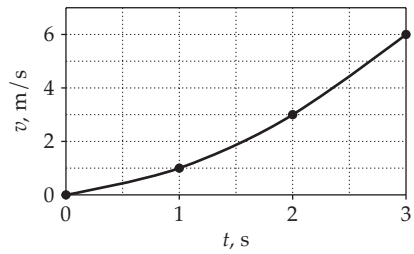
área bajo la curva = 90 m

(*b*) $x(t) = (3{,}0\ \text{m/s}^2)t^2 + (3{,}0\ \text{m/s})t$, 90 m

105 $x(t) = (2{,}3\ \text{m/s}^3)t^3 - (5{,}0\ \text{m/s})t$

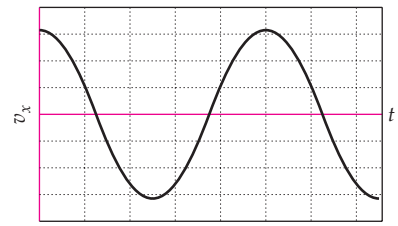
107 (*a*) 0,25 m/s por rectángulo, (*b*) 0,93 m/s, 3,0 m/s, 6,0 m/s

(*c*)

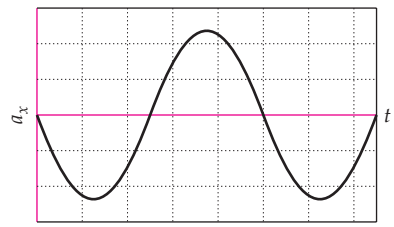


$x(3\ \text{s}) = 6{,}5\ \text{m}$

109 (*a*)



(*b*)



(*c*) Los puntos situados a máxima distancia respecto del eje de tiempo son puntos de retorno. La velocidad del cuerpo es cero en esos puntos.
(*d*) La velocidad es mayor cuanto mayor es la pendiente y viceversa. La aceleración es cero cuando la concavidad cambia de signo y la aceleración es máxima cuanto mayor es el ritmo de cambio de la pendiente con respecto al eje x.

111 (*a*) $v(t) = (0{,}10\ \text{m/s}^3)t^2 + 9{,}5\ \text{m/s}$
(*b*) $x(t) = \frac{1}{6}(0{,}20\ \text{m/s}^3)t^3 + (9{,}5\ \text{m/s})t - 5{,}0\ \text{m/s}$
(*c*) 13 m/s, 15 m/s. v_{m} no es igual a $(v_{\text{i}} + v_{\text{f}})/2$, puesto que la aceleración no es constante.

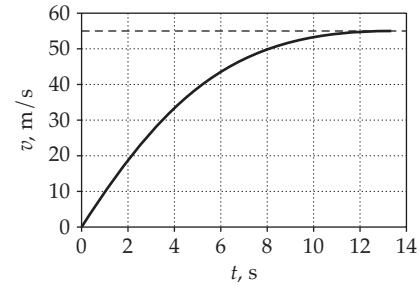
113 (*b*) 0,452 s, (*c*) $12{,}0\ \text{m/s}^2$, 22,3%

115 (*a*) El valor máximo de la función seno es 1 (como en el caso sen ωt). Por consiguiente, $B = v_{\text{máx}}$.
(*b*) $a = \omega v_{\text{máx}} \cos(\omega t)$. La aceleración *no* es constante.
(*c*) $|a_{\text{máx}}| = \omega v_{\text{máx}}$, (*d*) $x = x_0 + (v_{\text{máx}}/\omega)[1 - \cos(\omega t)]$

117 (*a*) s^{-1}, (*c*) $v_{\text{t}} = g/b$

119 (*b*) 0,762

(*c*)



121 No debería reclamar la multa.

Capítulo 3

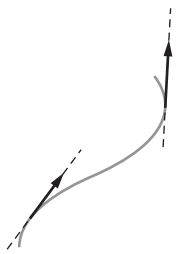
1 No. Sí.

3 Cero

5 (*e*)

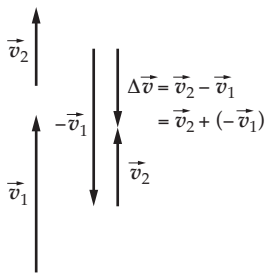
7 (*c*)

9 (*a*) La velocidad es un vector tangente a la trayectoria.
(*b*)

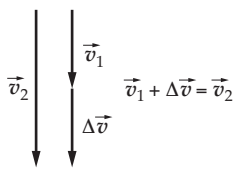


11 (*a*) Un coche reduce su velocidad moviéndose a lo largo de una carretera recta.
(*b*) Un coche aumenta su velocidad moviéndose a lo largo de una carretera recta.
(*c*) Un coche moviéndose a lo largo de una trayectoria circular con módulo de velocidad constante.

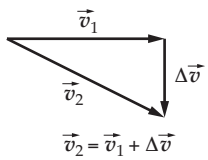
13 (*a*)



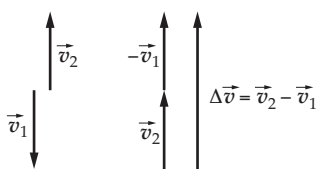
(*b*)



(*c*)



15



17 Usted debe ir caminando en dirección oeste de forma que la lluvia cae justo encima suyo.

19 (*a*) Verdadero, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero

21 (*a*)

23 (*d*)

25 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero, (*d*) Falso, (*e*) Verdadero

27 Si se supone que $+x$ va en dirección este y que $+y$ va en dirección norte

(*a*)

Trayecto	Dirección del vector velocidad
AB	Norte
BC	Noreste
CD	Este
DE	Sureste
EF	Sur

(*b*)

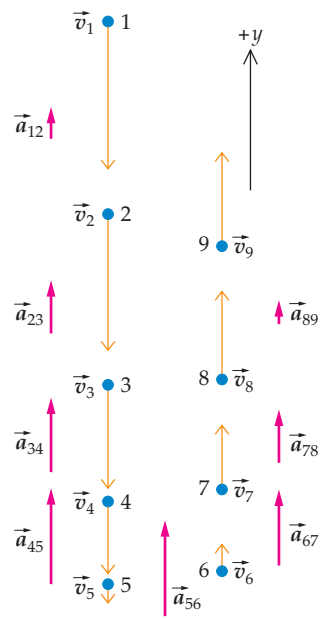
Trayecto	Dirección del vector aceleración
AB	Norte
BC	Sureste
CD	0
DE	Suroeste
EF	Norte

(*c*) El módulo de la aceleración es mayor en DE que en BC.

29 La componente horizontal de la velocidad de la gota que cae de la botella es la misma que la del barco. Durante el tiempo que la gota está en el aire, la componente horizontal de su velocidad es la misma que la del barco. Como consecuencia de ello, la gota cae sobre el recipiente, que también se mueve con la la misma velocidad que el barco. Como la persona que observa este fenómeno tiene la misma velocidad que el barco, tendrá la misma sensación que si el barco estuviera en reposo.

31 (*a*) Verdadero, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Verdadero

33 (*a*)



i	v_y (m/s)	Δv_y (m/s)	a_{me} (m/s^2)
1	−0,78		
2	−0,69	0,09	1,8
3	−0,55	0,14	2,8
4	−0,35	0,20	4,0
5	−0,10	0,25	5,0
6	0,15	0,25	5,0
7	0,35	0,20	4,0
8	0,49	0,14	2,8
9	0,53	0,04	0,8

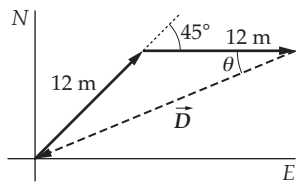
(*b*) El vector aceleración siempre apunta hacia arriba, de forma que su componente *y* no cambia. El módulo del vector aceleración es máximo cuando la altura de la patinadora es máxima.

35 $\approx 7 \times 10^4$ m/s^2

37 15 m/s

39 $\Delta\vec{B} = 0$, $\Delta\vec{A} = -(0{,}25\text{ m})\hat{j} - (0{,}25\text{ m})\hat{i}$

41



$\vec{D} \approx 22$ m a 23° al suroeste

43 (*a*) $\vec{D} = (3{,}0\text{ m})\hat{i} + (3{,}0\text{ m})\hat{j} + (3{,}0\text{ m})\hat{k}$, (*b*) 5,2 m

45 $\vec{v}_m = (14\text{ km/h})\hat{i} + (-4{,}1\text{ km/h})\hat{j}$

47 7,2 m/s

49 (*a*) $\vec{v}_m = (33\text{ m/s})\hat{i} + (27\text{ m/s})\hat{j}$
(*b*) $\vec{a}_m = (-3{,}0\text{ m/s}^2)\hat{i} + (-1{,}8\text{ m/s}^2)\hat{j}$

51 $\vec{v} = 30\hat{i} + (40 - 10t)\hat{j}$, $\vec{a} = (-10\text{ m/s}^2)\hat{j}$

53 (*a*) $\vec{v}_m = (20\text{ m/s})(-\hat{i} + \hat{j})$, (*b*) $\vec{a}_m = (-2{,}0\text{ m/s}^2)\hat{i}$,
(*c*) $\Delta\vec{r} = (600\text{ m})(-\hat{i} + \hat{j})$

55 (*a*) 16° noroeste, (*b*) 280 km/s

57 8,5°, 2,57 h

59 Debería volar con viento cruzado.

61 (*a*) $\vec{r}_{AB}(6{,}0\text{ s}) = (1{,}2 \times 10^2\text{ m})\hat{i} + (4{,}0\text{ m})\hat{j}$,
(*b*) $\vec{v}_{AB}(6{,}0\text{ s}) = (-20\text{ m/s})\hat{i} - (12\text{ m/s})\hat{j}$, (*c*) $(-2{,}0\text{ m/s}^2)\hat{j}$

63 (*a*) $\vec{v}_{rel} = (0{,}80\text{ m/s})\hat{i} - (1{,}2\text{ m/s})\hat{j}$, (*b*) 1,0 m/s

65 $1{,}5 \times 10^{-6}$ m/s^2, $1{,}55 \times 10^{-7} g$

67 (*a*) 463 m/s, 0,343% de *g*, (*b*) Desde la persona hacia el centro de la Tierra, (*c*) 380 m/s, $2{,}76 \times 10^{-2}$ m/s^2, (*d*) Cero

69 (*a*) 14 s, 1,8 m/s, (*b*) 0,89 m/s, 0,40 m/s^2

71 (*a*) 15 cm, (*b*) El rango de aceleraciones va de1300*g* a 2700*g*.

73 $h = (v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta_0)/2g$

75 34 m/s

77 20,3 m/s, 36,1°

79 69,3°

81 (*a*) 18 m/s, (*b*) 13°

83 (*a*) 8,1 m, (*b*) 23 m/s

85 63,4° por debajo de la horizontal.

87 (*a*) El chut es corto. (*b*) 0,34 m por debajo de la barra, (*c*) 5,2 m

89 (*a*) 0,97 s, (*b*) 4,2 m, (*c*) 13 m/s a 70° por debajo de la horizontal

91 (*a*) 485 km, (*b*) 1,70 km/s

93 (*a*) 194 m, (*c*) 219 m, 11%

95 (*b*) 80 m, (*c*) 288 m. La solución aproximada es 80 m de aumento. La solución ignora términos de orden superior que podrían ser importantes cuando las diferencias no son pequeñas.

99 (*a*) 11 m/s, (*b*) 3,1 s, (*c*) $\vec{v} = (6{,}5\text{ m/s})\hat{i} + (-22\text{ m/s})\hat{j}$

101 (*a*) 21,5 m/s, (*b*) 3,53 s, (*c*) 19,3 m/s

103 (*a*) 7,41 m/s, (*b*) 0,756 s, (*c*) 15,9 m/s, 17,5 m/s, 25,0°

105 (*a*) 0,785 m, (*b*) 105 m

107 (*a*) 1,1 m, (*b*) 3,9 m

109 (*a*) 15 km, (*b*) 54 s

111 806 mi/h, 60,3° noroeste

113 Con el cuarto escalón

115 (*a*) $v_{mín} = \dfrac{x}{\cos\theta}\sqrt{\dfrac{g}{2(x\operatorname{tg}\theta - h)}}$

(*b*) $v_{mín} = 26\text{ m/s} = 58\text{ mi/h}$

119 (*a*) 26 m, (*b*) 7,8°

121 52,9 km, 52,8° noreste

Capítulo 4

1 Sí. Hay fuerzas que actúan sobre la taza. Son las mismas que actuarían sobre ella si estuviera sobre la mesa de la cocina de su casa.

3 Dentro de la limusina usted sujeta la cuerda por un extremo y suspende el objeto por el otro extremo. Si la cuerda permanece vertical, el sistema de referencia de la limusina es un sistema de referencia inercial. No puede determinar la velocidad de la limusina, pues no puede distinguir si está parada o se mueve a velocidad constante.

5 No. Predecir la dirección del siguiente movimiento requiere de información adicional.

7 La masa de la sonda es constante. Sin embargo, el sistema solar atraerá la sonda con una determinada fuerza gravitatoria.

9 Usted y el ascensor podrían o bien descender disminuyendo la velocidad o bien ascender aumentando la velocidad. En ambos casos su peso aparente es mayor que su peso real.

11 La fuerza más significativa de nuestra vida cotidiana es la fuerza gravitatoria. Literalmente nos mantiene sobre o cerca del suelo. Otra fuerza también relevante es la electromagnética. Proporciona la "cola" que mantiene unidos a los cuerpos sólidos y los hace rígidos. Es de gran importancia en los circuitos eléctricos.

13 (*a*) Fuerza normal, de contacto, (*b*) Fuerza normal, de contacto, (*c*) Fuerza normal, de contacto, (*d*) Fuerza normal, de contacto, (*e*) Gravitatoria, a distancia
Las fuerzas que constituyen un par 3LN son las dos fuerzas normales que los bloques se ejercen mutuamente y las dos fuerzas normales que la mesa y el bloque inferior se ejercen mutuamente.

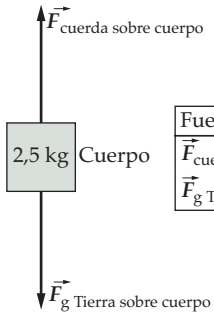
15 Cuando el plato descansa sobre el suelo la fuerza normal F_n que actúa hacia arriba sobre él se ejerce desde el suelo y tiene el mismo módulo que la fuerza gravitatoria F_g sobre el plato. Por tanto, el plato no se acelera. Sin embargo, para frenar el plato cuando alcanza el suelo se requiere que $F_n > F_g$

(o $F_n \gg F_g$, si el suelo es duro y el plato se detiene rápidamente). Una fuerza normal grande que se ejerza sobre un objeto de porcelana lo puede romper fácilmente.

17 (*a*) La fuerza normal ejercida por el bloque sobre el velocista.
(*b*) La fuerza de rozamiento del hielo sobre el disco en dirección opuesta a la velocidad.
(*c*) La fuerza gravitatoria de la Tierra sobre la pelota en dirección hacia abajo.
(*d*) La fuerza ejercida por la cuerda sobre el saltador hacia arriba.

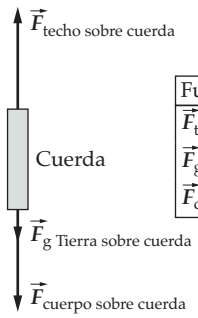
19 (*a*) (2) 100 N, (*b*) sus aceleraciones son iguales, (*c*) las direcciones de las aceleraciones son iguales.

21 (*a*)



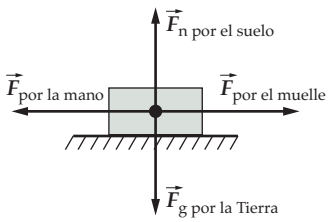
Fuerza	Par 3LN
$\vec{F}_{\text{cuerda sobre cuerpo}}$	$\vec{F}_{\text{cuerpo sobre cuerpo}}$
$\vec{F}_{\text{g Tierra sobre cuerpo}}$	$\vec{F}_{\text{g cuerpo sobre Tierra}}$

(*b*)

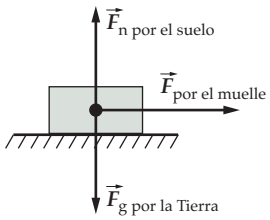


Fuerza	Par 3LN
$\vec{F}_{\text{techo sobre cuerda}}$	$\vec{F}_{\text{cuerda sobre techo}}$
$\vec{F}_{\text{g Tierra sobre cuerda}}$	$\vec{F}_{\text{g cuerda sobre Tierra}}$
$\vec{F}_{\text{cuerpo sobre cuerda}}$	$\vec{F}_{\text{cuerda sobre cuerpo}}$

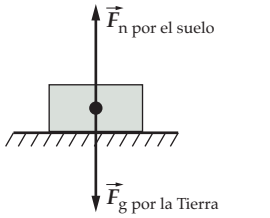
23 (*a*)



(*b*)



(*c*)



25 (*a*) m_2/m_1, (*b*) m_2/m_1, (*c*) $\Delta x = \frac{1}{2}F(m_2^{-1} - m_1^{-1})(\Delta t)^2$. Como $m_1 > m_2$, el objeto de masa m_2 va delante.

27 3,6 kN

29 −17 kN

31 (*a*) 6,0 m/s², (*b*) 1/3, (*c*) 2,3 m/s²

33 12 kg

35 (*a*) −3,8 kN, (*b*) 3,00 cm

37 (*a*) 4,2 m/s² a 45° de cada fuerza, (*b*) 8,4 m/s² a 15° de $2\vec{F}$

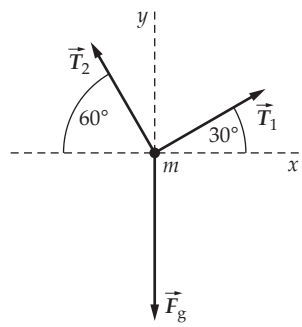
39 (*a*) 4,0 m/s², (*b*) 2,4 m/s²

41 (*a*) $\vec{a} = (1{,}5\ \text{m/s}^2)\hat{i} + (-3{,}5\ \text{m/s}^2)\hat{j}$
(*b*) $\vec{v}(3{,}0\ \text{s}) = (4{,}5\ \text{m/s})\hat{i} + (-11\ \text{m/s})\hat{j}$
(*c*) $\vec{r}(3{,}0\ \text{s}) = (6{,}8\ \text{m})\hat{i} + (-16\ \text{m})\hat{j}$

43 (*a*) $5{,}3 \times 10^2$ N, (*b*) $1{,}2 \times 10^2$ lb

45 (*a*) 2,45 kN, (*b*) 409 N, (*c*) 2,45 kN

47 (*a*)



(*b*) T_2 es mayor que T_1

49 (*a*) 37°, (*b*) 4,1 N, (*c*) $T_1 = 3{,}4$ N, $T_2 = 2{,}4$ N, $T_3 = 3{,}4$ N

51 $\vec{F}_3 = (-5{,}0\ \text{N})\hat{i} + (-26\ \text{N})\hat{j}$

53 (*a*) 3,82 kN, (*b*) 4,30 kN

55 (*a*) Si $T_H = 10{,}0$ N, la anchura del arco será 9,56 m.
(*b*) Si la anchura del arco es de 8,00 m, entonces $T_H = 3{,}72$ N y la altura del arco será de 2,63 m, suficientemente alto como para que alguien pueda pasar a través de él.

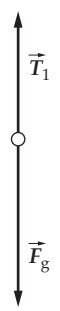
57 56,0 N

59 (*a*) $T = 0{,}42$ kN, $F_n = 0{,}25$ kN, (*b*) $T = mg\ \text{sen}\,\theta$

61 0,55 kN

63 (*a*)

(*b*)



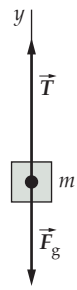
(*c*) No. No hay diferencia.

65 (*a*) 20 N, (*b*) 20 N, (*c*) 26 N, (*d*) $T_{0\to5{,}0\ \text{s}} = 20$ N, $T_{5\ \text{s}\to9\ \text{s}} = 15$ N

67 (*a*) 1,3 m/s², (*b*) $T_1 = 17$ N, $T_2 = 21$ N

69 (*a*) $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}m$, $F_{21} = \dfrac{Fm_1}{m_1 + m_2}$, (*b*) 0,40 m/s², 0,8 N

73 (*a*)



(*b*) 592 N

75 (*a*) $a = \dfrac{g(m_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta)}{m_1 + m_2}$, $T = \dfrac{gm_1m_2(1 + \operatorname{sen}\theta)}{m_1 + m_2}$

(*b*) 2,5 m/s^2, 37 N

77 (*a*) 1,4 m/s^2, 61 N, (*b*) $(m_1/m_2) = 1{,}19$

79 (*a*) 0,40 kN, (*b*) 0,37 kN

81 (*a*) 5,0 cm, (*b*) $a_{20} = 2{,}5$ m/s^2, $a_5 = 4{,}9$ m/s^2, $T = 25$ N

83 $m_{2.^a\,\text{masa}} = 1{,}4$ kg o 1,1 kg

85 $F_{\text{sobre } m_2} = \left(\dfrac{m^2 + m_1^2 + m_2^2}{m + m_1 + m_2}\right)g$

87 $T_B = 305$ N, $F_{\text{mástil sobre cubierta}} = 1{,}55$ kN

89 (*a*) −0,10 km/s^2, (*b*) 6,1 cm, (*c*) 35 ms

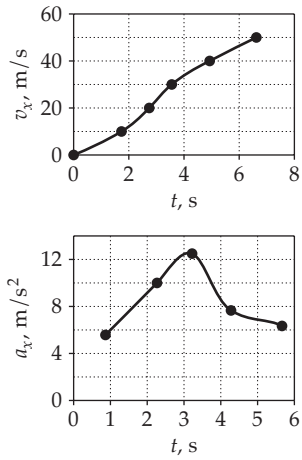
91 (*a*) $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$, (*b*) $F_{\text{neta}} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}F$, (*c*) $T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}F$

93 (*a*) 55,0 g, (*b*) 2,45 m/s^2, 2,03 N

95 (*a*) $T = \frac{1}{3}(F_2 + 2F_1)$, (*b*) $t_0 = (3T_0/4C)$

97 (*a*) Debería lanzar la bota en la dirección a la orilla más próxima. (*b*) 420 N, (*c*) 7,52 s

99 (*a*)



(*b*) 2,8 s a 3,6 s, (*c*) 5500 N, (*d*) 160 m

Capítulo 5

1 Las fuerzas de rozamiento estática y cinética son responsables de las aceleraciones. Si el coeficiente de rozamiento estático entre el suelo del camión y el cuerpo es lo suficientemente grande, el objeto no se deslizará sobre el suelo del camión. Cuanto mayor sea la aceleración del camión mayor deberá ser el coeficiente de rozamiento estático necesario para evitar el deslizamiento.

3 (*d*)

5 (*c*)

7 Conforme el muelle se alarga, aumenta la fuerza ejercida por el muelle sobre el bloque. Cuando la fuerza supere el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático, el bloque se deslizará. Cuando lo haga, se acortará la longitud del muelle decreciendo la fuerza que ejerce sobre el bloque. La fuerza de rozamiento cinético frenará el bloque hasta detenerlo y empieza el ciclo de nuevo.

9 (*a*), (*b*) y (*c*)

11 El bloque 1 llega a la polea antes que el bloque 2 llega a la pared.

13 El rozamiento con el aire es proporcional a la densidad del aire y al área de la sección transversal del objeto. Durante un día caluroso la densidad del aire es menor. El aire es también menos denso a altitudes elevadas. Si adopta la posición de cuchillo reducirá el área sometida a rozamiento reduciendo también la fuerza de rozamiento como también lo hará si utiliza equipamiento con formas redondeadas y lisas.

15 (*c*)

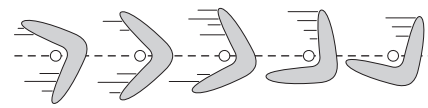
17 (*a*) La fuerza de arrastre es proporcional al área presentada y a una potencia del módulo de la velocidad. La fuerza de rozamiento inicial sobre la pluma es mayor puesto que presenta una mayor área que la piedra. Conforme aumenta la velocidad de la piedra, aumenta la fuerza de rozamiento sobre ella. La fuerza de rozamiento sobre la piedra supera eventualmente la que actúa sobre la pluma puesto que la fuerza de rozamiento sobre la pluma no puede superar la fuerza gravitatoria de la pluma.
(*b*) La velocidad terminal de la piedra es mucho mayor que la de la pluma. La aceleración de la piedra será elevada hasta que su velocidad se aproxime a la terminal.

19 $a_{cm} = (m_1/(m_1 + m_2))a_1$

21 El rozamiento de la carretera sobre los neumáticos hace frenar al coche.

23 El centro de masas se desplaza hacia abajo.

25 La aceleración del centro de masas es cero.



27 (*a*) M/T, kg/s, (*b*) M/L, kg/m, (*c*) ML/T^2, (*d*) 57 m/s, (*e*) 87 m/s

29 $\mu_e \approx 1{,}4$. Probablemente no sea tan buena idea. Los neumáticos tienen un coeficiente de rozamiento estático máximo sobre el asfalto cercano a 1.

31 (*b*)

33 (*a*) 15 N, (*b*) 12 N

35 500 N

37 (*a*) 5,9 m/s^2, (*b*) 76 m

39 (*a*) 49,1 N, (*b*) 123 N

41 (*a*) 4,6°, (*b*) 4,6°

43 84 cm/s

45 2,4 m/s^2, 37 N

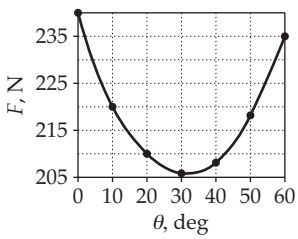
47 (*a*) 4,0 m, (*b*) 0,47

49 (*a*) 2,7 m/s^2, (*b*) 10 s

51 (*a*) 0,96 m/s^2, (*b*) 0,18 N

53 (*a*) La fuerza de rozamiento se opone al movimiento del bloque y el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático es proporcional a la fuerza normal F_N. La fuerza normal es igual al peso menos la componente vertical F_y de la fuerza F. Manteniendo el módulo de F constante mientras aumenta θ desde cero da lugar a un aumento de F_y y, por tanto, a un descenso en el valor de la fuerza máxima de rozamiento estático, $f_{máx}$. El objeto empezará a moverse si la componente horizontal F_x de la fuerza F sobrepasa $f_{máx}$. Un aumento de θ dará lugar a un aumento de F_x. Conforme θ aumenta desde cero, el decrecimiento de F_N es superior al decrecimiento de F_x, de forma que el objeto cada vez está más cerca de deslizarse. Sin embargo, conforme θ tiende a 90°, F_x tiende a cero y no se iniciará movimiento. Si F es suficientemente grande y si θ aumenta desde cero, entonces para algún valor de θ, el bloque empezará a moverse.

(*b*)



Según el gráfico, podemos ver que el mínimo de F tiene lugar para $\theta \approx 32°$.

57 (*a*) 0,24, (*b*) 1,4 m/s^2

59 (*a*) 18 N, (*b*) 1,5 m/s^2, 2,9 N, (*c*) $a_1 = 2{,}0$ m/s^2, $a_2 = 7{,}8$ m/s^2

61 (*a*) 5,7°, (*b*) 1,9 m/s

63 (*a*) $F_{mín} = -1{,}6$ kg, $F_{máx} = 84$ N, (*b*) $F_{mín} = 5{,}8$ N y $F_{máx} = 37$ N (La dirección $+x$ es hacia la derecha.)

65 (*b*) 0,30, (*c*) 2,8 m/s

67 $2{,}8 \times 10^{-4}$ kg/m

69 $d_{n\ \text{filtros}} = \sqrt{n}\, d_{1\ \text{filtro}}$

71 25 m/s

73 (*a*) Aproximadamente 39 ms, (*b*) Con la fuerza de rozamiento del problema 72 se tarda unas 86 veces más que utilizando la centrifugadora.

75 25°

77 (*a*) 1,4 m/s, (*b*) 8,5 N

79 (*a*) 8,33 m/s^2, hacia arriba, (*b*) 667 N, hacia arriba, (*c*) 1,45 kN, hacia arriba

81 $T_1 = [m_2(L_1 + L_2) + m_1L_1](2\pi/T)^2$, $T_1 = m_2(L_1 + L_2)(2\pi/T)^2$

83 (*a*) 53° sobre la horizontal, 0,41 kN, (*b*) 53° por debajo de la horizontal, 0,41 kN

85 (*a*) 0,40 N, (*b*) 0,644

87 52°

89 12,8 m/s

91 (*a*) 7,3 m/s, (*b*) 0,54

93 22°

95 (*a*) 7,8 kN, (*b*) −0,78 kN

97 20 km/h $\leq v \leq$ 56 m/h

99 (*a*) Unos 60,4 m, (*b*) unos 60,6 m, (*c*) unos 3,3 s, (*d*) unos 3,7 s, (*e*) menor

101 (0,23 cm, 0)

103 (2,0 m, 1,4 m)

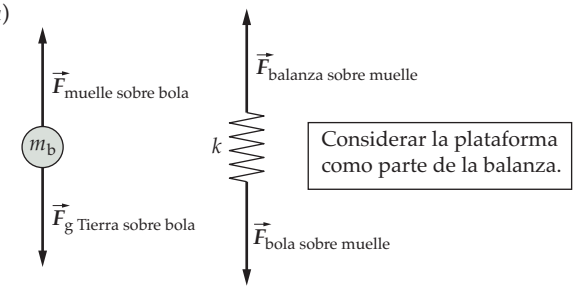
105 (1,5 m, 1,4 m)

107 $(\frac{1}{4}L, \frac{1}{4}L)$

113 $\vec{v}_{cm} = (3{,}0\ \text{m/s})\hat{i} - (1{,}5\ \text{m/s})\hat{j}$

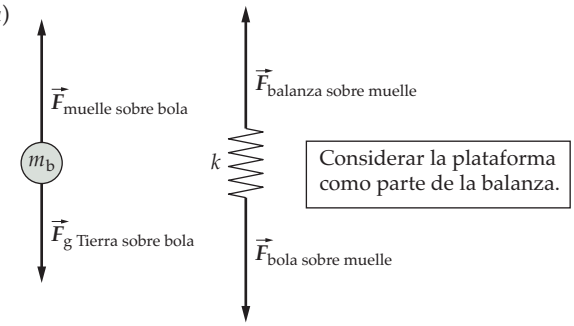
115 $\vec{a}_{cm} = (2{,}4\ \text{m/s}^2)\hat{i}$

117 (*a*)



(*c*) $F_{balanza} = (m_{bola} + m_{plataforma})g$

119 (*a*)



(*b*) $d' = \dfrac{m_b(g + a)}{k} > d$

(*c*) $F_{balanza} = (m_b + m_p)(a + g) > F_{\text{balanza del prob. 117}}$

121 0,51

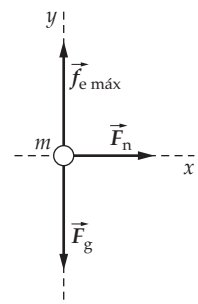
123 1,49 kN

125 (*a*) 49 m/s^2, (*b*) 13 rev/min

127 (*a*) 0,19 kN, (*b*) 52 N, (*c*) 35 N, (*d*) 0,24, (*e*) 0,54 kN

129 0,43

131 (*a*)



(*b*) 0,74 kN, (*c*) 20 rev/min. Este resultado valdrá para todas las personas, independientemente de su masa.

133 Sí. La afirmación de Sally parece ser confirmada por el cálculo de Liz.

135 $4{,}67 \times 10^6$ m. Está dentro de la superficie terrestre.

137 (*a*) 35 cm, (*b*) 4,7 m/s hacia abajo (*c*) 14,2 kN, 9,81 m/s^2, hacia abajo

139 (*a*) 4,91 m/s, (*b*) 1,64 m/s hacia abajo, (*c*) 1,09 m/s^2 hacia abajo

Capítulo 6

1 (*a*) Verdadero, (*b*) Verdadero, (*c*) Falso, (d) Verdadero, (e) Verdadero

3 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Falso, (*d*) Verdadero

5 Un cuerpo que se mueva a lo largo de una trayectoria curva con una velocidad de módulo constante tiene constante su energía cinética pero se acelera (porque su velocidad está continuamente cambiando su dirección). No, porque si el objeto no se acelera la fuerza neta que actúa sobre él debe ser cero y, en consecuencia, su energía cinética debe ser constante.

7 El trabajo necesario para estirar un muelle 2 cm es mayor que el trabajo necesario para estirarlo 1 cm por un factor 4.

9 (*d*)

11 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Falso

13 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadero, (*d*) Verdadero

15 $2\Delta t$

17 La única fuerza externa (despreciando la resistencia del aire) que hace trabajo sobre el centro de masas del coche es la fuerza de rozamiento estática ejercida por la carretera sobre los neumáticos. El trabajo positivo sobre el centro de gravedad que esta fuerza de rozamiento realiza se convierte en un aumento de la energía cinética.

19 (*a*) $4{,}5 \times 10^{18}$ J, (*b*) 1%, (*c*) $1{,}4 \times 10^{11}$ W

21 21 kJ

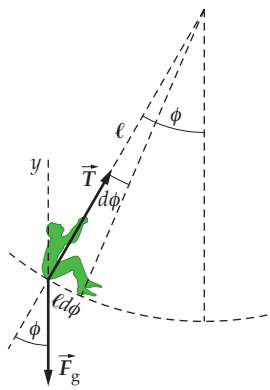
23 (*a*) 147 J, (*b*) 266 J

25 11 kJ, 3,5 kW

27 (*a*) 6,0 J, (*b*) 12 J, (*c*) 3,5 m/s

31 (*a*) $m(y) = 20\text{ kg} - (2{,}5\text{ kg/m})y$, (*b*) 0,59 kJ

33 (*a*)



(*b*) $dW_{F_g} = -mg\ell \operatorname{sen}\phi\, d\phi$, (*c*) 2,5 kJ, 7,0 m/s

35 $W_{x_0 \to x} = A\left(\dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x}\right)$, $K_{x\to\infty} = \dfrac{A}{x_0}$, $v_{x\to\infty} = \sqrt{\dfrac{2A}{mx_0}}$

37 180°

39 (*a*) −24, (*b*) −10, (*c*) 0

41 (*a*) 1,0 J, (*b*) 0,21 N

43 (*b*) $6\hat{i} + 8\hat{j}$. Otro vector que cumple los requisitos es $-6\hat{i} - 8\hat{j}$.

45 (*b*) $\vec{p} = (34\text{ kg}\cdot\text{m/s})\hat{i} + (-16\text{ kg}\cdot\text{m/s})\hat{j}$, (*c*) 0,28 kJ, 0,28 kJ

49 (*a*) $P(t) = (3{,}1\text{ W/s})t$, (*b*) 9,4 W

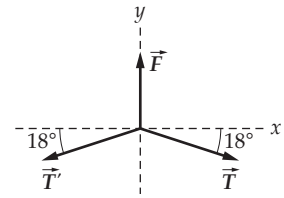
51 0,15 kW

55 (*a*) 0,381 kg/m, (*b*) 148 mi/h

57 $3{,}2 \times 10^5$ m

59 50 kW

61 (*a*) 405 N, (*b*) 19,9 N



(*c*) 39,7 mJ

63 (*a*) $F(x) = mC^2x$, (*b*) $W = \frac{1}{2}mC^2x_1^2$

65 (*a*) $v = (6t^2 - 8t)$, $a = (12t - 8)$, (*b*) $P = 8mt(9t^2 - 18t + 8)$, (*c*) $W = 2mt_1^2(3t_1 - 4)^2$

67 (*a*) 208 kW, (*b*) 5,74 km

69 (*a*)

x (m)	4,0	−3,0	−2,0	−1,0	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0
W (J)	6,0	4,0	2,0	0,5	0,0	0,5	1,5	2,5	3,0

(*b*) 28,0 J

71 (*b*) $W_{1\text{ vuelta horario}} = (31\text{ m})F_0$, $W_{1\text{ vuelta antihorario}} = (-31\text{ m})F_0$

73 (*a*) $F_x = -kx\left(1 - \dfrac{y_0}{\sqrt{x^2 + y_0^2}}\right)$, (*c*) $v_f = \dfrac{L^2}{2y_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Capítulo 7

1 (*d*)

3 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Falso

5 (*a*) Verdadero, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero, (*d*) Verdadero, (*e*) Falso

7 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Falso, (*d*) Falso, (*e*) Verdadero

9 (*d*)

11 (*a*) Sí, (*b*) No, (*c*) No

13 (*a*) 25 cm, (*b*) −0,12 kJ

15 (*a*) 16 s, (*b*) 6,8 min. No es factible que pueda mantener el paso durante 6,8 min.

17 $1{,}5 \times 10^{18}$ J/año, 3%

19 $2{,}4 \times 10^5$ L/s

21 (*a*) 0,39 kJ, (*b*) 2,5 m, 4,9 m/s, (*c*) 24 J, 0,37 kJ, (*d*) 0,39 kJ, 20 m/s

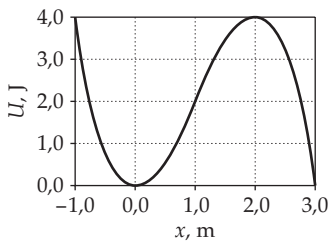
23 (*a*) 10 cm, (*b*) 14 cm

25 (*a*) $F_x = C/x^2$, y $\vec{F} = F_x\hat{i}$
(*b*) Si $x > 0$, $\vec{F}$ apunta desde el origen. Si $x < 0$, $\vec{F}$ apunta hacia el origen.
(*c*) Decrece.
(*d*) Si $x > 0$, $\vec{F}$ apunta hacia el origen. Si $x < 0$, $\vec{F}$ apunta desde el origen.

27 $U(x) = [(-0{,}63\text{ kJ}\cdot\text{m})/x] + 0{,}30\text{ kJ}$

29 (*a*) $F_x = 4x(x + 2)(x - 2)$, (*b*) $x = -2$ m, $x = 0$, y $x = 2$ m, (*c*) inestable en $x = -2$ m, estable en $x = 0$, inestable en $x = 2$ m

31 (*a*) $x = 0{,}0$ m y $x = 2{,}0$ m,
(*b*)



(*c*) Equilibrio estable en $x = 0$, equilibrio inestable en $x - 2{,}0$ m, (*d*) 2,0 m/s

33 (*a*) $U(\theta) = (m_2\ell_2 - m_1\ell_1)g \operatorname{sen}\theta$, (*b*) U es mínima en $\theta = -\pi/2$, U es máxima para $\theta = \pi/2$

35 (*a*) $U(y) = -mgy - 2Mg\left(L - \sqrt{y^2 + d^2}\right)$

(*b*) $y = d\sqrt{m^2/4M^2 - m^2}$
(*d*) Este es un punto de equilibrio inestable.

37 $v = \sqrt{gL/2}$

39 (*a*) 0,858 m, (*b*) El bloque vuelve sobre sus pasos hasta ascender una altura de 5,00 m.

41 26°

43 $U = \dfrac{[mg(\operatorname{sen}\theta + \mu_e \cos\theta)]^2}{2k}$

45 $6mg$

47 16,7 kN

49 $6mg$

51 (*a*) 31 m, (*b*) 34 m/s

53 (*a*) 0,15 km, (*b*) 45 m/s

55 (*a*) $K_{máx} = \frac{5}{2}mgL$, (*b*) $6mg$

57 (*a*) 20°, (*b*) 6,4 m/s

59 $v_2 = L\sqrt{2(g/L)(1 - \cos\theta) + (k/m)(\sqrt{\frac{13}{4} - 3\cos\theta} - \frac{1}{2})^2}$

61 (*a*) 82 kJ, (*b*) La energía procede de la energía interna química, (*c*) 410 kJ, (*d*) 330 kJ

63 (*a*) 0,10 kJ, (*b*) 70 J, (*c*) 34 J, (*d*) 2,9 m/s

65 (*a*) 7,7 m/s, (*b*) 59 J, (*c*) 0,33

67 (*a*) (14 N)y, (*b*) −(14 N)y, (*c*) 2,0 m/s

69 0,87 m, 2,7 m/s

71 (*a*) $9{,}0 \times 10^{13}$ J, (*b*) $\$2{,}5 \times 10^6$, (*c*) $2{,}8 \times 10^4$ años

73 (*a*) $3{,}9 \times 10^{31}$ MeV, (*b*) $4{,}2 \times 10^8$ m/s. Como era de esperar, este resultado ($4{,}2 \times 10^8$ m/s) es superior a la velocidad de la luz (y, por tanto, incorrecto). Utilizar la expresión no-relativista para la energía cinética no está justificado.

75 $1{,}1 \times 10^5$ reacciones/s

77 0,782 MeV

79 (*a*) 1,1 kg, (*b*) $2{,}7 \times 10^9$ kg

81 (*a*) 6, (*b*) 0,21 eV

83 $\Delta E_{term} = -mgv\,\Delta t \operatorname{sen}\theta$

85 12 m^2

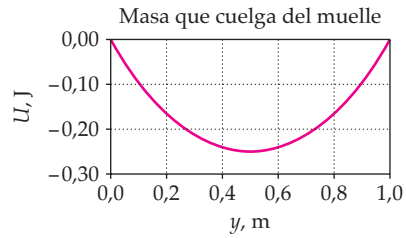
87 (*a*) 0,208, (*b*) 3,5 MJ

89 (*a*) $x_{1,-} = (2\mu_c mg/k) - x_i$, (*b*) $v_0 = \sqrt{(k/m)x_0^2 - 2\mu_c g x_0}$, (*c*) $\mu_c = kx_i/2mg$

91 (*a*) 11 kW, (*b*) −6,8 kW, (*c*) \$1,81, \$5,43

93 (*a*) 1,61 kJ, (*b*) 0,6 kJ, (*c*) 23 m/s

95 (*b*)

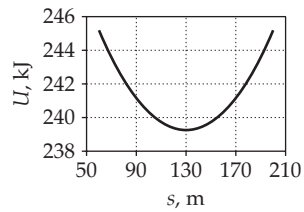


97 (*a*) 17 m, (*b*) 4,91 kN, (*c*) 4,9 m/s^2, (*d*) 13 kN, hacia arriba, (*e*) 5,5 kN, 64°, (*f*) 1,4 kN

99 (*a*) $F_{20} = 491$ N, $F_{30} = 981$ N, (*b*) $P_{20} = 9{,}8$ kW, $P_{30} = 29$ kW, (*c*) 8,8°, (*d*) 6,36 km/L

103 (*a*) $v = \sqrt{2my/(m + M)}$, (*b*) Igual que en (*a*)

107 (*a*)



(*b*) 5,4 kJ

Capítulo 8

5 El momento lineal inicial del sistema rifle-bala es cero. Tras el disparo, el momento lineal de la bala va en dirección oeste. La conservación del momento lineal requiere que el momento lineal total no cambie, de forma que el momento lineal del rifle debe dirigirse hacia el este.

7 En cierto modo, el cohete necesita algo que lo empuje hacia arriba. El cohete empuja gases en una dirección y los gases empujan al cohete en la dirección opuesta. Si embargo, el cohete no se impulsa empujando contra el aire.

9 Piense en alguien que empuja una caja sobre el suelo. El empuje sobre la caja es igual pero opuesto al empuje de la caja sobre la persona, pero las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos diferentes. La segunda ley de Newton establece que la suma de fuerzas que actúan sobre la caja es igual al cambio neto del momento lineal de la caja. Esta suma no incluye la fuerza de la caja sobre la persona.

11 El lanzamiento del superhéroe viola la conservación del momento lineal. Lanzar algo requiere ser empujado hacia atrás. Los superhéroes no sufren el movimiento de retroceso predicho por la conservación del momento lineal. Esta acción no viola la conservación de la energía.

13 La fuerza de rozamiento que ejerce la carretera sobre los neumáticos hace que el coche se frene.

15 Unos 10^4

17 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero, (*d*) Verdadero

19 (*a*) La pérdida de energía cinética es la misma es ambos casos. (*b*) La situación en que los dos objetos tengan velocidades en direcciones opuestas.

21 (*b*)

23 Cuando el agua pasa por la esquina de la boquilla cambia de dirección. Por tanto, la boquilla debe ejercer una fuerza sobre la corriente de agua para cambiar su momento lineal, y a partir de la tercera ley de Newton el agua ejerce una fuerza sobre la boquilla igual pero en dirección opuesta. Esto requiere una fuerza neta en la dirección del cambio del momento lineal.

25 En el sistema de referencia del centro de masas, las dos velocidades son iguales pero con direcciones opuestas. Además, el módulo de la velocidad de cada disco es el mismo antes y después de la colisión. La dirección de la velocidad de cada disco cambia en un cierto ángulo durante la colisión.

27 La fuerza hacia abajo de la gravedad lunar y el empuje ascendente proporcionado por los productos de la combustión del cohete.

29 Imagínese la vela y el ventilador cara a cara e imagínese una corriente de moléculas de aire que llegan a la vela. Si las moléculas colisionan con la vela elásticamente, el cambio neto de momento lineal es el doble del momento lineal con el que salían del ventilador. Entonces, el cambio de momento lineal del aire va hacia atrás, de forma que para conservar el momento lineal de sistema aire-barco el cambio de momento de este debe ir hacia adelante.

31 (*a*) 2,34 s, (*b*) 6,7 m/s

33 5,5 m/s

35 4,0 m/s hacia la derecha

37 $\vec{v}' = 2v\hat{\boldsymbol{i}} - v\hat{\boldsymbol{j}}$

39 0,084

41 (*a*) 44 J, (*b*) $\vec{v}_{cm} = (1{,}5\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, (*c*) $\vec{v}_{1\,rel} = (3{,}5\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, $\vec{v}_{2\,rel} = (-3{,}5\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, (*d*) 37 J

43 (*a*) 11 N · s, (*b*) 1,3 kN

45 1,81 MN · s, 0,60 MN

47 0,23 kN

49 (*a*) 1,1 N · s en dirección a la pared, (*b*) 0,36 kN, hacia la pared, (*c*) 0,48 N · s, hacia fuera de la pared, (*d*) 3,8 N, hacia fuera de la pared

51 (*a*) 0,20 s, (*b*) 27 ms, (*c*) Como el tiempo de colisión es inferior en el segundo caso debido a que el colchón debe tener un relleno diferente, la fuerza media ejercida sobre el saltador por el colchón es mucho menor que la que ejerce el relleno sobre él.

53 (*a*) 20 m/s, (*b*) El 20% de la energía cinética inicial se transforma en energía térmica, energía acústica y en la deformación del metal.

55 (*a*) 2,0 m/s, (*b*) La colisión no era elástica.

57 $v_{p\,f} = -0{,}25$ km/s, $v_{nuc\,f} = 46$ m/s

59 (*a*) 5,0 m/s, (*b*) 0,25 m, (*c*) $v_{1f} = 0$, $v_{2f} = 7{,}0$ m/s

61 (*a*) $0{,}2v_0$, (*b*) $0{,}4v_0$

63 0,45 km/s

67 $h = (v^2/8g)(m_1/m_2)^2$

69 0,0529

71 (*a*) El meteorito impactaría sobre la Tierra a lo largo de una dirección opuesta al vector velocidad orbital terrestre. (*b*) $2{,}71 \times 10^{-15}\%$, (*c*) $1{,}00 \times 10^{23}$ kg

73 $1{,}5 \times 10^6$ m/s

75 (*a*) $\vec{v}_1 = (312\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}} + (66{,}6\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{j}}$, (*b*) 5,6 km, (*c*) 35,8 kJ

77 0,91

79 (*a*) 20%, (*b*) 0,89

81 (*a*) 1,7 m/s, (*b*) 0,83

83 (*a*) A temperatura ambiente, la goma rebotará más cuando se golpea que si lo hiciera a temperatura de congelación. (*b*) 3,8 cm

85 (*a*) 60°, (*b*) $v_{cf} = 2{,}50$ m/s, $v_8 = 4{,}33$ m/s

87 (*a*) $v_1 = 1{,}7$ m/s y $v_2 = 1{,}0$ m/s, (*b*) La colisión era elástica.

89 5,3 m/s, 29°

91 $$K_i = K_f = \frac{p_1^2}{2}\left[\frac{m_1^2 + 6m_1m_2 + m_2^2}{m_1^2m_2 + m_1m_2^2}\right] = \frac{p_1'^2}{2}\left[\frac{m_1^2 + 6m_1m_2 + m_2^2}{m_1^2m_2 + m_1m_2^2}\right]$$
$p_1' = \pm p_1$. If $p_1' = +p_1$, las partículas no colisionan

93 (*a*) $\vec{v}_{cm} = 0$, (*b*) $\vec{u}_3 = (-5{,}0\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, $\vec{u}_5 = (3{,}0\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, (*c*) $\vec{u}_3' = (5{,}0\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, $u_5' = 0{,}75$ m/s, (*d*) $\vec{v}_3' = (5{,}0\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, $\vec{v}_5' = (-3{,}0\text{ m/s})\hat{\boldsymbol{i}}$, (*e*) $K_i = K_f = 60$ J

95 (*a*) 360 kN, (*b*) 120 s, (*c*) 1,72 km/s

97 (*d*) 28

99 0,19 m/s, $K_i = 31$ mJ, $K_f = 12$ mJ

101 (*a*) $\vec{p} = -(1{,}1 \times 10^5\text{ kg}\cdot\text{km/h})\hat{\boldsymbol{i}} + (1{,}1 \times 10^5\text{ kg}\cdot\text{km/h})\hat{\boldsymbol{j}}$, (*b*) 43 km/h. La dirección de la chatarra es 46° hacia el noroeste.

103 (*a*) 6,3 m/s, (*b*) 20 m

105 (*a*) La velocidad de la pelota de baloncesto será igual en módulo que la pelota de béisbol pero en dirección opuesta. (*b*) 0, (*c*) $2v$

107 (*a*) 30 km/s, (*b*) 8,1. La energía procede de un inmensurable descenso en la velocidad orbital de Saturno.

109 El conductor no decía la verdad.

111 8,9 kg

113 (*b*) 55

115 (*a*) $$v_{2f} = \left(\frac{m_b}{m_2 + m_b}\right)\left(1 + \frac{m_1}{m_1 + m_b}\right)v$$
$$v_{1f} = -\frac{m_2m_b(2m_1 + m_b)}{(m_1 + m_b)^2(m_2 + m_b)}v$$
(*b*) $$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_2m_b^2(2m_1 + m_b)^2}{(m_2 + m_b)^2(m_1 + m_b)^2}\left(1 + \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_b)^2}\right)v^2$$
Esta energía adicional procedía de la energía química de los cuerpos de los astronautas.

117 4,53 m/s

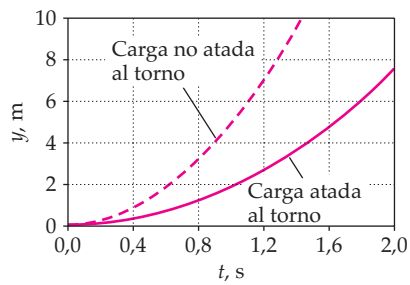
Capítulo 9

1 (*a*) El punto del borde. (*b*) Ambos giran el mismo ángulo. (*c*) El punto del borde. (*d*) Ambos tienen el mismo módulo de la velocidad angular. (*e*) Ambos tienen la misma aceleración tangencial. (*f*) Ambos tienen la misma aceleración angular. (*g*) El punto del borde.

3 (*c*)

5 (*a*) Tara, (*b*) Tara, (*c*) Tara

7 Al sujetar el bate un poco más arriba éste rota en torno a un eje próximo al centro de masas, lo que hace reducir el momento de inercia. Cuanto menor sea el momento de inercia mayor será la aceleración angular (un bate más rápido) para el mismo momento de fuerza.
9 (*b*)
11 (*b*)
13 Una razón es la de maximizar el brazo de palanca, en torno al eje que pasa por las bisagras, de la fuerza que se ejerce al empujar o tirar del pomo.
15 (*b*)
17 (*b*)
19 (*a*)
23 12 rev
25 10%
27 Aproximadamente 6
29 (*a*) 16 rad/s, (*b*) 47 rad, (*c*) 7,4 rev, (*d*) 4,7 m/s y 73 m/s^2
31 (*a*) 40 rad/s, (*b*) $a_t = 0{,}96$ m/s^2, $a_c = 0{,}19$ km/s^2
33 (*a*) 0,59 rad/s^2, (*b*) 4,7 rad/s
35 3,6 rad/s
37 1,0 rad/s, 9,9 rev/min
39 (*a*) 2,94 rad, (*b*) 780 días
41 60 kg · m^2
43 (*a*) 28 kg · m^2, (*b*) 32 kg · m^2
45 2,6 kg · m^2
47 (*b*) $I_{cm} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
49 $5{,}4 \times 10^{-47}$ kg · m^2
51 $1{,}4 \times 10^{-2}$ kg · m^2
55 $I = \frac{3}{10}MR^2$
57 $I_x = 3M((H^2/5) + (R^2/20))$
59 (*a*) 1,9 N · m, (*b*) $1{,}2 \times 10^2$ rad/s^2, (*c*) $6{,}2 \times 10^2$ rad/s
61 (*a*) $a_t = g \operatorname{sen}\theta$, (*b*) $mgL \operatorname{sen}\theta$
63 (*a*) $d\tau = (2\mu_k Mg/R^2)r^2\,dr$, (*b*) $\tau = \frac{2}{3}MR\mu_k g$, (*c*) $\Delta t = (3R\omega/4\mu_k g)$
65 (*a*) 85 mJ, (*b*) 72 rev/min
67 (*a*) 19,6 kN, (*b*) 5,9 kN · m, (*c*) 0,27 rad/s, (*d*) 1,6 kW
69 (*a*) 3,6 rad/s, (*b*) 3,6 rad/s
71 3,1 m/s^2, $T_1 = 12$ N, $T_2 = 13$ N
73 30°
75 8,21 m/s
77 (*a*) $a = g/(1 + (2M/5m))$, (*b*) $T = (2mMg)/(5m + 2M)$
79 (*a*) 72 kg, (*b*) 1,4 rad/s^2, 0,29 kN, 0,75 kN
81 (*a*) $a = \dfrac{g \operatorname{sen}\theta}{1 + (m_1/2m_2)}$, (*b*) $T = \dfrac{m_2 g \operatorname{sen}\theta}{1 + (2m_2/m_1)}$,
(*c*) $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + (m_1/2m_2)}}$, (*d*) $a = g$, $T = 0$, y $v = \sqrt{2gh}$
83 10 kJ
85 3,1 m/s
87 (*a*) 0,19 m/s^2, (*b*) 0,96 N
89 20°
91 (*a*) $a = \frac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta$, (*b*) $f_e = \frac{1}{3}mg \operatorname{sen}\theta$, (*c*) $\theta_{máx} = \operatorname{arctg}(3\mu_e)$
93 $v' = \sqrt{\frac{4}{3}}v$
95 0,22 kJ
97 (*a*) $\alpha = 2F/[R(M + 3m)]$, antihorario, (*b*) $a_C = F/(M + 3m)$, en la dirección de $\vec{F}$, (*c*) $a_{CB} = -2F/(M = 3m)$, en la dirección opuesta a $\vec{F}$
99 (*a*) 0,40 rad/s^2, 0,20 rad/s^2, (*b*) 4,0 N, sentido horario
101 (*a*) $s_1 = \frac{12}{49}(v_0^2/\mu_k g)$, $t_1 = \frac{2}{7}(v_0/\mu_k g)$, y $v_1 = \frac{5}{7}v_0$, (*b*) $\frac{5}{7}$, (*c*) $s_1 = 27$ m, $t_1 = 3{,}9$ s, y $v_1 = 5{,}7$ m/s
103 $v = 2r\omega_0/7$
105 (*a*) 0,19 s, (*b*) 0,67 m, (*c*) 2,9 m/s
107 (*a*) $v = \frac{11}{7}v_0$, (*b*) $\Delta t = \frac{4}{7}(v_0/\mu_k g)$, (*c*) $\Delta x = \frac{36}{49}(v_0^2/\mu_k g)$
109 13 cm
111 (*a*) 7,4 m/s^2, (*b*) 15 m/s^2, (*c*) 2,4 m/s
113 (*a*) $7{,}8 \times 10^2$ kJ, (*b*) 90 N · m, 0,15 kN, (*c*) $1{,}4 \times 10^3$ rev
115 (*a*) 15 m, (*b*) 15 rad/s
117 (*a*) $\omega = \sqrt{4g/3r}$, (*b*) $F = \frac{7}{3}Mg$
119 (*a*) 32,2 rad/s, (*b*) 23°, (*c*) 24 rad/s^2
121 (*a*) 14,7 m/s^2, (*b*) 66,7 cm
123 42 J
125



127 (*a*) 26 N, (*b*) 1,1 m/s^2, (*c*) 3,2 kg

Capítulo 10

1 (*a*) Verdadero, (*b*) Falso, (*c*) Falso
3 90°
5 (*a*) *L* se dobla, (*b*) *L* se dobla
7 Falso. Un saltador de trampolín desde que salta hasta que llega al agua.
9 (*e*)
11 El interior del huevo cocido es sólido de forma que todo él rota con una velocidad angular uniforme. Por contra, cuando se inicia la rotación del huevo crudo, la yema no gira instantáneamente con la clara, y cuando se para el huevo con el dedo, la yema continúa girando durante un tiempo.
13 (*a*)
15 (*a*) El aeroplano tiende a virar hacia la derecha. El cambio del momento angular $\Delta\vec{L}_{hélice}$ de la hélice va hacia arriba; por tanto, el momento $\vec{\tau}$ que actúa sobre la hélice también va hacia arriba. La hélice debe ejercer un momento igual pero opuesto sobre el aeroplano. Este momento ejercido hacia abajo por la hélice sobre el aeroplano tiende a producir un cambio hacia abajo del momento angular del aeroplano. Esto significa que el aeroplano tiende a rotar en sentido horario visto desde arriba. (*b*) El aeroplano tiende a virar hacia abajo. El cambio en el momento angular de la hélice $\Delta\vec{L}_{hélice}$ va ha-

cia la derecha, de tal forma que el momento $\vec{\tau}$ sobre la hélice va también hacia la derecha. La hélice debe ejercer un momento igual pero opuesto sobre el aeroplano. Este momento ejercido por la hélice hacia la izquierda modifica el momento angular del aeroplano. En consecuencia, el aeroplano tiende a rotar en sentido horario visto desde la derecha.

17 (*a*) Su energía cinética disminuye. Aumentando su momento de inercia I mientras se conserva el momento angular L disminuye su energía cinética $K = L^2/(2I)$.
(*b*) Al extender los brazos aumenta el momento de inercia y disminuye la velocidad angular. El momento angular del sistema no cambia.

19 Aproximadamente 4 rev/s

21 (*a*) 33, (*b*) 33, (*c*) 8, (*d*) 14

23 (*a*) $2{,}4 \times 10^{-8}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$
(*b*) $\ell(\ell+1) = 5{,}2 \times 10^{52}$, $\ell \approx 2{,}3 \times 10^{26}$
(*c*) $\Delta\ell = 2{,}3 \times 10^{18}$. La cuantización del momento angular no se puede describir macroscópicamente puesto que ningún experimento puede detectar un cambio relativo de ℓ del $10^{-6}\%$.

25 (*a*) 0,331, (*b*) Como experimentalmente $C < 0{,}4$, la densidad de masa de la Tierra debe ser mayor cerca del centro.

27 $\vec{\tau} = FR\hat{k}$

29 (*a*) $24\hat{k}$, (*b*) $-24\hat{j}$, (*c*) $-5\hat{k}$

33 $\vec{B} = 4\hat{j} + 3\hat{k}$

37 (*a*) $54\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, hacia arriba, (*b*) $54\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, hacia abajo, (*c*) 0

39 (*b*) Hacia abajo

41 (*a*) $1{,}3 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, hacia dentro de la mesa
(*b*) $1{,}3 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, hacia dentro de la mesa
(*c*) $1{,}3 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, hacia dentro de la mesa
(*d*) $8{,}8 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, hacia fuera de la mesa

43 (*a*) $-4{,}9\ \text{N}\cdot\text{m}$. Obsérvese que, como L decrece conforme la partícula rota en sentido horario, la aceleración angular y el momento neto van hacia arriba.
(*b*) $\omega_{\text{orbital}} = 0{,}48\ \text{rad/s} - (0{,}19\ \text{rad/s}^2)t$, hacia abajo.

45 (*a*) $\tau_{\text{neta}} = Rg(m_2 \operatorname{sen}\theta - m_1)$, (*b*) $L = vR((I/R^2) + m_1 + m_2)$,
(*c*) $a = \dfrac{g(m_2 \operatorname{sen}\theta - m_1)}{(I/R^2) + m_1 + m_2}$

49 (*a*) 5,0 rev/s, (*b*) 0,62 kJ, (*c*) Como no hay agentes externos que hagan trabajo sobre el sistema, la energía procede de su energía interna.

51 10 mm/s

53 (*a*) $r_0 m v_0$, (*b*) $\frac{1}{2}mv_0^2$, (*c*) $m(v_0^2/r_0)$, $-\frac{2}{3}mv_0^2$

55 125°

57 (*a*) $3{,}46 \times 10^{-47}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, (*b*) 1,00 meV, 2,01 meV, 6,02 meV

59 (*a*) No, ninguno de los valores permitidos de E_ℓ es igual a $3E_{0r}$, (*b*) 2,5

61 $\vec{v}_{\text{cm}} = \dfrac{m}{M+m}\vec{v}$, $\omega = \left(\dfrac{mMd}{\frac{1}{12}ML^2(M+m) + Mmd^2}\right)v$

63 $v = \sqrt{\dfrac{(0{,}5M + 0{,}8m)(\frac{1}{3}ML^2 + 0{,}64mL^2)g}{0{,}32Lm^2}}$

65 (*a*) $v_{\text{cm}} = K/M$, (*b*) $V = 4K/M$, (*c*) $V = -2K/M$, (*d*) Sí, un punto permanece en reposo pero sólo durante un breve periodo de tiempo.

67 0,36

69 (*a*) $18\ \text{J}\cdot\text{s}$, (*b*) 0,41 rad/s, (*c*) 15 s, (*d*) $0{,}079\ \text{J}\cdot\text{s}$

71 (*a*) $\vec{L} = -(48\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\hat{k}$, (*b*) $\vec{\tau} = (16\ \text{N}\cdot\text{m})\hat{k}$

73 (*a*) 0,24 kJ · s, (*b*) 0,31 kJ

75 (*a*) Como $\tau_{\text{neto}} \neq 0$, el momento angular no se conserva.
(*b*) Como en este medio sin rozamiento la fuerza neta externa que actúa sobre el objeto es la tensión y ésta actúa en dirección perpendicular a la velocidad del objeto, la energía del objeto se conserva. (*c*) v_0

77 Sí. La solución depende sólo de la conservación del momento angular del sistema; por tanto, sólo depende de los momentos de inercia inicial y final.

81 (*a*) 0,228 rad/s, (*b*) 0,192 rad/s

83 $4{,}47 \times 10^{22}\ \text{N}\cdot\text{m}$

85 −79,9 cm

Capítulo 11

1 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero, (*d*) Falso

3 La Tierra está más próxima al Sol durante el invierno del hemisferio norte. Este es el momento de máxima velocidad orbital. La mínima velocidad orbital se da en verano.

5 Para obtener la masa de Venus se necesita medir el periodo T y el semieje mayor a de la órbita de uno de los satélites, sustituir en $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$ (tercera ley de Kepler) y despejar M.

7 (*d*)

9 (*b*)

11 (*b*)

13 Los cohetes se deberían propulsar en dirección opuesta al movimiento orbital del satélite. Conforme el satélite se acerque a la Tierra tras el incendio, la energía potencial decrecerá. Sin embargo, la energía mecánica total decrecerá debido a las fuerzas de rozamiento transformando energía mecánica en energía térmica. La energía cinética aumentará hasta que el satélite entre en la atmósfera terrestre donde las fuerzas de rozamiento frenarán su avance.

15 En un punto del interior de la esfera a una distancia r de su centro, la intensidad del campo gravitatorio es directamente proporcional a la cantidad de masa encerrada en una esfera de radio r desde el centro e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r. La masa encerrada en la esfera de radio r es proporcional a r al cubo. Por tanto, la intensidad del campo gravitatorio es proporcional a r.

17 $M_{\text{galaxia}} = 1{,}08 \times 10^{11}\ M_{\text{S}}$

19 Unos 3,0 km

21 (*a*) $6{,}28 \times 10^{-4}$ rad/s, 2,78 h, (*b*) $L_{\text{J}} = 1{,}93 \times 10^{43}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, $L_{\text{S}} = 7{,}85 \times 10^{42}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, 0,70%,
(*c*) $T_{\text{Sol}} = 3{,}64$ h, $T_{\text{Sol}} = 1{,}30T_{\text{máx}}$

23 84,0 años

25 $4{,}90 \times 10^{11}\ \text{m} = 3{,}00\ \text{UA}$

27 (*a*) $1{,}6 \times 10^{11}\ \text{m} = 1{,}1\ \text{UA}$
(*b*) $2{,}7 \times 10^{10}\ \text{m} = 0{,}18\ \text{UA}$, $2{,}9 \times 10^{11}\ \text{m} = 1{,}9\ \text{UA}$

29 (*b*) 0,73 UA, (*c*) 0,63 años

31 (*a*) $1{,}90 \times 10^{27}\ \text{kg}$

33 (*a*) 22,7 h, (*b*) $1{,}22 \times 10^9\ \text{m}$

35 Su peso debería ser diez veces su peso en la Tierra.

37 $2{,}27 \times 10^4$ m/s

39 (*a*) 1,4, (*b*) Está más alejado del Sol que de la Tierra. La tercera ley de Kepler, [$T^2 = Cr_m^3$] nos dice que largos periodos orbitales junto con grandes radios orbitales comportan velocidades orbitales menores, de forma que la velocidad de los objetos que orbitan el Sol decrece con la distancia al Sol. La velocidad media orbital de la Tierra viene dada por $v = 2\pi r_{TS}/T_{TS}$, y da aproximadamente 30 km/s. Como la velocidad máxima del asteroide es sólo de 20 km/s, el asteroide está más allá del Sol.

41 (*a*) 7,37 m, (*b*) 31,9 μm

43 0,605

45 10^9 m

47 2,38 km/s

49 (*a*) 8,7 kW · h, (*b*) \$500

51 6,9 km/s

53 19,4 km/s

55 13,8 km/s

57 (*a*) 7,31 h, (*b*) $1{,}04 \times 10^9$ J, (*c*) $8{,}72 \times 10^{12}$ J · s

59 $1{,}11 \times 10^{10}$ J

61 $(4{,}0 \text{ N/kg})\hat{\boldsymbol{i}}$

63 (*a*) $\vec{g} = \dfrac{Gm}{L^2}\hat{\boldsymbol{i}} + \dfrac{Gm}{L^2}\hat{\boldsymbol{j}}$, (*b*) $|\vec{g}| = \sqrt{2}\dfrac{Gm}{L^2}$

65 (*a*) $(-1{,}7 \times 10^{-11} \text{ N/kg})\hat{\boldsymbol{i}}$, (*b*) $(-8{,}3 \times 10^{-12} \text{ N/kg})\hat{\boldsymbol{i}}$, (*c*) 2,5 m

67 (*a*) $\frac{1}{2}CL^2$, (*b*) $\vec{g} = -\dfrac{2GM}{L^2}\left[\dfrac{L}{x_0 - L} - \ln\dfrac{x_0}{x_0 - L}\right]\hat{\boldsymbol{i}}$

69 (*a*) 0, (*b*) 0, (*c*) $3{,}2 \times 10^{-9}$ N/kg

71 $g_1 = g_2$

73 (*a*) $\dfrac{Gm(M_1 + M_2)}{9a^2}$, (*b*) $\dfrac{GmM_1}{3{,}61a^2}$, (*c*) 0

77 $g(x) = G\left(\dfrac{4\pi\rho_0 R^3}{3}\right)\left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{8(x - \frac{1}{2}R)^2}\right]$

79 $\omega = \sqrt{\dfrac{4\pi\rho_0 G}{3}}$

81 1,0 m/s

83 (*a*) $\vec{F} = -\dfrac{GMm}{d^2}\left[1 - \dfrac{d^3/4}{\{d^2 + (R^2/4)\}^{3/2}}\right]\hat{\boldsymbol{i}}$

85 249 años

87 (*a*) $W = GM_E m\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$

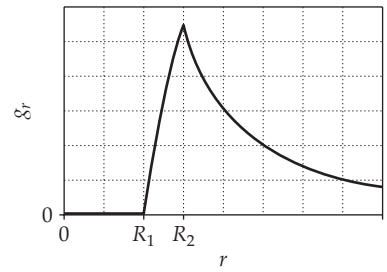
89 (*a*) $3{,}36 \times 10^9$, (*b*) 241

91 1,70 Mm

95 $1{,}60 \times 10^{-4}$

97 $v = 1{,}16\sqrt{\dfrac{GM}{a}}$

99 $g(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{GM(r^3 - R_1^3)}{r^2(R_2^3 - R_1^3)} & R_1 < r \leq R_2 \\ \dfrac{GM}{r^2} & R_2 < r \end{cases}$



101 $g = (2G\lambda)/r$

103 (*b*) $U = -\dfrac{GMm_0}{L}\ln\left(\dfrac{x + L/2}{x - L/2}\right)$, (*c*) $F_x(x) = -\dfrac{GMm_0}{x^2 - (L/2)^2}$

Esta respuesta y la dada en el ejemplo 11.8 son la misma.

105 34 pN

107 (*a*) La fuerza gravitatoria es mayor sobre la sonda que está debajo, de forma que si no fuera por el cable su aceleración sería mayor que la de la sonda que está encima y ambas se separarían. El cable se tensa para evitar esta separación. (*b*) $2{,}2 \times 10^5$ m

Capítulo 12

1 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero, (*d*) Falso

3 (*b*)

5 Cuanto más alto esté el cartel mayor será el momento de fuerza respecto al eje horizontal que pasa por el extremo más bajo del poste, para una velocidad del viento dada. Además, cuanto mayor sea la profundidad del agujero mayor será el valor máximo del momento opuesto respecto del mismo eje, para una determinada consistencia del terreno. Por tanto, cuanto más altas estén las señales más profundos deberán ser los agujeros.

7 El principal motivo es el de bajar el centro de masas del termo. Cuanto más bajo está el centro de masas, más estable será el termo.

9 (*b*)

11 (*b*) 2,0 N/cm

13 (*b*) Utilizar muletas largas requiere una mayor coeficiente de rozamiento estático, pues θ es mayor para muletas largas. (*c*) Si μ_e es pequeño, es decir, hay hielo en la superficie, θ debe ser pequeño para evitar el deslizamiento.

15 84 cm

17 692 N, 2,54 kN

19 0,728 m

21 $F_1 = \frac{1}{2}Mg$, $F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}Mg$

23 (*a*) $\vec{F} = (30 \text{ N})\hat{\boldsymbol{i}} + (30 \text{ N})\hat{\boldsymbol{j}}$, (*b*) $\vec{F} = (35 \text{ N})\hat{\boldsymbol{i}} + (45 \text{ N})\hat{\boldsymbol{j}}$

25 (*a*) $F_n = Mg - F\sqrt{(2R - h)/h}$, (*b*) F, (*c*) $F\sqrt{(2R - h)/h}$

27 (*a*) 6,87 N, (*b*) 1,7 N · m, (*c*) 8,3 N, 15 N

29 (*a*) 71 N, (*b*) 3,5 m, (*c*) 0,50 kN

31 (*b*) $a/3$, (*c*) $Mg/2$

33 $h = \mu_e L \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta$

35 $\mu_e = \dfrac{2h}{L \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta}$

37 59°

39 62°

41 (*a*) 42 N, (*b*) 0,14%

43 5,0°

47 (*a*) $1{,}4 \times 10^6$ N/m^2, (*b*) 7 mJ, (*c*) 28 mJ. Hay casi 4 veces más energía almacenada en la cinta cuando se cuelga una masa de 0,3 kg de ella. Esto es debido a que la energía almacenada aumenta cuadráticamente con la masa.

49 0,69

51 Como $\text{Tensión}_{\text{caída}} < \text{Tensión}_{\text{cable}}$, el cable no aguantará.

55 1,5 kN

57 $m_1 = 0{,}15$ kg, $m_2 = 0{,}71$ kg, $m_3 = 0{,}36$ kg

59 1,8 kg

61 0,15

63 $\mu_e < 0{,}50$

65 $\mu_e = \dfrac{1}{2}(\cot\theta + 1)$

67 (*a*) 0,15 kN, (*b*) 3,8 m

69 $\mu_e < 0{,}50$

71 (*c*)

Celda	Contenido/Fórmula	Expresión
B5	B4+1	$i + 1$
C5	C4+$B$1/(2*B5)	$d_i + \dfrac{L}{2i}$

	A	B	C	D
1	L =	0,20	m	
2		0		
3		*i*	sobresale	
4		1	0,100	
5		2	0,150	
6		3	0,183	
102		99	0,518	
103		100	0,519	

$d_5 = 15$ cm, $d_{10} = 26$ cm, y $d_{100} = 0{,}52$ cm

(*d*) No

73 566 N

75 $F_n = 2mg$, $F = mg\dfrac{r}{\sqrt{R(2r-R)}}$, $F_W = mg\dfrac{R-r}{\sqrt{R(2r-R)}}$

Capítulo 13

1 (*e*)

3 (*c*)

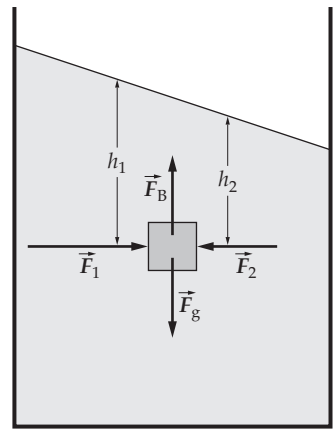
5 La presión aumenta aproximadamente 1 atm por cada 10 m de profundidad. Para respirar se requiere crear en los pulmones una presión menor que 1 atm. En la superficie se puede conseguir eso fácilmente, pero no a 10 m de profundidad.

7 (*b*)

9 Falso. El empuje de un objeto sumergido depende del peso de fluido desplazado, que, a su vez, depende del volumen del fluido desplazado. Como los ladrillos tienen el mismo volumen, desplazarán el mismo volumen de agua.

11 Como la presión aumenta con la profundidad, el objeto se comprimirá y su densidad aumentará conforme su volumen disminuya. Entonces, el objeto caerá al fondo.

13



La representación gráfica muestra el vaso y el elemento de agua del interior. Como se puede comprobar, la superficie de agua no está a nivel mientras el vaso acelera, mostrando que hay un gradiente de presión (una diferencia de presión) debido a las diferentes profundidades ($h_1 > h_2$, y por tanto, $F_1 > F_2$) de agua en cada uno de los dos lados del elemento de agua. Este gradiente de presión da lugar a una fuerza neta sobre el elemento de agua, como se muestra en la figura. El empuje tiene el mismo módulo que la fuerza gravitatoria.

15 (*c*)

17 El montículo que rodea la entrada 1 hará que las líneas de corriente se curven al circular sobre la entrada. Un gradiente de presión hacia arriba produce una fuerza centrípeta hacia abajo. Esto significa que hay un descenso de presión en la entrada 1. Este descenso no se da en la entrada 2 por lo que la presión allí será mayor que en la entrada 1. El aire entra por 2 y sale por 1. Se ha comprobado que, aunque el montículo no sea tan pronunciado, es lo suficiente como para que circule suficiente aire por el túnel.

19 1,11 kg/m^3

21 $1{,}0 \times 10^2$ kg

23 33,6 kg/m^3

25 0,773

27 29,8 inHg

29 1,5 N

31 230 N

33 197 atm. A una profundidad de sólo 2 km se produce una compresión de un 1%, que es lo que sucede en los océanos.

35 (*a*) 15 kN, (*b*) 0,34 kg

37 45 cm

39 1,4%

41 4,36 N

43 (*a*) 11×10^3 kg/m^3, (*b*) En la tabla 13.1 vemos que la densidad del material desconocido es parecida a la del plomo.

45 800 kg/m^3, 1,11

47 250 kg/m^3

49 3,9 kg

51 $3{,}9 \times 10^5$ N

53 $2{,}5 \times 10^7$ kg

55 (*a*) 12,0 m/s, (*b*) 133 kPa, (*c*) Los caudales son iguales.

57 (*a*) 4,6 L/min, (*b*) $7{,}6 \times 10^{-2}$ m^2

59 144 kPa

61 0,20 kPa. Como $\Delta P \propto I_V^2$ (un gráfico de ΔP en función de I_V muestra que se trata de una parábola abierta hacia arriba) esta diferencia de presiones es la mínima posible.

65 (*b*) $P_{\text{cima}} = P_{\text{atm}} - \rho g d$

67 (*a*) 9,28 cm/s, (*b*) 0,331 cm, (*c*) 76 cm

69 (*a*) $x = 2\sqrt{h(H-h)}$, (*c*) $x_{\text{máx}} = H$

71 1,43 mm

73 90 mi/h. La mayoría de los *pitchers* de la liga profesional son capaces de lanzar a esa velocidad; por tanto, ese descenso de la fuerza de resistencia puede afectar al juego.

75 2,91 L/s

77 2

79 36 kg/m^3

81 0,71 kg

83 12 cm

85 Un metro de diámetro resulta plausible para ese oleoducto.

87 29 s

89 (*a*) 70 m^3, (*b*) 5,2 m/s^2

91 (*b*) 0,13 km^{-1}

93 39 cm^3

Capítulo 14

1 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero

3 (*a*)

5 (*c*)

7 (*c*)

9 Al despreciar la masa del muelle en los cálculos hace que la masa del sistema oscilante sea menor que la real. Por tanto, el valor calculado para el periodo será menor que el valor del periodo de todo el sistema mientras que el valor de la frecuencia será mayor que el real. Como la energía total del sistema oscilante depende sólo de la amplitud de su movimiento y del alargamiento del muelle, es independiente de la masa del sistema, de forma que despreciar la masa del muelle no tiene efecto sobre la energía total del sistema.

11 (*d*)

13 (*b*)

15 1 se empareja con B, 2 se empareja con D, y 3 se empareja con A.

17 (*c*)

19 (*a*) Verdadero, (*b*) Falso, (*c*) Verdadero, (*d*) Falso, (*e*) Verdadero

21 (*b*)

23 (*b*)

25 Aproximadamente 5

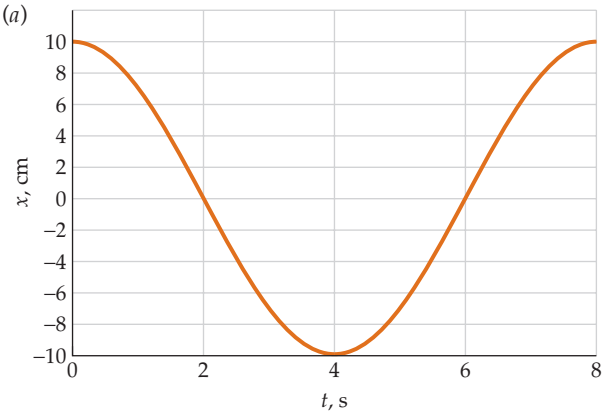
27 8π

29 (*a*) 3,00 Hz, (*b*) 0,333 s, (*c*) 7,0 cm, (*d*) 0,0833 s en la dirección $-x$.

31 (*a*) $x = (0{,}25\text{ m})\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t]$
(*b*) $v = -(1{,}0\text{ m/s})\,\text{sen}[(4{,}2\text{ s}^{-1})t]$
(*c*) $a = -(4{,}4\text{ m/s}^2)\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t]$

33 (*a*) $x = (0{,}28\text{ m})\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t - 0{,}45]$
(*b*) $v = -(1{,}2\text{ m/s})\,\text{sen}[(4{,}2\text{ s}^{-1})t - 0{,}45]$
(*c*) $a = -(4{,}9\text{ m/s}^2)\cos[(4{,}2\text{ s}^{-1})t - 0{,}45]$

35 (*a*)



(*b*) 2,9 cm, 7,1 cm, 7,1 cm, 2,9 cm

37 (*a*) 7,9 m/s, 25 m/s^2, (*b*) 6,3 m/s, -15 m/s^2

39 (*a*) 3,1 s, 0,32 Hz, (*b*) $x = (40\text{ cm})\cos[(2{,}0\text{ s}^{-1})t + (\pi/2)]$

41 23 J

43 (*a*) 0,368 J, (*b*) 3,83 cm

45 1,4 kN/m

47 (*a*) 6,9 Hz, (*b*) 0,15 s, (*c*) 10 cm, (*d*) 4,3 m/s, (*e*) $1{,}9 \times 10^2$ m/s^2, (*f*) 36 ms, 0

49 (*a*) 0,68 kN/m, (*b*) 0,42 s, (*c*) 1,5 m/s, (*d*) 23 m/s^2

51 (*a*) 3,08 kN/m, (*b*) 4,16 Hz, (*c*) 0,240 s

53 0,262 s

55 (*a*) 1,0 Hz, (*b*) 0,50 s, (*c*) 0,29 N

57 (*a*) 6,7 cm, (*b*) 0,26 s, (*c*) Como $h < 8{,}0$ cm, el muelle nunca se comprime. 77 cm/s

59 44 cm

61 12 s

63 11,7 s

65 $T = 2\pi\sqrt{L/(g\cos\theta)}$

67 1,1 s

69 0,50 kg · m^2

71 21,1 cm desde el centro de la regla

75 (*a*) d = 1,64 m, (*b*) 2,31 cm

79 (*a*) 0,31, (*b*) $-3{,}1 \times 10^{-2}\%$

81 (*a*) 1,57%, (*c*) $0{,}43E_0$

83 (*a*) 5,51 Pa · s, (*b*) 125

85 (*a*) 1,0 Hz, (*b*) 2 Hz, (*c*) 0,35 Hz

87 (*a*) 4,98 cm, (*b*) 14,1 rad/s, (*c*) 35,4 cm, (*d*) 1,00 rad/s

89 (*a*) 0,48 Hz, 2,1 s, (*b*) $v = -(1{,}2\text{ m/s})\text{sen}\left[(3{,}0\text{ rad/s})t + \dfrac{\pi}{4}\right]$, (*c*) 1,2 m/s

91 El error es mayor cuanto mayor sea la altitud a la que esté el reloj.

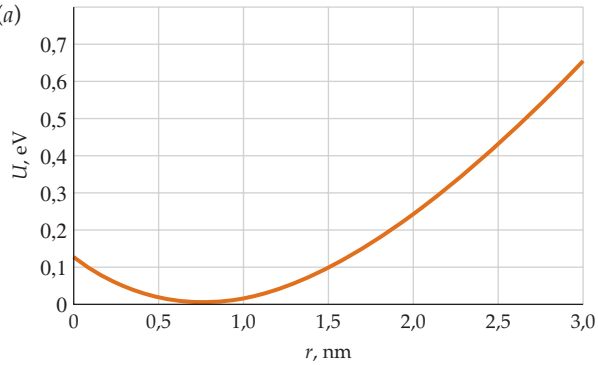
93 (*a*) $\mu_s = \dfrac{Ak}{(m_1 + m_2)g}$ (*b*) A cambia. E no cambia. ω disminuye, y T aumenta.

95 (*b*) 2,0 cm/s^2

101 $6{,}44 \times 10^{13}$ rad/s

103 $T = 7{,}78\sqrt{R/g}$

107 (*a*)



(*b*) $r = r_0$, $k = 2\beta^2 D$, (*c*) $\omega = 2\beta\sqrt{D/m}$

Capítulo 15

1 La velocidad de una onda transversal a través de una cuerda uniforme aumenta con la tensión. Las ondas se mueven más rápidamente conforme ascienden porque la tensión de la cuerda aumenta debido al peso de la porción de cuerda que cuelga.

3 (*b*)

5 Las frecuencias de resonancia (onda estacionaria) de una cuerda son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de la densidad lineal de la cuerda ($f = \sqrt{F_T/\mu}/\lambda$). Por tanto, frecuencias muy altas (que podrían requerir cuerdas muy largas) se pueden acomodar en cuerdas relativamente más cortas si las cuerdas son linealmente más densas que las de mayor frecuencia. Las altas frecuencias no son un problema si se utilizan cuerda cortas.

7 (*c*)

9 Sólo hubo una explosión. El sonido viaja más rápido en el agua que en el aire. Abel oyó la onda sonora en el agua primero y luego en la superficie oyó la onda sonora que viajaba por el aire que tardó más en llegar hasta él.

11 (*b*)

13 (*a*)

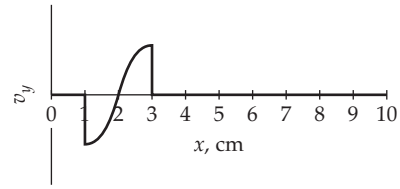
15 (*b*)

17 (*a*) Falso, (*b*) Verdadero, (*c*) Verdadero

19 (*a*)

21 La frecuencia de la luz procedente de la estrella visible se verá desplazada periódicamente respecto al valor medio debido al acercamiento y alejamiento a la Tierra conforme la estrella va rotando en torno al centro de masas.

23



25 El camino C. Como la velocidad de la onda es mayor en el agua, y casi todo el camino C es bajo el agua en comparación con los caminos A y B, el sonido tardará menos tiempo por el camino C.

27 11 ms

29 0,27 km/s, 21%

31 1,32 km/s

33 (*b*) 40 N, (*c*) 40,8 N, 2%

39 9,9 W

41 (*a*) 5,00 m/s en la dirección $-x$, (*b*) 10,0 cm, 50,0 Hz, 0,0200 s, (*c*) 0,314 m/s

43 (*a*) 6,8 J, (*b*) 44 W

45 (*a*) 79 mW, (*b*) La potencia puede aumentar en un factor 100 aumentando o bien la frecuencia o la amplitud en un factor 10, o bien aumentando la tensión en un factor 100. (*c*) Lo más fácil sería aumentar la frecuencia.

47 (*a*) 0,75 Pa, (*b*) 4,00 m, (*c*) 85,8 Hz, (*d*) 343 m/s

49 (*a*) 36,4 μm, (*b*) 83,4 mPa

51 (*a*) Cero, (*b*) 3,64 μm

53 (*a*) 0,80 s, (*b*) 30 m, (*c*) 6,8 m

55 (*a*) 50,3 W, (*b*) 2,00 m, (*c*) 4,44 mW/m^2

57 (*a*) 20,0 dB, (*b*) 100 dB

59 90 dB

61 (*a*) 0,10 km, (*b*) 0,13 W

63 (*a*) 80 dB, (*b*) Eliminando las fuentes de 70 dB y 73 dB no se reduce significativamente el nivel de intensidad.

65 87,8 dB

67 57 dB

73 (*a*) 263 m/s (*b*) 1,32 m, (*c*) 261 Hz

75 153 Hz

77 $2{,}25 \times 10^8$ m/s

79 174 mi/h

81 (*a*) −7,78 kHz, (*b*) −4,44 kHz

83 (*a*) $f'_r = f_s(v - u_r)/(v - u_s)$

85 (*a*) 0,82 kHz, (*b*) 0,85 kHz

87 185 m, 714 Hz

89 $\lambda_{máx} = (500\text{ nm})(1 + 4{,}36 \times 10^{-5})$ y $\lambda_{mín} = (500\text{ nm})(1 - 4{,}36 \times 10^{-5})$

91 529 Hz, 474 Hz

93 7,99 m desde el extremo izquierdo del alambre

95 (*a*) 55,6 N/m^2, (*b*) 3,49 W/m^2, (*c*) 0,110 W

97 77 kN

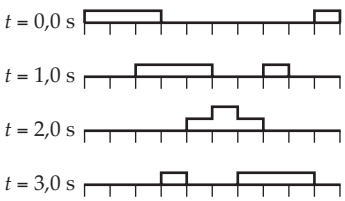
99 206 m

101 0,2 cm

103 (*a*) 10,0 m/s, (*b*) 2,00 m, (*c*) $P_{máx} = 1{,}26 \times 10^{-4}$ kg m/s, (*d*) 3,95 mN

Capítulo 16

1



3 (*c*)

5 (*a*)

7 3,0 m

9 (*b*)

11 (*a*)

13 Se podría medir la frecuencia más baja de resonancia f y la longitud L del tubo. Suponiendo que las correcciones del extremo son despreciables, la longitud de onda es igual a $4L$ si se tapa el tubo por un extremo y es $2L$ si el tubo está abierto por los dos extremos. Entonces utilizamos $v = f\lambda$ para encontrar la velocidad del sonido a temperatura ambiente. Finalmente, utilizamos $v = \sqrt{\gamma RT/M}$ (ecuación 15.5), donde $\gamma = 1{,}4$ para un gas diatómico como el aire, M es la masa molar, R es la constante universal de los gases y T es la temperatura absoluta del aire.

15 (*a*) No, (*b*) Sí

17 Las ondas sonoras estacionarias son producidas en las columnas de aire sobre el agua. La frecuencia de resonancia de las columnas de aire depende de la longitud de la columna de aire, que depende de cuanta agua hay en el vaso.

19 La longitud de onda queda determinada principalmente por el tamaño de la cavidad resonante de la boca; la frecuencia de los sonidos que produce es igual a la velocidad de la onda dividido por la longitud de onda. Como $v_{He} > v_{aire}$ (ver ecuación 15.5), la frecuencia de resonancia si el helio es el gas que hay en la cavidad.

21 Si no se oye ni un solo batido durante todo el tiempo que la cuerda y el diapasón están vibrando, se puede asegurar que sus frecuencias son muy parecidas, aunque no necesariamente iguales. Si los sonidos de la cuerda y el diapasón duran 10 s, se tiene que la frecuencia de batido es inferior a 0,1 Hz. Entonces, las frecuencias de la cuerda y el diapasón difieren en 0,1 Hz.

23 3. Las frecuencias estimadas concuerdan con las observadas en un 14%.

25 7,1 cm

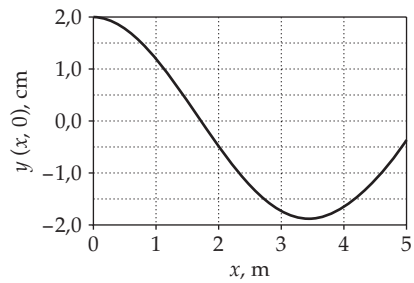
27 (*a*) 89°, (*b*) 1,5A

29 (*a*) 0, (*b*) $2I_0$, (*c*) $4I_0$

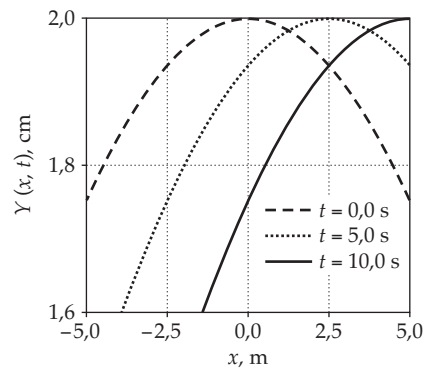
31 (*a*) 60,0 cm, (*b*) 0,400π rad, (*c*) 24,0 m/s

33 $f_1 = 2{,}0$ kHz, $f_2 = 5{,}0$ kHz

35 (*b*)



(*c*)



$v_{est} = 46$ cm/s, v_{est} es 92% of $v_{envolvente}$

37 1,8 m, 51°

39 (*a*) 0,279 m, (*b*) 1,23 kHz, (*c*) 0,432 rad, 0,592 rad, 0,772 rad, 0,992 rad, y 1,35 rad, (*d*) 0,0698 rad

41 2,0 rad

43 (*b*) 1,2 kHz, (*c*) 15 Hz/(mi/h)

45 (*a*) 2,00 m, 2,50 Hz
(*b*) $y_3(x,t) = (4{,}00 \text{ mm})\,\text{sen}(\pi \text{ m}^{-1})x\,\cos(50{,}0\pi \text{ s}^{-1})t$

47 (*a*) 521 m/s, (*b*) 2,80 m, 186 Hz, (*c*) 372 Hz y 558 Hz

49 141 Hz

51 (*a*) 32,4 cm, 47,7 Hz, (*b*) 15,0 m/s, (*c*) 62,8 cm

53 (*a*) 71,5 Hz, (*b*) 5,00 kHz, (*c*) 71

55 452 Hz. Idealmente, el tubo debería expandirse de forma que v/L, siendo L la longitud del tubo, sea independiente de la temperatura.

57 (*a*) 40,0 cm, (*b*) 480 N, (*c*) Se debería colocar el dedo a 9,2 cm del puente.

59 (*a*) 75 Hz, (*b*) 5° y 6°, (*c*) 2,0 m

61 (*a*) 0,574 g/m, (*b*) $\mu_E = 1{,}29$ g/m, $\mu_A = 2{,}91$ g/m, $\mu_D = 2{,}91$ g/m, $\mu_G = 6{,}57$ g/m

63 (*a*) Los dos sonidos producen un batido porque el tercer armónico de la cuerda A es igual al segundo armónico de la cuerda E, y la frecuencia original de la cuerda E es ligeramente mayor que 660 Hz.

65 (*a*) Como la frecuencia está fija, la longitud de onda depende sólo de la tensión de la cuerda. Esto es correcto debido a que el único parámetro que puede afectar a la velocidad de la onda en la cuerda es su tensión. La tensión es producida por el peso que cuelga de su extremo. Dado que la longitud de la cuerda es fija, sólo ciertas longitudes de onda pueden producir resonancia en la cuerda. Entonces, como sólo ciertas longitudes de onda son permitidas, sólo ciertas velocidades funcionarán. Esto, a su vez, significa que sólo ciertas tensiones o pesos funcionarán.
(*b*) Los modos de frecuencias más elevadas sobre la misma longitud de cuerda dan lugar a longitudes de onda más cortas. Para que esto sea posible sin modificar la frecuencia, se necesita reducir la velocidad de la onda. Esto puede darse si se reduce la tensión mediante la reducción del peso que se cuelga.
(*d*) $w_1 = 19{,}2$ N, $w_2 = 4{,}80$ N, $w_3 = 2{,}13$ N

67 (*a*) $\Delta t = N/f_0$, (*b*) $\lambda \approx \Delta x/N$, (*c*) $k = 2\pi N/\Delta x$, (*d*) N tiene incertidumbre debido a que el perfil de la onda decrece gradualmente en lugar de pararse abruptamente en un tiempo dado por lo que no está bien definido donde el pulso empieza o finaliza.

69 6,74 m

71 (*a*) 1,9 cm, 3,6 m/s, (*b*) 0, 0, (*c*) −1,2 cm, −2,2 m/s, (*d*) 0, 0

73 98,0 Hz

75 (*a*) El tubo está cerrado por un extremo. (*b*) 262 Hz, (*c*) 32,7 cm

77 (*a*) $y_1(x, t) = (0{,}010\text{ m})\text{sen}[(\frac{1}{2}\pi\text{ m}^{-1})x - (40\pi\text{ s}^{-1})t]$,
$y_2(x, t) = (0{,}010\text{ m})\text{sen}[(\frac{1}{2}\pi\text{ m}^{-1})x + (40\pi\text{ s}^{-1})t]$,
(*b*) 2,00 m, (*c*) $v_y(1{,}0\text{ m}, t) = -(2{,}5\text{ m/s})\text{sen}[(40\pi\text{ s}^{-1})t]$,
(*d*) $a_y(1{,}0\text{ m}, t) = -(0{,}32\text{ km/s}^2)\cos[(40\pi\text{ s}^{-1})t]$

79 $y_{\text{res}}(x, t) = (10{,}0\text{ cm})\text{sen}(kx - \omega t)$

81 (*b*) 203,4 Hz, (*c*) 203,4 Hz

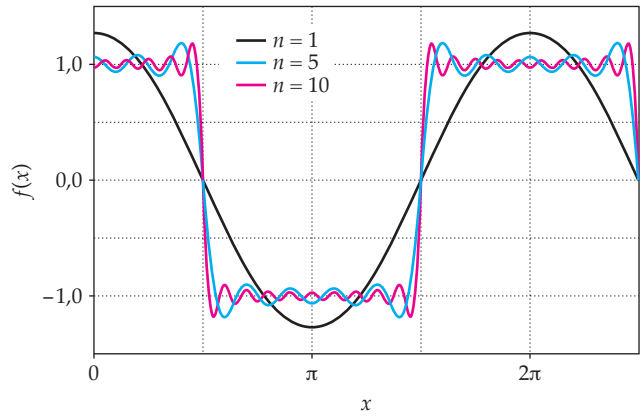
83 812 Hz

85 (*a*)

Celda	Contenido/Fórmula	Forma algebraica
A6	A5+0,1	$x + \Delta x$
B4	2*B3+1	$2n + 1$
B5	(−1)^B$3*COS(B$4*$A5)/B$4*4/PI()	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos((2n+1)x)}{2n+1}$
C5	B5+(−1)^C$3*COS(C$4*$A5)/C$4*4/PI()	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos((2n+1)x)}{2n+1}$

	A	B	C	D	K	L
1						
2						
3		0	1	2	9	10
4		1	3	5	19	21
5	0,0	1,2732	0,8488	1,1035	0,9682	1,0289
6	0,1	1,2669	0,8614	1,0849	1,0134	0,9828
134	12,9	1,2030	0,9740	0,9493	0,9691	1,0146
135	13,0	1,1554	1,0422	0,8990	1,0261	0,9685

La curva de trazo sólido se ha dibujado a partir de los datos de las columnas A y B, y corresponde al gráfico de $f(x)$ para un solo término. La curva de trazo discontinuo representa los datos de las columnas A y F, y corresponde al gráfico de $f(x)$ para cinco términos. La curva de puntos representa los datos de las columnas A y K, y corresponde al gráfico de $f(x)$ para 10 términos.

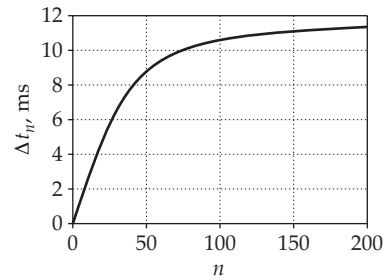


(*b*) Es equivalente a la fórmula de Leibnitz

87 (*b*)

Celda	Contenido/Fórmula	Forma algebraica
B1	90	L
B2	1	r
B3	340	c
B8	B7+1	$n + 1$
C7	2/$B$3*((2*(B7−1)*$B$2)^2+$B$1^2)^0,5	Δt_n

	A	B	C	D
1	L =	90	m	
2	*r* =	1	m	
3	*c* =	343	m/s	
6		*n*	*t*(*n*)	delta *t*(*n*)
7		1	0,5248	0,0001
8		2	0,5249	0,0004
206		200	2,3739	0,0114



(*c*) La frecuencia detectada en cada instante de tiempo es $1/\Delta t_n$; por tanto, como Δt_n aumenta con el tiempo, la frecuencia decrece. $f_{\text{máxima}} = 7{,}72$ kHz, $f_{\text{mínima}} = 85{,}5$ Hz

Capítulo 17

1 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadero

3 La habitación que estaba a 20 °F era la más fría.

5 De la ley de los gases ideales se tiene $P = nRT/V$, y V/T es la pendiente de la línea que va del origen al punto (T, V) sobre la gráfica. Durante el proceso, la pendiente de la línea desde el origen a (T, V) disminuye continuamente, de modo que la presión aumenta de forma continua.

7 (*d*)

9 Las energías cinéticas medias son iguales. La razón de sus velocidades cm es igual a la raíz cuadrada del recíproco de la razón de sus masas moleculares.

11 Falso

13 Da lo mismo.

15 (*b*)

17 La velocidad cm es siempre algo mayor que la velocidad del sonido. Sin embargo, sólo la componente de las velocidades moleculares en la dirección de propagación es la que es relevante en este tema.

19 Si el volumen disminuye, la presión aumenta porque un mayor número de moléculas por unidad de área choca contra las paredes en un tiempo dado. Esto sucede porque el número de moléculas por unidad de volumen aumenta cuando el volumen disminuye.

21 La velocidad molecular media del gas He a 300 K es aproximadamente 1,4 km/s, de modo que una fracción significativa de moléculas de He tienen velocidades superiores a la velocidad de escape de la Tierra (11,2 km/s). Con el paso del tiempo, el contenido de He en la atmósfera decrece.

23 Alrededor de 1,2 kg/m^3

25 (*a*) 3600 K, (*b*) 230 K, (*c*) Como es más ligero que el aire, el hidrógeno sube hasta la parte más alta de la atmósfera. Como la temperatura es alta allí, una fracción mayor de moléculas alcanza la velocidad de escape. (*d*) 160 K, 10 K. Como g es menor en la Luna, la velocidad de escape es más pequeña. Por consiguiente, un porcentaje mayor de moléculas se está desplazando a la velocidad de escape.

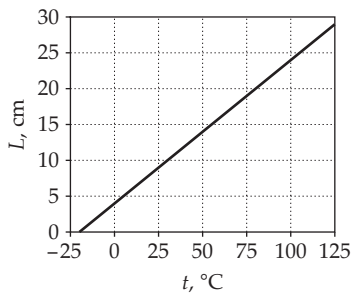
27 (*a*) 1,23 km/s, (*b*) 310 m/s, (*c*) 264 m/s, (*d*) Como v_e es mayor que v_{cm} para O_2, CO_2 y H_2, estos tres gases se podrían encontrar en Júpiter.

29 (*a*) 2×10^{11} atm, (*b*) $v_{\text{con protones}} = 5 \times 10^5$ m/s, $v_{\text{con electrones}} = 2 \times 10^7$ m/s

31 1×10^{-4} g

33 1063 °C

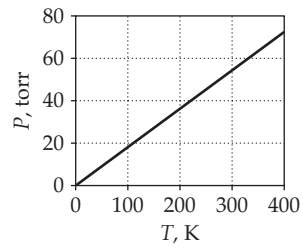
35 (*a*)



(*b*) 8,40 cm, (*c*) 107 °C

37 −320 °F

39 (*a*)



(*b*) 54,9 torr, (*c*) $3{,}70 \times 10^3$ K

41 −40,0 °C = −40,0 °F

43 −183 °C, −297 °F

45 (*a*) $R_0 = 3{,}91 \times 10^{-3}$ K, $B = 3{,}94 \times 10^3$ K, (*b*) 1,31 kΩ, (*c*) −389 Ω/K, −4,33 Ω/K, (*d*) El termistor tiene mayor sensibilidad a temperaturas más bajas.

47 1,79 mol, $1{,}08 \times 10^{24}$ moléculas

49 −83 *glips*

51 (*a*) $3{,}7 \times 10^3$ mol, (*b*) 60 mol

53 11,1 atm

55 (*a*) El aire será menos denso cuando su contenido en vapor de agua sea más alto, (*b*) 18 g

57 1,1 kN

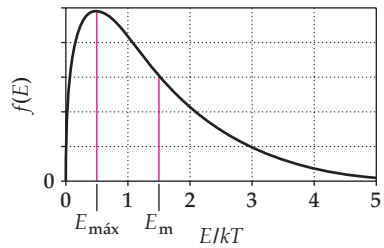
59 (*a*) 0,28 km/s, (*b*) 0,87 km/s. La velocidad cm de los átomos de argón es ligeramente inferior a un tercio de la velocidad cm de los átomos de helio.

61 $5{,}0 \times 10^5$ m/s, $2{,}1 \times 10^{-16}$ J

65 $K/\Delta U = 7{,}9 \times 10^4$

69 (*a*) $E_{\text{máx}} = \frac{1}{2}kT$, $E_{\text{máx}} = \frac{1}{3}E_{\text{m}}$

(*b*)



$E_{\text{máx}}$ **es la energía más probable**

(*c*) La gráfica sube desde cero a un máximo mucho más rápidamente de lo que cae a la derecha del máximo. Como la distribución es tan marcadamente asimétrica a la derecha del máximo, las escasas moléculas con relativamente altas energías tiran del promedio a la derecha del valor más probable $(kT/2)$.

71 (*a*) $1{,}2 \times 10^2$ K, (*b*) $2{,}4 \times 10^2$ K, (*c*) 1,4 atm

73 (*a*) Para escapar de la superficie de una gota de agua, las moléculas deben tener suficiente energía cinética de traslación para vencer las fuerzas atractivas de sus vecinas. Por lo tanto, las moléculas que escapan serán aquellas que se mueven más deprisa, dejando atrás las moléculas más lentas. Las molécu-

las más lentas tienen menos energía cinética, de modo que la temperatura de la gota, que es proporcional a la energía cinética media de traslación, disminuye.
(*b*) Mientras que la temperatura no es demasiado alta, las moléculas de la superficie que se evaporan serán sólo aquellas con velocidades muy grandes, en la "cola" de alta energía de la distribución de Maxwell-Boltzmann. Dentro de esta cola, aumentar la temperatura sólo ligeramente puede incrementar en gran medida el porcentaje de moléculas con velocidades por encima de un cierto umbral. Por ejemplo, supongamos que se establece un umbral inicial en $E = 5kT_1$, e imaginemos que la temperatura se aumenta en un 10%, de modo que $T_2 = 1{,}1T_1$. En el umbral, la razón entre la nueva distribución de energías y la vieja es

$$\frac{F(T_2)}{F(T_1)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right) e^{-E/KT_2} e^{+E/kT_1} = (1{,}1)^{-3/2}\, e^{-5/1{,}1} e^{5} = 1{,}365$$

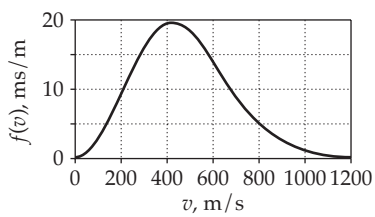
un aumento de casi el 37%.

75 110 mol de H_2, 55 mol de O_2

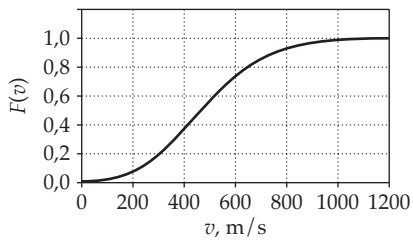
77 $4m$

79 (*a*) 142 ms, (*b*) 146 ms

81 (*a*)



(*b*) Cuando se aumenta la temperatura, la gráfica se ensancha horizontalmente y se acorta verticalmente. De modo más preciso, la posición horizontal del valor máximo se desplaza hacia la derecha en proporción a la raíz cuadrada de la temperatura, mientras que la altura del máximo desciende en la misma proporción, preservando el área total bajo la gráfica (la cual debe ser 1,0, la probabilidad total de una molécula de tener una velocidad entre cero e infinito).
(*c*) Seguimos de cerca una gráfica de $F(v)$ del nitrógeno a 300 K. Cada número de la columna C de la hoja de cálculo [mostrado en (*a*)] es aproximadamente igual a la integral de $f(v)$ desde cero hasta el correspondiente valor de v. La integral representa la probabilidad de que una molécula tenga una velocidad mayor o igual a este valor de v.

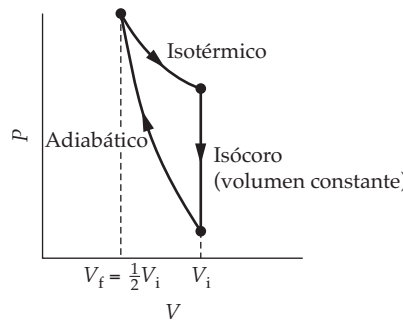


$F(v) = \int_0^v f(v')dv'$

(*d*) Alrededor del 7%. Obsérvese que este valor concuerda con la gráfica de $F(v)$ mostrada arriba.
(*e*) Un poco por debajo del 14%.

Capítulo 18

1 (*e*)
3 (*c*)
5 (*a*)
7 (*c*)
9 Sí. $\Delta E_{int} = Q_{in} + W_{on}$. Si el gas realiza trabajo al mismo ritmo que absorbe calor, la energía interna permanece constante.
11 Las partículas que se atraen entre sí tienen más energía potencial cuanto más separadas están. En un gas real, las moléculas ejercen entre ellas fuerzas atractivas débiles. Estas fuerzas aumentan la energía potencial interna durante una expansión. Un aumento de la energía potencial significa una disminución de la energía cinética, y una disminución de la energía cinética corresponde a una disminución de la energía cinética de traslación. Por lo tanto, hay un descenso de la temperatura.
13 Partículas que se repelen entre sí tienen más energía potencial cuanto más juntas están. Las fuerzas repulsivas disminuyen la energía potencial interna durante una expansión. Una disminución de energía potencial significa un aumento de energía cinética, y a un aumento de energía cinética corresponde un aumento de la energía cinética de traslación. Por lo tanto, hay un aumento de temperatura.
15 (*a*)
17 (*a*) Falso, (*b*) Falso, (*c*) Verdadero, (*d*) Verdadero, (*e*) Verdadero, (*f*) Verdadero
19 (*d*)
21 Durante un proceso adiabático reversible, PV^γ es constante, siendo $\gamma > 1$, y durante un proceso isotérmico, PV es constante. De este modo, la subida de presión durante la compresión es mayor que la caída de presión durante la expansión. El proceso final podría ser un proceso a volumen constante durante el cual el calor es absorbido por el sistema. Un enfriamiento a volumen constante disminuye la presión y devuelve el gas a su estado original.



23 La temperatura disminuye.
25 1,6 min, tiempo transcurrido que parece concordar con la experiencia.
27 $1{,}2 \times 10^{-5}$ (o $1{,}2 \times 10^{-3}$%)
29 31,3 kJ
31 48,8 g
33 12,1 °C
35 $4{,}5 \times 10^2$ kg
37 (*a*) 0 °C, (*b*) 125 g
39 (*a*) 4,9 °C, (*b*) No queda hielo.
41 (*a*) 5,26 °C, (*b*) 175 g, (*c*) No

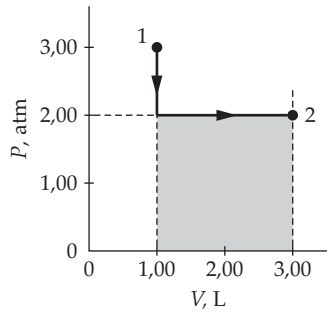
43 618 °C

45 2,20 kJ

47 54 J

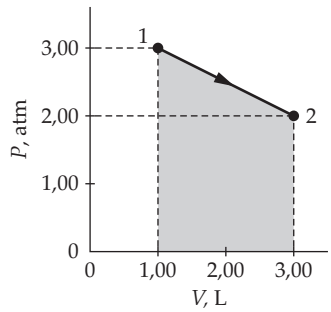
49 (*a*) 6,13 W, (*b*) 38,1 min

51 (*a*) 405 J



(*b*) 861 J

53 (*a*) 507 J



(*b*) 963 J

55 $W = \frac{3}{2}P_0V_0$

57 (*a*) 555 J, (*b*) 555 J

59 (*a*) 0,495 mol, (*b*) 3,09 kJ, (*c*) 20,8 J/mol · K, (*d*) 10,3 J/K

61 (*a*) 6,24 kJ, 6,24 kJ, (*b*) 6,24 kJ, 8,73 kJ, 2,49 kJ, (*c*) 2,49 kJ

63 59,6 L

65 $\Delta c'_p = -\frac{13}{2}R$

67 Hay tres grados de libertad de traslación y tres grados de libertad de rotación. Además, cada uno de los átomos de hidrógeno puede vibrar contra el átomo de oxígeno, lo que trae como consecuencia 4 grados de libertad adicionales (2 por átomo). $C_{v\,\text{agua}} = 5Nk = 5nR$

69 (*a*) 300 K, 7,80 L, 1,14 kJ, 1,14 kJ, (*b*) 5,40 L, 208 K, 0, 574 J

71 (*a*) 263 K, (*b*) 10,8 L, (*c*) 1,48 kJ, (*d*) −1,48 kJ

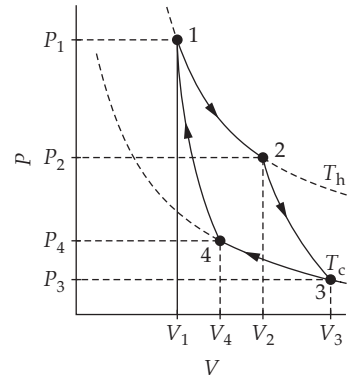
73 −0,14 kJ

75

Proceso	*Q* (kJ)	*W* (kJ)
D → A	8,98	0
A → B	13,2	−13,2
B → C	−8,98	0
C → D	−6,58	6,58

$W_{\text{total realizado por el gas}} = 6{,}6$ kJ

77 (*a*)



79 (*a*) 65 K, 81 K, (*b*) 1,6 kJ, (*c*) 2,2 kJ

81 (*a*) 81 K, 81 K, (*b*) 2,7 kJ, (*c*) 3,3 kJ

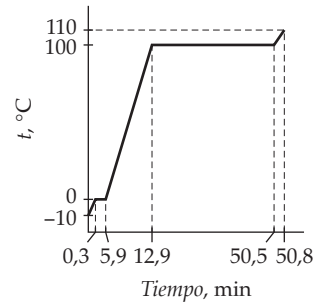
83 256 kcal

85 (*a*) $c(4{,}00\text{ K}) = 9{,}20 \times 10^{-2}$ J/kg · K, (*b*) 0,0584 J/kg

87 (*a*) 2,49 kJ, (*b*) 3,20 kJ

89 171 K

91



93 396 K

95 (*b*) 4,62 kJ

97 (*a*) $P_2 = \frac{1}{2}P_0$, (*b*) El gas es diatómico. (*c*) Durante el proceso isotermo, la energía cinética de traslación no cambia. En el proceso adiabático, la energía cinética de traslación aumenta en un factor 1,32.

Capítulo 19

1 (*c*)

3 (*a*)

5 El CDE se define de modo que sea una medida de la eficacia del dispositivo. Para un refrigerador o acondicionador de aire, la magnitud importante es el calor transferido desde el ya frío interior, Q_c. Para una bomba de calor, la idea se centra en el calor transferido al interior cálido de la casa, Q_h.

7 Aumentando la temperatura del vapor se aumenta su contenido de energía. Además, aumenta el rendimiento de Carnot y, en general, aumenta el rendimiento de cualquier máquina térmica.

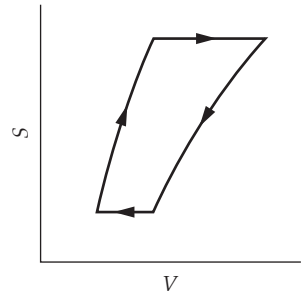
9 Un refrigerador de Carnot es más eficiente cuando las temperaturas son muy próximas porque se requiere menos trabajo para extraer calor de un interior ya frío si la temperatura del exterior es próxima a la temperatura del interior del refrigerador. Una máquina térmica que describe un ciclo de Carnot es más eficiente cuando la diferencia de temperaturas es grande porque entonces la máquina realiza más trabajo por cada unidad de calor absorbida del foco caliente.

11 (*c*)

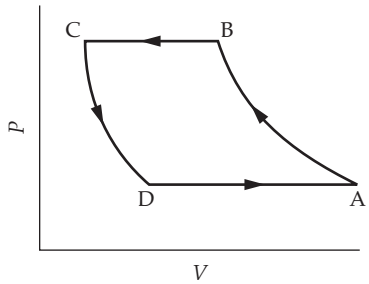
13 (*d*)

15 El ciclo es el de la máquina de Otto (ver figura 19.3).

17



19



21 Un aumento de alrededor del 47%.

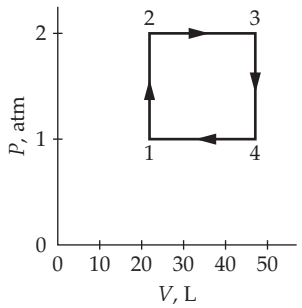
23 56%

25 (*a*) $1{,}7 \times 10^{17}$ W, (*b*) $6{,}02 \times 10^{14}$ J/(K · s)

27 (*a*) 500 J, (*b*) 400 J

29 (*a*) 40%, (*b*) 80 W

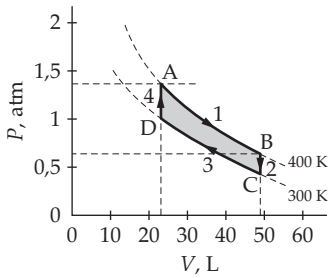
31 (*a*)



Proceso	W (kJ)	Q (kJ)	ΔE_{int} (kJ)
$1 \rightarrow 2$	0	3,74	3,74
$2 \rightarrow 3$	−4,99	12,5	7,5
$3 \rightarrow 4$	0	−7,8	−7,48
$4 \rightarrow 1$	2,49	−6,24	−3,75

(*b*) 15%

33 13,1%



35 (*a*) $T_2 = 600$ K, $T_3 = 1800$ K, $T_4 = 600$ K, (*b*) 15%

37 (*a*) 5,16%. No hay contradicción. (*b*) La mayoría de los animales de sangre caliente sobreviven, aproximadamente, bajo las mismas condiciones que los seres humanos. Para hacer trabajo de una máquina térmica con rendimiento apreciable, las temperaturas internas del cuerpo se habrían de mantener a un nivel alto poco razonable.

41 (*a*) 33,3%, (*b*) 33,3 J, (*c*) 67 J, (*d*) 2,0

45 (*a*) 33%

47 (*a*) 100 °C, (*b*) 3,12 kJ, $Q_{2\rightarrow3} = 0$, $Q_{3\rightarrow1} = -2{,}91$ kJ, (*c*) 6,7%, (*d*) 35,5%

49 (*a*) 6,3, (*b*) 3,2 kW, (*c*) 5,3 kW

51 (*a*) 0,17 MJ, (*b*) 0,12 MJ. Como la diferencia de temperatura aumenta cuando la habitación está más caliente, el CDE disminuye.

53 6,05 kJ/K

55 $\Delta S_u = 2{,}40$ J/K y, como $\Delta S_u > 0$, la entropía del universo aumenta.

57 (*a*) 0, (*b*) 267 K

59 (*a*) 244 kJ/K, (*b*) −244 kJ/K, (*c*) El cambio de entropía del universo es sólo ligeramente mayor que cero.

61 (*a*) −117 J/K, (*b*) 138 J/K, (*c*) 20 J/K

63 (*a*) 0,42 J/K, (*b*) 125 J

65 (*a*) $W_{\text{ciclo}} = 20{,}0$ J, (*b*) $Q_{\text{h ciclo}} = 67$ J, $Q_{\text{c ciclo}} = 47$ J

67 (*a*) 51%, (*b*) 0,10 MJ, (*c*) 98 kJ

69 113 W/K

71 (*a*) Usted podría explicarle que, como el rendimiento que él pretende para su invento (83,3%) es mayor que el rendimiento de una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas, sus datos no concuerdan con lo que sabemos acerca de la termodinámica de máquinas. El inventor debe haber cometido un error en el análisis de sus datos o es un timador que busca gente a la que estafar.

(*b*) 135 W

73 (*a*) El proceso (2) es el más derrochador del *trabajo disponible*. (*b*) $\Delta S_1 = 1{,}67$ J/K, $\Delta S_2 = 0{,}833$ J/K

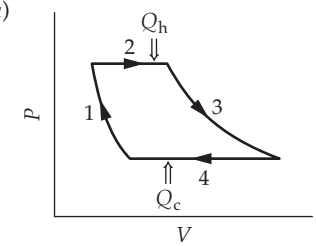
75 313 K

77 10 W

79 (*a*) 253 kPa, (*b*) 462 K, (*c*) 6,97 kJ

81 (*a*) 253 kPa, (*b*) 416 K, (*c*) 6,59 kJ

83 (*a*)



89 $T = 10^{484}$ años, $T \approx 10^{478} T_{\text{Russell}}$

Capítulo 20

1 El bulbo de vidrio del termómetro se calienta y expande antes de que el mercurio se caliente y expanda.

3 El agua se dilata enormemente cuando se congela. Si una botella de vidrio cerrada se pone en el congelador, cuando el agua se congela no habrá espacio suficiente para que tenga lugar la dilatación y la botella se romperá.

5 La tira se curvará más.

7 (*c*)

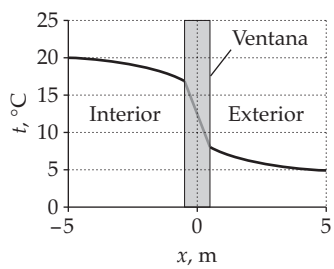
9 (*a*) Al aumentar la altitud, la presión decrece. A partir de la curva OC, la temperatura T de la interfase líquido-vapor decrece conforme la presión decrece, de forma que la temperatura de ebullición decrece. Así mismo, a partir de la curva OB, la temperatura de fusión aumenta con el cambio de altitud.

(*b*) La ebullición a baja temperatura significa que el tiempo de cocción deberá aumentar.

11 El dióxido de carbono puede existir como sólido o gas a muy bajas presiones y temperaturas. La atmósfera de Marte tiene un 95% de dióxido de carbono. Marte, en promedio, es lo suficientemente cálido como para que su atmósfera sea mayoritariamente dióxido de carbono en fase gaseosa. Las regiones polares son lo suficientemente frías como para que exista el dióxido de carbono sólido (hielo seco), incluso a bajas temperaturas.

13 (*a*)

15



17 Su suposición no es correcta. Se derramarán 14 mL de agua.

19 17 mW/(m · K)

21 0,30 kW, 0,1 K/W

23 2,9 nm

25 8(°F · h · ft^2)/Btu

27 220 °C

29 $15 \times 10^{-6}\ \text{K}^{-1}$

31 $3{,}7 \times 10^{-12}\ \text{N/m}^2$

33 (*a*) 90 °C, (*b*) 82 °C, (*c*) 170 kPa

35 2,1 kBtu/h

37 (*a*) $I_{\text{Cu}} = 0{,}96$ kW, $I_{\text{Al}} = 0{,}57$ kW, (*b*) 1,53 kW, (*c*) 0,052 K/W

41 1,3 mm

43 93,5 cm^2

45 1598 °C

47 2,1 km

49 5800 K

51 (*b*) Los valores concuerdan en un 0,3%.

53 $1{,}3 \times 10^{10}$ kW. En torno a un 0,007%.

55 142 W

57 $L_2 = L_1$, $\omega_2 \approx (1 - 2\alpha\,\Delta T)\omega_1$, $E_2 = E_1(1 - 2\alpha\,\Delta T)$

59 (*a*) 0,70 cm/h, (*b*) 12 días

Capítulo R

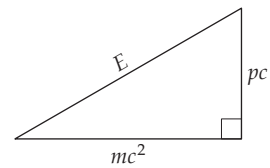
1 En el sistema de referencia del coche, ambos sucesos se producen en el mismo punto (el que ocupa el coche). Por este motivo es el reloj de su amigo automovilista el que mide el tiempo propio entre los dos sucesos.

3 Sí. Llamemos sistema 1 al sistema de referencia inicial. En este sistema 1 sean L la distancia entre los sucesos, T el tiempo entre los mismos, y $+x$ la dirección del suceso B respecto al A. A continuación, calculemos el valor de L/T. Si L/T es menor que c, consideremos los dos sucesos desde un sistema de referencia 2 que se mueve con velocidad L/T en la dirección $+x$. En este sistema 2, los dos sucesos ocurren en el mismo punto.

5 Sí.

7 (*a*)

9 (*b*)



11 (*a*)

13 5,9 ns

15 (*a*) $K/E_0 = 5 \times 10^{-15}$, (*b*) $E/E_0 = 1{,}0000000000000050$
(*c*) $K_{\text{no-rel}}/K_{\text{rel}} = 0{,}9999999999999975$

17 6,6 m

19 (*a*) 599 m

21 (*a*) $1{,}3 \times 10^2$ años, (*b*) 88 años

23 (*a*) 60 cm, (*b*) 2,5 ns

25 0,80*c*

27 (*a*) $4{,}50 \times 10^{-10}$%, (*b*) 142 μs menos que 1 año, 142 μs

29 36 min

31 12,5 min, 12,5 min

33 60 min

35 0,400*c*. El suceso B puede ocurrir antes que el A si $v > 0{,}400c$.

37 (*a*) 11 años, (*b*) 40 años

39 (*a*) 1,01, (*b*) 1,15, (*c*) 1,67, (*d*) 7,09

41 (*a*) 0,155 mc^2, (*b*) 1,29 mc^2, (*c*) 6,09 mc^2

43 2,97 GeV

45 (*b*) 0,866*c*, (*c*) 0,999*c*

49 (*a*) 0,79%, (*b*) 69%

51 (*a*) 0,943

53 Durante 100 vidas medias, $d \approx 6600$ km que es, aproximadamente, el radio terrestre. Esta distancia relativamente corta nos permite asegurar que los muones no preceden del lejano Sol sino que se originan en nuestra atmósfera.

55 (*a*) 4,50 km/s, (*b*) 0,334 μs

57 (*a*) 0,75*c*, (*b*) 5,0 ft, (*c*) No. En el sistema de referencia del cobertizo, el extremo posterior de la escalera cruzará la puerta anterior antes que el extremo delantero de la escalera salga por la otra puerta del cobertizo. En cambio, en el sistema de referencia de la escalera, el extremo delantero de la misma saldrá del cobertizo antes que entre en él el otro extremo de la escalera (el posterior).

Índice alfabético

La *n* que sigue a algunos números indica que la entrada está en una nota a pie de página.

Academia Francesa de Ciencias, 655
Accidente, reconstrucción de un, 158
Aceite, coeficiente de viscosidad, 446
Aceite para motores, coeficiente de viscosidad, 446
Aceleración. *Véase también* Aceleración angular, 14, 27, 35–47, 309
  caída libre, 369, 370, 391
  centrípeta, 80, 141, 292
  como función del tiempo, 36–37
  condición de no deslizamiento y, 310, 312–314
  constante, 37–47
  de ultracentrifugadoras, 316
  debida a la gravedad, 71
  definición, 35
  del centro de masas, 154
  del movimiento circular uniforme, 79–80
  del péndulo simple, 471–473
  diagramas de movimiento y, 37
  dimensiones de, 8, 35
  fuerzas de arrastre y, 139–140
  instantánea, 35
  media, 35
  método de Euler, 147–149
  segunda ley de Newton y, 97
  tangencial, 81, 111, 292, 305
  unidades en el SI, 35
Aceleración angular, 290–291, 305, 309
  constante, 291
  del cuerpo rígido, 303
  pares de fuerza, 405
  valor medio, 290–291
Aceleración centrípeta, 80, 141, 292
Aceleración constante, 37–47
  como función del tiempo, 38–39
  de dos cuerpos, 45–47
  de un cuerpo, 40–43
  velocidad media con, 39–40
Aceleración de caída libre, 43–44, 369, 370, 391
Aceleración instantánea, 35
Aceleración media, 35
Aceleración tangencial, 81, 111, 292, 305
Aceleradores circulares, 51
Aceleradores lineales, 51
Acelerómetro, 124
Acero,
  coeficiente de conductividad térmica del, 676
  coeficiente de dilatación térmica del, 666
  módulo de cizalladura, 411
  módulo de compresibilidad, 426
  resistencia, 410
Adams, John (astrónomo), 394
Aerodinámica automotriz, 448
Afelio, 364, 365
Agencia Especial para la Atmósfera del Centro de Fluidos Geofísicos Globales, 353
Agua. *Véase también* Hielo,
  calor específico, 593–594
  calor latente de fusión, 596
  calor latente de vaporización, 596
  coeficiente de dilatación térmica, 666
  coeficiente de viscosidad, 446
  de lluvia en áreas urbanas, 686
  densidad, 424
  diagrama de fases, 673–674
  marina, densidad, 424
  módulo de compresibilidad, 426
  pesada (óxido de deuterio), 229
  propiedades térmicas, 667–668, 676
  punto de ebullición, 596
  punto de fusión, 596
  punto normal de congelación, 564
  punto normal de ebullición, 565
  punto triple, 568
  temperatura crítica, 674
Agujero negro supermasivo, 395
Agujeros negros, 394, 689
  supermasivos, 395
Aire, 353
  coeficiente de viscosidad, 446
Aislantes, 677
Alcance horizontal de un proyectil, 72, 75–77
Alcohol, densidad, 424
Alfabeto griego, contracubierta delantera
Altavoces, 511
Altitud, presión y, 430–431
Aluminio,
  densidad, 424
  módulo de cizalladura, 411
  módulo de compresibilidad, 426
  resistencia, 410
Amortiguador de oscilaciones de edificios, 459, 486
Amortiguadores de contrapeso, 459, 486
Amortiguadores viscosos, 486
Amortiguamiento débil, 478, 480, 481
  anchura de resonancia del, 482
Ampere (A), 4
Análisis armónico, 551–552
Análisis de Fourier (análisis armónico), 551–552
Andrómeda (galaxia), diámetro, 12
Ángulo de desviación, 270
Ángulo de Mach, 523
Ángulo de peralte, 144
Ángulo de reposo, 132
Anillo,
  centro de masas de un anillo semicircular, 153–154
  momento de inercia, 296
Anillo de Einstein, 386
Anillo semicircular, centro de masas, 153–154
Aniquilación electrón-positrón, 228
Antiderivada, 48, 49
Año-luz, 26
Años bisiestos, 21
Aproximación, velocidad relativa de, 267
Aproximación de rayos, 517
Área, 7, 8
Aristóteles, 2
Arquímedes, 432–433
  principio de, 432–438
Arquitectura acústica, 554
Arte, 1
Asperezas, 128
Atlas (lunar), 390
Atmósfera (atm), 426
Atmósfera(s), 375
  ley de la, 431, 456
  presión de la, 426
Atomizador, 442
Atracción electromagnética, 128
Atto, prefijo, 5
Atwood, máquina de, 124, 239, 338–339
Automoción,
  aerodinámica, 448
Avogadro, número de, 11
Azufre,
  calor latente de fusión de, 596
  calor latente de vaporización de, 596
  punto de ebullición de, 567, 596
  punto de fusión, 596

Balanza de torsión, 370, 411
  gravitatoria, 370, 411
Bar, 430
Barómetro de mercurio, 430
Barra, uniforme,
  campo gravitatorio generado por, 380
  centro de masas, 153

Barras de control, 641
Bean, Alan L., 460
Becquerel, Antoine, 2
Benceno, 12
Bernoulli, ecuación de, 440–445
  deducción a partir de la segunda ley de Newton, 440
  efecto Venturi, 442–443
  ley de Torricelli, 441–442
  para el flujo a lo largo de una línea de corriente horizontal, 440
  para el flujo a lo largo de una línea de corriente no horizontal, 441
  para fluido en reposo, 441
Bisiesto por un segundo, 21
Bismuto, calor específico y calor específico molar del, 593
Boltzmann, Ludwig, 683
Bombas de calor, 643–644
Bosones, 95, 352
  W, 95
  Z, 95
Bova, Ben, 89
Boya DART, 495
Boyle, ley de, 569
Boyle, Robert, 569
Brahe, Tycho, 364, 367
Brayton, ciclo de, 663
Brazo de palanca, 302
Bromo,
  calor latente de fusión, 596
  calor latente de vaporización, 596
  punto de ebullición, 596
  punto de fusión, 596
Btu, 593

Caballo de vapor (hp), 187
Cable de popa, 415
Caída libre, 43–44, 71, 100
  aceleración, 43–44, 369, 370, 391
Cálculo, 381
  teorema fundamental, 48
Calor, 220. *Véase también* Propiedades térmicas y procesos
  conversión del trabajo en, 630
  definido, 592
  equivalencia mecánica, 598
  latente, 595–598
  teorías, 592
Calor específico, 593–594
Calor específico molar, 593, 607
Calor latente, 595–598
  de fusión, 596
  de vaporización, 596
Caloría, 593
Caloría alimenticia o kilocaloría, 627
Calorimetría, 594–595, 619
  respirometría, 619
Calorímetro, 594
Cambio de temperatura en función de la corriente térmica, 676
Cambios de entropía, 646
  durante una transferencia, 649–650
  en colisiones perfectamente inelásticas, 649
  en un ciclo de Carnot, 650–651
  en una expansión isoterma de un gas ideal, 646–647
  en una expansión libre de un gas ideal, 647–648
  para procesos a presión constante, 648–649
Campo, punto de, 378
Campo(s) eléctrico(s), 96, 508
Campo gravitatorio, 96, 378–385
  cálculo, 379
  centro de gravedad, 302–303
  de dos partículas puntuales, 379
  de la Tierra, 100, 378
  de una barra uniforme, 380
  de una corteza esférica, 381, 384–385
  de una esfera sólida, 381
  definición, 378
  dentro de una esfera sólida, 381–382
Cáncer, tratamiento por radiación, 51
Candela (cd), 4
Capacidad calorífica, 592–595
  calor específico, 593–594
  calor específico molar, 593, 607
  calorimetría, 594–595, 619
  de gases, 606–610
  de sólidos, 611
  definición, 592–593
  del sulfuro de hidrógeno, 607
  temperatura y, 612
  teorema de equipartición y, 609–610
Carga(s) puntual(es), campo eléctrico debido a una única carga, 74
Carnot
  ciclo de, 637
    cambio de entropía en, 650–651
    diagrama ST, 651
    pasos en, 638
  máquina de, 637–643
  rendimiento de, 638–642, 643
  teorema de, 637
Carnot, Sadi, 2, 637
Catódicos, tubo de rayos, (TCR), 51
Caudal, 439
Cavendish, Henry, 367, 368, 369
Cedar Rapids, Iowa, 686
Celsius, escala de temperatura, 564–566
Cemento, densidad, 424
Centi, prefijo, 5
Centímetro, 5
Centro de gravedad, 302–303, 398–399
Centro de masas, 149–157
  aceleración, 154
  cálculo por integración, 153–154
  de cuerpos continuos, 150–152
  de sistema de partículas, 149–150, 154–155
  de un anillo semicircular, 153–154
  de una barra uniforme, 153
  definición, 149, 150
  movimiento, 154–157
  posición del, 150–152
  rodadura y, 312–313
  velocidad del, 154
Centro de percusión, 323
Centro de simetría, 150
Centro geométrico, 150
Cerenkov, radiación de, 523, 531
Cesio, 4
  reloj de, 21
Charles, Jacques, 569
Checketts, Stan, 114
Ciclo de Carnot, 637, 650-651
Ciclo de Otto, 632, 634
Ciclo Diesel, 659–660
Ciclo por segundo, 458
Ciencia, 1
Cifras significativas, 8–11
  notación científica y, 9–11
Cilindro uniforme, momento de inercia, 296
Cinc,
  calor específico molar y calor específico de, 593
  calor latente de fusión de, 596
  calor latente de vaporización de, 596
  punto de ebullición de, 596
  punto de fusión de, 596
Cinemática, 27. *Véase también* Movimiento en una dimensión
  partículas en, 28
Citicorp, Edificio, 459
Ciudades, islas de calor en, 686
Clausius, Rudolf, 609
Cloro, temperatura crítica del, 674
Cobre,
  calor específico y calor específico molar, 593
  calor latente de fusión de, 596
  calor latente de vaporización de, 596
  coeficiente de cizalladura, 411
  coeficiente de dilatación térmica de, 666
  conductividad térmica de, 676
  densidad de, 424
  módulo de compresibilidad de, 426
  punto de ebullición de, 596
  punto de fusión de, 596
  resistencia de, 410
Coche híbrido, 298
Coches de Fórmula 1, 448
Coches NASCAR, 448
Coeficiente(s),
  de absorción, 554
  de dilatación de volumen, 666–667
  de dilatación lineal, 666, 667
  de eficiencia, 635, 644
    de un refrigerador, 644
    de una bomba de calor, 644
  de reflexión, 514–515
  de restitución, 267
  de rozamiento, 129, 130, 131, 132
  de transmisión, 514–515
  de viscosidad, 446
Coherencia, 541–542
Cohete(s),
  empuje, 275
  principio del, 253
  relación empuje-peso, 286
Coincidencia(s),
  espacio-temporal, R-7
  invariancia de, R-7
Colisión frontal, 269–271
Colisión protón–protón, 271
Colisiones, 255–273
  cambios de entropía para, 649
  de dos discos, 342–343
  de dos pulsos de onda, 534–535
  elásticas. *Véase* Colisiones elásticas
  en el sistema de referencia del centro de masas, 271–273
  fuerza media, 255–260

Colisiones (*continuación*)
impulso, 255–260
inelástica. *Véase* Colisiones inelásticas
perfectamente inelásticas. *Véase* Colisiones perfectamente inelásticas
teorema impulso–momento lineal, 256
velocidades relativas de aproximación y separación, 265
Colisiones elásticas, 255, 272–273
de un neutrón y un núcleo, 266
en dos y tres dimensiones, 269–271
en una dimensión, 264–267, 272–273
velocidades relativas, 265
Colisiones en dos y tres dimensiones, 267–271
elástica, 269–271
inelástica, 268–269
no frontal, 269–271
Colisiones en una dimensión, 260–267
coeficiente de restitución, 267
elástico, 264–267, 272–273
frontal, 264–267, 271
perfectamente inelástica, 260–264
Colisiones frontales, 264–267, 271
pérdida de energía, 266
Colisiones inelásticas, 255, 271, 342. *Véase también* Colisiones perfectamente inelásticas
en dos y tres dimensiones, 268–269
en una dimensión, 260–264
Colisiones perfectamente inelásticas, 255, 271, 342
cambio de entropía para, 649
en una dimensión, 260–264
Combustión, tipos de, 277
Componentes de un vector, 17–19
Compresibilidad, 426
Compresión,
de un gas, adiabática cuasiestática, 615–618
isobárica, 603
isoterma, 604
Condensación, 673
Condición de onda estacionaria, 543, 544
Condiciones estándar de temperatura y presión, 572
Condiciones iniciales, 48
Conducción, 674, 675–682
corriente térmica en, 675–676, 678
factor R, 680–681
gradiente de temperatura y, 675
resistencia térmica en, 676–682
Conductividad térmica, 675, 682
Conductor(es), 677
Conservación de la energía, 3, 201, 219–227
calor y, 220
en relatividad especial, R-12–R-13
energía química y, 226–227
ley de, 219–220
masa y, 228–231
rozamiento cinético y, 221–225
teorema trabajo-energía cinética, 220–221, 222
Conservación de la energía mecánica, 209–219, 314
aplicaciones, 210–216
definición, 209
ley de, 249
Conservación del momento angular, 331, 341–350
enunciado, 341
ley de áreas iguales y, 365
péndulo balístico, 347
segunda ley de Newton y, 348–349
Conservación del momento lineal, 249–253
componentes del momento lineal, 249
en colisiones. *Véase* Colisiones
en la propulsión de cohetes, 273–277
en relatividad especial, R-12–R-13
hallar velocidades utilizando, 249
ley de, 249
Constancia de la velocidad de la luz, R-3–R-4
Constante,
de amortiguamiento, 478–479
de Boltzmann, 569, 675n
de fase, 459
de un oscilador forzado, 484
de fuerza (k), 102
de la gravitación universal, 367, 367
medida, 369–370
de Stefan, 683
de tiempo, 478
de torsión, 474
universal de los gases (R), 499, 570
Contacto, área microscópica de, 128
Contacto térmico, 564
Convección, 578, 675, 683
UHI, 686
Cornell, potencial de, 243n
Corriente eléctrica, unidades en el SI, 4
Corriente térmica, 675–676
cálculo, 678
Corteza esférica, campo gravitacional generado por, 381
cálculo por integración, 384–385
Cráter del meteorito Barringer, 284
Cristales,
líquidos, 584
Cuantización,
de la energía, 231–232, 612–613
del momento angular, 350–352
Cuanto, 201, 232
Cubeta de ondas, 509
Cuencas de sedimentos, y resonancia de terremotos, 524
Cuerdas, 103–104
ondas estacionarias en, 542–547
Cuerpo elástico, 409
Cuerpo estándar, 4
Cuerpo libre, diagrama, 104–109
Cuerpo negro, 683–685
Cuerpos uniformes, momento de inercia de, 295–296
Cúmulo globular, 394
Curie, Marie, 3
Curie, Pierre, 3
Curvas de distribución espectral, 684–685
Curvas de resonancia, 482
Curvas peraltadas, movimiento a lo largo de, 144–146

Da Vinci, Leonardo, 655
Datos terrestres, tabla, contracubierta delantera
Daytona International, autopista, 127
Deca, prefijo, 5
Desaceleración, 35, 36
Deci, prefijo, 5
Decibelios (dB), 511
Deflagración, 277
Deformación, 409–411
Deformación por cizalladura, 411
Deformaciones, fuerzas no conservativas en, 219
Densidad,
cálculo, 425
de estados, 583
de fluidos, 424–425
definición, 424
dimensiones de, 8
fuerza ascensional y, 432–433
media, 424
Densidad media, 424
Derivada parcial, 501
parciales, 501
Descomposición de un vector en sus componentes, 18
Desintegración radiactiva, 253
Deslizamiento, 101–102
con rodamiento, 314–315
Desplazamiento, 14, 17, 27, 28–29, 309
angular, 291, 309
distancia recorrida frente a, 28–29
Desplazamiento angular, 291, 309
Desviación, ángulo de, 270
Desviación estándar, 581–582
Detonación, 277
Deuterón, 229
energía en reposo del, 228
Diagrama de niveles energéticos, 232
Diagrama *ST*, del ciclo de Carnot, 651
Diagramas de cuerpo libre, 104–109
fuerza centrípeta y, 142
Diagramas de fase, 673–674
Diagramas de movimiento, 37
Diagramas *PV*, 603–606
Diamante
coeficiente de dilatación térmica, 666
módulo de compresibilidad, 426
Difracción
de ondas, 517–518
Dilatación térmica, 666–670
agua y, 667–668
coeficiente de dilatación de volumen, 666, 667
coeficiente de dilatación lineal, 666, 667
Dimensiones,
de aceleración, 8, 35
de magnitudes físicas, 7–8
Dina, 5
Dinámica, 27
Dinámica computacional de fluidos (CFD), 448
Dióxido de azufre, temperatura crítica del, 674
Dióxido de carbono,
calor latente de fusión de, 596
calor latente de vaporización de, 596
capacidad calorífica molar de, 607
modos de vibración de, 610
punto de ebullición de, 596
punto de fusión de, 596
temperatura crítica de, 674

Dióxido de carbono (*continuación*)
temperatura del punto triple y presión de, 674
Dirección centrípeta, 79
Dirección tangencial, 79
Discos,
colisión de dos, 342–343
momento de inercia de un disco uniforme, 296
Discos de Euler, 362
Dispersión, 552–554
Disponibilidad selectiva, 82
Distancia,
condición de no deslizamiento, 310
desplazamiento frente a, 28–29
Distancia de frenado, 40–41
Distribución de energías de Maxwell–Boltzmann, 583
Distribución de Maxwell–Boltzmann, 582–583, 590
Distribución de velocidades de Maxwell–Boltzmann, 582
Distribución normal, 582
División, cifras significativas de, 9
Dulong-Petit, ley de, 611, 625

Eco, arquitectura acústica, 554
Ecolocalización, 57, 518
Ecuación de continuidad, 439, 443
Ecuación de estado, 570
Ecuación de ondas, 497, 500–503
de una cuerda tensa, 501
superposición y, 535–536
Ecuación de Van der Waals, 570
Ecuación del cohete, 275
Ecuaciones cinemáticas para aceleración constante, 37–47
deducción de, 49
Ecuaciones con aceleración angular constante, 309
Ecuaciones con aceleración constante, 309
Eddington, Arthur, 386
Edge, R. D., 320
Efecto Doppler, 390, 518–523
definición, 518
ondas de choque, 522–523
relativista, 521–522
sistema de referencia en movimiento y, 519
Efecto honda, 287
Efecto Venturi, 442–445
Einstein, Albert, 3, 228, 232n, 386, R-1, R-3. *Véase también* Relatividad; Relatividad especial
Eje,
semieje mayor, 364, 365
semieje menor, 364
Eje de simetría, 335
Eje *z* (eje de rotación), 335
Ejes de coordenadas, unidos a sistemas de referencia, 66
Elatérido, 59
Electromagnetismo, 2
Electrón(es), 51, 95, 352, 362
deslocalizados, 674n
energía en reposo del, 228
espín, 352, 362
movimiento del, 42
Electrones deslocalizados, 674n
Electronvolt (eV), 174–175, 177
Elipse, 364
Emisividad, 683
Empuje, de un cohete, 275
Energía. *Véase también* Energía cinética; Energía potencial; Energía relativista
clasificación de órbitas, 375–378
conservación de. *Véase* Conservación de la energía
cuantización de la, 231-232, 612-613
cuantizada, 612–613
cuanto de, 201
de ondas sonoras, 508
de un satélite, 377–378
de un sistema, total, 209
de una molécula diatómica, 232
definición, 176
del movimiento armónico simple, 465–468
dimensión de la, 8
disipada por rozamiento, 222
electromagnética, 233
en reposo, R-14, 228
enlace, 229, 230, 376
entropía y energía utilizable, 652–653
estado fundamental, 232
interna (reposo), 228, 231, 592, R-14
masa y, 228–231
potencia y, 186–188
química, 201, 219, 226–227
radiación, 219
rotacional, 232n
solar, 629, 641
térmica, 176, 201, 219, 221, 226, 592
transferencia mediante ondas en una cuerda, 505–507
unidades SI de, 593
Energía cinética, 201
conversión a energía electromagnética, 233
de traslación, 190–192
de un neutrón, 287–288
de una molécula, 575–576
de una molécula diatómica, 609–610
definición, 176
del sistema, 254–255, 297–298
en el movimiento armónico simple, 465, 466
potencia y, 187–188
rotacional, 292–293, 309, 310–311, 351
y velocidad, 177
Energía cinética de rotación, 292–293, 309
cuantización de, 351
total, 310–311
Energía cinética de traslación, 190–192
de una molécula, media, 575–576
Energía de enlace, 229, 230, 376
Energía de rotación, 232n, 351–352
de una molécula, 576
del átomo de hidrógeno, 614
Energía de vibración de moléculas, 576
Energía electromagnética, 233
Energía en reposo, 228, 231, 592, R-14
Energía interna (en reposo), 231, 592, R-14
de gases ideales, 601–602
de sistemas ligados, 231–232
de un sistema, 228
del gas ideal, 601–602
del sistema, 228
Energía mecánica,
conservación de. *Véase* Conservación de la energía mecánica
de un sistema, 254
del movimiento armónico simple, 465–466
fuerzas no conservativas y, 219
rozamiento cinético y, 221–225
teorema trabajo-energía para sistemas, 209
total, 209
Energía potencial, 176, 201, 202–208
de un muelle elástico, 202–203, 207–208
definición, 202, 374
del movimiento armónico simple, 465, 466
elástica (muelle), 202, 207–208
equilibrio y, 216–219
fuerza conservativa, 203–204
fuerza no conservativa, 203–204
negativa, 374
Energía potencial gravitatoria, 202, 205–207, 374–378
clasificación de órbitas, 375–378
velocidad de escape, 374–375
Energía química, 201, 219, 226–227
Energía relativista, R-13–R-15
total, R-14
Energía solar, 629, 641
Energía térmica, 176, 201, 219, 221, 226, 592
Enlace(s), en líquidos, 424
Entropía, 645–646. *Véase también* Cambios de entropía
de un gas ideal, 646
energía utilizable y, 652–653
probabilidad y, 653–654
Enunciado de Clausius del segundo principio de la termodinámica, 630, 634–637
Equilibrio. *Véase también* Equilibrio estático
energía potencial y, 216–219
movimiento general próximo al, 467–468
Equilibrio de rotación estable, 407
Equilibrio de rotación indiferente, 407–408
Equilibrio de rotación inestable, 407
Equilibrio de sedimentación, 316
Equilibrio estable, 102, 217, 218
Equilibrio estático, 102, 397–422
centro de gravedad y, 398–399
condiciones para, 398
en nanotubos de carbono, 412
en un sistema de referencia acelerado, 406–407
estabilidad de equilibrio rotacional, 407–408
fuerza neta y, 398
momento neto y, 398
pares de fuerza, 405–406
problemas intermedios, 408–409
tensión y deformación, 409–411
Equilibrio inestable, 217
Equilibrio neutro, 217
Equilibrio rotacional, estabilidad de, 407–408
Equilibrio térmico, 564–566
Equinoccios, precesión, 362
Equivalencia, principio de, 391
Equivalente mecánico del calor, 598
Erg, 5
Erosión, 132
Errores de redondeo, 149

Escala de temperatura absoluta, 568-569, 643
Escala de temperatura Celsius, 565, 568–569
Escala de temperatura Fahrenheit, 564–566, 569
Escala de temperatura Réaumur, 588
Escala de temperatura termodinámica. *Véase* Escala de temperatura absoluta
Escala de temperaturas del gas ideal, 568
Escala de temperatura Kelvin (absoluta), 568–569
Escalares, definición, 14
Esfera, campo gravitacional generado por una, 381–382
Espacio, curvatura del, 386
Espín, de un electrón, 352, 362
Estación espacial internacional (ISS), 372–373
Estado(s)
  cambio de (cambio de fase), 595–598
  densidad de, 583
  ecuación de, 570
Estado fundamental, 231–232, 359
  energía del, 232
Estampido (ondas de choque), 522–523
Estratosfera, 353
Estrella(s),
  fluctuante (bamboleante), 532
  temperatura en la superficie de las, 684
Estrellas binarias, 389, 394
Estrellas de neutrones, 88, 293, 356, 394
Etanol, densidad, 424
Éter, R-2–R-3
  sistema de referencia del, R-2–R-3
Eustaquio, trompas de, 452
Exa, prefijo, 5
Excitados, estados, 359
Expansión térmica, 666–670
Expansión isoterma, 633
  del gas ideal, 646–647
Expansión libre, 602
  de un gas ideal, 647–648, 652–654
Experimentación, 2
Exponente, 10
Extremo libre, 546

Factor de Boltzmann, 583
Factor de integración, 646n
Factor Q, 479–481
  resonancia y, 482
Factor *R*, 680–681
Factores de conversión, 6–7
Fahrenheit, Daniel, 565n
Fase,
  cambios de, 592n, 595–598
  de una onda armónica, 504
  del movimiento armónico simple, 459–460
Fase de admisión, 631
Femto, prefijo, 5
Fermi, Enrico, 12
Fermi National Accelerator Laboratory, 51
Fermiones, 352
Fibras de carbono, 412
Filosofía natural, 2
Física, naturaleza de la, 2–3
Física clásica, 2
Física moderna, 3
  fisión, 229
  fusión, 229, 230
Fisión, 229
Fluidos, 423–456
  densidad de, 424–425
  ecuación de Bernoulli, 440–445
  efecto Venturi, 442–445
  en movimiento, 438–447
  flujo estacionario, 439
  flujo laminar, 446–447
  fuerza ascensional, 432–438
  ideal, 440
  ley de Torricelli, 441–442
  ondas sonoras en, 498
  presión en, 425–431
  principio de Arquímedes, 432–438
  viscosidad de, 493
Flujo. *Véase también* Bernoulli, ecuación de; Fluidos
  estado estacionario, 439
  laminar, 446–447
  línea de corriente, 440
  resistencia al, 445–447
  sanguíneo, 439, 445–446, 447
  turbulento, 438–439, 447
  viscoso, 445–447
Flujo de corriente, 440
Flujo de masa, 439
Flujo estacionario, 439
Flujo laminar, 446–447
Flujo sanguíneo, 439, 447
  resistencia al, 445–446
Flujo turbulento, 438–439, 447
Flujo viscoso, 445–447
Foco frío, 633, 634, 637, 643
Focos de la elipse, 364
Focos térmicos, 632, 634, 637, 642–643
Forma fuerte de la tercera ley de Newton, 358
Formas de ondas, 551
  análisis armónico, 551–552
Fosforescencia, 584
Fotones, 232, 352, 359
  intercambio de, 95
Foucault, Leon, 470
Fourier, J.B.J., 551–552
Franklin, Benjamin, 563
Frecuencia(s), 232
  angular, 460, 471
  de colisión, 578
  de resonancia, 482, 542–544, 546
  fundamental, 542
  natural, 482, 544
  resonantes, 542–544
Frenado antibloqueo (ABS), 138–139
Frenos, antibloqueo, 138–139
Frente de onda, 509, 517
Fuentes incoherentes, 541–542
Fuerza(s), 14, 309
  acción a distancia, 95, 96
  ascensional, 432–438
    densidad y, 432–433
    neutra, 453
  central, 371
  centrípeta, 142
  combinación, 96
  conservativa, 203–204, 209, 469
  de acción a distancia, 95, 96
  de arrastre, 139–141, 438, 448
  de atracción molecular, 102
  de cizalladura, 411
  de contacto, 101–104
    cuerdas, 103–104
    definición, 95
    ley de Hooke, 102
    muelles, 102–103
    sólidos, 101–102
  de rozamiento, 102
  de tensión, 505–506
  definición, 95
  dimensión, 8
  eléctrica, 95
  electromagnética, 95, 96
  externa, 155
  función energía potencial, 217–218
  gravitatoria (peso), 95, 96, 99–101
  impulsiva, 255–260
  interacción débil, 95, 96
  interacción nuclear fuerte (fuerza hadrónica), 95, 96
  interna, 154–155
  leyes de Newton del movimiento y, 95–96
  línea de acción, 302
  magnética, 95
  media, 255–260
    estimación, 256–257
    impulso y, 256
  medidas y, 158
  momento lineal y, 248
  neta, resultante, 96
  no conservativa, 203–204, 219
  normal, 101, 102
  pares de, 405–406
  posición y, 179
  recuperadora lineal, 458
  sobre un péndulo simple, 471
  tensión, 505–506
  tensora, 409
  unidad SI de, 96
  unidades fundamentales, 5–6
  viscosa, 445–447
Función de onda(s), 497
  armónicas, 502, 504
  estacionarias, 546–547
  ondas electromagnéticas, 508
Funciones de distribución, 579–582
Funciones energía potencial, 204–208
  asociadas con fuerzas elásticas, 207–208
  asociadas con fuerzas gravitatorias, 205–207
  definición, 204–205
  fuerza y, 217–218
Fusión,
  calor latente de, 596
  nuclear, 229, 230

Galaxias, cúmulo de, 386
Galileo Galilei, 2, 3, 86, 92, 93, 94, 370, 592
Galle, John, 394
Gamgee, John, 655
Gamma, rayos, 508
Gas(es)
  calentado isométricamente, 604
  capacidades caloríficas de, 606–610
  compresibilidad de, 426
  compresión adiabática cuasiestática de, 615–618
  diagramas *PV* de estados de, 603–606

Gas(es) (*continuación*)
diatómico(s), 607, 609–610, 611–613, 614
diluido(s), 571, 574
ecuación de van der Waals para, 670–673
enfriado isobáricamente, 604
expansión libre de, 602
ideal. *Véase* Gas ideal,
ondas sonoras en, 499
presión ejercida por, 575
relación presión-altura, 430–431
rotación de, 613–614
teoría cinética de, 574–583
trabajo realizado por, 602–603
trabajo realizado sobre, 603–604, 605–606
Gas ideal, 570
ciclo de Carnot del, 638–639
contracción libre del, 653
curva adiabática del, 615–618
energía interna del, 601–602
entropía del, 646
expansión isoterma del, 633, 646–647
expansión libre del, 647–648, 652–654
isotermas del, 572
módulo de compresibilidad del, 618
trabajo realizado por el, 602–603
trabajo trealizado sobre el, 603–604, 605–606
volumen del, 572
Gases diluidos, 571, 574
Gasolina, densidad, 424
Gay-Lussac, Joseph, 569
Geometría, fórmulas de trigonometría, contracubierta trasera
Georgia Tech Research Institute, 448
Giga, prefijo, 5
Giróscopo, 339–340
Glicerina, coeficiente de viscosidad de, 446
Globo de aire caliente, 563
Gluones, 95
Goddard, Robert, 279
Goebel, Timothy, 356–357
Golf, bola, colisión, 247, 259–260
Golpe de kárate, 257
Golpe de potencia, 631
Gradiente de temperatura, 675
Grados de libertad, 577, 609
Grafito, 412
coeficiente de dilatación térmica del, 666
Gramo, 5
Granjas eólicas, 233
Grasa, corporal, 435–436
Gravedad, 43, 363–396
aceleración debida a, 71
centro de, 302–303, 398–399
específica, 424–425
leyes de Kepler y, 364–366, 370–373
momento debido a la, 302–303
variación de, 363
Gravedad específica, 424–425
Gravitación universal,
constante. *Véase* Constante de la gravitación universal
Gravitones, 95
Grecia antigua, 2
Grúas, 397
Grúas de construcción, 397
Guía de ondas, 51
Hadrones, 95
Hadrónica, fuerza (interacción nuclear fuerte), 95, 96
Heathrow International Airport, 193
Hecto, prefijo, 5
Heinlein, Robert, 392
Helio, 613
a alta densidad, 672
calor latente de fusión, 596
calor latente de vaporización del, 596
capacidad calorífica molar del, 607
punto de ebullición del, 596
punto de fusión del, 596
temperatura crítica del, 674
Heliostatos, 641
Heliox, 570
Hemisferio oeste, mapa de gravedad, 363
Herschel, William, 394
Hertz (Hz), 458
Hidrógeno,
capacidad calorífica del, 612–613
capacidad calorífica molar del, 607
diatómico, 607, 612–613
energía de rotación del, 614
masa del, 573
pesado (deuterio), 229
temperatura crítica del, 674
velocidad del, 583
Hielo. *Véase también* Agua,
calor específico y calor específico molar del, 593
coeficiente de dilatación térmica del, 666
conductividad térmica del, 676
densidad del, 424
Hieron II, rey, 432
Hierro,
conductividad térmica del, 676
densidad del, 424
módulo de cizalladura, 411
módulo de compresibilidad del, 426
resistencia, 410
Hooke, ley de, 102, 409, 458
para fuerzas de contacto, 102
para tensiones de torsión, 411
trabajo realizado por un muelle que obdece la ley de, 180–182
Hoover Dam, 237
Hormigón,
conductividad térmica, 676
resistencia, 410
Howard, Luke, 686
Hubble, ley de, 57
Hubble, telescopio espacial de, 250, 331, 344–345
Huecos de Kirkwood, 390
Hueso,
densidad del, 424
tensión del, 410
Hypersonic XLC, 114

Icarus (asteroide), 390
Igualdad, vectorial, 20
Impulso, 247, 248
de una colisión, 255–260
y fuerza media, 256
Impulso específico, 286
Incertidumbre experimental, 8
Inercia, 94
ley de, 94–95
momento de. *Véase* Momento de inercia
y masa, 96
Ingenieurbuero Stengel GmbH, 193
Ingravidez, 100, 369
Instrumentos musicales, 462, 545, 548–550, 551–552
Integración, 47–50
cálculo de la velocidad a partir de la aceleración, 47–48
cálculo del centro de masas, 153–154
problemas de condiciones iniciales, 48
Integración numérica, 147–149
Integral,
definición, 48
indefinida, 49
tabla de, M-28–M-30, contracubierta trasera
Intensidad
de una onda tridimensional, 510
debido a una fuente puntual, 510
nivel de, 511–513
onda, 510–513
unidades del SI, 510
y sensación sonora, 511–513
Intensidad luminosa, unidades en el SI, 4
Interacción electrodébil, 95
Interacción nuclear fuerte (fuerza hadrónica), 95, 96
Interacción o fuerza nuclear débil, 95, 96
Interferencia
batidos o pulsaciones y, 537–538
coherencia y, 541–542
constructiva, 537
de ondas armónicas, 536–542
destructiva, 537
diferencia de fase y, 539–541
Invar, coeficiente de dilatación térmica de, 666
Invariancia de coincidencias, R-7
Io (luna), 273
Iota Draconis, 390
Islas urbanas de calor, 686
Isotermas, 572
líquido–vapor, 670–673
Isotermas líquido–vapor, 670–673
Jefferts, Steve, 4

Joule (J), 174, 177
Joule, James, 2, 592, 593, 598, 601–602
Juntas de dilatación, 669

Kelvin (K), 4
Kelvin (máquina térmica) enunciado del segundo principio de la termodinámica, 630–634, 636–637
Kepler, Johannes, 93, 364–366, 367, 390
Kilo, prefijo, 5
Kilocaloría, 593n, 627
Kilogramo (kg), 4, 96
Kilowatt-hora (kW·h), 187
Kirkwood, huecos de, 390
Korsunsky, Boris, 161
Kriptón, capacidad calorífica molar del, 607

Ladrillo, densidad, 424
Lámina, 446
Láseres, 196

Latón,
coeficiente de dilatación de térmica, 666
módulo de cizalladura, 411
módulo de compresibilidad, 426
tensión del, 410
Lentes gravitacionales, 386
Leptones, 51, 95
LeVerrier, Urbain, 394
Ley de la gravitación de Newton, 363, 367–373
definición, 367
masa gravitatoria e inercial, 370
naturaleza del inverso del cuadrado, 367–368, 371
leyes de Kepler y, 364, 371–372
medida de G, 369–370
Ley de las áreas iguales, 365, 371
Ley de los gases ideales, 569–574
presiones parciales, 570–574
Ley de Stefan-Boltzmann, 683
Ley de Torricelli, 441–442
Ley del desplazamiento de Wien, 684
Ley del enfriamiento de Newton, 675, 685
Leyes de Kepler, 364–366
deducción de, 370–373
segunda, 361
tercera, 25
Leyes del movimiento de Newton, 93–172
a lo largo de un un trayectoria curva, 141–146
aplicaciones a problemas con dos o más cuerpos, 111–114
centro de masas, 149–157
diagramas de cuerpo libre, 104–109
fuerza, 95–96
fuerzas de arrastre, 139–141
fuerzas de contacto, 101–104
masa, 5–6, 96–98, 309
primera ley (ley de inercia), 94–95
principio de Arquímedes, 432
rozamiento, 94, 128–139
segunda, 96, 97–99, 104–109, 155, 231, 248, 273, 301–309, 336–337, 339, 348–349
sistemas de referencia inerciales, 94–95
tercera, 109–111, 341, 358
Libra (lb), 97
Libra-fuerza, 5
Límite elástico, 409–410
Límite lineal de un medio, 409, 534
Línea de acción de una fuerza, 302
Líneas de corriente, 438, 440, 442–445
perfil aerodinámico y, 443–444
presión a lo largo de, 444–445
Líquidos, compresibilidad de, 426
Litro (L), 11, 424
Longitud,
como dimensión, 7
contracción de, R-8–R-9
del día (LOD), 353
unidades en el SI, 4
Longitud de onda, 503
Longitud en reposo (propia), R-5
Luna,
atmósfera, 375
distancia a la, 6
velocidad de escape, 375
Luz, 508
cuantización de, 3
curvada, 386
desplazamiento Doppler, 522
difracción, 517
velocidad, 4, 56, R-3–R-4

Macdonald Observatory, 6
Madera, densidad, 424
Magnitud,
cantidades con, 14. *Véase también* Vector(es)
orden de, 12–13
Magnitudes físicas, 3. *Véase también* Medidas
dimensiones de, 7–8
Mancha solar, 569
Manómetro, tubo abierto, 429
Mapa de la gravedad, 363
terrestre, 380–381
Máquina(s), trabajo perdido por, 642–643
Máquina de Atwood, 124, 239, 338–339
Máquina de Carnot, 637–643
Máquina de Stirling, 659
Máquina reversible, 637
Máquinas de vapor, 630–631, 632
rendimiento de, 641
Máquinas simples, 197
Máquinas térmicas, 629, 630–631
de combustion interna, 631–632
de vapor, 630–631, 632
enunciado del segundo principio de la termodinámica (Kelvin), 630–634, 636–637
rendimiento de, 632, 633–634
representación esquemática de, 632
segundo principio de la termodinámica y, 630–634, 636–637
trabajo realizado por, 633
Mareas, 95
Masa(s), 5–6, 96–98, 309
centro de. *Véase* Centro de masas,
comparación, 98
de partículas atómicas, 228
de un objeto astronómico, 373
del átomo de hidrógeno, 573
descripción cuantitativa de, 98
dimensiones, 7
en reposo, R-13n
energía y, 228–231
gravitatoria, 370
inercial, 370
en "ingravidez", 460
molar (molecular), 573
movimiento del péndulo, 471
peso frente a, 100
relativista, R-12–R-13
segunda ley de Newton y, 97
sistemas de masa variable, 273–276
suspendida, 479
unidades en el SI, 4, 96
Matemáticas, fórmulas, contracubierta trasera
Materia oscura, 386
Material elástico, límite lineal, 534n
Materiales para la construcción, factores R, 681
Maxwell, James Clerk, 2
Mecánica, definición, 27
Mecánica cuántica, 3
Mecánica newtoniana (no relativista), 231
Mecánica ondulatoria, 3
Medida del tiempo, 21
Medidas, 3–14
cifras significativas, 8–11
dimensiones de magnitudes físicas, 7–8
fuerzas y, 158
incertidumbre en, 8
notación científica y, 9–11
orden de magnitud, 12–13
unidades de, 3–7
Medidor de presión, 429
Medio,
dispersivo y no dispersivo, 553
límite proporcional de, 409, 534
Meekhof, Dawn, 4
Mega, prefijo, 5
Megabyte (MB), 24
Mercurio (elemento),
calor específico y calor específico molar del, 593
calor latente de fusión del, 596
calor latente de vaporización del, 596
coeficiente de dilatación térmica del, 666
densidad del, 424
módulo de compresibilidad del, 426
punto de ebullición, 596
punto de fusión de, 596
Método de Euler, 147–149
Método del paralelogramo, 16
Métodos de transporte de equipaje, 193
Metro (m), 4
Michelson, Albert, R-2–R-3
Micro, prefijo, 5
Microlentes, 386
Microondas, 508
tecnología, 51
Microscopio de barrido por efecto túnel (STM), 24
Mili, prefijo, 5
Milibar, 430
Mimas (luna), 390
Misión Grace, 363
Modo de vibración, 542
Modo fundamental de vibración, 542
Modos de vibración del dióxido de carbono, 610
Módulo de cizalladura (módulo de torsión), 411
Módulo de compresibilidad, 426, 498n
adiabático, 499, 618
del gas ideal, 618
isotermo, 499n, 618n
Módulo de compresibilidad isoterma, 499n, 618n
Módulo de la velocidad,
angular, 290, 340
condición de no deslizamiento, 310
cuadrática media, 576
de acercamiento, 265, 267
de escape, 374–375
de la luz, 4, 56, R-3–R-4
de ondas, 497–500, 502–503
de recesión, 267
de separación, 265
de un objeto oscilante, 467
del sonido, 562, 618

Módulo de la velocidad (*continuación*)
dimensiones, 7, 8
energía cinética y, 177
instantánea, 32–35
más probable, 582
media, 29–32
moléculas de hidrógeno, 583
terminal, 56, 140–141
Módulo de la velocidad angular, 290
Módulo de la velocidad instantánea, 32–35
Módulo de torsión (módulo tangencial), 411
Módulo de Young, 409–410, 669
para nanotubos, 412
Módulo elástico, 410
Moiré, diagrama de, 557
Mol, 4, 570
Molécula de metano, 322
Moléculas,
análisis con ultracentrifugadoras analíticas, 316
colisiones elásticas entre, 264
digrama de niveles de energía, 351
distribución de energía, 583
distribución de velocidades, 579–583
emisión de cuantos de luz, 359
en líquidos, 424
energía cinética traslacional media, 575–576
estados energéticos, 359–360
recorrido libre medio, 578–579
velocidad cuadrática media, 576
velocidad de escape de, 375
Moléculas diatómicas, 231–232, 499, 607, 609–610, 611–613, 614
capacidad calorífica molar, 607
energía cinética, 609–610
Molino de viento, 233
Momento, 309. *Véase también* Momento angular; Momento lineal
relativista, R-12–R-13
Momento angular, 248, 309, 331–362
atmosférico, 353
conservación. *Véase* Conservación del momento angular
cuantización, 350–352
de espín, 337, 349–350
de una partícula, 352
de sistemas ligados, 350
de un sistema de partículas, 335–338, 349–350
de una partícula, 334–335, 337–338, 348, 351
definición, 334–335
del giroscopio, 339–340
ecuación impulso angular–momento angular, 337
momento y, 334–340
orbital, 337, 349–350, 351–352
respecto a un eje, 337–338, 350
respecto del origen, 336
segunda ley de Newton, 336–337, 348–349
unidad fundamental, 351
Momento de fuerza, 301–303
cálculo, 302
como producto vectorial, 332
de un giroscopio, 339–340
de un par de fuerzas, 405
debido a la gravedad, 302–303
dirección de, 332
expresiones equivalentees de, 302
momento angular y, 334–340
potencia, 308
respecto a un eje, 337, 350
respecto a un punto, 337
tercera ley de Newton y, 341
trabajo realizado por, 307–308
Momento de inercia, 293–300, 309
cálculo, 294–300
de cuerpos homogéneos con diferentes formas, 295–296
de un sistema discreto de partículas, 293–294
definición, 293
estimación, 294
para cuerpos continuos, 294–296
teorema de los ejes paralelos, 297–300
Momento lineal, 198, 247–288. *Véase también* Colisiones
como magnitud vectorial, 248
conservación de. *Véase* Conservación del momento lineal
de un sistema, 248–249, 271, 288
definición, 248
fuerza y, 248
unidades en el SI, 248
Momento relativista, R-12–R-13
Monóxido de carbono, capacidad calorífica molar de, 607
Montacargas, 198
Montañas rusas, 114, 193
Morley, Edward, R-2–R-3
Morse, potencial de, 495
Motor de combustión interna, 631–632
Motor Diesel, 627
Motores de detonación por pulsos, 277
Motores de inducción lineal (LIMs), 193
Movimiento. *Véase también* Leyes del movimiento de Newton; Oscilaciones; Rotación; Movimiento armónico simple
absoluto, 522
amortiguado, 477
amortiguamiento crítico, 477
de un electrón, 42
del centro de masas, 154–157
fluidos en, 438–447
leyes de, 2
lineal, 308–309
perpetuo, 655
planetario, 364–366
rectilíneo, 179–182
sobreamortiguado, 477, 479
subamortiguado, 477–478, 481
Movimiento a lo largo de una trayectoria curva, 141–146
curvas peraltadas y no peraltadas, 144–146
fuerza centrípeta, 142
teorema trabajo-energía cinética para, 188–189
Movimiento amortiguado crítico, 477
Movimiento armónico simple, 458–468
aceleración, 459
amplitud del, 458–459, 462, 466
cerca del equilibrio, 467–468
ciclo, 458
condiciones para, 458
definición, 458
energía, 465–468
fase del, 459–460
frequencia del, 458, 460, 462
movimiento circular y, 464–465
periodo de, 458, 459, 462
posición del, 458
velocidad del, 459
Movimiento circular, 78–81
movimiento armónico simple y, 464–465
periodo, 80
tangencial, 81
Movimiento circular uniforme, 79–81
Movimiento de proyectiles, 71–78
alcance horizontal, 72, 75–77
altura, 376
en forma vectorial, 77–78
independencia de las componentes vertical y horizontal del, 71–72
módulo de la velocidad, 377
Movimiento en dos y tres dimensiones, 63–92
movimiento circular. Véase Movimiento circular
movimiento de proyectiles. Véase Movimiento de proyectiles
vectores aceleración, 68–71
vectores posición y desplazamiento, 64
vectores velocidad, 64–66
velocidad relativa, 66–67
Movimiento en una dimensión, 27–62
aceleración, 35–47
desplazamiento, 14, 17, 27, 28–29, 291, 309
integración para obtener las ecuaciones del, 47–50
posición, 28–29
velocidad instantánea y módulo de la velocidad instantánea, 32–35
velocidad media y módulo de la velocidad media, 29–32, 39–40, 50, 64
Movimiento en zigzag, 63
Movimiento lineal, movimiento de rotación y, 308–309
Movimiento sobreamortiguado, 477, 479
Movimiento subamortiguado, 477–478, 481
Muelle (elástico) energía potencial, 202–203, 207–208
Muelle (fuerza) constante elástica o recuperadora (k), 102
Muelle(s), 102–103
de papel, 469
objeto colgado de un muelle vertical, 468–470
oscilación de un objeto, 458, 460, 462, 464, 465
trabajo hecho por, 180–182
Multiplicación,
cifras significativas de, 9
vectores, escalar, 17, 20
Muones, 95, R-18

Nano, prefijo, 5
Nanotubos de carbono, 412
National Institute of Standards y Technology (NIST), 4
National Physical Laboratory, 21

Neón,
capacidad calorífica molar del, 607
temperatura crítica del, 674
Neptuno, 394–395
Neutrinos, 51
Neutrones, 51, 95, 352
colisiones elásticas con núcleos y, 266
energía cinética de, 287–288
energía en reposo, 228
Newton (N), 96
Newton, Isaac, 2, 3, 93, 94, 96, 162, 248, 367, 370, 592,
Nitrógeno,
calor latente de fusión del, 596
calor latente de vaporización del, 596
capacidad calorífica molar del, 607
líquido, 583
punto de ebullición del, 596
punto de fusión del, 596
Niveles de energía, rotacional, 351–352
Nodos, 543
Normalización, condición o constante de, 580, 581
Notación científica, 9–11
Nuclear fuerte, interacción (hadrónica), 95, 96
Núcleo(s), colisión elástica con un neutrón y, 266
Número cuántico, 232
Número de Avogadro, 11
Número de Mach, 523
Número de onda, 504
Número de Reynolds, 447
Nutación, 340

O'Neill, Gerard, 171
Objetos macizos de halo compacto, 386
Oficina de Patentes Británica, 655
Oficina de Patentes de los USA, 655
Oficina Internacional de Pesos y Medidas, 4, 21
Oído humano, 510–511
batidos o pulsaciones detectadas por el, 538
Ojo de Londres, 289
Onda(s), 495–562. *Véase también* Función de onda(s)
armónicas, 502, 503–508, 536–542
interferencia, 536–542
de choque, 522–523
de densidad, 508
de gravedad, 498
de presión, 508
de radio, 508
de superficie, 498
diferencia de fase, 539–541
difracción de, 517–518
efecto Doppler, 518–523
electromagnéticas, 495, 508–509, 521, 675
en tres dimensiones, 509–513
en una cuerda, 500
estacionarias. *Véase* Ondas estacionarias
gravitatorias, 498
intensidad de, 510–513
lineal, 509
longitudinales, 496
mecánicas, 496
onda de choque, 522–523
partículas frente a, 517
periódicas, 503–509
armónicas, 503–508
electromagnéticas, 508–509
planas, 509, 517
pulsos de onda, 496–497
reflexión de, 513–516
sísmicas, 524
sonoras. *Véase* Ondas sonoras
superficiales, 498
transmisión de, 513–516
transversales, 496
ultrasónicas, 495, 518
velocidad de, 497–500, 502–503
Ondas estacionarias, 542–550
condiciones necesarias para, 547
definición, 542
en cuerdas fijas por ambos extremos, 542–545
en cuerdas fijas por un extremo y el otro libre, 546
en una habitación, 554
funciones de onda de, 546–547
ondas sonoras, 548–550
resonancia de, 543–544
superposición de, 550–551
Ondas sonoras, 496, 502–503, 517, 518, 522–523, 548–550, 551–552, 618
análisis armónico, 551–552
armónicas, 507–508
barrera del sonido y, 522–523
difracción, 517
energía, 508
estacionarias, 548–550
reflexión, 516
ultrasonidos, 518
velocidad, 562, 618
Orbital, momento angular, 337, 349–350
Órbitas,
clasificación por energía, 375–378
planetaria, 364–366
Orden de magnitud, 12–13
Oro,
calor específico y calor específico molar del, 593
calor latente de fusión del, 596
calor latente de vaporización del, 596
conductividad térmica del, 676
densidad del, 424
punto de ebullición del, 596
punto de fusión del, 596
Oscilaciones, 232, 457–495
de un objeto en un muelle vertical, 468–470
del puente del milenio, 486
frecuencia natural de, 482
gran amplitud, 473–474
movimiento armónico simple, 458–468
oscilador de torsión, 474
péndulo físico, 474–477
péndulo simple, 470–474
Oscilaciones amortiguadas, 477–481
amortiguamiento débil, 478, 480, 481, 482
ecuación diferencial para, 478
factor Q, 479–481, 482
movimiento subamortiguado, 477–478, 481
movimiento sobreamortiguado, 479
Oscilaciones forzadas, 481–485
amplitud, 482, 484
constante de fase, 484
ecuación diferencial, 483–484
posición, 484
Oscilador de torsión, 472, 474
Osmio, densidad del, 424
Óxido de deuterio (agua pesada), 229
Óxido de nitrógeno, capacidad calorífica molar del, 607
Óxido nítrico, temperatura crítica del, 674
Oxígeno,
calor latente de fusión del, 596
calor latente de vaporización del, 596
capacidad térmica molar del, 607
diatómico, 613
punto de ebullición del, 596
punto de fusión del, 596
temperatura crítica del, 674

Palanca, 415
Paquetes de onda, 552–553
Par 3LN, 110
Paradoja hidrostática, 429
Parámetro de impacto, 269
Pares de fuerzas, 405–406
Parsec, 26
Partícula(s), 190
de espín un medio, 352
definición, 28
detectores de, 51
fuerza de atracción entre, 367–368
ligada, 350
momento angular de, 334–335, 337–338, 348, 351
ondas vs., 517
posición en función del tiempo, 33–34
puntos fuente, 378
teorema impulso-momento lineal, 256
transmitidas, 517
Partícula inducida en emisión de Rayos X (PIEX), 51
Partículas alfa, 352
energía en reposo, 228
Partículas atómicas, masas de, 228
Partículas de espín un medio, 352
Pascal (Pa), 426
Pascal, Blaise, 428, 453
Patrón climático El Niño, 353
Pendiente, 30
velocidad y, 33
Péndulo,
balístico, 262, 347
de Foucault, 470
físico, 474–477
simple, 470–474
aceleración, 471–473
fuerzas, 471
periodo, 470, 471
torsional, 474
Peralte, ángulo de, 144
Percusión, centro de, 323
Perfil aerodinámico, 443–444, 448
Perihelio, 364, 365
Periodo, 80, 232
de un planeta, 364, 365
del movimiento armónico simple, 458, 459, 462
del oscilador de torsión, 474

Periodo (*continuación*)
del péndulo físico, 475
del péndulo simple, 470, 471
para oscilaciones de gran amplitud, 473
Perpetuo, movimiento, 655
Peso, 95, 96, 99–101
aparente, 100, 432, 433
masa frente a, 100
molecular (masa molar), 573
Peta, prefijo, 5
Phoenix, Arizona, 686
Pico, prefijo, 5
Pico de potencia, 198
Pie, 5
Pie-libra, 174, 177, 187
Pie-libra por segundo, 187
Pino blanco, coeficiente de conductividad térmica de, 676
Pión, R-8n, R-17
Pioneer 10, 116
Planck, constante de, 232, 351
Planck, Max, 232n, 684
Planeta(s),
atmósfera de, 375
fuera del sistema solar, 390
leyes del movimiento de Kepler para, 364–366
radio orbital y periodos orbitales, 364
velocidad de escape de, 375
Planetario, 364
Plata,
calor específico y calor específico molar de la, 593
calor latente de fusión de la, 596
calor latente de vaporización de la, 596
conductividad térmica de la, 676
punto de ebullición, 596
punto de fusión, 596
Plomo,
calor específico y calor específico molar del, 593
calor latente de fusión del, 596
calor latente de vaporización del, 596
conductividad térmica del, 676
densidad del, 424
módulo de cizalladura, 411
módulo de compresibilidad del, 426
punto de ebullición, 596
punto de fusión del, 596
resistencia, 410
Poise, 446
Poiseuille, Jean, 446
Polipasto, 420
Posición,
centro de masas, 150–152
fuerza y, 179
método de aproximación de Euler, 147–149
Positrón, 51, 228
energía en reposo, 228
Potencia, 307–309, 505–506
de un momento de fuerza, 308
definición, 186
dimensiones, 8
incidente, 510
intensidad de una onda, 510–513
trabajo y, 186–188
unidades en el SI, 186
Precesión, 340
de los equinoccios, 362
Precipitación, islas urbanas de calor y, 686
Prefijos, contracubierta delantera, 5
Prensa hidráulica, 428–429
Presión(es),
a lo largo de líneas de corriente, 444–445
altitud (o profundidad) y, 430–431
atmosférica, 430
de vapor, 673
definición, 425
del aire, 443–445
dimensiones de la, 8
ejercida por un gas, 575
en fluidos, 425–431
flujo viscoso y, 445
medida de, 429–430
paradoja hidrostática, 429
parciales, 570–574
definición, 570–571
ley de las, 571
profundidad y, 426–428
sanguínea, 430
unidades de, 426
Primer armónico, 542
Principia (Newton), 248
Principio cero de la termodinámica, 564
Principio de Arquímedes, 432–438
Principio de equivalencia, 391
Principio de Pascal, 428
Probabilidad, entropía y, 653–654
Problema de condiciones iniciales, 48
Problemas de Fermi, 12
Proceso cuasiestático, 602–603, 605
compresión adiabática de un gas, 615–618
Proceso reversible, 638
Procesos a presión constante, cambio de entropía, 648–649
Procesos irreversibles, 630, 638, 645
Procesos isócoros, 604n
Procesos isovolumétricos, 604n
Producto escalar, 182–188
definición, 182
derivada, 186
notación, 184–186
producto vectorial y, 334
propiedades de, 182
Producto vectorial, 332–334
definición, 332
producto escalar y, 334
Profundidad, presión y, 430–431
Propiedad asociativa de la suma de vectores, 16
Propiedad conmutativa para la suma de vectores, 16
Propiedades térmicas y procesos, 665–692. *Véase también* Calor; Transferencia de calor
diagramas de fase, 673–674
dilatación térmica, 666–670
ecuación de van der Waals, 670–673
isotermas líquido–vapor, 670–673
Propiedades termocrómicas, 584
Propiedades termométricas, 564
Propulsión de cohetes, 273–277
con motores de detonación por pulsos, 277
impulso específico, 286
Protón(es), 51, 95, 352
energía en reposo del, 228
Protuberancia de marea oceánica, 395–396
Próxima Centauro, 56
Proyectil, alcance horizontal, 72, 75–77
Puente del milenio, 486
Puente suspendido de Tacoma Narrows, 544
Pulgadas de mercurio (inHg), 430
Púlsar, 88, 356
Púlsar del Cangrejo, 88, 293
Pulsos, 552–553
colisión, 534–535
ondas, 496–497
Punto crítico, 673, 674
Punto de congelación normal (temperatura del punto del hielo), 564
Punto de ebullición, 596
Punto de ebullición normal (temperatura del punto de vapor), 565, 673
Punto de fusión, 596
Punto triple, 568, 674
Puntos de retorno, 466
Puntos fuente, 378
Puntuación cuadrática media, 580

Quarks, 51, 95
Quasar, 386

Radar, policía, 521
Radiación, 219, 675, 683–685
tratamiento del cáncer, 51
Radiación Cerenkov, 523, 531
Radiación de fondo de 2, 7 K
Radiación electromagnética / ondas, 228, 232n, 495, 508–509, 521, 675, 683
Radiactividad,
desintegración beta, 228
Radio de Schwarzschild, 394
Radio orbital medio, 365
Radioisótopos, 51
Ragone, Carlos, 56
Rayos X, 2, 508
Razón de eficiencia energética estacional (SEER), 635
Reacciones nucleares, 229
Reacciones químicas, 219
Recesión, velocidad de, 267
Recíproco de grados Celsius (1/°C), 666
Recíproco de grados Kelvin (1/K), 666
Reconstrucción de un accidente, 158
Recorrido libre medio, 578–579
Reflexión,
de ondas, 513–516
de ondas de sonido, 516
interna total, 516
Refracción, 515–516
Refrigerador (Clausius) enunciado de la segunda ley de la termodinámica, 630, 634–637
coeficiente de eficiencia, 635
Regla de Galileo de los números impares, 59
Regla de la mano derecha para determinar la dirección, 332
Relación trabajo del centro de masas–energía cinética de traslación, 190
Relaciones de Fresnel, 514

Relatividad, *Véase también* Relatividad especial
de la simultaneidad, R-10–R-11
efecto Doppler y, 521–522
energía relativista, R-13–R-15
general, 386, R-1, R-2
mecánica no relativista (Newtoniana) y, 231
principio de, R-2
sistema de referencia y, R-2
Relatividad especial, 3, 228, R-1–R-20. *Véase* Relatividad
coincidencias espaciotemporales, R-7
contracción de longitudes, R-8–R-9
dilatación del tiempo, R-5–R-6
energía y, R-13–R-15
invariancia de coincidencias, R-7
masa y, R-12–R-13
momento y, R-12–R-13
relatividad y simultaneidad, R-10–R-11
sucesos espaciotemporales, R-6–R-7
Relatividad general, 386, R-1, R-2
Religión, 1
Relojes,
de agua, 3
de cesio, 4, 21
de luz, R-5–R-6
en movimiento, R-5–R-8
mecánico, 474
péndulo, 473–474
Rendimiento,
de Carnot, 638–642, 643
de una máquina de vapor, 641
de una máquina térmica, 632, 633–634
de una turbina de viento, 233
del segundo principio, 642, 662
Rendimiento de Carnot, 638–642, 643
Rendimiento del segundo principio, 642, 662
Resistencia(s), 445–447
equivalente, 677
Resistencia a la compresión, 410
Resistencia a la tracción, 410, 412
Resistencia equivalente, 677
Resistencia térmica, 676–682
en paralelo, 678, 679–680
en serie, 677, 679
Resonancia, 460, 481–485
de ondas estacionarias, 543–544
debida a un terremoto, 524
definición, 482
del puente del Milenio, 486
para amortiguamiento débil, 482
tratamiento matemático, 483–485
Resonancia orbital, 390
Respirometría, 619
Resta,
cifras significativas de, 9
de vectores, 15–17, 20
Resultante (suma vectorial), 15
Retroceso, ángulo de, 270
Reverberación, 554
Rigidez de un muelle, 460
Ritmo metabólico, 237
Roble, coeficiente de conductividad térmica de, 676
Rodadura, 310–315
centro de masas y, 312–313
con deslizamiento, 314–315
sin deslizamiento, 310–314
Röntgen, Wilhelm, 2
Rotación, 289–362
con aceleración angular constante, 291
de un sistema de partículas, 293
de una molécula de gas, 613–614
energía cinética de, 292–293, 309, 310–311
momento de inercia, 293–300, 309
movimiento lineal y, 308–309
naturaleza vectorial de, 332–334
rodadura, 310–315
segunda ley de Newton para, 301–309, 312, 339
ultracentrifugadoras, 316
velocidad angular y aceleración, 290–291
Rozamiento, 94, 128–139, 630, 638
coches, frenos antibloqueo, 138–139
coeficiente de, 129, 130, 131, 132
de rodadura, 130, 131
teorema energía-trabajo con, 222
Rozamiento cinético, 129–130, 131, 138, 219, 221–225
coeficiente de, 129
energía disipada por, 222
Rozamiento dinámico, 130, 131
coeficiente de, 130
Rozamiento estático, 129, 131, 138
coeficiente de, 129, 131
Rueda de Falkirk, 423
Ruedas y cinturones de flotación, 655
Ruido, 511–513
Russell, Bertrand, 664
Rutherford, Ernest, 352

Sangre,
coeficiente de viscosidad de, 446
ley de Poiseuille y, 447
Santa Rosa, ciudad de, 524
Satélites,
energía de, 377–378
geosíncronos, 392
Schwartzkopf, Anton, 114
Sedimentación, 316
equilibrio, 316
Sedimentos no consolidados, 524
Segundo, 4, 5
Segundo armónico, 542
Semidesintegración, periodo de, R-17
Semieje mayor, 364, 365
Semieje menor, 364
Seres humanos, balance de energía, 619
Series armónicas, 544
Servicio Internacional de Sistemas de referencia y de la Rotación de la Tierra, 21
Sifón, 455
Símbolos matemáticos, contracubierta delantera
Simetría,
centro de, 150
Simultaneidad,
relatividad de la, R-10–R-11
Síntesis armónica, 552
Sistema(s),
balance de energía de, 619
binario, 689
centro de masas de, 149–150, 154–155
de masa variable, 273–276
energía cinética de, 254–255, 297–298
energía en reposo de un, 228
energía mecánica de un, 254
energía total de un, 209
estabilidad de, 408
ligado, 229, 231–232, 350, 376, 612
microscópico, 232
momento angular de un, 335–338, 349–350
momento de inercia de un, 293–294
momento lineal de un, 248–249, 271, 288
no ligado, 376
rotación de un, 293
segunda ley de Newton, 155, 273
teorema impulso–momento lineal, 256
teorema trabajo-energía para un, 209
trabajo realizado sobre un, 175, 202, 209
Sistema(s) de referencia, 66
acelerado, 406–407, 472–473
centro de masas, 190, 271–273
del éter, R-2–R-3
en movimiento, efecto Doppler y, 519
inercial, 94–95, R-2, R-3–R-4
laboratorio, 271
propio (en reposo), R-5
relatividad y, R-2
segunda ley de Newton para la rotación, 312
Sistema amortiguado linealmente, 477–478
Sistema CGS, 5
Sistema de coordenadas, 15
dextrógiro, 333
Sistema de coordenadas de la mano derecha, 333
Sistema de Posicionamento Global (GPS), 21, 82, R-1
Sistema de referencia acelerado, 406–407
péndulo en, 472–473
Sistema de referencia del centro de masas, 190, 271–273
Sistema de referencia del laboratorio, 271
Sistema de referencia en reposo, R-5
Sistema de referencia inercial, R-2
leyes del movimiento de Newton, 94–95
velocidad de la luz, R-3–R-4
Sistema de referencia propio (sistema en reposo), R-5
Sistema de unidades de los USA, 5–6, 100
de calor, 593
de energía, 187
de fuerza, 187
de potencia, 187
de presión, 426
de trabajo, 174
Sistema DORIS, 353
Sistema Internacional de unidades. *Véase* Sistema SI; Unidad(es) en el SI
Sistema no ligado, 376
Sistema SI, 3–5
prefijos en, 5
Sistema solar, 364–366
formación del, 390
fuera de los planetas, 390
Sistemas ligados, 229, 350, 376
cuantización de la energía en, 232
energía interna de, 231–232
energías discretas de, 612

Sobretono, 542
Sol, atracción de la Tierra al, 96
Sólido(s),
  capacidades caloríficas, 611
  compresibilidad de, 426
  fuerza de contacto entre, 101–102
  modelo de Einstein del sólido cristalino, 628
Sólido cristalino, modelo de Einstein del, 628
Sonar, 57, 518
Spoilers, 448
Stefan, constante de, 683
Stefan, Josef, 683
Steinert, Darryl, 320
Stevin, Simon, 370
Sublimación, 674
Suceso espacio-temporal, R-6–R-7
Sucesos,
  espacio-temporales, R-6–R-7
Sulfuro de hidrógeno, capacidad calorífica molar, 607
Suma,
  de vectores, 15–17, 20
  dígitos significativos en la, 9
Super-Kamiokande (Super-K) detector, 531
Supernova, 356
Superposición, 534–542
  de dos ondas de la misma amplitud y frecuencia, 537
  de ondas estacionarias, 550–551
  ecuación de onda y, 535–536
  interferencia de ondas armónicas, 536–542
  principio de, 96, 534
Superposición, principio de,
Sustancia, unidades en el SI, 4
Sustancia de trabajo, 630
Sustentación, 448
Svedberg, Theodor, 316

Tablas de integrales, contracubierta trasera
Temperatura, 564–566
  absoluta (escala Kelvin), 568–569
  capacidad calorífica molar, 612
  de Einstein, 628
  densidad y, 424
  escala Celsius, 565, 568–569
  escala centígrada y Fahrenheit, 564–566, 569
  escala de temperatura del gas ideal, 568
  escala Réaumur, 588
  interpretación molecular, 575–576
  punto de vapor (punto normal de ebullición), 565
  punto del hielo (punto normal de congelación), 564
  temperatura de punto final (TPF), 584
  trabajo y, 598–600
  unidades en el SI, 4, 568
Temperatura crítica, 613, 673, 674
Tensión, 104, 111–112
  de cizalladura, 411
    por compresión, 410
    por tracción, 409–410
Teorema de equipartición, 577–578
  capacidades caloríficas y, 609–610
  condiciones para la validez del, 612
  fallo del, 611–614
Teorema de los ejes paralelos, 297–300
  aplicación, 297
  demostración, 297–298
Teorema fundamental del cálculo, 48
Teorema impulso–momento lineal, 248, 256
Teorema trabajo-energía, 220–221
  con rozamiento, 222–225
  para sistemas, 209
Teorema trabajo-energía cinética, 176–179, 202, 220
  fuerza neta y, 177
  para trayectorias curvas, 182, 188–189
Teoría cinética de los gases, 574–583
  cálculo de la presión ejercida por un gas, 575
  distribución de velocidades moleculares, 579–583
  interpretación molecular de la temperatura, 575–576
  recorrido libre medio, 578–579
  teorema de equipartición, 577–578, 609–610, 611–614
Teoría del calórico, 592
Tera, prefijo, 5
Tercer armónicos, 542
Término cruzado, 183
Termistor, 588
Termodinámica, 2. *Véase también* Calor
  principio cero, 564
Termodinámica, primer principio de la, 600–601, 629
  violación mediante móviles perpetuos de primera especie, 655
Termodinámica, segundo principio de la. *Véase también* Entropía; Cambios de entropía
  bombas de calor, 643–644
  definición de entropía, 647, 654
  definición de refrigerador, 634–636
  enunciado de Clausius (refrigerador), 630, 634–637
  enunciado de Kelvin (máquina térmica), 630–634, 636–637
  máquina de Carnot, 637–643
  móviles perpetuos que violan la, 655
  refrigeradores y, 634–637
  sistemas microscópicos y, 654
Termograma, 684
Termómetro de gas a volumen constante, 567–568
Termómetros, 564–566
  de cristal líquido, 584
  de gas, 566–569
  fluorescente, 584
  moleculares, 584
Terremoto, resonancia, 524
Terremoto de San Francisco (1906), 524
Tiempo, 5
  como dimensión, 7
  dilatación del, R-5–R-6
  unidades en el SI, 4
Tiempo de colisión, 578
Tiempo propio,
  intervalo de, R-7
Tiempo universal (UT1), 21
Tiempo Universal Coordinado (TUC), 21
Tierra,
  atracción por el Sol, 96
  campo gravitatorio, 100, 378
  densidad de, 424
  fuerza gravitatoria ejercida, 374
  mapa gravitatorio, 380–381
  velocidad de rotación, 4
Tolerancia, 25
Tomografía por emisión de positrones (PET), R-17
Tono, cualidad (o tiembre), 462, 551
Torr, 430
Torricelli, Evangelista, 430
Trabajo, 173–200
  conversión en calor, 630
  de un momento de fuerza, 307–308
  de un muelle que obedece la ley de Hooke, 180–182
  de una fuerza constante, 174–179
  definición, 174, 184
  del centro de masas, 190–192
    realizado por una fuerza, 190
  en un montaña rusa, 193
  incremental, 184
  perdido, 652
  por expansión de un gas, 602–606
  por una máquina térmica, 633
  potencia y, 186–188
  producto escalar, 182–188
  realizado por una fuerza variable, 179–182
  sobre sistemas, 175, 202, 209
  sobre una partícula, 202
  temperatura y, 598–600
  total, 175, 176–177, 209
  unidades en el SI, 174
Transferencia de calor, 630, 674–685
  cambios de entropía durante, 649–650
  conducción, 674, 675–682
  convección, 578, 675, 683, 686
  ley de Newton del enfriamiento y, 675
  radiación, 219, 228, 232n, 523, 531, 675, 683–685
Transferencia orbital de Hohmann, 390
Transmisión de ondas, 513–516
Trigonometría, y fórmulas geométricas, contracubierta trasera
Trineo de arrastre, 158
Tritón, 228, 229
Troposfera, 353
Tubo cónico, 549–550
Tubo de órgano, 548
Tubo de Pitot, 454
Túnel de viento, 448
Tungsteno (Wolframio),
  calor específico y molar, 593
  módulo de cizalladura, 411
  módulo de compresibilidad, 426
Turbinas eólicas, 233

Ultracentrifugadora, 316
Ultracentrifugadora analítica, 316
Ultrasonidos, 495, 518
Umbral antibloqueo, 138
Umbral de audición, 512
Umbral de bloqueo, 138
Unidad(es) en el SI,
  de aceleración, 35
  de aceleración angular, 291
  de corriente térmica, 675–676

Unidad(es) en el SI (*continuación*)
de energía, 593
de fuerza, 96
de impulso, 255
de intensidad, 510
de masa, 96
de momento lineal, 248
de potencia, 186
de presión, 426
de temperatura, 568
de trabajo, 174
de velocidad, 30
de velocidad angular, 290
de viscosidad, 446
factores de conversión, contracubierta delantera
para el coeficiente de dilatación lineal, 666
Unidad Astronómica (UA), 26, 364
Unidad de masa atómica (u), 96
Unidad fundamental del momento angular, 351
Unidades de medidas, 3–7
conversión de, 6–7
otros sistemas, 5–6
sistema internacional (SI), 3–5
Universo,
energía total del,
por órdenes de magnitud, 12
radiación de cuerpo negro de 2, 7-K
Uranio–236, 229
Urano, 394–395

Valores exactos, 9
Vapor, calor específico y calor específico molar de, 593
Vaporización, 674
calor latente de, 596
Variables,
de estado, 570
Variables de estado, 570
Vector(es), 14–21
aceleración, 37, 68–71
componentes tangencial y centrípeta de, 79
para el movimiento en dos y tres dimensiones, 68–71
aceleración instantánea, 68
aceleración media, 68
antiparalelos, 15
componentes de, 17–19
constante, 69
de viento, 353
definiciones básicas, 14–15
desplazamiento, 14–15, 64
para el movimiento en dos y tres dimensiones, 64
en navegadores GPS, 82
igualdad, 20
iguales, 15
multiplicado por un escalar, 17, 20
negativo de, 20
paralelos, 15
posición, 64
propiedad asociativa de la suma, 16
propiedades de, 20
suma y resta de, 15–17, 20
unitario, 20
velocidad, 14, 64–66
para el movimiento en dos y tres dimensiones, 64–66
velocidad instantánea, 64–65
velocidad media, 64
velocidad relativa, 67
segunda ley de la termodinámica y, 634–637
Vejiga natatoria, 456
Velocidad, 3, 27, 309
a partir de una aceleración dada, 47–48
aceleración y, 35–37
angular, 290–291, 309, 332
módulo, 290
como función del tiempo, 36–37
conservación del momento lineal, 249
cuadrática media, 576
de aproximación, 265
de escape, 374–375
de fase, 553
de grupo, 553
de sedimentación, 316
de separación, 265
definición, 30
del centro de masas, 154
del movimiento armónico simple, 459
dimensiones de, 30
en colisiones elásticas, 265
instantánea, 32–35
límite, 56, 140–141
más probable, 582
media, 29–32, 39–40, 50, 64
definición, 30
definición alternativa de, 50
interpretación geométrica, 30
método aproximado de Euler, 147–149
relativa, 66–67
representación esquemática, 635
tangencial, 292, 305
transversal, 504
unidades en el SI, 30
Ventaja mecánica, 197, 415
Venturímetro, 443
Vibración, modo de, 542
Vidrio,
calor específico y calor específico molar del, 593
coeficiente de dilatación térmica del, 666
conductividad térmica del, 676
densidad del, 424
Viscosidad, 440
de un fluido, 493
unidades en el SI, 446
Vogel, Steven, 659
Volt (V),
electronvolt (eV), 174–175, 177
Volumen, dimensiones del, 8

Watt, 186, 676
Watts por metro cuadrado (W/m^2), 510

Xenón,
capacidad calorífica molar de, 607

Zeromotor, 655

Constantes físicas*

Constante de masa atómica	$m_u = \frac{1}{12} m(^{12}C)$	$1\ u = 1{,}66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Número de Avogadro	N_A	$6{,}0221415(10) \times 10^{23}$ partículas/mol
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1{,}3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K $8{,}617343(15) \times 10^{-5}$ eV/K
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/(2m_e)$	$9{,}27400949(80) \times 10^{-24}$ J/T = $5{,}788381804(39) \times 10^{-5}$ eV/T
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8{,}987551788\ldots \times 10^{9}$ N·m²/C²
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = h/(m_e c)$	$2{,}426310238(16) \times 10^{-12}$ m
Carga fundamental	e	$1{,}60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante de los gases	R	8,314472(15) J/(mol·K) = 1,9872065(36) cal/(mol·K) = $8{,}205746(15) \times 10^{-2}$ atm · L/(mol·K)
Constante de la gravitación	G	$6{,}6742(10) \times 10^{-11}$ N·m²/kg²
Masa del electrón	m_e	$9{,}1093826(16) \times 10^{-31}$ kg = 0,510998918(44) MeV/c^2
Masa del protón	m_p	$1{,}67262171(29) \times 10^{-27}$ kg = 938,272029(80) MeV/c^2
Masa del neutrón	m_n	$1{,}67492728(29) \times 10^{-27}$ kg = 939,565360(81) MeV/c^2
Constante magnética (permeabilidad del espacio libre)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A²
Constante eléctrica (permitividad del espacio libre)	ϵ_0	$= 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854187817\ldots \times 10^{-12}$ C²/(N·m²)
Constante de Planck	h	$6{,}6260693(11) \times 10^{-34}$ J·s = $4{,}13566743(35) \times 10^{-15}$ eV·s
	$\hbar = h/(2\pi)$	$1{,}05457168(18) \times 10^{-34}$ J·s = $6{,}58211915(56) \times 10^{-16}$ eV·s
Velocidad de la luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}670400(40) \times 10^{-8}$ W/(m²·K⁴)

*Los valores de estas y otras constantes pueden obtenerse en el Apéndice B y en la dirección de Internet http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html. Los números entre paréntesis representan los errores en las dos últimas cifras. (Por ejemplo, 2,04443(13) significa 2,04443 ± 0,00013.) Los valores sin números entre paréntesis son exactos incluyendo aquellos con puntos suspensivos (como el valor de π que es exactamente 3,1415…).

Derivadas e integrales definidas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a} \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax \qquad \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{4}{a^2}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax} \qquad \int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{2}{a} \qquad \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

En las seis integrales la a es una constante positiva.

Productos vectoriales

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \qquad \vec{A}\times\vec{B} = AB\operatorname{sen}\theta\,\hat{n} \quad (\hat{n} \text{ obtenida usando la regla de la mano derecha})$$

PAUL A. TIPLER / GENE MOSCA

Física para la ciencia y la tecnología

6ª edición

Física para la Ciencia y la Tecnología, dada su impecable claridad y precisión, se ha constituido en una referencia obligada de los cursos universitarios de Física de casi todo el mundo. Para realizar esta 6ª edición, Paul A. Tipler y Gene Mosca hicieron una revisión exhaustiva y escrupulosa de todos los contenidos de la edición con el objeto de lograr un manual aún más didáctico y de incorporar los nuevos conceptos de la Física en que se sustentan los recientes avances de la tecnología.

Para facilitar la comprensión de los conceptos físicos descritos, esta edición incorpora una gran variedad de herramientas y recursos pedagógicos nuevos. Entre ellos cabe destacar la novedosa estrategia en la resolución de problemas; los temas de actualidad en física que ayudan a los estudiantes a relacionar lo que aprenden con las tecnologías del mundo real; la inclusión a lo largo de todo el texto de nuevos ejemplos conceptuales; y la mejora del apéndice de matemáticas, ahora mucho más completo e integrado con el texto.

Esta nueva edición incorpora una serie de materiales de apoyo, dirigidos tanto a los alumnos como a los profesores que basen sus cursos de física general en este manual.

EDITORIAL REVERTÉ

www.reverte.com